

Wayne State University
*College of Liberal Arts and
Sciences*
Department of Mathematics
1150 Faculty/Administration
Building Detroit, MI 48202-3622
USA



Professor Ualbai Umirbaev
Phone: +1 (313) 577-2479
Fax: +1 (313) 577-7596
E-mail: umirbaev@wayne.edu

ОТЗЫВ

оппонента на диссертацию Насыбуллова Тимура Ринатовича «Алгебраические системы, возникающие при решении уравнения Янга-Бакстера, их приложения и свойства», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Рассматриваемая диссертация посвящена исследованию алгебраических систем, которые возникают при решении уравнения Янга-Бакстера, а также изучению приложений этих алгебраических систем для решения важных проблем алгебры и топологии. По своему содержанию диссертация полностью относится к теории алгебраических систем, являющейся одним из значимых направлений современной алгебры. Таким образом, диссертация соответствует специальности 01.01.06, по которой она представляется к защите.

Пусть V – векторное пространство, а $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ – линейное преобразование тензорного квадрата $V \otimes V$. Преобразование R называется решением классического уравнения Янга-Бакстера, если выполнено следующее равенство линейных преобразований пространства $V \otimes V \otimes V$

$$(R \otimes 1)(1 \otimes R)(R \otimes 1) = (1 \otimes R)(R \otimes 1)(1 \otimes R).$$

Уравнение Янга-Бакстера получило свое имя от независимых работ Ч. Янга 1968 г. и Р. Бакстера 1971 г. по статистической механике. Систематическое исследование решений уравнения Янга-Бакстера привело к созданию В. Г. Дринфельдом в 1986 году революционного понятия квантовых групп.

В 1992 году В. Г. Дринфельд ввел также понятие теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера. Пусть X – произвольное множество, а $r: X^2 \rightarrow X^2$ – некоторое отображение. Говорят, что отображение r является решением теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера на X , если выполнено следующее равенство

$$(r \times 1)(1 \times r)(r \times 1) = (1 \times r)(r \times 1)(1 \times r).$$

Пусть r – решение теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера на X , и пусть V – векторное пространство над \mathbb{C} , с базисом X . Тогда отображение $r: X^2 \rightarrow X^2$ может быть по линейности продолжено до линейного преобразования $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$. Отображение $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ в этом случае будет решением уравнения Янга-Бакстера, т. е. решение теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера на множестве X ведет к решению уравнения Янга-Бакстера на V . Таким образом, уравнение Янга-Бакстера и теоретико-множественное уравнение Янга-Бакстера тесно связаны между собой. Как и классическое уравнение Янга-Бакстера, теоретико-множественное уравнение Янга-Бакстера также имеет многочисленные приложения в различных областях математики.

В. Г. Дринфельд сформулировал вопрос о классификации всех решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера. Обычно при изучении решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера, удовлетворяющих тому или иному специальному свойству, в качестве множества X берется не просто множество, а некоторая алгебраическая система.

На заре развития теории решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера для построения решений этого уравнения использовались классические алгебраические системы: группы, кольца, векторные пространства, модули. Позднее различными авторами был введен ряд специальных алгебраических систем, которые использовались для построения решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера и исследования приложений этого уравнения. В работах В. Г. Дринфельда для изучения решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера были введены такие алгебраические системы, как квазитреугольные (квазикокоммутативные) алгебры Хопфа и биалгебры Ли. В. Румп для изучения решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера ввел такую алгебраическую систему как брэйс, после чего Л. Гуарниери и Л. Вендрами ввели косые брэйсы, которые обобщают брэйсы. Мотивируясь теорией узлов, Д. Джойс и С. В. Матвеев ввели такую алгебраическую систему как квандл, а Р. Фенин, М. Джордан-Сантана и Л. Кауффман ввели такую алгебраическую систему как биквандл. Эти алгебраические системы также могут быть использованы для построения решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера.

В диссертации Т. Р. Насыбуллова исследуются свойства различных алгебраических систем, на которых строятся решения теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера. Также изучаются приложения этих алгебраических систем и решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера на этих алгебраических системах в различных областях алгебры и топологии. Более точно, в диссертации обсуждаются следующие направления.

1. Построение представлений групп кос и групп виртуальных кос.

2. Постоение инвариантов узлов, виртуальных узлов, узлов с двойными спайками, узлов в линзовых пространствах.

3. Исследование связей между аддитивными и мультипликативными группами косых брэйсов.

4. Исследование классов скрученной сопряженности в линейных группах.

Основные результаты, полученные по приведенным выше направлениям, завязаны в диссертации между собой. Перейдем к детальному описанию полученных результатов.

Во второй и третьих главах диссертации введено понятие мульти-переключателя, которое обобщает понятие переключателя. Разработан метод мульти-переключателей, позволяющий по специальным решениям теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера на алгебраических системах строить представления групп кос B_n , а также групп виртуальных кос VB_n автоморфизмами этих алгебраических систем. С помощью этого метода построены новые представления групп B_n и VB_n автоморфизмами, а также установлено, что все известные на данный момент представления этих групп могут быть построены с помощью данного метода.

В последние десятилетия были введены новые обобщения и упрощения классических и виртуальных узлов: сингулярные узлы, узлы со спайками, узлы с двойными спайками, и т. д. Проблема эквивалентности узлов является одной из центральных проблем во всех этих теориях. В четвертой главе диссертации построен полный, быстро вычислимый инвариант узлов с двойными спайками со значениями в свободной абелевой группе бесконечного ранга. Конструкция построенного инварианта обобщает, полученные ранее, результаты Т. Каненобу, А. Фиш и Е. Кейман.

Одним из наиболее содержательных направлений в теории узлов в трехмерных многообразиях является теория узлов в линзовых пространствах. В пятой главе диссертации построен виртуальный квадл для зацеплений в линзовых пространствах. Порождающие и определяющие соотношения этого квадла могут быть найдены из диаграммы зацепления в $L(p, q)$. Более того, этот виртуальный квадл может отличать зацепления с эквивалентными поднятиями.

В шестой главе диссертации изучаются следующие вопросы, сформулированные Л. Вендрамином, А. Смоктунович и В. Лебедь в Коуровской тетради (вопросы 19.49, 19.90):

1. Пусть A – косой брэйс с левоупорядоченной мультипликативной группой.

Верно ли, что аддитивная группа косого брэйса A левоупорядочивается?

2. Пусть A – косой брэйс с разрешимой аддитивной группой. Верно ли, что мультипликативная группа косого брэйса A разрешима?

3. Пусть A – косой брэйс с нильпотентной мультиликативной группой. Верно ли, что аддитивная группа косого брэйса A разрешима?

В частности, построены примеры, дающие отрицательные ответы на первый и второй вопросы. Также установлено, что если A – такой двусторонний косой брэйс, что его мультиликативная группа нильпотентна ступени k , то его аддитивная группа разрешима ступени не выше $2k$.

Седьмая и восьмая главы диссертации посвящены классам скрученной сопряженности и свойству R_∞ в группах. В диссертации свойство R_∞ изучается для редуктивных линейных алгебраических групп, а также для групп Шевалле над алгебраически замкнутыми полями нулевой характеристики, степень трансцендентности которых над \mathbb{Q} бесконечна. Доказано, что если G – группа Шевалле одного из типов A_n , B_n , C_n , D_n над алгебраически замкнутым полем F нулевой характеристики, то G обладает свойством R_∞ тогда и только тогда, когда степень трансцендентности F над \mathbb{Q} конечна.

Таким образом, в диссертации Т. Р. Насыбуллова проведено глубокое исследование алгебраических систем, возникающих при решении уравнения Янга-Бакстера, и их приложений не только в алгебре, но и в топологии. Диссертанту удалось разработать новые методы, а также получить исчерпывающие ответы или существенно продвинуться на пути к решению известных проблем. К безусловно сильным сторонам диссертации как научного исследования относится выбор направлений для приложений развивающейся в диссертации теории.

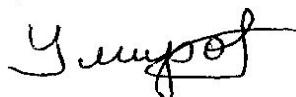
Результаты диссертации являются новыми, нетривиальными и представляют несомненный научный интерес. Доказательства полученных в диссертации результатов изложены подробно и гарантируют истинность соответствующих утверждений. Результаты диссертации опубликованы в 12 статьях, и прошли апробацию на международных конференциях. Часть результатов получена автором самостоятельно, а часть – в неразделимом соавторстве.

Стиль изложения ясный, аккуратный. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Диссертационная работа представляет собой завершенное научное исследование, вносящее существенный вклад в развитие классического научного направления – применение алгебраических систем для изучения геометрических и топологических объектов. Полученные результаты и методы могут найти применение в дальнейших исследованиях по теории групп, алгебраической топологии и теории неподвижных точек Нильсена-Райдемайстера.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация Т. Р. Насыбуллова «Алгебраические системы, возникающие при решении уравнения Янга-Бакстера, их приложения и свойства» удовлетворяет всем требованиям ВАК РФ, предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

Представленная диссертация Насыбуллова Т.Р. полностью соответствует требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям в пп. 9, 10, 11, 13, 14 Положения о порядке присуждения ученых степеней, утвержденного правительством РФ (постановление №842 от 24.09.2013), а ее автор Тимур Ринатович Насыбуллов заслуживает присуждения ему степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Профессор Факультета математики Университета штата Уэйн
доктор физико-математических наук (по специальности 01.01.06),
профессор, академик НАН РК
Умирбаев Уалбай Утмаханбетович



05.04.2022

Почтовый адрес: 48202, США, Мичиган, Детройт, 1150 Административное здание
факультета (FAB), 656 W. KirbySt, Телефон: +1 (313) 577-2479, Факс: +1 (313) 577-7596,
E-mail: umirbaev@wayne.edu