ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Сорокиной Марины Михайловны «Формации конечных групп и их применения», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертационная работа Марины Михайловны Сорокиной является научным исследованием по теории классов конечных групп и, более узко, по теории формаций. Формации были введены в рассмотрение Вольфгангом Гашюцем в 1963 году как классы групп, замкнутые относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Многие важные классы конечных групп (скажем, классы всех конечных разрешимых, сверхразрешимых, нильпотентных, абелевых групп, π-групп) являются формациями. Язык теории формаций позволил не только выделить наиболее существенные похожие свойства у перечисленных классов, открыв дорогу различным обобщениям, но и позволил обнаружить новые, неизвестные ранее, факты о группах и их подгруппах.

Так Гашюцем в 1963 году были определены $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы и $\mathfrak{F}$-проекторы в конечной группе. Им в случае, когда $\mathfrak{F}$ — произвольная локальная формация, доказаны существование и сопряженность таких подгрупп в конечных разрешимых группах. Если рассмотреть в качестве $\mathfrak{F}$ формации π-групп и нильпотентных групп, из результата Гашюца мгновенно вытекают классические результаты о существовании и сопряженности π-холловых и картеровых подгрупп в разрешимых группах. Другим следствием, неизвестным до работы Гашюца, оказывается существование и сопряженность в разрешимых группах т.н. гашюцевых подгрупп (т.е. сверхразрешимых проекторов или, эквивалентно, сверхразрешимых подгрупп, с тем свойством, что индекс любой содержащей их подгруппы в бо́льшей подгруппе будет составным).

Многочисленные результаты о формациях конечных групп получены Р.Картером, Т.Хоуксом, К.Дёрком, Л.А.Шеметковым, А.Н.Скибой, В.А.Ведерниковым, В.С.Монаховым, В.Го, А.Ф.Васильевым, С.Ф.Каморниковым, В.Н.Семенчуком, М.В.Селькиным, В.Г.Сафоновым и многими другими. Значительный вклад в развитие теории формаций сделан гомельской школой под руководством Л.А.Шеметкова.

Центральное место в теории формаций занимают локальные (В.Гашюц, 1963) и композиционные (Л.А.Шеметков 1974, Р.Бэр) формации, в основе построения которых лежат функциональные методы. Эти два вида формаций нашли широкое применение в теории конечных групп. Естественным обобщением данных видов формаций являются ω-локальные (Л.А. Шеметков, 1984) и Ω-композиционные (Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба, 1999) формации.

В.А. Ведерников предложил новый, также основанный на использовании функциональных методов, подход к построению формаций на основе уже имеющихся, определив ω-веерные и Ω-расслоенные формации. Их частными случаями оказываются ω-локальные и Ω-композиционные формации соответственно.

В диссертации разрабатывается теория ω-веерных и Ω-расслоенных формаций (основные положения, понятия, центральные результаты). С помощью построенной теории ω-веерных формаций установлены новые свойства ω-локальных формаций, позволившие диссертантке получить ряд новых результатов, связанных с изучением подгруппового строения конечных групп. Получены значительные продвижения в исследовании известных вопросов.

Диссертационная работа объёмом 229 страниц состоит из введения, четырех глав, заключения, перечня условных обозначений и определений и списка литературы (132 наименования). Во введении обосновывается актуальность проведенных исследований, излагается краткое содержание работы, формулируются основные результаты.

В первой части главы 1 (§ 1.1) разрабатываются основные положения теории ω-веерных формаций конечных групп. Применение эти результаты находят во второй части (§§ 1.2 — 1.4), где с помощью ω-веерных формаций изучаются вопросы дополняемости корадикалов в группах.

Эти вопросы имеют богатую историю. В 1952 году Гашюц доказал следующую теорему. *Нормальная абелева подгруппа N конечной группы G дополняема в G тогда и только тогда, когда для любого простого числа p и любой силовской p-подгруппы P группы G пересечение $N \cap P$ дополняемо в P.* На XIII Международном математическом конгрессе в Эдинбурге (1958 г.) Х.Виланд выделил следующую проблему (проблема А): *ослабить условие абелевости нормальной подгруппы в теореме Гашюца.* Важный шаг в решении проблемы А сделал Л.А.Шеметков, доказавший в 1974 году для локальной формации $\mathfrak{F}$ теорему о дополняемости в конечной группе G ее $\mathfrak{F}$-корадикала в случае, когда силовские подгруппы этого корадикала абелевы. Теорема 1.4.2 диссертации и ее следствия существенным образом усиливают результат Шеметкова и являются значительным продвижением в изучении проблемы А. В частности, они позволяют отказаться от условия абелевости силовских подгрупп $\mathfrak{F}$-корадикала для локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$. Данная теорема демонстрирует эффективность разработанной в диссертации теории ω-веерных формаций.

Глава 2 посвящена применению ω-веерных формаций к изучению обобщений классических $\mathfrak{F}$-подгрупп в группах — $\mathfrak{F}$-проекторов и $\mathfrak{F}$-нормализаторов. В 1992 году К.Дёрк и Т.Хоукс поставили следующую общую проблему (проблема В). *Может ли универсум, для которого работает теория проекторов, расширен за пределы класса конечных разрешимых групп?* В первой части главы 2 (§§ 2.1 — 2.3) построена теория $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторов, где $\mathfrak{F}$ — произвольный непустой ω-примитивно замкнутый гомоморф, содержащий неразрешимые группы, и, в частности, ω-локальная формация, содержащая неразрешимые группы.

В 1967 году для локальной формации $\mathfrak{F}$ Р.Картер и Т.Хоукс определили $\mathfrak{F}$-нормализаторы, обобщив введенное Ф.Холлом понятие системного нормализатора в конечной разрешимой группе. Понятие $\mathfrak{F}$-нормализатора тесно связано с понятием $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы. В этой связи при изучении проблемы В с помощью ω-локальных формаций актуальность приобрела проблема Е: *разработать теорию $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторов, где $\mathfrak{F}$ — произвольная ω-локальная формация.*

Во второй части главы 2 (§§ 2.4 — 2.6) данная задача решена. Кроме того, в теореме 2.5.5 для ω-локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ установлены достаточные условия дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала группы G ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторами, тем самым получено решение проблемы А Виланда для случая ω-локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$.

В главе 3 ω-веерные формации применяются к изучению подформационного строения формаций конечных групп. В частности, к исследованию $\mathfrak{H}_{\theta}$-критических формаций, т.е. формаций, принадлежащих некоторой совокупности формаций θ и не содержащихся в классе $\mathfrak{H}$, в то время как все их собственные подформации, принадлежащие θ, в классе $\mathfrak{H}$ содержатся. В 1978 году на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп в Свердловске Л.А. Шеметков поставил следующую общую проблему (проблема С). *Изучить $\mathfrak{H}_{\theta}$-критические формации, где $\mathfrak{H}$ — класс групп, θ — некоторая совокупность формаций.* В главе 3 данная проблема решена для n-кратно ω-веерных (§ 3.1, § 3.2) и τ-замкнутых ω-веерных формаций (§ 3.3, § 3.4).

В главе 4 диссертации разработаны основные положения теории Ω-расслоенных формаций конечных групп (§ 4.1) и изучено их применение к исследованию подформационного строения формаций (§§ 4.2 – 4.4). В § 4.4 получено решение проблемы С Шеметкова для τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций.

Таким образом, в диссертации М.М.Сорокиной разработана теория ω-веерных и Ω-расслоенных формаций, включающая в себя классическую теорию ω-насыщенных и Ω-композиционных формаций. Диссертантке удалось развить новую теорию, получить обобщения ряда классических результатов и достичь значительного прогресса в изучении известных проблем. К безусловно сильным сторонам диссертации как научного исследования относится выбор направлений для приложения развиваемой в ней теории. Это проблемы, имеющие богатую историю и восходящие к классикам: Гашюцу, Виланду, Шеметкову, Дёрку, Хоуксу и др.

Результаты диссертации являются новыми, снабжены подробными доказательствами, опирающимися на известные результаты теории конечных групп и теории классов конечных групп. В доказательствах используются традиционные методы теории конечных групп, теории классов, теории подгрупповых функторов и ряд оригинальных методов.

Все основные результаты диссертации, вынесенные на защиту, получены автором лично или в неразделимом соавторстве с научным консультантом профессором В.А.Ведерниковым. Основные результаты опубликованы в 16 статьях из Перечня ВАК и прошли апробацию на международных конференциях и семинарах. Автореферат полно и точно отражает содержание диссертационной работы.

Оценивая диссертацию как текст, нельзя не отметить такие её достоинства, как заботу о читателе, хорошую структурированность, продуманность изложения. Хочу выразить отдельную признательность Марине Михайловне за перечень определений и используемых обозначений, которые существенно облегчили мою работу.

Вместе с тем диссертация несвободна от некоторых недостатков.

Говоря о содержательной стороне диссертации, хочется отметить, что нетривиальность полученных результатов было бы неплохо проиллюстрировать содержательными примерами. Скажем, можно было бы сопроводить теорему 1.4.2 или хотя бы одно из ее многочисленных следствий примером, показывающим, что достигнут прогресс в сравнении с результатом Л.А.Шеметкова, т.е. примером группы, удовлетворяющей условию соответствующего утверждения, с $\mathfrak{F}$-корадикалом для подходящей формации $\mathfrak{F}$, обладающим хотя бы одной неабелевой силовской подгруппой.

Рассказывая об истории результатов Гашюца и Шеметкова на стр. 4–5, диссертантка не упоминает о теореме Шура–Цассенхауза.

Удивляет несколько странный подход к указанию инициалов авторов, упоминаемых в диссертации. Составитель отзыва затрудняется выделить общий принцип, которым руководствовалась диссертантка в этом вопросе. Как правило, в тексте диссертации советские авторы и авторы из стран бывшего СССР указываются с двумя инициалами. Но бывают и исключения (напр. на стр. 107 и 180). Иностранные же авторы, как правило, указываются без инициалов. Например, подряд можно видеть ссылки на Шмида и Э.Ф.Шмигирёва. Но и в отношении иностранных авторов появляются исключения. Например, на стр. 6 Ф.Холл упоминается с инициалом, в то время как на предшествующей странице его фамилия указана без инициала.

Отмечу довольно непоследовательный подход к написанию иностранных фамилий: если автор пишет «Гашюц», а не «Гашютц», руководствуясь принципом «как произносится», то следовало бы писать «Виланд», а не «Виландт».

Склонение фамилии «Гашюц» не соответствует правилам русского языка. Например, форма творительного падежа должна быть «Гашюцем», а не «Гашюцом».

Склонение фамилии «Любезедер» также не соответствует правилам русского языка. Поскольку это женская фамилия, она не должна склоняться.

На стр. 7 должно быть «абелеву» вместо «абелевому».

На 13 опечатка в слове «специальный».

Автор нигде не определяет произведение классов, обозначаемое точкой, хотя это обозначение присутствует на стр. 13.

В формулировках теоремы 1.4.2 и ее следствий на стр. 15–16, 78–79 диссертации и стр. 11 автореферата либо слово «группа» лишнее, либо вместо следующей за ним формулы должно стоять развернутое пояснение (скажем такое «G является произведением попарно перестановочных субнормальных подгрупп $A_1, \dots, A_n$»).

На стр. 170 не пропечатан номер определения.

На стр. 207 должно быть «гашюцево» вместо «гашюцово».

В заключении диссертации не отражены перспективы дальнейшего развития полученных результатов, хотя наличие в «Коуровской тетради» ряда проблем говорит о том, что это направление имеет такие перспективы.

Указанные недостатки не влияют на содержание диссертационной работы, которая представляет собой завершенное научное исследование, вносящее существенный вклад в развитие теории классов конечных групп. Результаты диссертации могут быть использованы при изучении конечных групп и их классов в госуниверситетах и научных учреждениях Москвы, Санкт-Петербурга, Новосибирска, Екатеринбурга, Красноярска, Ярославля, Гомеля и др.

Таким образом, диссертация Сорокиной Марины Михайловны «Формации конечных групп и их применения» соответствует пп. 9–11 «Положения о порядке присуждения ученых степеней» (постановление Правительства РФ №842 от 24 сентября 2013 г.), удовлетворяет всем требованиям ВАК Минобрнауки, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел, а сама Марина Михайловна заслуживает присуждения ей этой степени.

ФГБУН «Институт математики имени С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук»,
лаборатория теории групп,
ведущий научный сотрудник, доцент,
доктор физико-математических наук Ревин Данила Олегович
08. 02. 2018

Почтовый адрес: 630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4.
Телефон: 3297618, e-mail: revin@math.nsc.ru

Подпись Ревина Д.О. удостоверяю
Учёный секретерь ИМ СО РАН
кандидат физико-математических наук Светов Иван Евгеньевич