ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Богданова Дмитрия Валериевича
«Нули гипергеометрических полиномов
многих комплексных переменных»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Актуальность темы исследования. Диссертация Д. В. Богданова посвящена развитию аналитических и вычислительных подходов для изучения нулей специального класса полиномов, называемых гипергеометрическими. Рассматриваемые в диссертации полиномы являются частными случаями рядов Горна многих переменных. Необходимо отметить, что такие ряды и связанные с ними системы уравнений с частными производными были предметом исследования и продолжают привлекать внимание известных специалистов в России и за рубежом. Широкий интерес к данной тематике связан не только с фундаментальным теоретическим значением функций Горна, но и с многочисленными приложениями, где они естественным образом возникают.

В рассматриваемой работе среди полиномиальных решений систем Горна выделяется важный случай полиномов, которые автор называет гипергеометрическими. Коэффициенты этих полиномов выписаны явно через вид заданного выпуклого многогранника P. В работе, в частности, показано, что среди всех полиномов, многогранник Ньютона которых совпадает с P, гипергеометрические полиномы таковы, что их множество нулей обладает некоторым экстремальным свойством.

Для изучения гипергеометрических полиномов автор привлекает методы многомерного комплексного анализа, в частности теорию амеб алгебраических поверхностей, а также методы тропической геометрии. Отметим, что понятие амёб введено в известной монографии И. М. Гельфанда, М. М. Капранова и А. В. Зелевинского (1994 г.) и позволяет получать весьма плодотворные результаты, а о важности развития методов тропической геометрии, см. например, обзор Б. Я. Казарновского, А. Г. Хованского, А. И. Эстерова, опубликованный в журнале «Успехи математических наук», 2021 г., том 76, № 1(457). Поэтому диссертационная работа может рассматриваться не только как вклад в теорию гипергеометрических функций многих переменных и соответствующих систем уравнений с частными производными, но и как интересные приложения теории амеб и тропической геометрии.

Таким образом, актуальность рассматриваемых в диссертации вопросов не вызывает сомнений.

Научные результаты и их обоснованность. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка литературы и приложений А, Б и В. Во введении достаточно подробно отражена актуальность темы диссертации, даны необходимые определения, сформулированы доказанные в работе утверждения.

Основными результатами главы 1 являются теоремы 1.14, 1.18 и 1.23. В первой из этих теорем для заданного полинома $p(x), x = (x_1, \dots, x_n)$, доказывается существование гипергеометрической системы Горна, одним из решений которой является $p(x)$.

В теореме 1.18 устанавливается существование гипергеометрической системы Горна, имеющей полиномиальное решение с неприводимым носителем, таким, что его многогранник Ньютона равен заданному выпуклому целочисленному многограннику $P \subset R^n$, для которого пересечение $P \cap Z^n$ является Z^n-связным. Эта же теорема дает явную конструкцию для коэффициентов такого полинома через конечное произведение гамма-функций с аргументами, выраженными через уравнение границы P. Именно такие полиномы автор в дальнейшем называет гипергеометрическими, см. определение 1.20 и формулу (1.10).

В теореме 1.23 устанавливаются достаточные свойства оптимальности множества нулей гипергеометрического полинома. Под оптимальностью понимается экстремальный случай, при котором число связных компонент дополнения амебы полинома равно числу целых точек его многогранника Ньютона (т.е. такое дополнение содержит максимально возможное число связных компонент). Указанное в теореме достаточное условие формулируется в терминах тропического полинома $p_{trop}(\zeta)$, непосредственно связанного с гипергеометрическим полиномом $p(x)$.

Для теорем 1.14, 1.18 и 1.23 в главе 1 диссертации представлены доказательства.

Результатами главы 2 и приложений А-В являются алгоритмы для вычисления и визуализации полиномиальных амеб и компактифицированных амеб и сечений амеб полиномов трех переменных двумерными плоскостями, а также соответствующий иллюстрационный материал. Кроме того, представлен алгоритм вычисления полиномов, амебы которых обладают наиболее сложной топологией среди всех полиномов с фиксированным многогранником Ньютона.

Достоверность полученных результатов. Научные результаты, представленные в диссертации, соответствуют паспорту специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ и являются вкладом в развитие теории гипергеометрических функций многих комплексных переменных.

Достоверность полученных в диссертации результатов подтверждается тем, что основные утверждения приведены с математическими доказательствами и достаточно подробными выкладками. Кроме того, основные результаты диссертации, сформулированные в виде теорем, подтверждены большим количеством иллюстраций и примеров, что является несомненным достоинством работы.

Материал диссертации получил апробацию на научных семинарах и конференциях. Основные результаты диссертации отражены в двух статьях, опубликованных в «Mathematische Zeitschrift» и в «Lecture Notes in Computer Science». Автореферат достаточно полно и адекватно отражает содержание диссертации.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми, своевременно опубликованы в ведущих математических журналах.

Практическая и теоретическая значимость научных результатов. Основные результаты носят теоретический характер и дают вклад в развитие теории полиномиальных решений гипергеометрических систем Горна. Сформулированные в диссертации вычислительные алгоритмы полезны для вычисления нулей гипергеометрических полиномов и соответствующих амеб. Материал диссертации может быть частично использован для чтения специальных курсов для студентов и аспирантов математических специальностей.

Замечания по диссертации и автореферату. Приведем ряд замечаний к тексту диссертации.

1. Утверждение о решении уравнения Гаусса в последнем абзаце на стр. 10 некорректно. Действительно, второе из канонических решений Куммера $u_2 \coloneqq x^{1-c}F(1+b-c, 1+a-c; 2-c; x)$ в окрестности точки $x = 0$ определено не только при целых неположительных c, как можно понять из последнего предложения на стр. 10. Кроме того, при целых неположительных c точка $x = 0$, очевидно, не является особой для функции u_2, вопреки сказанному в диссертации.

2. Условие сходимости интеграла Эйлера для функции Гаусса на стр. 11 приведено неверно.

3. Стр. 13, свойство 2: непонятно, какие соотношения имеет в виду автор, когда говорит, что «коэффициенты полиномов удовлетворяют рекуррентным соотношениям с полиномиальными коэффициентами». Следовало уточнить, по каким переменным коэффициенты рекуррентных соотношений являются полиномиальными. Сами полиномы, действительно, удовлетворяют некоторым рекуррентным соотношениям с полиномиальными коэффици-

ентами. Желательно было привести пример соотношений, о которых говорится в свойстве 2, или дать ссылки на известные источники.

4. Стр. 26, абзац, который начинается с 3-й строки сверху. Необходимо было бы пояснить, что автор называет «щупальцами» амебы. Определение такого объекта в работе не приведено. Кроме того, непонятно, откуда следует утверждение о том, что «... В двумерном случае амеба является сплошной, если и только если все связные компоненты ее дополнения являются неограниченными и её «щупальца» непараллельны. Оптимальная амёба имеет, наоборот, максимально возможное число ограниченных связных компонент в своём дополнении и максимальное число параллельных «щупалец»». Что называется «параллельными щупальцами» тоже неясно. Если это утверждение известное, то необходимо было привести ссылки на литературу.

5. Стр. 29, доказательство теоремы 1.14. Для доказательства существования гипергеометрической системы, которой удовлетворяет полином $p(x)$, автор выписывает явный вид (1.6) коэффициента Оре – Сато $\varphi(s)$, однозначно определяющего такую систему. Однако в формуле (1.6) для $\varphi(s)$, по-видимому, пропущен символ Γ, обозначающий гамма-функцию. Сама же система Горна, существование которой доказывается, далее в тексте не приведена, а дано только следствие из нее, см. формулу без номера на стр. 29. Таким образом, формально говоря, не выписана ни сама система, ни коэффициент $\varphi(s)$. Отметим также, что такие термины как «гипергеометрический идеал», которые не являются общеупотребительными, желательно было бы предварительно определять.

6. Стр. 30, последний абзац доказательства теоремы 1.14. Неясно, о каких операторах идет речь в предложении «Согласно лемме 2.5 в [62], операторы коммутируют ...». Формально говоря, «базис, состоящий из коммутативного семейства дифференциальных операторов», о котором идет речь в формулировке теоремы, в работе не выписан (хотя, используя общую теорию систем Горна, это, конечно, можно сделать).

7. Стр. 32, предложение после леммы 1.17. Утверждение о том, что «носитель любого выпуклого целочисленного многогранника является неприводимым решением подходящего частного случая гипергеометрической системы (1.3)» сформулировано некорректно.

8. Стр. 32, доказательство теоремы 1.18. В начале доказательства необходимо было отметить, что q – число граней многогранника P, а c_j – целые числа.

9. Стр. 33, доказательство теоремы 1.18. После формулы (1.9) желательно было привести подробное объяснение, почему функция $\psi_P(s)$ равна нулю в точках Z^n, не принадлежащих P. Кроме того, утверждение о том, что

носитель полинома $p(x)$ является неприводимым, очень важно в теореме 1.18. Необходимо было привести развернутое доказательство этого факта.

10. Стр. 34, замечание 1.19. Смысл утверждения непонятен. Повидимому, автор имел в виду, что если дать определение гипергеометрического полинома, отличное от приведенного в диссертации определения 1.20, то не будут выполняться некоторые экстремальные свойства, которые имеют место для полинома, заданного согласно формуле (1.10).

11. Стр. 51, следствие 1.31 (их теоремы 1.23). Для доказательства следствия автор предполагает установить, что полиномиальные случаи функции Аппеля F_1 при выполнении условий $a, b_1, b_2, -c < 0$ и $a > b_1 + b_2$ совпадают, возможно, с точностью до некоторого множителя, с гипергеометрическими полиномами, построенными по соответствующему многограннику Ньютона согласно формуле (1.10). Здесь по умолчанию предполагается, что параметры функции Аппеля целочисленные.

Доказательство следствия 1.31, очевидно, некорректное. Дело в том, что многоугольник Ньютона, соответствующий полиномиальному случаю функции Аппеля F_1, даже при указанных ограничениях на параметры, вообще говоря, содержит меньшее число сторон, чем число Г-сомножителей в коэффициенте функции Аппеля F_1. Таким образом, полиномиальные случаи функции F_1 не являются гипергеометрическими полиномами в смысле определения 1.20. Поэтому на основании теоремы 1.23 нельзя утверждать, что полиномиальные случаи F_1 являются оптимальными, поскольку эта теорема рассматривает только случай полиномов, которые являются гипергеометрическими в смысле определения 1.20. Отметим также, что вопрос о том, как приведенные ограничения на параметры функции F_1 связаны с достаточными условиями оптимальности гипергеометрического полинома, сформулированными в теореме 1.23, в работе не рассматривается.

Указанные замечания к доказательству следствия 1.31 подтверждаются приведенным в диссертации после этого следствия примером полинома $p_{App}(x,y) := F_1(-5;\ -4,-4;\ 3; x, y)$. Продемонстрируем, что $p_{App}(x,y)$ не является гипергеометрическим полином в смысле определения 1.20. Действительно, справедливо равенство:

$$F_1(-5;\ -4,-4;\ 3; x,y) = \sum_{k+m=0,k,m<5}^{5} \frac{(-5)_{k+m}(-4)_k(-4)_m}{(3)_k k!\, m!}\ x^k y^m\ , \qquad (*)$$

где символ Похгаммера $(a)_n := \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$, а гипергеометрический полином, построенный согласно формуле (1.10) определения 1.20 по многоугольнику Ньютона, изображенному на рис. 1.6(а), имеет вид:

$$p(x,y) = \sum_{k+m=0,k,m<5}^{5} \frac{x^k y^m}{\Gamma(1-k-m+5)\,\Gamma(1-k+4)\Gamma(1-m+4)k!\,m!}. \quad (**)$$

Очевидно, что полином (*) нельзя преобразовать к виду (**) (даже после умножения на некоторую постоянную величину). Полином (*) в тексте работы приведен в качестве примера оптимального полинома для иллюстрации следствия 1.31. Однако утверждать на основании 1.31, что полином $p_{App}(x,y)$ является оптимальным, нельзя по указанным выше причинам.

Приведенные замечания не влияют на справедливость основных утверждений и результатов диссертации. Перечисленные недостатки могли быть устранены путем редактирования текста работы.

Соответствие содержания диссертации в рамках требований Правил присуждения учёных степеней. Считаю, что диссертационная работа Богданова Дмитрия Валериевича «Нули гипергеометрических полиномов многих комплексных переменных» соответствует требованиям п. 9 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 года № 842, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
ведущий научный сотрудник отдела 21
Федерального государственного учреждения
«Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление»
Российской Академии наук

Безродных Сергей Игоревич

119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44,
ФГУ «Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление»
Российской Академии наук»
тел.: +7-495-930-12-78
e-mail: sbezrodnykh@mail.ru

Подпись С.И. Безродных заверяю
Ученый секретарь ФИЦ ИУ РАН
18 . 08 . 2022 г.