ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Ольги Вадимовны Кравцовой
«ВОПРОСЫ СТРОЕНИЯ КОНЕЧНЫХ КВАЗИПОЛЕЙ И ГРУПП КОЛЛИНЕАЦИЙ ПОЛУПОЛЕВЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ»,
представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Настоящая диссертация посвящена изучению вопросов строения групп коллинеаций конечных недезарговых проективных плоскостей и их координатизирующих алгебраических систем.

Хорошо известно, что группы коллинеаций дезарговой проективной плоскости неразрешима. В 1959 г. Д. Хьюз выдвинул гипотезу о разрешимости группы коллинеаций конечной недезарговой полуполевой плоскости. Н. Д. Подуфалов записал вопрос о разрешимости группы коллинеаций полуполевой плоскости в Коуровскую тетрадь (см. вопрос 11.76). Напомним, что плоскость трансляций является полуполевой, если дуальная к ней также является плоскостью трансляций.

Квазиполе с ассоциативным умножением есть почти-поле. В отличие от конечных почти-полей, полностью классифицированных Х. Цассенхаузом в 1936 г., ни полуполя, ни тем более квазиполя не получили к настоящему времени исчерпывающей классификации.

В различных ситуациях вопросы строения конечных квазиполей изучались уже давно. Прежде всего, это вопросы:

(A) Перечислить максимальные подполя квазиполя Q, найти их число и возможные порядки.

(A1) Существует ли такое натуральное число N, что количество максимальных подполей в произвольном конечном почти-поле меньше, чем N?

Г. Венэ (1991) выдвинул гипотезу о том, что всякое конечное полуполе является левопримитивным либо правопримитивным, т. е. его мультипликативная лупа исчерпывается лево- либо, соответственно, правоупорядоченными степенями одного элемента.

Предположение Г. Венэ опровергнуто в 2004 г. И. Руа, представившим контрпример порядка 32.

Обобщением гипотезы Венэ являются следующие вопрос и гипотеза.

(B) Выявить конечные квазиполя Q с неоднопорожденной лупой Q^*.

Гипотеза Лупа Q^* всякого конечного полуполя Q однопорождена.

(C) Выявить, какие возможны спектры лупы Q^* конечного полуполя и квазиполя Q.

Безусловный интерес вызывает строение группы автоморфизмов и вопрос

(D) Найти порядок группы автоморфизмов конечного квазиполя.

Вопросы **(A)**, **(B)**, **(C)** сформулировал В. М. Левчук в 2013 г. Вопрос **(A1)** В. М. Левчук поставил в 2019 г.

Целью диссертационного исследования является получение значимых результатов о строении групп коллинеаций конечных недезарговых полуполевых проективных плоскостей, обеспечивающих продвижение в решении проблемы Хьюза, а также решение вопросов **(A)–(D)** для широкого класса конечных квазиполей, координатизирующих конечные проективные плоскости трансляций.

Перейдем к детальному описанию полученных результатов.

Глава 2 содержит предварительное обсуждение предлагаемой программы решения проблемы Хьюза и описание применяемого метода. В предположении неразрешимости группы коллинеаций недезарговой полуполевой плоскости конечного порядка композиционные факторы должны быть изоморфны известным простым неабелевым группам. Представленная программа исследований заключается в исключении из списка возможных подгрупп группы автотопизмов бесконечных серий простых групп, при особом внимании к минимальным простым группам из списка Д. Г. Томпсона.

Основным результатом **главы 3** является доказательство для любой недезарговой полуполевой плоскости нечетного порядка отсутствия в группе коллинеаций подгруппы, изоморфной A_5, и при условии на характеристику основного поля – изоморфной D_8.

В теореме 3.5.2 установлено, что если π – недезаргова полуполевая плоскость нечетного порядка p^N ($p > 2$ – простое), то ее группа автотопизмов не может содержать подгруппу, изоморфную знакопеременной группе A_5. Из этой теоремы следует, что группа автотопизмов недезарговой полуполевой плоскости произвольного нечетного порядка не может содержать также знакопеременные и симметрические группы A_n и S_n для всех $n \geq 5$, а также и некоторые другие неабелевы группы.

В **главе 4** рассматриваются примеры полуполевых плоскостей, иллюстрирующие теоретические результаты главы 3.

В § 4.1 перечислены минимальные примеры полуполевых плоскостей ранга 2 над ядром, допускающие S_3 в группе автотопизмов (примеры к теоремам 3.8.1 и 3.8.4). Приложениями к теореме 3.7.1 являются примеры полуполевых плоскостей порядков 5^4 и 13^4, допускающих подгруппу автотопизмов, изоморфную группе кватернионов Q_8.

В § 4.2 обсуждаются возможности использования методов компьютерной алгебры для доказательства изоморфизма двух полуполевых плоскостей.

§ 4.3 посвящен построению примеров полуполевых плоскостей порядка 81, допускающих бэровскую инволюцию. Основной результат (теорема 4.3.1) показывает, что все построенные примеры являются 3-примитивными плоскостями и имеют разрешимую группу коллинеаций.

Глава 5 посвящена решению вопросов **(A)–(D)** для некоторых конечных полуполей. В § 5.1 перечисляются известные классификационные результаты, обсуждается взаимосвязь автотопизмов полуполевой проективной плоскости с автотопизмами и автоморфизмами конечного полуполя (теорема 5.1.7).

В § 5.2 описан геометрический смысл инволютивного автоморфизма конечного полуполя (теорема 5.2.1) и на основе этого результата определен стабилизатор инволютивного автоморфизма (теоремы 5.2.3, 5.2.4). Теорема 5.2.7 выделяет элементы полуполя, которые не могут порождать нетривиальный внутренний автоморфизм.

В § 5.4 представлено полное решение вопросов **(A)**–**(D)** для полуполей порядка 16 – минимальный возможный порядок конечного полуполя. П. К. Штуккерт и В. М. Левчук доказали, что с точностью до изоморфизмов и антиизоморфизмов существует 16 полуполей порядка 16. В теореме 5.4.5. установлено, что ровно пять неизоморфных полуполей порядка 16 допускают нетривиальные внутренние автоморфизмы,

В § 5.6 и 5.7 представлено полное решение вопросов **(A)**–**(D)** для исключительных непримитивных полуполей Кнута–Руа порядка 32 и Хентзела–Руа порядка 64, опровергающих гипотезу Венэ, дополненное информацией о внутренних автоморфизмах и минимальных многочленах.

Параграф 5.8 содержит решение вопросов **(A)**–**(D)** для некоторых полуполей порядка p^4, $p = 3, 5, 13$, построенных для иллюстрации теоретических результатов главы 3. В теореме 5.8.3. установлено, что существуют ровно три попарно неизотопных нетривиальных полуполя порядка 5^4, допускающих подгруппу автотопизмов Q_8, и 33 попарно неизотопных полуполя порядка 13^4 с тем же условием.

Глава 6 содержит решение вопросов **(B)**–**(D)** для конечных почти-полей. В § 6.1 напоминается способ построения конечных почти-полей на основе 2-транзитивных групп, а также конструкцию Диксона–Цассенхауза. Теорема 6.1.6 устанавливает связь между центром, ядром и простым подполем, а также демонстрирует точно четыре почти-поля Цассенхауза, в которых простое подполе не лежит в центре.

Параграф 6.3 выявляет характеристическое свойство регулярного множества почти-поля размерности два над ядром. Параграф 6.4 отмечает существенные особенности случая бесконечных точно дважды транзитивных групп. В § 6.5 методом регулярного множества доказано, что не существует квазиполей порядка 25, мультипликативная лупа которых является лупой Муфанга.

Глава 7 решает, в-основном, вопрос **(A)** о максимальных подполях в конечных почти-полях. В § 7.2 обсуждаются минимальные собственные почти-поля, т.е. нетривиальные почти-поля Q, в которых каждое под-почти-поле $H \neq Q$ является подполем. Теорема 7.2.3 демонстрирует существование минимальных собственных почти-полей в классе почти-полей Диксона $DF(q, n)$ для любого простого $n > 2$.

В теорема 7.2.3 установлено, что для любого простого числа $n > 2$ существует бесконечно много конечных почти-полей степени расширения n над своим центром, в каждом из которых все под-почти-поля являются подполями. Для минимальной степени расширения $n = 2$ этот результат, в общем случае, неверен, что показывает теорема 7.2.2.

Теорема 7.2.4 представляет отрицательное решение вопроса об ограниченности числа максимальных подполей даже для минимальных собственных почти-полей Диксона. Более точно, теорема 7.2.4 утверждает, что для любого натурального числа s существует минимальное собственное почти-поле Диксона, имеющее более чем s максимальных подполей.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они опубликованы в 25 статьях. Часть результатов получена автором самостоятельно, а часть – в неразделимом соавторстве.

Диссертация изложена на 225 страницах. Она состоит из введения, семи глав и списка литературы из 193 наименований.

Результаты диссертации апробировались на алгебраических семинарах в МГУ (2019), ИМ СФУ (2015–2022), Институте математики СО РАН (Новосибирск, 2019-2020). Они были представлены на Международных алгебраических конференциях (Москва, 1998, 2018, 2019), Международных конференциях «Алгебра и ее приложения» (Красноярск, 2002, 2007), Международных конференциях «Алгебра и логика: теория и приложения» (Красноярск, 2010, 2013, 2016), Международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2014), Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 2016, 2021), Международных конференциях «Группы и графы» (G2A2, Екатеринбург, 2015; G2S2, Новосибирск, 2016), Международной конференции «Математика в современном мире» (Новосибирск, 2017), Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» (Тула, 2018), Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, 2021, 2022), Всесибирских Конгрессах женщин-математиков (Красноярск, 2004, 2006, 2012), Всероссийской конференции «Алгебра и теория алгоритмов» (Иваново, 2018), Всероссийской конференции по математике и механике (Томск, 2018), Международной конференции «Group theory in Ankara» (Анкара, 2019), Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2020, 2021), XIII школе-конференции по теории групп (Екатеринбург, 2020), Международной алгебраической конференции (Екатеринбург, 2021).

В целом, диссертация написана хорошо, автореферат полностью отражает содержание диссертации. Тем не менее, сделаю ряд замечаний.

– Некоторые фразы очень громоздки. Например, следующую фразу со с. 6: «В решении поставленных задач получил развитие метод регулярных множеств взаимосвязанного построения конечных проективных плоскостей трансляций и, как координатизирующих множеств, конечных квазиполей» трудно понять при первом прочтении;

– Трудно понять и следующее утверждение со с. 7 диссертации: «8. Ранг N плоскости π представляет естественные ограничения на порядок элементарной абелевой 2-подгруппы и на порядок 2-элемента в группе автотопизмов, при дополнительных условиях на их геометрический смысл.»;

– с. 24, рисунок 1: Почему прямая [0] содержит 4 точки, в то время как все остальные прямые содержат по 3 точки?

– с. 25: Используется термин «планарное тернарное кольцо». К сожалению, не нашел определения.

– на с. 50 используется символ $\equiv$. Стоит пояснить, что он означает.

– с. 131, определение антиизоморфизма: вместо равенства $(x+y)^\varphi = x^\varphi + x^\varphi$ должно быть $(x+y)^\varphi = x^\varphi + y^\varphi$.

Отмеченные замечания не носят принципиального характера и легко устранимы.

Считаю, что диссертация О. В. Кравцовой «Вопросы строения конечных квазиполей и групп колинеаций полуполевых проективных плоскостей» соответствует всем критериям, установленным в положении о присуждении ученых степеней: работа посвящена актуальной теме, полученные в ней результаты, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение, являются новыми, полностью и правильно обоснованы, своевременно и в полном объеме опубликованы в научных изданиях, удовлетворяющих требованиям ВАК. Результаты и методы, предложенные автором, будут использованы в дальнейших исследованиях по теории групп. Вышеизложенное позволяет утверждать, что диссертация О. В. Кравцовой «Вопросы строения конечных квазиполей и групп коллинеаций полуполевых проективных плоскостей» удовлетворяет требованиям ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, сформулированным в пп. 9-11, 13, 14 Положения о порядке присуждения ученых степеней (постановление №842 от 24 сентября 2013 года), а ее автор Ольга Вадимовна Кравцова заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук
Валерий Георгиевич Бардаков
660090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
телефон: +7 383-3297646
e-mail: bardakov@math.nsc.ru
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук
главный научный сотрудник
лаборатории обратных задач математической физики В. Г. Бардаков
21 августа 2022 г.

Подпись В. Г. Бардакова заверяю:
Зам. директора ИМ СО РАН
доктор физико-математических наук С. В. Судоплатов
23 августа 2022 г.