ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
на диссертацию Ульверта Романа Викторовича
"О резольвентах Чеха – де Рама в теории многомерных вычетов"
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 –
вещественный, комплексный и функциональный анализ

Как написано в автореферате, "цель диссертационной работы состоит в разработке комбинаторно-топологических методов кратного интегрирования в комплексных многообразиях. В частности предполагается исследовать проблему вычислимости интегралов мероморфных дифференциальных форм с помощью вычетов Гротендика и разработать методы вычисления указанных интегралов".

Среди утверждений, на которых стоит одномерный комплексный анализ, почетное место принадлежит интегральной теореме Коши и ее следствию – теореме о вычетах. Теорема о вычетах уникальна по своей эффективности, на ней основана большая часть применений комплексного анализа. Причем в этой одномерной ситуации все просто и прозрачно. Форма, которую мы собираемся интегрировать, – это мероморфная форма бистепени $(1,0)$ вида

$$\omega = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{h(z)\,dz}{f(z)},\text{ где } h \text{ и } f \text{ голоморфны в области } D.$$

И эту форму интегрируют по одномерному циклу - гладкой замкнутой не самопересекающейся кривой $\gamma \subset D$, не проходящей через нули знаменателя. Этот цикл гомологичен сумме локальных циклов $\sum \gamma_j = \{|f(z)| = \varepsilon\}$, каждый из которых – это компонента лемнискаты, окружающая j-й корень $f(z)$ внутри γ. Интеграл по γ, тем самым, есть сумма интегралов по γ_j. В проколотой окрестности каждого нуля знаменателя мероморфная функция h/f представима рядом Лорана. Почленное интегрирование позволяет убедиться, что интеграл по j-му циклу

$$\int_{\gamma_j} \omega = c_{-1} = \mathrm{res}_{a_j}(h/f)$$

равен вычету в соответствующей точке. К этому следует добавить, что задача вычисления вычета в полюсе порядка m сводится $(m-1)$-кратному дифференцированию. Итак, имеем цепочку: интеграл по контуру $\to$ интеграл по локальному циклу $\to$ вычет.

Переходя в многомерный контекст, отметим, что запрос на "многомерную эффективную теорему о вычетах"имеется во многих областях математики. Правильный аналог интегральной теоремы Коши был, на заре комплексного анализа, предложен А. Пуанкаре. Но дальше, нарисованная выше идиллическая картина, расплывается. Там, в многомерном анализе, нет универсальной и эффективной процедуры вычисления интеграла от мероморфной дифференциальной формы, аналогичной одномерной теореме о вычетах. При этом проблемы распадаются на две группы: топологическую (гомологическую) и аналитическую. К решению этой задачи имеется несколько подходов разной степени проработанности. В 70-х годах в работах А.П. Южакова и А.К. Циха задача вычисления интеграла от мероморфной формы была уточнена и оформлена в виде метода. Основные понятия метода – это разделяющие циклы и локальный вычет (вычет Гротендика). При этом гомологическая часть задачи в рамках этого подхода сводится к выбору системы циклов, разделяющих полярные особенности формы. Если число n особых гиперповерхностей равно размерности комплексного многообразия, то говорят, что n-мерный цикл из дополнения к объединению гиперповерхностей разделяет эти гиперповерхности, если после удаления любой из гиперповерхностей он становится гомологически тривиальным. Аналогичное определение имеется и для числа гиперповерхностей m больших n. Необходимым условием того, чтобы n-мерный цикл из дополнения к особым гиперповерхностям выражался через локальные циклы является условие, что он – разделяющий. Имеется гипотеза Южакова – Циха, которая в общей формулировке утверждает, что на n-мерном многообразии Штейна для любого числа гиперповерхностей $m \geq n$ группа n-мерных гомологий дополнения, порожденная локальными циклами и такая же группа, образованная разделяющими циклами совпадают. Т.е. что условие разделения является достаточным для выразимости цикла через локальные.

Формулировка цели данного исследования была приведена выше и она соответствует тексту диссертации. Рассмотрим ее содержание.

Первая глава диссертации это алгебраическая топология и гомологическая алгебра. Биградуированные комплексы Чеха – де Рама, как гомологические, так и двойственные им когомологические, резольвенты и спектральные последовательности. Причем следует отметить, что изложение этой непростой техники дается в максимально конструктивном стиле, что находится в контрасте с той традицией, которая принята в пособиях по алгебраической топологии. Представляется, что эта техника и, соответственно, первая глава являются, не смотря на их присутствие в названии диссертации, служебными и подготовительными по отношению к последующему изложению. Основной результат главы – это теорема 1.9, в которой для многообразия Штейна устанавливается изоморфизм между группой разделяющих n-циклов в дополнении к объединению гиперповерхностей и группой $(2n - 1)$-мерных гомологий в дополнении к их пересечению.

Во второй главе даются применения гомологической техники, развитой в первой главе. Первое применение – это новые доказательства двух известных результатов А.К. Циха. Первый из упомянутых результатов (теорема 2.1) – доказательство для многообразия Штейна того, что при m (количество особых гиперповерхностей) равном n (размерности многообразия) условие, что n-цикл разделяющий есть критерий того, что он гомологичен линейной комбинации локальных циклов. Второй результат (предложение 2.1) – это условие, гарантирующее для остова специального аналитического полиэдра его представимость в виде линейной комбинации локальных циклов. Теорема 2.4 данной главы демонстирует очень интересную связь между методом разделяющих циклов и другим, более алгебраическим, подходом к теории вычетов, который связан с совершенно другим кругом понятий (многогранник Ньютона, торическое многообразие, торический вычет...). В ней, для многообразий размерности два в предположении развернутости многогранников дана интерпретация комбинаторных коэффициентов из теоремы Гельфонд – Хованского в терминах разделяющего гомоморфизма, построенного в главе 1. Это позволяет предложить вполне конструктивное решение задачи вычисления этих коэффициентов (по резольвенте границы специального полиэдра).

Третья глава целиком посвящена гипотезе Южакова-Циха для $m > n$. В ней содержится обсуждение результатов Южакова и Московченко, направленных на доказательство этой гипотезы. Далее обсуждаются результаты о разделении особенностей мероморфных функций многих переменных. После чего формулируется и доказывается теорема 3.3, которая является прямым обобщением теоремы Южакова. Теорема Южакова утверждает справедливость гипотезы в каждом из двух, совместно не реализуемых, случаях. Единое условие теоремы 3.3 – это более общеее условие, которое поглощает оба случая теоремы Южакова. Завершается глава доказательством гипотезы Южакова-Циха в локальном случае для $m = n + 1$.

Итак, основными результатами диссертации по нашему мнению являются:

1. Развитие резольвентной техники, позволяющей представлять $(2n-1)$-мерные гомологии дополнения к пересечению гиперповерхностей в группе разделяющих n-мерных циклов в дополнении к их объединению.

2. Описание способа вычисления комбинаторных коэффициентов в формуле Гельфонд – Хованского через резольвенту границы подходящего полиэдра в двумерном случае.

3. Обобщение теоремы Южакова о разделяющих циклах и доказательство гипотезы Южакова – Циха для $m = n + 1$ в локальном случае.

Основные результаты автора опубликованы в 3 статьях в рецензируемых журналах, также они докладывались на математических конференциях.

К достоинствам диссертации следует отнести ясный стиль изложения, обсуждение мотивировок, разбор конкретных примеров. Также следует отметить, что данная диссертация достаточно определенно намечает направления дальнейшей работы диссертанта.

При этом в диссертации все же имеется некоторое количество опечаток и неточностей. В частности:

1. на странице 3 вместо «в результате интегрирования формы $(2\pi i)^{-1}\omega$» следует писать «в результате интегрирования формы $(2\pi i)^{-n}\omega$»;

2. в формуле, завершающей страницу 4, вместо $k = 1, \ldots [k] \ldots, n$ следует писать $k = 1, \ldots [j] \ldots, n$;

3. на странице 10 после формулы (0.6) вместо $[\partial\xi_{m-3}]$ следует писать $[\partial\xi_{m-2}]$;

4. на странице 87 вместо «так как условию», нужно писать «так как по условию».

В диссертации нет информации о том, в какой работе опубликован тот или иной из основных результатов.

Данная диссертация направлена но то, чтобы получить конструктивную многомерную теорему о вычетах. Но после ее прочтения остается не ясным, даже в двумерном случае, доводятся ли те или иные изложенные подходы до уровня вычислительного алгоритма? А если доводятся, то от чего и как зависит их сложность?

Напомню, что в одномерной теореме задача вычисления интеграла сводится к задаче дифференцирования (как элементарной операции) и ее сложность легко оценить через число полюсов внутри контура и их кратность.

При этом диссертация производит несомненно положительное впечатление. Она вносит новый вклад в понимание проблемы интегрирования мероморфных дифференциальных форм и многомерных вычетов. Все ее результаты опубликованы с полными доказательствами в рецензируемых математических журналах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации, а она сама соответствует п.9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней"от 24 сентября 2013 г. №842 и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Считаю, что Р.В. Ульверт заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "Вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Официальный оппонент
д-р физ.-мат. наук, профессор
кафедры теории функций и функционального анализа
механико-математического факультета МГУ им.Ломоносова

/ Валерий Константинович Белошапка /

10 января 2019 г.

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1,
механико-математический факультет,
тел.: +7(909)1514087, +7(495)9393680,
e-mail: vkb@strogino.ru

Подпись профессора В.К. Белошапки заверяю