

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Нировой М.С. “Дистанционно регулярные графы, связанные с ними симметричные структуры и их группы автоморфизмов”, представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Актуальность темы диссертации. Теория графов и алгебра были тесно связаны на протяжении всей истории своего развития. С одной стороны, одним из часто применяемых методов исследования различных алгебраических объектов является изучение свойств некоторого графа, связанного с данным объектом. Отметим, к примеру, граф Грюнберга – Кегеля для групп, диаграммы Дынкина для алгебр Ли, граф упорядоченности для частично упорядоченных множеств, граф Хэмминга для векторных пространств над конечным полем, связанный с задачами алгебраического кодирования и минимизации функций алгебры логики. С другой стороны, различные виды симметричных графов были построены с помощью известных групп. Отметим в качестве примера сильно регулярные графы ранга 3, связанные с действием группы на множестве, граф Гевиртца, построенный с использованием силовских 3-подгрупп и инволюций из A_6 и т.д. В связи с завершением классификации конечных простых групп возникла задача единого представления этих групп автоморфизмами симметричных структур (графов, геометрий). Для ее решения необходимо иметь информацию о комбинаторных свойствах и группах автоморфизмов различных классов геометрий и графов.

Общая характеристика работы. Диссертация изложена на 201 странице печатного текста и состоит из введения, пяти глав и списка литературы, содержащего 93 названия.

В введении приводится обзор результатов по теме исследования, описывается цель работы, её основные результаты и кратко излагается содержание диссертации.

В первой главе изучаются сильно ($s=2$)-однородные расширения частичных геометрий, 4-изорегулярные графы и классифицируются дистанционно регулярные локально $GQ(4, t)$ -графы. Основные результаты первой главы приведены в теоремах 1.1–1.5.

Вторая глава посвящена изучению симметричных графов с ограничением на число вершин. В ней получены массивы пересечений для локально псевдциклических дистанционно регулярных графов с числом вершин, не большим 4096. Для примитивных графов с числом вершин, не больших 1000 описаны автоморфизмы. Кроме того в этой главе приводится решение проблемы Лама – доказано, что новых реберно симметричных сильно регулярных графов с

числом вершин, не большим 100, не существует. Основные результаты главы 2 описаны в теоремах 2.1 – 2.6.

В третьей главе исследуются свойства AT4-графов и автоморфизмы AT4(4,6,5)-графа с массивом пересечений {204, 175, 48.1; 1, 12, 175, 204 }. Данный граф интересен тем, что вторая окрестность вершины в нем является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений {144, 125, 32.1; 1, 8, 125, 144 } (Автоморфизмы этого графа тоже описаны). Также в этой главе изучаются дистанционно регулярные графы диаметра 3 со вторым собственным значением равным -1. Доказано, что в этом случае дополнительный граф для Γ_3 будет псевдогеометрическим. На основании данного результата показано, что граф с массивом пересечений {44, 35, 3; 1,5, 42 } не существует. Основные результаты данной главы приведены в теоремах 3.1–3.9.

Четвертая глава посвящена изучению общих свойств дистанционно регулярного графа диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. В случае отсутствия треугольников в Γ_3 перечислены массивы пересечений такого графа. Для графа с массивом пересечений {69, 56, 10; 1,14, 60 } найдены автоморфизмы. Основные результаты четвертой главы приведены в теоремах 4.1–4.3.

В пятой главе изучаются максимальные коды в дистанционно регулярных графах диаметра 3, графы с собственным значением -1 и графы Шилла с дополнительным ограничением на параметры. Интерес к таким графикам обусловлен результатами Юричича и Видали, которые описали возможные массивы пересечений дистанционно регулярного графа диаметра 3, содержащего локально регулярный максимальный 1-код, совершенный относительно последней окрестности. Оказалось, что либо такие графы имеют второе собственное значение равное -1, либо являются графиками Шилла с $b_2 = c_2$. На данный момент известно лишь небольшое количество реально существующих графов Шилла, поэтому любая информация об их строении и возможных автоморфизмах представляется очень важной. Основные результаты пятой главы приведены в теоремах 5.1–5.7.

При получении результатов активно использовались как комбинаторные, так и теоретико-групповые методы исследования.

Основные результаты.

- Найдены параметры сильно (s-2) - однородных расширений частичных геометрий и классифицированы дистанционно регулярные локально $GQ(4, t)$ -графы;
- Перечислены допустимые массивы пересечений дистанционно регулярных графов с $\lambda = 2$, имеющих не более 4096 вершин, найдены автоморфизмы примитивных дистанционно регулярных графов с $\lambda = 2$ и числом вершин, не большим 1000;
- Показано, что новых реберно симметричных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100, не существует (проблема Лама);
- Найдены автоморфизмы AT4(4,6,5)-графа с массивом пересечений {204,

$175, 48, 1; 1, 12, 175, 204 \}$ и второй окрестности вершины этого графа, являющейся дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144 \} ;$

– Доказано, что для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 со вторым собственным значением равным -1 дополнительный граф для Γ_3 будет псевдогеометрическим. На основании данного результата показано, что граф с массивом пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42 \}$ не существует;

– Изучены свойства дистанционно регулярного графа диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. В случае отсутствия треугольников в Γ_3 перечислены массивы пересечений такого графа. Для графа с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60 \}$, для которого граф Γ_3 является сильно регулярным графом без треугольников, найдены автоморфизмы;

– Получены новые границы для порядков клик в сильно регулярном графе Γ_3 , с помощью которых доказано несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{27, 20, 7; 1, 4, 21 \};$

– В классе массивов, отвечающих максимальным 1-кодам найдены новые бесконечные серии допустимых массивов пересечений;

– Указан вид массива пересечений для графа Шилла с $b_2 = c_2$ и нецелыми собственными значениями. Классифицированы графы Шилла с $b_2 = c_2$ и $b = 4$.

Замечания. В целом представленная работа отличается четкостью изложения и хорошим оформлением, но не свободна от различных неточностей, недомолвок и опечаток. Отметим некоторые из них.

– Одним из основных результатов второй главы является решение проблемы Лама. Но почему-то автор на стр.20 диссертации (и на стр.13 автореферата) пишет, что был сделан только первый шаг на пути реализации программы по решению этой проблемы; (Видимо речь идет о какой-то работе где это сделано, но работа не указана.) Но уже на стр. 100 пишется что “‘сделаны первый и последний шаги на пути реализации этой программы’.

– При определении сильно регулярных и изорегулярных графов следовало бы отметить, что клики и коклики не относятся к этим классам;

– Не все используемые понятия и обозначения определяются автором. Это относится к расширениям геометрий (EpG), Q -полиномиальным графам, а также к параметрам a , дистанционно регулярного графа;

– В следствии 2.4 (стр. 21) следовало бы отметить, что сильно регулярный граф с параметрами $(85, 54, 33, 36)$ тоже не является вершинно симметричным;

– В лемме 3.8 на стр.99 в формулировке пункта 3 допущена опечатка. Следует читать: “ G не содержит нормальных подгрупп порядка 43”. В доказательстве этой леммы фигурирует группа H , но не объясняется что это за группа.

– В замечании 3.1 на стр.26 не указан источник для предложения 12.5.2. (Стоит знак ?)

Не смотря на отмеченные недостатки настоящая диссертация представля-

ет собой перспективное научное исследование. Полученные в ней результаты являются новыми и имеют теоретический интерес. Они могут быть полезны в дальнейших исследованиях различных классов симметричных графов и связанных с ними алгебраических объектов. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Все результаты диссертации опубликованы в журналах из списка ВАК в цикле работ, состоящем из 17 статей и 12 тезисов докладов. Из 17 статей 8 написано без соавторов, 2 – тремя авторами, 7 в соавторстве с Махневым А.А. Результаты диссертации прошли широкую апробацию. Они докладывались на международных конференциях и научных семинарах. Считаю, что диссертация М.С. Нировой “Дистанционно регулярные графы, связанные с ними симметричные структуры и их группы автоморфизмов” полностью соответствует п. 9-14 «Положения о присуждении ученых степеней» от 24 сентября 2013 г. №842, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор, Нирова Марина Сефовна, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,

профессор кафедры

“Защита информации”

Южно-Уральского государственного университета

Подпись Зюляркиной Н.Д. заверяю

21 марта 2019 г.

телефон 8(351)2679355

e-mail toddeath@yandex.ru

Зюляркина Наталья Дмитриевна

