

**ОТЗЫВ**  
официального оппонента на диссертационную работу  
Рогозиной Марины Степановны «О корректности задачи Коши для  
полиномиальных разностных операторов» по специальности  
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ на  
соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Разностные уравнения возникают в различных областях математики, в частности, при дискретизации дифференциальных уравнений. Метод конечных разностей и его различные модификации относятся к числу распространенных методов решения дифференциальных уравнений. Во всех вариантах этого метода возникают конечно-разностные уравнения, линейные, если таковыми являются исходные дифференциальные уравнения. Разностной схемой называют разностное уравнение, аппроксимирующее исходное дифференциальное уравнение, и дополнительные граничные (начальные) условия.

Одной из проблем теории разностных схем является корректность разностной задачи, т.е. существование и единственность решения и устойчивость схемы. Причем устойчивость является одним из важнейших свойств разностных уравнений, непосредственно влияющих на качество разностных схем. Это связано с тем, что в середине 50-ых годов А.Ф. Филиппов, Лакс, Рихтмайер, В.С. Рябенький, Дж. Нейман почти одновременно выяснили, что устойчивость разностной схемы корректной дифференциальной задачи эквивалентна сходимости решения разностной задачи к решению исходной задачи.

Зависимость асимптотического поведения решения уравнения от начальных данных и правой части уравнения исследуется в рамках теории устойчивости дискретных динамических систем, основными понятиями которой являются «устойчивость по Ляпунову», «асимптотическая устойчивость», «экспоненциальная устойчивость» и др. В одномерном

случае эта теория развита хорошо, и для уравнений с постоянными коэффициентами устойчивость полностью определяется корнями характеристического многочлена, а именно, они по модулю должны быть меньше единицы.

В многомерном случае нетривиальным является уже вопрос о правильной постановке задачи Коши для разностного оператора (Bousquet-Mellou M., Petkovšek M., 2000 г.) и тем более вопрос об устойчивости (Даджион Д., Мерсеро О. (1998 г.), А.К. Цих (1991 г.)). Можно отметить еще, недавно обнаруженную связь асимптотической теории разностных уравнений с биоинформатикой (2005, работы Штурмфельса и его соавторов).

Диссертационная работа М.С. Рогозиной посвящена исследованию корректности задачи Коши для полиномиальных разностных операторов с постоянными коэффициентами в случае явных разностных схем и исследованию разрешимости – для неявных.

В первой главе рассматриваются операторы, характеристический многочлен которых имеет моном старшей степени по выделенной переменной. Соответствующие разностные уравнения в теории разностных схем принято называть явными разностными схемами и вопрос существования и единственности решения в этом случае тривиален. Устойчивость определяется в соответствии с принципом «ограниченный вход» – «ограниченный выход» и первым шагом исследования является формула, в которой решение выражается через входные данные задачи Коши и фундаментальное решение. Такого рода подход к доказательству устойчивости использовался М.В. Федорюком (1987 год) в случае двуслойных линейных однородных разностных схем. В диссертационной работе рассмотрен случай схем с произвольным числом слоев, а для формулировки условий устойчивости и доказательства их справедливости используются понятия и методы теории амеб алгебраических гиперповерхностей.

Вторая глава посвящена задачи Коши для полиномиального разностного оператора с начально-краевыми условиями типа Рикье. С точки зрения теории разностных схем это неявная схема и вопрос о разрешимости задачи в этом случае не тривиален. Основанием для исследования данного вида разностных уравнений послужил один из результатов Хермандера (1965 г.), касающийся теоремы Коши-Ковалевской и ее обобщений.

В первом параграфе главы 2 даны необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора. По коэффициентам полиномиального разностного оператора строится бесконечный набор определителей, невырожденность которых и означает разрешимость задачи Коши. Далее показано, что эти определители являются произведениями определителей, построенных из коэффициентов главного символа разностного оператора, а условие  $|c_\beta| > \sum_{\alpha \neq \beta} |c_\alpha|$  означает, что соответствующие матрицы обладают свойством диагонального преобладания.

В третьем параграфе для  $n = 2$  дано другое, более удобное для приложений, доказательство разрешимости задачи Коши, и кроме того, найдено обобщение на ленточные матрицы с произвольной шириной ленты, но имеющие одну наддиагональ (поддиагональ), хорошо известного для трехдиагональных матриц рекуррентного соотношения.

Замечания:

- 1) Поскольку имеется много различных определений понятия устойчивости, то было бы целесообразно объяснить, откуда взято определение, которое используется в работе.
- 2) Следовало бы объяснить, как понимается термин «базис факторкольца кольца полиномов, порожденного главным символом оператора».

Характеризуя работу в целом, можно сказать, что она посвящена актуальной теме, в ней получены новые результаты, имеющие полные доказательства. Они представляют интерес как для комплексного анализа,

так и для теорий разностных схем и дискретных динамических систем. Результаты своевременно опубликованы в 9 работах, из них 5 в журналах из списка ВАК, и апробированы на научных конференциях в Красноярске и Новосибирске. Автореферат правильно и полно отражает структуру и содержание диссертации.

Считаю, что диссертация М.С. Рогозиной «О корректности задачи Коши для полиномиальных разностных операторов» соответствует п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней» от 24 сентября 2013 г. № 842, удовлетворяет всем требованиям, предъявленным ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор, Марина Степановна Рогозина, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт вычислительного  
моделирования СО РАН, отдел  
вычислительных моделей в  
гидрофизике, ведущий научный  
сотрудник



Капцов Олег Викторович

Подпись O. V. Капцов  
УДОСТОВЕРЯЮ  
Зав. канцелярией ИВМ СО РАН Олег  
«14» 05 2015 г.

Почтовый адрес:

Академгородок,  
Институт вычислительного  
моделирования СО РАН,  
Красноярск, 660036  
Телефон: 89135589312  
E-mail: profkap@mail.ru