УДК 512.542+512.544 На правах рукописи

Моисеенкова Татьяна Владимировна

ПОРОЖДАЮЩИЕ МУЛЬТИПЛЕТЫ И СТРУКТУРНЫЕ ВОПРОСЫ ГРУПП ЛИЕВА ТИПА

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2010

Диссертация выполнена на кафедре математического обеспечения дискретных устройств и систем Сибирского федерального университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Нужин Яков Нифантьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Койбаев Владимир Амурханович
	доктор физико-математических наук, доцент Колесников Сергей Геннадьевич
Ведущая организация:	Институт математики и механики УрО РАН

Защита состоится 19 ноября 2010 года в 11.30 на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан "15" октября 2010 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Бушуева Н.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многие задачи теории групп и смежных разделов сводятся к нахождению порождающих элементов, удовлетворяющих некоторым свойствам. При этом, для конечных простых групп и близких к ним, особый интерес вызывают порождающие множества минимальной мощности относительно некоторых свойств.

В силу известного результата У. Фейта и Дж. Томпсона любая конечная группа нечетного порядка разрешима. Поэтому конечная простая неабелева группа содержит инволюции и порождается любым классом сопряженных инволюций. С другой стороны, минимальное число порождающих инволюций конечной простой неабелевой группы не меньше тройки. В 1978 г. А. Вагнер [1] заметил, что для группы $PSU_3(9)$ минимальное число порождающих инволюций равно 4. В последствии оказалось, что она является единственной конечной простой неабелевой группой, не порождаемой тремя инволюциями (см. работы Г. Миллера [2], Ф. Дала Вольта [3], Г. Малле, Дж. Саксла, Т. Вейгеля [4] и Я.Н. Нужина [5]).

Согласно классификационной теореме конечные простые группы исчерпываются следующими: циклические группы простого порядка, знакопеременные группы, группы лиева типа над конечными полями и 26 спорадических групп.

В [4] так же была сформулирована следующая задача, позднее записанная Я.Н. Нужиным в "Коуровской тетради" [6, вопрос 14.69]:

Для каждой конечной простой неабелевой группы G найти минимум числа (сопряженных) порождающих инволюций $i(G)$ (соответственно $i_c(G)$) таких, что их произведение равно 1 (Малле – Саксл – Вейгель).

Ясно, что если группа порождается тремя инволюциями, то $i(G) \leq 6$. С другой стороны, из простоты группы G легко следует, что $i(G) \geq 5$. Таким образом, для любой конечной простой неабелевой группы G

$$5 \leq i(G) \leq 6, \quad \text{при} \quad G \neq PSU_3(9).$$

Задача Мале – Саксла – Вейгеля тесно связана со следующим вопросом, поставленным В.Д. Мазуровым в 1980 г. [6, вопрос 7.30].

Какие конечные простые группы порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?

Действительно, если группа G порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, то $i(G) = 5$. К настоящему времени известно, какие конечные простые группы порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Для знакопеременных групп и групп лиева типа над конечными полями ответ на данный вопрос дал Я.Н. Нужин в течение 1990–1996 гг. ([7] — [11]). Позднее вопрос был решен и для спорадических групп (см. статью В.Д. Мазурова [12]).

Конечная простая группа G порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, тогда и только тогда, когда она отлична от следующих групп:

1) знакопеременные группы:

$$A_6, \ A_7, \ A_8;$$

2) группы лиева типа над полем характеристики 2:

$$PSL_3(q),\ PSU_3(q),\ PSL_4(q),\ PSU_4(q);$$

3) группы лиева типа над полем нечетной характеристики:

$$PSL_3(q),\ PSU_3(q),\ PSL_2(7),\ PSL_2(9),\ PSp_4(3);$$

4) спорадические группы:

$$M_{11},\ M_{22},\ M_{23},\ McL.$$

Таким образом, для нахождения $i(G)$ остается исследовать исключительные группы из данного результата, что и является одной из целей исследования данной работы.

В 2001 г. для исключительных знакопеременных и спорадических групп число $i(G)$ было найдено А.В. Тимофеенко [13] и В.А. Шмидтом [14]. Оказалось, что $i(A_6) = 5$ и $i(G) = 6$, если G является одной из групп A_7, A_8, M_{11}, M_{22}, M_{23}, McL.

В диссертации Дж.М. Уорда 2009 года [15] (см. так же [6, примечания к вопросу 14.69]) число $i_c(G)$ найдено для знакопеременных, спорадических групп и для групп $PSL_n(q)$, при нечетном q, а для $n \geq 4$ при дополнительном ограничении $q \neq 9$, кроме того для $n = 6$ при $q \not\equiv 3 mod 4$.

Таким образом, с учетом следующих изоморфизмов

$$PSL_2(7) \simeq PSL_3(2),\ PSL_2(9) \simeq A_6,\ PSp_4(3) \simeq PSU_4(4)$$

и работы автора, к настоящему времени значение числа $i(G)$ остается неизвестным только для групп

$$PSL_4(2^m),\quad PSU_4(2^{2m}),\quad PSU_3(p^{2m}),\quad p > 2.$$

Пусть $i = i(G)$ то же, что и выше. Группа $SL_2(\mathbb{Z})$ имеет единственную инволюцию, а Р. Фрике и Ф. Клейн в [16] установили, что группа $PSL_2(\mathbb{Z})$ является свободным произведением групп порядка 2 и 3. Поэтому группы $SL_2(\mathbb{Z})$ и $PSL_2(\mathbb{Z})$ не порождаются никаким множеством инволюций. В работе М. Тамбурини и П. Цука [17] показано, что группа $SL_n(\mathbb{Z})$, при $n \geq 14$, порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Я.Н. Нужин в [18] доказал, что группа $PSL_n(\mathbb{Z})$ тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда $n \geq 5$. Он же поставил в "Коуровской тетради" следующий вопрос [6, вопрос 15.67].

Какие присоединенные группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?

С этим вопросом связана следующая задача, которая рассматривается в работе.

Найти число i для групп $SL_n(\mathbb{Z}), PSL_n(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел.

Другой раздел диссертации посвящен переносу некоторых результатов для групп Шевалле нормального типа на скрученные группы Шевалле (группы Стейнберга).

Следующий результат, получивший название разложение Ивасавы, известен для специальной линейной группы уже более ста лет. Его обобщение на случай групп Шевалле нормального типа подробно изложено в книге Р. Стейнберга [19, теорема 18].

Пусть K поле частных кольца главных идеалов D, $G = G(K)$ — группа Шевалле (нормального типа) над полем K, B — борелевская подгруппа группы G. Тогда

$$G = BG(D).$$

Если кольцо главных идеалов D обладает автоморфизмом f порядка 2 или 3, то таким автоморфизмом обладает и его поле частных K, и определена группа Стейнберга $G^1(P)$ типа ${}^2A_{2m}$, ${}^2D_{m+1}$, ${}^2E_6$ или ${}^3D_4$ соответственно над любым промежуточным подкольцом P, $D \subseteq P \subseteq K$. Естественно возникает вопрос о справедливости для групп Стейнберга аналога разложения Ивасавы.

Так же вторая глава посвящена проблеме описания промежуточных подгрупп, лежащих между группами Стейнберга над кольцом главных идеалов и его полем частных.

Задача о промежуточных подгруппах бывла поставлена в 1970 г. Ю.И. Мерзляковым [6, вопрос 7.40].

Дать описание (решетки) подгрупп, заключенных между заданной классической группой матриц над кольцом и подгруппой всех ее матриц с коэффициентами в подкольце.

Для общей и специальной линейных групп такие описания были получены в 1969 г. Н.С. Романовским [20], в случае евклидова кольца и его поля частных, Р.А. Шмидтом в 1979 г. для кольца главных идеалов [21], дедекиндова кольца [22] и в 1981 г. для кольца Безу [23] и их полей частных. Для симплектической группы и поля частных евклидова коль-

ца данное описание было установлено в 1984 г. А.И. Шкуратским [24]. В 1984 г. Я.Н. Нужин описал в [25] промежуточные подгруппы групп Шевалле в случае кольца главных идеалов. В статье Я.Н. Нужина и А.В. Якушевич [26] этот результат был усилен, а именно, получилось следующее описание.

Пусть подгруппа M удовлетворяет условию $G(D) \subseteq M \subseteq G(K)$, тогда $M = G(P)$ для некоторого подкольца P, $D \subseteq P \subseteq K$.

В диссертации рассматривается вопрос описания промежуточных подгрупп групп Стейнберга над полем частных кольца главных идеалов.

Цель диссертации. Целью настоящей диссертации является:

Исследование задачи Малле – Саксла – Вейгеля о минимальном числе сопряженных порождающих инволюций конечных простых групп, произведение которых равно единице.

Нахождение для групп SL_n и PSL_n над кольцом целых чисел минимального числа порождающих инволюций, произведение которых равно единице.

Установление для групп Стейнберга над полем частных кольца главных идеалов разложения Ивасавы (аналога известного разложения Ивасавы для групп Шевалле нормального типа).

Описание промежуточных подгрупп групп Стейнберга над полем частных кольца главных идеалов.

Методика исследования. В работе используются как методы классических линейных групп, так и методы групп лиева типа над полями и над кольцами.

Научная новизна и практическая ценность. Все основные результаты диссертации являются новыми. Результаты, изложенные в работе, носят теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории групп.

Апробация диссертации. Результаты диссертации были представлены на межвузовской научно-технической конференции, посвященной 370-летию Красноярска (Красноярск, 1998 г.), на международных алгебраических конференциях "Симметрия в естествознании" (Красноярск 1998 г.), "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2003 г.), "Алгебра, логика и приложения" (Красноярск 2010 г.), на красноярском алгебраическом семинаре.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [28]—[35], список которых помещен в конце автореферата, включая публикацию из перечня ВАК [34].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, каждая из которых содержит три параграфа и списка литературы. Список литературы включает 39 наименований. Номер теоремы, леммы и др. включает последовательно номер главы, параграфа и порядковый номер в параграфе. Объем работы — 63 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Основными результатами работы являются следующие:

1) Доказана приводимость любой подгруппы трехмерной специальной линейной группы над конечным полем характеристики 2, порожденной пятью инволюциями, произведение которых равно единице. Следстви-

ем этого результата является ответ для групп $PSL_3(2^m)$ и $PSU_3(2^{2m})$ на вопрос Малле – Саксла – Вейгеля о минимальном числе сопряженных порождающих инволюций конечных простых групп, произведение которых равно единице.

2) Для групп SL_n при $n \neq 6, 10$ и PSL_n над кольцом целых чисел найдено минимальное число порождающих инволюций, произведение которых равно единице.

3) Для групп Стейнберга над полем частных кольца главных идеалов установлено разложение Ивасавы.

4) Доказано, что группы, лежащие между группами Стейнберга над кольцом главных идеалов и его полем частных, совпадают с группами Стейнберга над промежуточными кольцами при некоторых ограничениях на мультипликативную группу кольца главных идеалов.

В первой главе доказываются результаты, связанные с нахождением минимума числа (сопряженных) порождающих инволюций $i(G)$ (соответственно $i_c(G)$) таких, что их произведение равно 1 для групп $PSL_3(2^m)$, $PSU_3(2^{2m})$ и для групп $SL_n(\mathbb{Z}), PSL_n(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

В параграфе 1.1 определяются основные понятия и фиксируются обозначения в линейных группах и их подгруппах, евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов, вводятся некоторые обозначения для систем корней, групп Вейля, подгрупп и элементов в группах Шевалле. Приводятся некоторые необходимые в дальнейшем результаты в классических линейных группах и группах Шевалле.

Основным результатом параграфа 1.2 является

Теорема 1.2.2. *Всякая подгруппа H группы $SL_3(2^m)$, для которой $i(H) = 5$, приводима.*

В качестве следствия получаем ответ на вопрос Малле – Саксла – Вейгеля для групп $PSL_3(2^m)$ и $PSU_3(2^{2m})$.

Следствие 1.2.3. *Если $G = PSL_3(2^m)$, $PSU_3(2^{2m})$, то*

$$i(G) = i_c(G) = 6.$$

Параграф 1.3 посвящен доказательству теоремы 1.3.3.

Теорема 1.3.3. *Группы $SL_3(\mathbb{Z}) \equiv PSL_3(\mathbb{Z})$, $SL_4(\mathbb{Z})$ и $PSL_4(\mathbb{Z})$ порождаются тремя инволюциями.*

Из данной теоремы и результатов [17], [18] получаются четыре следствия.

Следствие 1.3.4. *При $n \geq 3$ группа $PSL_n(\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями.*

Следствие 1.3.7. *Пусть $G = PSL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$. Тогда $i(G) = 6$, при $n = 3, 4$, и $i(G) = 5$ при $n \geq 5$.*

Следствие 1.3.8. *При $n \geq 3$, $n \neq 6, 10$ группа $SL_n(\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями.*

Следствие 1.3.9. *Пусть $G = SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$, $n \neq 6, 10$. Тогда $i(G) = 6$, при $n = 3, 4$, и $i(G) = 5$, при $n \geq 5$.*

Доказательство данных результатов опубликовано в работах [30], [31].

Во второй главе некоторые результаты для групп Шевалле нормального типа переносятся на случай скрученных групп Шевалле (групп Стейнберга). В данной главе устанавливается аналог разложения Ивасавы и описываются промежуточные подгруппы групп Стейнберга над полем частных кольца главных идеалов.

В параграфе 2.1 вводятся стандартная терминология и обозначения в группах Стейнберга и их подгруппах. В параграфе 2.2 устанавливается разложение Ивасавы для групп Стейнберга над полем частных K кольца главных идеалов D.

Теорема 2.2.6. *Пусть $G^1(K)$ — группа Стейнберга над полем частных K кольца главных идеалов D, B^1 — ее борелевская подгруппа. Тогда*

$$G^1(K) = B^1 G^1(D).$$

В параграфе 2.3 дается ответ на вопрос Ю.И. Мерзлякова для промежуточных подгрупп групп Стейнберга над полем частных кольца главных идеалов при некоторых ограничениях на мультипликативную группу кольца D.

По определению подгруппа A мультипликативной группы P^* кольца P удовлетворяет условию (k, m), если аддитивная группа, порожденная множеством $(1 - A^k)A^m$, где $A^m = \{a^m \mid a \in A\}$, содержит единицу кольца P.

Пусть D_f — подкольцо неподвижных элементов кольца D относительно автоморфизма f, участвующего в построении группы Стейнберга $G^1(K)$. Основным результатом параграфа 2.3 является

Теорема 2.3.9. *Пусть $G^1(K)$ — группа Стейнберга типа ${}^2A_{2m-1}$, ${}^2D_{m+1}$, ${}^2E_6$ или ${}^3D_4$ над полем частных K кольца главных идеалов D.*

Предположим, что:

1) D_f^* удовлетворяет условию (2,2), если $G^1(K)$ типа ${}^2A_{2m-1}$ $(m \geq 2)$;

2) D_f^* удовлетворяет условию (2,1), если $G^1(K)$ типа ${}^2D_{m+1}$ $(m \geq 3)$ или ${}^2E_6$;

3) D_f^* удовлетворяет условиям (2,1), (3,1), если $G^1(K)$ типа ${}^3D_4$.

Тогда любая промежуточная подгруппа M,

$$G^1(D) \subseteq M \subseteq G^1(K),$$

совпадает с подгруппой $G^1(P)$ для некоторого промежуточного подкольца P, $D \subseteq P \subseteq K$.

Ограничения на мультипликативную группу D_f^* в теореме 4 появляются при использовании результата В.М. Левчука о выделении корневых элементов в пересечении какой-то подгруппы с борелевской подгруппой группы лиева типа [27].

Теоремы 2.2.6 и 2.3.9 получены совместно с научным руководителем и опубликованы в работах [32], [33].

В заключение хочется выразить искреннюю признательность и благодарность моему научному руководителю Якову Нифантьевичу Нужину за постановку задач, постоянное внимание и помощь в работе над диссертацией.

Список литературы

[1] *Wagner, A.* The minimal namber involutions generating some threedimensional groups / A. Wagner // Boll. Un. Mat. Ital. – 1978. – Vol. A 15,

№.5. – P. 431–439.

[2] *Miller, G.* On the groups generated by two operators /G. Miller // Bull. Amer. Math. Soc. – 1901. – Vol. 7. – P. 424–426.

[3] *Dala Volta, F.* Grouppi sporadici generati da tre in involuzion / F. Dala Volta // RILS A 119. – 1985. – P. 65–87.

[4] *Malle, G.* Generation of classical groups / G. Malle, J. Saxl, T. Weigel // Geom. Dedicata. – 1994. – Vol. 22, №.2. – P. 675–685.

[5] *Нужин, Я.Н.* Порождающие элементы простых групп и их приложения: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Я.Н. Нужин; Красноярский гос. тех. ун.-т. – Красноярск, 1996. – 150 с.

[6] Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). – 17-е изд., дополненое. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010. – 219 с.

[7] *Нужин, Я.Н.* Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем характеристики 2 / Я.Н. Нужин // Алгебра и логика. – 1990. – Т. 29, №2. – С. 192–206.

[8] *Нужин, Я.Н.* Порождающие тройки инволюций знакопеременных групп / Я.Н. Нужин // Матем. заметки. – 1990. – Т. 51, №4. – С. 91–95.

[9] *Нужин, Я.Н.* Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. I / Я.Н. Нужин // Алгебра и логика. – 1997. – Т. 36, №1. – С. 77–96.

[10] *Нужин, Я.Н.* Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. II / Я.Н. Нужин // Алгебра и логика. – 1997. – Т. 36, №4. – С. 422–440.

[11] *Nuzhin, Ja.N.* Generating elements of simple groups and their applications / Ja.N. Nuzhin // Proceedings of III International Conference on algebra of memory M.I.Kargapolov (23-28 August, 1993). – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1996. — P. 101–120.

[12] *Мазуров, В.Д.* О порождении спорадических простых групп тремя инволюциями, две из которых перестановочны / В.Д. Мазуров // Сиб. матем. журн. – 2003. – Т. 44, №1. – С. 193–198.

[13] *Тимофеенко, А.В.* О строго вещественных элементах конечных групп / А.В. Тимофеенко // Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Т. 11, № 2. – С. 209–218.

[14] *Шмидт, В.А.* О порождающих множествах инволюций знакопеременных и спорадических групп / В.А. Шмидт // Материалы XXXIV научной студенческой конф.: Сб. ст. – Красноярск: Красноярский гос. ун-т, 2001. – С. 139–144.

[15] *Ward, J.M.* Generation of simple groups by conjugate involutions: PhD Thesis. / J.M. Ward; Queen Mary college, University of London. – 2009. – 193 p.

[16] *Fricke, R.* Vorlesungen uber die Theore der Elliptischen Modul Funktionen / R. Fricke, F. Klein. – B. 1,2. – Leipzig: Teubner, 1890, 1892.

[17] *Tamburini, M.C.* Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute / M.C. Tamburini, P. Zucca // J. of Algebra. – 1997. – Vol. 195, №2. – P. 650–661.

[18] *Нужин, Я.Н.* О порождаемости группы $SL_n(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны / Я.Н. Нужин // Владикавказ. матем. журн. – 2008. – Т. 10, вып. 1. – С. 68–74.

[19] *Стейнберг Р.,* Лекции о группах Шевалле / Р. Стейнберг. – М.: Мир, 1975. – 262 с.

[20] *Романовский, Н.С.* Подгруппы, лежащие между специальными линейными группами над кольцом и его подкольцом / Н.С. Романовский // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6, №3. – С. 335–345.

[21] *Шмидт, Р.А.* О подгруппах полной линейной группы над полем частных кольца главных идеалов / Р.А. Шмидт // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1979. – Т. 86. – С. 185–187.

[22] *Шмидт, Р.А.* О подгруппах полной линейной группы над полем частных дедекиндова кольца / Р.А. Шмидт // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1979. – Т. 94. – С. 119–130.

[23] *Шмидт, Р.А.* О подгруппах полной линейной группы над полем частных кольца Безу / Р.А. Шмидт // Структурные свойства алгебраических систем. – Нальчик: Кабардино–Балкарский гос. ун-т, 1981. – С. 133–135.

[24] *Шкуратский, А.И.* О подгруппах симплектической группы над полем частных евклидова кольца / А.И. Шкуратский // Алгебра и логика. – 1984. – Т. 23, №5. – С. 578–596.

[25] *Нужин, Я.Н.* О группах, лежащих между группами Шевалле над различными кольцами / Я.Н. Нужин // Деп. ВИНИТИ. – 5.12.84. – №7764–84.

[26] *Нужин, Я.Н.* Промежуточные подгруппы групп Шевалле над полем частных кольца главных идеалов / Я.Н. Нужин, А.В. Якушевич // Алгебра и логика. – 2000. – Т. 39, №3. – С. 199–206.

[27] *Левчук, В.М.* Параболические подгруппы некототорых ABA - групп / В.М. Левчук // Матем. заметки. – 1982. – Т. 31, №4 – С. 509–525.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[28] *Дубинкина (Моисеенкова), Т.В.* Об одном свойстве группы $SL_3(2^n)$ / Т.В. Дубинкина // Материалы XVI межвузовской научно-технической конф., посвященной 370-летию г. Красноярска. Часть I (секция "Теория групп и приложения"). – Красноярск: КрасГАСА, 1998. – С 5.

[29] *Дубинкина (Моисеенкова), Т.В.* Об одном свойстве группы $SU_3(2^{2n})$ / Т.В. Дубинкина // Симметрия в естествознании: Междунар. конф. 23–29 августа 1998 г.: Тезисы докладов. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 1998. – С. 52-53.

[30] *Дубинкина (Моисеенкова), Т.В.* Об одном свойстве групп $SL_3(2^n)$, $SU_3(2^{2n})$ / Т.В. Дубинкина // Вестник Красноярского гос. тех. ун-та. – Вып. 16: Математические методы и моделирование. – 1999. – С. 19-34.

[31] *Моисеенкова, Т.В.* Порждающие мультиплеты инволюций групп $SL_n(\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z})$/ Т.В. Моисеенкова // Алгебра и ее приложения: Труды Междунар. алгебраической конф., посвященной 80-летию со дня рождения А. И. Кострикина. – Нальчик: Кабардино-Балкарский гос. ун-т, ИММ УрО РАН, 2009. – С. 96–97.

[32] *Moiseenkova, T.V.* The Ivasava decomposition and intermediate subgroups of the Steinberg groups over the field of fractions of a principal ideal ring / T.V. Moiseenkova, Ya.N. Nuzhin // Science in China Series A: Mathematics. – Feb., 2009. – Vol 52, №2, – P. 318–322.

[33] *Моисеенкова, Т.В.* Разложение Ивасавы групп Стейнберга над полем частных кольца главных идеалов / Т.В. Моисеенкова, Я.Н. Нужин // Труды XIII Междунар. конф. по эвентологической математике и смежным вопросам. – Красноярск: Красноярский гос. торг.-эконом. ин-т, СФУ, 2009. – С. 132–134.

[34] *Моисеенкова, Т.В.* Порождающие мультиплеты инволюций групп $SL_n(\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z})$ / Т.В. Моисеенкова // Труды института математики и механики УрО РАН. – Том 16, №3. – 2010. – С. 195–198.

[35] *Моисеенкова, Т.В.* Промежуточные подгруппы групп Стейнберга над полем частных кольца главных идеалов / Т.В. Моисеенкова // Алгебра, логика и приложения: Тезисы докладов Междунар. конф. – Красноярск: СФУ, 2010. – С. 64.