

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



МИХАЛКИН ЕВГЕНИЙ НИКОЛАЕВИЧ

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ  
ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант  
д.ф.-м.н., профессор  
Цих Август Карлович

Красноярск – 2015

# Оглавление

Введение	5
<b>1. Степенные ряды и интегральные представления для общей алгебраической функции</b>	<b>26</b>
1.1 Формулы Меллина и Биркелана . . . . .	27
1.2 Решение уравнения (1.1) с помощью интеграла по отрезку . . .	28
1.3 Решение уравнения (1.4) с помощью интеграла по контуру . . .	33
1.4 Представление решения триномиального уравнения обобщенным гипергеометрическим рядом . . . . .	38
1.5 Случай кубического уравнения: соотношение с формулой Кардано	43
1.6 Уравнение четвертой степени: нелинейная связь с гипергеометрической функцией Гаусса . . . . .	45
1.7 Роль дискриминанта в формуле для решения тетраномиального кубического уравнения . . . . .	47
<b>2. Монодромия общей алгебраической функции</b>	<b>49</b>
2.1 Монодромия общей алгебраической функции вблизи области $D$	50
2.1.1 Область сходимости гипергеометрического ряда, представляющего решение общего алгебраического уравнения	50
2.1.2 Понятие амебы алгебраического множества . . . . .	51
2.1.3 Касание разрезов $\Sigma_{\pm}$ дискриминантного множества . . .	52

2.1.4	Примыкание разрезов $\Sigma_{\pm}$ к области $D$ . . . . .	56
2.1.5	Монодромия для $y(x)$ вблизи области $D$ . . . . .	59
2.1.6	Монодромия решений триномиального уравнения . . . . .	63
2.2	Логарифмический метод аналитического продолжения общей алгебраической функции . . . . .	68
2.2.1	Идея логарифмического метода на примере триномиального уравнения . . . . .	69
2.2.2	Понятие коамебы и область сходимости интеграла Меллина-Барнса . . . . .	71
2.2.3	Формулировки теорем об аналитическом продолжении . . . . .	73
2.2.4	Доказательство Теоремы 12 . . . . .	76
2.2.5	Доказательство Теоремы 11 . . . . .	81

### **3. Структура классического дискриминанта и его нулевого множества . . . . . 85**

3.1	Общие факты о структуре дискриминанта и дискриминантного множества . . . . .	86
3.1.1	Многогранник Ньютона для дискриминанта . . . . .	86
3.1.2	Приведенные дискриминанты и параметризации их нулевых множеств . . . . .	89
3.2	Срезки дискриминанта на грани его многогранника Ньютона . . . . .	91
3.2.1	Грани многогранника Ньютона дискриминанта, являющиеся призмами . . . . .	91
3.2.2	Факторизуемость срезов дискриминанта на гипергранни его многогранника Ньютона и асимптоты некоторых стратов самопересечения . . . . .	97
3.3	$A$ -дискриминантные множества . . . . .	108

3.4	Сингулярные страты каспидального типа для классического дискриминанта . . . . .	113
3.4.1	Амебы некоторых стратов приведенного дискриминантного множества . . . . .	115
3.4.2	Критические страты параметризации $\Psi_{0n}$ классического приведенного дискриминантного множества $\nabla_{0n}$ . . . . .	119
3.4.3	Равенство стратов $\mathcal{M}_{0n}^{j+2}$ и $\mathcal{C}^j$ . . . . .	126
3.4.4	Параметризации стратов $\mathcal{M}_{pq}^j$ . . . . .	131
3.4.5	Доказательство Теоремы 17 . . . . .	136
<b>4.</b>	<b>Формулы для особых точек общих алгебраических поверхностей</b>	<b>143</b>
4.1	Формула для особых точек общей алгебраической гиперповерхности . . . . .	144
4.2	Кратные решения общей системы из $n$ полиномиальных уравнений от $n$ неизвестных . . . . .	152
4.2.1	О дискриминантном множестве системы $n$ полиномов Лорана от $n$ переменных . . . . .	152
4.2.2	Формулы для кратных решений общей системы из $n$ полиномиальных уравнений от $n$ неизвестных . . . . .	157
	<b>Заключение</b>	<b>160</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>161</b>

# Введение

Функция, которая связана с одной или несколькими независимыми переменными алгебраическим уравнением, называется *алгебраической*. После появления результатов Абеля (1824) и Галуа (1830) о невозможности решения в радикалах общего алгебраического уравнения степени  $\geq 5$  все внимание в исследовании такого уравнения было обращено к аналитическим методам решений. Идея такого перехода была подана еще Виетом в 16 веке, но лишь в 1858 г. Эрмит [77], [78] и Кронекер [88], независимо друг от друга, осуществили идею Виета. А именно, им удалось выразить решение уравнения

$$y^5 + 5y = a$$

(к которому сводится любое уравнение пятой степени с помощью преобразований Чирнгауза [106], см. также [27], [39]) через модулярную эллиптическую функцию переменного  $a$ . Следующий успех в проблеме поиска решений уравнений высших степеней был достигнут в 20 веке. Так, в 1921 г. Меллином [92] было найдено решение для приведенного алгебраического уравнения

$$y^n + x_{n-1}y^{n-1} + \dots + x_1y - 1 = 0 \tag{0.1}$$

в терминах гипергеометрических рядов переменных  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , а также посредством кратных интегралов Меллина-Барнса. Отметим, что *общее алгебраическое уравнение  $n$ -ой степени* записывается в виде

$$a_n y^n + \dots + a_1 y + a_0 = 0. \tag{0.2}$$

Полную аналитическую функцию решений этого уравнения называют *общей* (*универсальной*) алгебраической функцией. Она обладает свойством двойной однородности [97], и потому фактически зависит лишь от  $n - 1$  переменных  $x_1, \dots, x_{n-1}$ . Иными словами, достаточно рассмотреть уравнение (0.1) или уравнение вида

$$x_n y^n + \dots + y^q + \dots + y^p + \dots + x_1 y + x_0 = 0, \quad (0.3)$$

где коэффициенты при любой паре мономов фиксированы. В случае  $p = 0, q = n$  мы получаем уравнение (0.1), где знак «минус» перед единицей взят для удобства. Биркелан [64], [65] распространил результат Меллина на уравнения (0.3) с произвольными парами  $p, q$ , предъявив с помощью метода Лагранжа степенные ряды гипергеометрического типа для решений этого уравнения.

Следующим этапом развития теории алгебраических функций явился результат Умемуры [46] о том, что уравнение любой степени можно решить с помощью тэта-функций, тем самым, обобщающий результат Эрмита-Кронекера.

Новый всплеск внимания к аналитическим аспектам теории алгебраических функций возник в 2000 году, когда Семушева и Цих [43], и независимо от них, Штурмфельс [102] показали возможность реализации аналитического продолжения общей алгебраической функции, используя понятия гипергеометрических функций по Горну [82] и Гельфанду-Капранову-Зелевинскому [21], соответственно. Теория гипергеометрических функций и связанные с ней теории дискриминантов и многогранников были глубоко изучены в конце прошлого века (см. книги [15], [73], [41], а также списки цитированной литературы в них). Оказалось, что сингулярностями гипергеометрических функций являются дискриминантные множества общих алгебраических гиперповерхностей и только они.

По очевидным причинам дискриминант  $\Delta(a)$  алгебраического уравнения

(0.2) играет важную роль при описании структуры и свойств общей алгебраической функции  $y(a)$ , например, потому, что нули дискриминанта составляют множество сингулярностей для  $y(a)$ . Структура дискриминантного множества  $\nabla = \{a : \Delta(a) = 0\}$  настолько богатая, что она уже многие годы привлекает пристальное внимание алгебраических геометров [73], а также специалистов по теории сингулярностей [1], [14] и теории представлений [108]. Видимо, Д. Гильберт был первый, кто определил сингулярную стратификацию дискриминантного множества [81]. Несомненно, столь глубокое проникновение им вглубь структуры дискриминантного множества было связано с вопросом о структуре общей алгебраической функции, в частности, с 13-ой проблемой Гильберта (1900) о суперпозиции общей алгебраической функции посредством функций двух переменных.

Несмотря на впечатляющие многовековые достижения в теории алгебраических функций, в ней остается много неисследованных вопросов. Например, формулы Меллина и Биркелана имеют весьма узкие области сходимости, и этот факт ограничивает диапазон их применений; результаты Эрмита, Кронекера и Умемурэ устанавливают лишь мост между алгебраическими функциями и тэта-функциями, но до сих пор аппарат тэта-функций не приспособлен для непосредственного оперирования с алгебраическими функциями. Усилить данный тезис о неисследованности многих вопросов теории алгебраических функций можно словами из статьи А.Г. Витушкина [17]:

*«Теорема Колмогорова о суперпозициях непрерывных функций опровергает гипотезу 13-ой проблемы Гильберта. Однако, алгебраическое ядро проблемы осталось незатронутым. Можно рассчитывать на положительное решение проблемы в классе аналитических функций (т.е. на возможность суперпозирования общей алгебраической функции посредством аналитических функций*

двух переменных). Таким образом, проблема (о структуре общей алгебраической функции) остается открытой и диапазон вопросов по большому счету столь же широк, как и в начале XX века».

Настоящая диссертационная работа посвящена аналитическим аспектам теории алгебраических функций.

**Цель работы:** Получить новые аналитические формулы в виде степенных рядов и интегралов с параметрами для решения общего алгебраического уравнения, разработать конструктивные методы описания монодромии общей алгебраической функции, исследовать сингулярную стратификацию и дифференциальную геометрию ее дискриминантного множества. Применить полученные результаты к эффективному нахождению сингулярных точек общих алгебраических гиперповерхностей.

В первой главе приводятся представления для решений уравнений (0.1), (0.3) в виде одномерных ветвящихся интегралов (так называются интегралы, у которых подынтегральные выражения являются многозначными функциями). Эти представления получаются из интегральной формулы Меллина для решения  $y(x)$  уравнения (0.1). Рассмотрим несколько другую запись этого уравнения, нумеруя коэффициенты в обратном порядке и позволяя быть нулевыми некоторым из них:

$$y^n + x_1 y^{n_1} + \dots + x_l y^{n_l} - 1 = 0, \quad n > n_1 > \dots > n_l > 0. \quad (0.4)$$

Введем два целочисленных вектора

$$\alpha = (n_1, \dots, n_l), \quad \beta = (n - n_1, \dots, n - n_l).$$

Интегральная формула Меллина [92] выражает ветвь  $y = y_0(x)$  решения уравнения (0.4), выделенную вблизи  $x = 0$  условием  $y_0(0) = 1$ , в виде интеграла

Меллина-Барнса

$$y_0(x) = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int_{\gamma+i\mathbb{R}^l} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{\langle\alpha, \zeta\rangle}{n}\right) \Gamma(\zeta_1) \dots \Gamma(\zeta_l)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{\langle\beta, \zeta\rangle}{n} + 1\right)} x^{-\zeta} d\zeta, \quad (0.5)$$

где используется мультииндексная запись

$$x^{-\zeta} = x_1^{-\zeta_1} \dots x_l^{-\zeta_l}, \quad d\zeta = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_l.$$

Следуя Меллину, указанную ветвь  $y_0(x)$  называют *главным решением* уравнения (0.4). Отметим, что все остальные ветви получаются из  $y_0(x)$  по формуле

$$y_j(x) = \varepsilon_j y_0(\varepsilon_j^{n_1} x_1, \dots, \varepsilon_j^{n_l} x_l), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (0.6)$$

где  $\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi j}{n}i}$  – первообразные корни из единицы.

Заметим, что в интеграле (0.5) подынтегральное выражение является хотя и трансцендентной функцией, но однозначной, а множество интегрирования неограничено. В §1.2 приводится представление для главного решения в виде ветвящегося интеграла по отрезку. Введем для краткости письма обозначение

$$F_{\pm}(x; t) = 1 - \sum_{k=1}^l e^{\pm \frac{n_k}{n} \pi i} x_k t^{\frac{n_k}{n}} (1-t)^{\frac{n-n_k}{n}}$$

для пары функций, линейных относительно  $x$ .

**Теорема 1.** *Главное решение  $y_0(x)$  уравнения (0.4) допускает представление в виде интеграла*

$$y_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 \frac{t^{\frac{1-n}{n}}}{(1-t)^{\frac{1+n}{n}}} \left[ e^{\frac{\pi i}{n}} \ln F_+(x; t) - e^{-\frac{\pi i}{n}} \ln F_-(x; t) \right] dt, \quad (0.7)$$

где ветви логарифма определены в области пространства  $\mathbb{C}^l$  переменного  $x = (x_1, \dots, x_l)$ , полученной удалением из  $\mathbb{C}^l$  двух семейств комплексных гиперплоскостей

$$\Sigma_{\pm} = \bigcup_{t \in (0;1)} \{x : F_{\pm}(x; t) = 0\},$$

и выбираются условием  $\ln 1 = 0$ .

Отметим, что интеграл (0.7) сходится благодаря тому факту, что подинтегральное выражение в квадратных скобках обращается в нуль в точке  $t = 1$  с порядком, достаточным для компенсации неинтегрируемого множителя  $(1 - t)^{-\frac{1+n}{n}}$  перед скобкой.

В Теореме 2 формула (0.7) модифицируется применительно к другому приведенному уравнению. В модифицированной формуле фигурирует похожий ветвящийся интеграл, однако, множество интегрирования в нем – цикл (т.е. замкнутый контур).

В оставшейся части первой главы приводятся некоторые формулы решений триномиальных и тетраномиальных уравнений, которые не удалось найти в литературе, но представляются нам интересными. Например, формула решения кубического уравнения в параграфе 1.7 показывает, как решение конструируется из своего сужения на дискриминантную кривую.

Будучи однопараметрическими семействами комплексных гиперплоскостей, множества  $\Sigma_{\pm}$  в Теореме 1 представляют собой вещественные гиперповерхности в  $\mathbb{C}^l$ . Фактически они являются разрезами в пространстве  $\mathbb{C}^l$ , примыкающими к дискриминантному множеству уравнения (0.4). Указанные разрезы вместе с соотношениями (0.6) для ветвей уравнения (0.4) позволяют получить важную информацию о монодромии решения  $y(x)$ .

Исследованию указанной монодромии посвящена **вторая глава** диссертации. Вначале нам будет удобнее рассматривать приведенное уравнение (0.1). Его дискриминантное множество  $\nabla$  допускает следующую  $n$ -значную параметризацию  $x = \Psi(s)$ :

$$x_k = \Psi_k(s) = \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( -\frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-1; \quad s \in \mathbb{CP}_{n-2}, \quad (0.8)$$

где

$$\alpha = (n-1, n-2, \dots, 1), \quad \beta = (1, 2, \dots, n-1).$$

Отображение (0.8) является обращением логарифмического отображения Гаусса  $\gamma : \nabla \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_{n-2}$  дискриминантного множества  $\nabla$ . Каждая из  $n$  ветвей  $\Psi^{(j)}(s)$  параметризации  $\Psi(s)$  определяет так называемую «струну»  $\mathcal{S}^{(j)}$ , которая получается сужением  $\Psi^{(j)}(s)$  на вещественное подпространство  $\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-2}$ . Область сходимости  $D$  гипергеометрического ряда (сходящегося в окрестности  $x = 0$  и имеющего вид (0.18) при  $\mu = 1$ ), представляющего решение уравнения (0.1), примыкает к дискриминантному множеству  $\nabla$  (см. Рис. 1) по части границы  $\partial D$ , состоящей из  $n$  струн  $\mathcal{S}^{(0)}, \mathcal{S}^{(1)}, \dots, \mathcal{S}^{(n-1)}$ . Будучи поликруговой, область  $D$  определяется условиями лишь на модули переменных  $x_j$ , при этом ее граница  $\partial D$  параметризуется в виде

$$|x_k| = |\Psi_k(s)|, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad s \in \mathbb{R}_+^{n-1}.$$

Согласно Предложению 2.3, комплексная прямая, выпущенная из начала координат  $x = 0$  через произвольную точку на любой струне  $\mathcal{S}^{(j_0)}$ , пересекает каждую из струн  $\mathcal{S}^{(j)}$  в единственной точке. На каждой такой комплексной прямой мы можем выбрать  $n$  петель  $\sigma_j$  с началом в  $x = 0$ , окружающих струны  $\mathcal{S}^{(j)}$ .

Одним из основных результатов второй главы является следующая теорема о монодромии  $y(x)$ . Напомним, что все ветви  $y_j(x)$  многозначной функции  $y(x)$  определяются по главной ветви  $y_0(x)$  формулой (0.6).

**Теорема 7.** *При продолжении через границу  $\partial D$  области  $D$  всякая ветвь  $y_j(x)$  решения уравнения (0.1) имеет ветвление лишь в паре струн  $\mathcal{S}^{(j)}, \mathcal{S}^{(j-1)}$ , причем второго порядка.*

Приведем геометрическую интерпретацию вышесказанного для кубическо-

го уравнения

$$y^3 + x_2 y^2 + x_1 y - 1 = 0, \quad (0.9)$$

дискриминант которого есть полином

$$\Delta(x_1, x_2) = 27 + 4x_1^3 - 4x_2^3 + 18x_1 x_2 - x_1^2 x_2^2.$$

Дискриминантное множество  $\nabla = \{x : \Delta(x) = 0\}$  удобно изображать в логарифмической шкале, т.е. рассматривать образ  $\text{Log}\nabla$  относительно отображения

$$\text{Log} : (x_1, \dots, x_{n-1}) \longrightarrow (\log |x_1|, \dots, \log |x_{n-1}|).$$

Образ  $\text{Log}\nabla$  называют *амебой* гиперповерхности  $\nabla$ . В случае кубического уравнения (0.9) амеба для  $\nabla$  есть темноокрашенная часть на Рис. 1, а  $\text{Log}$ -образ области сходимости  $D$  соответствующего гипергеометрического ряда изображается светлоокрашенной частью.

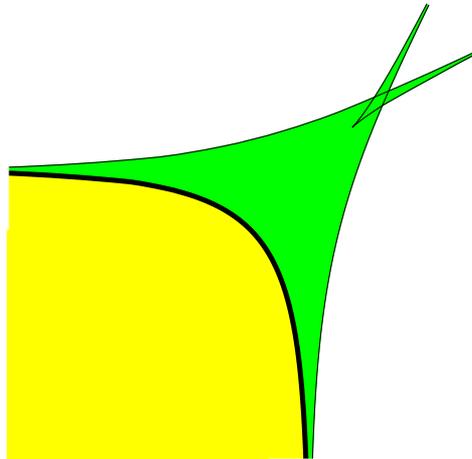


Рис. 1. Примыкание области  $D$  к  $\nabla$  в логарифмической шкале

Параметризация  $\nabla$  определяет три струны  $\mathcal{S}^{(0)}, \mathcal{S}^{(1)}, \mathcal{S}^{(2)}$ , которые на рисунке проектируются в жирную кривую. Теорема 7 утверждает, что при продолжении через границу  $\partial D$  каждое решение  $y_j(x)$  уравнения (0.9) имеет ветвление лишь в точках двух струн. В случае общего уравнения (0.1) таких струн будет

$n$ . Однако, при продолжении через  $\partial D$  любое из решений  $y_j(x)$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , по-прежнему, имеет ветвление лишь в двух струнах из  $n$ .

Для триномиального уравнения

$$y^n + xy^m - 1 = 0, \quad 0 < m < n \quad (0.10)$$

Теорема 7 позволяет описать полную монодромию  $y(x)$ . Не ограничивая общности можно считать, что  $m$  и  $n$  взаимно просты. В этом случае дискриминантное множество  $\nabla$  уравнения (0.10) составляет следующая последовательность комплексных чисел

$$x_j = \frac{e^{\pi i \frac{m+2j}{n}}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}}, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

лежащих на одной окружности. Множества  $\Sigma_{\pm}$  представляют собой пару радиальных лучей (разрезов) (см. Рис. 2), исходящих из дискриминантных точек  $x_0$  и  $x_{n-m}$ .

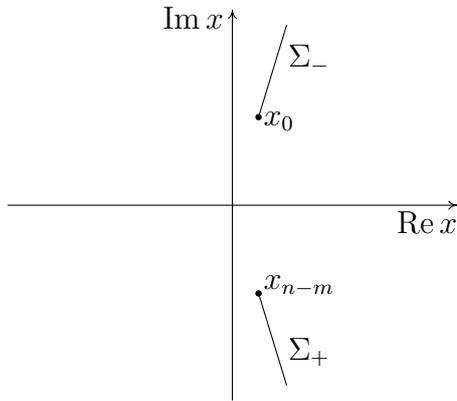


Рис. 2. Разрезы  $\Sigma_+$  и  $\Sigma_-$  для триномиального уравнения (0.10)

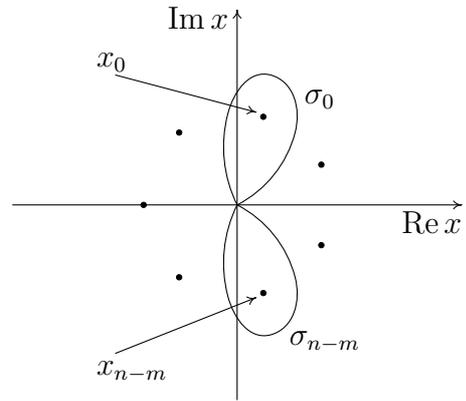


Рис. 3. Образующие петли дополнения к дискриминантному множеству

Совокупность петель  $\sigma_k$ , каждая из которых проходит через  $x = 0$  и окружает лишь точку  $x_k$ , порождает фундаментальную группу дополнения  $\mathbb{C} \setminus \nabla$  дискриминантного множества.

**Теорема 8.** Если  $m$  и  $n$  взаимно просты, то всякая ветвь  $y_j(x)$  триномиального уравнения (0.10) имеет ветвление (причем второго порядка) лишь в паре точек

$$\frac{e^{\frac{m}{n}(1-2j)\pi i}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}} = x_{-mj(\bmod n)}, \quad \frac{e^{\frac{m}{n}(-1-2j)\pi i}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}} = x_{-m(j+1)(\bmod n)}.$$

При этом, ветвь  $y_j$  при обходе петли  $\sigma_{-mj(\bmod n)}$  переходит в ветвь  $y_{(j-1)(\bmod n)}$ , а при обходе петли  $\sigma_{-m(j+1)(\bmod n)}$  — в ветвь  $y_{(j+1)(\bmod n)}$ .

Отметим, что в рассматриваемом случае (когда  $m$  и  $n$  взаимно просты) группа монодромии решения  $y(x)$  порождается смежными транспозициями

$$(0, 1), (1, 2), \dots, (n-2, n-1).$$

Хорошо известно, что указанные транспозиции порождают всю симметрическую группу подстановок  $S_n$ .

В параграфе 2.2 конструируется новый, так называемый *логарифмический* метод аналитического продолжения ветвей общей алгебраической функции. Идея этого метода основана на том, что степенные ряды (с центром в нуле) для ветвей  $y(x)$  имеют поликруговые области сходимости, а интегралы Меллина-Барнса для них имеют секториальные области сходимости. Очевидно, любая поликруговая область имеет непустое пересечение с любой секториальной областью. Поэтому каждый степенной ряд для ветви общей алгебраической функции автоматически продолжается в любой сектор, где ветвь представляется интегралом Меллина-Барнса, и обратно. Такой метод аналитического продолжения мы называем логарифмическим, поскольку в нем каждый шаг непосредственного аналитического продолжения реализуется в пересечении областей

$$\text{Log}^{-1}(D') \cap \text{Arg}^{-1}(D''),$$

где  $D'$  – это Log-образ области сходимости ряда, а  $D''$  – это Arg-образ области сходимости интеграла Меллина-Барнса; здесь

$$\text{Arg} : (x_1, \dots, x_{n-1}) \longrightarrow (\arg x_1, \dots, \arg x_{n-1}).$$

Тот факт, что отображения Log и Arg являются вещественной и мнимой частями комплексного логарифма, и объясняет терминологию «логарифмического метода» аналитического продолжения.

Поясним основную идею этого метода на примере кубического уравнения

$$y^3 + xy - 1 = 0.$$

Согласно (0.5) главное решение этого уравнения допускает представление в виде интеграла

$$y_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+i\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}z)\Gamma(z)}{\Gamma(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z + 1)} x^{-z} dz, \quad (0.11)$$

который сходится в секторе  $|\arg x| < \frac{\pi}{3}$ . Здесь  $\gamma + i\mathbb{R}$  – вертикальная прямая, разделяющая полюсы гамма-функций, стоящих в числителе. Вычисляя интеграл (0.11) как сумму вычетов в полюсах  $z = -k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , происходящих от функции  $\Gamma(z)$ , получаем ряд

$$y_0(x) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}k)}{\Gamma(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}k) k!} x^k, \quad (0.12)$$

сходящийся в круге  $|x| < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ . Вычисляя же (0.11) как сумму вычетов в полюсах  $z = 1 + 3k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , происходящих от  $\Gamma(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}z)$ , приходим к ряду

$$y(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + 3k)}{\Gamma(2 + 2k) k!} \frac{1}{(-x)^{3k}}, \quad (0.13)$$

который сходится при  $|x| > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ , т.е. вне указанного круга.

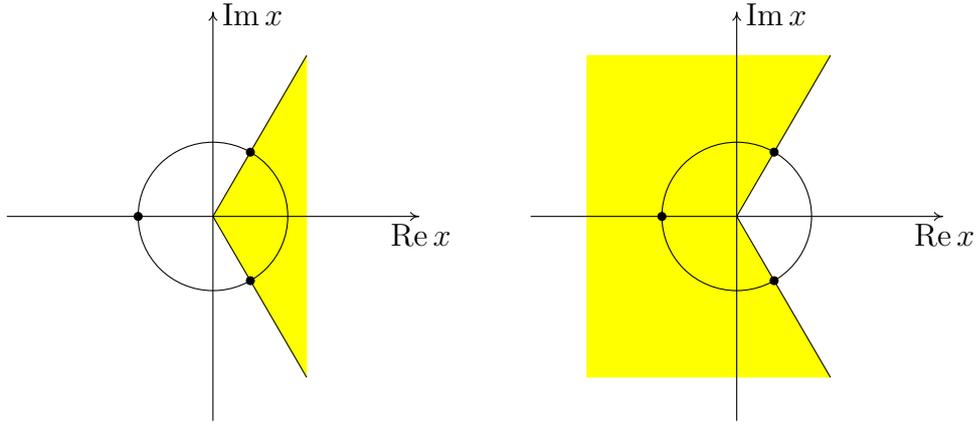


Рис. 4. Области сходимости интегралов (0.11) и (0.14)

С другой стороны, согласно [58], (отрицательная) степень  $\frac{1}{y_0^\mu(x)}$ ,  $\mu > 0$  решения рассматриваемого уравнения допускает представление в виде интеграла Меллина-Барнса

$$\frac{1}{y_0^\mu(x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+i\mathbb{R}} \frac{\frac{\mu}{3}\Gamma(z)\Gamma(\frac{\mu}{3} - \frac{2z}{3})}{\Gamma(\frac{\mu}{3} + 1 + \frac{z}{3})} (-x)^{-z} dz, \quad (0.14)$$

сходящегося в секторе  $\frac{\pi}{3} < \arg x < \frac{5\pi}{3}$ .

Заметим, что если  $y(x)$  является решением рассматриваемого кубического уравнения, то  $y(x)$  удовлетворяет уравнению

$$y(x) = -\frac{x}{y(x)} + \frac{1}{y^2(x)}. \quad (0.15)$$

Вычисляя интеграл (0.14) как сумму вычетов в полюсах  $z = \frac{\mu}{2} + \frac{3}{2}k$ , и подставляя в эту сумму получаемые ряды при  $\mu = 1$  и  $\mu = 2$ , получим ряд

$$y(x) = \frac{1}{2}(-x)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k)}{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}k)k!} \left(-\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}k}, \quad |x| > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}. \quad (0.16)$$

Если будем вычислять (0.14) как сумму вычетов в полюсах функции  $\Gamma(z)$ , расположенных левее контура интегрирования, то вновь получим ряд (0.12).

Таким образом, для рассматриваемого кубического уравнения мы получили три степенных ряда, сходящихся в круге  $|x| < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$  (это главное решение

(0.12) рассматриваемого уравнения, и два других, соответствующих значениям  $j = 1, 2$ ), а также три ряда, сходящихся вне указанного круга (это ряд (0.13) и две ветви ряда (0.16)). В силу того, что области сходимости рассматриваемых рядов имеют непустое пересечение с секторами, в которых аналитичны интегралы для  $y(x)$  и  $\frac{1}{y^\mu(x)}$ , то ряды (0.13) и (0.16) являются аналитическим продолжением ряда (0.12) из круга  $|x| < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$  в его внешность. При этом (0.13) продолжается через сектор  $|\arg x| < \frac{\pi}{3}$  (см. Рис. 4 слева), а ряд (0.16) – через сектор  $\frac{\pi}{3} < \arg x < \frac{5\pi}{3}$  (см. Рис. 4 справа).

Общая схема логарифмического метода продолжения для решения уравнения

$$y^n + x_1 y^{n_1} + \dots + x_l y^{n_l} - 1 = 0. \quad (0.17)$$

следующая. Мы исходим из гипергеометрического ряда для степени  $\mu > 0$  главного решения:

$$y_0^\mu(x) = \frac{\mu}{n} \sum_{|k| \geq 0} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\left(\frac{\mu}{n} + \frac{n_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n_l}{n} k_l\right)}{k_1! \dots k_l! \Gamma\left(\frac{\mu}{n} - \frac{n_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n_l}{n} k_l + 1\right)} x_1^{k_1} \dots x_l^{k_l}. \quad (0.18)$$

Этот ряд сходится в упомянутой выше области, содержащей начало координат  $x = 0$ .

Ясно, что уравнение (0.17) определяется набором показателей  $0, n_1, \dots, n_l, n$  входящих в него мономов, т.е. выделенными точками отрезка  $[0, n]$ . Под разбиением  $\tau$  отрезка  $[0, n]$  будем понимать совокупность смежных подотрезков, полученных делением  $[0, n]$  точками подмножества из  $\{n_1, \dots, n_l\}$ . Среди таких подмножеств рассматривается и пустое множество, в этом случае разбиение состоит из одного элемента, а именно, из  $[0, n]$ . На самом деле рассматриваемые разбиения – это триангуляции отрезка  $[0, n]$  с вершинами из набора чисел  $0, n_1, \dots, n_l, n$ . Известно [73], что существует биекция между множеством разбиений  $\{\tau\}$  и множеством вершин многогран-

ника Ньютона для дискриминанта  $\Delta(x)$  уравнения (0.17). В то же время, каждой вершине  $v$  многогранника Ньютона для  $\Delta(x)$  соответствует некоторая связная компонента  $E_v$  дополнения амебы дискриминантного множества  $\nabla = \{x : \Delta(x) = 0\}$  (см. [73]). Таким образом, мы имеем следующую цепочку соответствий:

$$\{\tau\} \longleftrightarrow \{v_\tau\} \longleftrightarrow \{E_\tau\}.$$

Часть соответствий  $\{\tau\} \longleftrightarrow \{E_\tau\}$  этой цепочки для уравнения пятой степени изображена на Рис. 5.

Для любой пары  $p, q \in \{0, 1, \dots, l, l+1\}$  упорядоченных ( $p < q$ ) номеров введем два вектора

$$b_p = \frac{1}{n_q - n_p}(-n_p, n_1 - n_p, \dots [p] \dots [q] \dots, n_{l+1} - n_p),$$

$$b_q = \frac{1}{n_q - n_p}(-n_q, n_1 - n_q, \dots [p] \dots [q] \dots, n_{l+1} - n_q),$$

где  $n_{l+1} = n$ . С помощью этих векторов определим выражение

$$A_k^{p,q} := \frac{\frac{\mu}{n_q - n_p} \Gamma\left(\frac{\mu}{n_q - n_p} + \langle b_p, k \rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{n_q - n_p} + \langle b_q, k \rangle + 1\right) k_0! \dots [p] \dots [q] \dots k_{l+1}!},$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – знак скалярного произведения, причем под  $k$  понимается вектор  $k = (k_0, k_1, \dots [p] \dots [q] \dots, k_{l+1})$ . В приведенных обозначениях справедлива

**Теорема 11.** *Для любой упорядоченной пары  $p, q \in \{0, 1, \dots, l+1\}$  ряд (0.18) допускает аналитическое продолжение в виде  $(n_q - n_p)$ -значного ряда Пюизо*

$$y_{p,q}^\mu(x) = \left(\frac{x_p}{x_q}\right)^{\frac{\mu}{n_q - n_p}} \sum_{|k| \geq 0} A_k^{p,q} \frac{(-1)^{k_0 + \langle b_p, k \rangle} x_p^{\langle b_q, k \rangle}}{x_q^{\langle b_p, k \rangle}} x_1^{k_1} \dots [p] \dots [q] \dots x_l^{k_l}. \quad (0.19)$$

Область сходимости  $D_{p,q}$  этого ряда содержит каждую из областей  $\text{Log}^{-1}(E_\tau)$ , для которой разбиение  $\tau$  содержит отрезок  $[n_p, n_q]$ . В каждой области  $\text{Log}^{-1}(E_\tau)$  сходится ровно  $n$  рядов  $y_{p,q}$ , если учитывать, что каждый ряд является  $(n_q - n_p)$ -значным. Тем самым (0.19) составляет полный

набор всех центрированных в нуле степенных разложений решения уравнения (0.17).

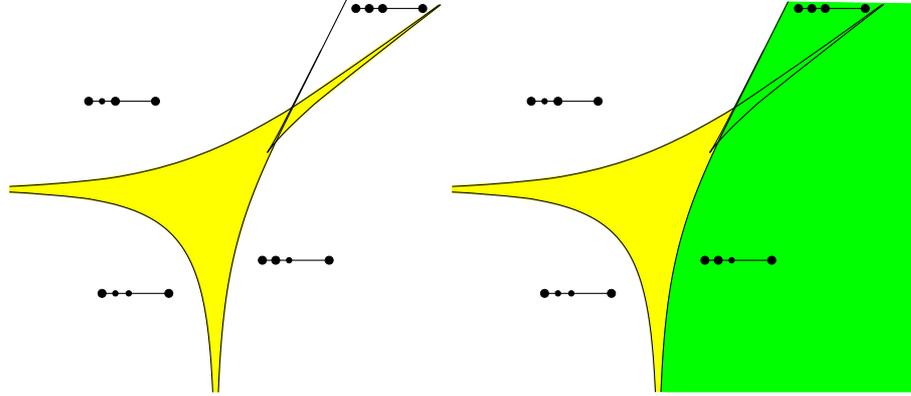


Рис. 5. Амеба дискриминанта уравнения  $y^5 + x_2y^2 + x_1y - 1 = 0$  и соответствие  $\{\tau\} \longleftrightarrow \{E_\tau\}$  (слева); примыкание  $\text{Log}(D_{0,1})$  к амебе (справа)

На Рис. 5 темноокрашенная зона  $\text{Log}(D_{0,1})$  содержит две компоненты связности дополнения амебы дискриминанта: одна из них соответствует разбиению  $[0, 1], [1, 5]$ , а другая – разбиению  $[0, 1], [1, 2], [2, 5]$ .

Для некоторых пар рядов из списка (0.19) можно предъявить конструктивное непосредственное аналитическое продолжение одного ряда в другой. Введем в  $(\mathbb{C} \setminus 0)^l$  следующие секториальные области (т.е. определяемые только условиями на аргументы  $\arg x_j = \theta_j$ ):

$$S = \text{Arg}^{-1} \left\{ |\theta_\nu| < \frac{\pi n_\nu}{n}, \nu \in I, |n_j \theta_k - n_k \theta_j| < \pi n_j \right\},$$

$$S' = \text{Arg}^{-1} \left\{ |\theta_\nu + \pi| < \frac{\pi n'_\nu}{n}, \nu \in I, |n'_k(\theta_j + \pi) - n'_j(\theta_k + \pi)| < \pi n'_k \right\},$$

где  $I$  – набор индексов  $\{1, \dots, l\}$ ;  $j, k \in I, j < k$ .

**Теорема 12.** Ряд  $y_{0,q}$  есть результат аналитического продолжения главного решения  $y_0$  из области  $D_{0,l+1}$  в  $D_{0,q}$  через сектор  $S$ , а  $y_{p,l+1}$  – результат аналитического продолжения  $y_0$  из  $D_{0,l+1}$  в  $D_{p,l+1}$  через сектор  $S'$ .

Перейдем к изложению результатов **третьей главы**, где исследуется син-

гулярная стратификация классического дискриминантного множества. Обозначим  $\mathcal{M}^j$  – подмножество пространства уравнений (0.2) степени  $n$  состоящее из таких  $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ , для которых уравнение имеет корни кратности  $\geq j$ . Эти подмножества образуют вложенную цепочку

$$\nabla = \mathcal{M}^2 \supset \mathcal{M}^3 \supset \dots \supset \mathcal{M}^n.$$

Каждое  $\mathcal{M}^{j+1}$  принадлежит множеству сингулярных точек  $\text{sing } \mathcal{M}^j$ , при этом страт  $S^j = \mathcal{M}^j \setminus \mathcal{M}^{j+1}$  состоит из точек, где  $\mathcal{M}^j$  либо неособо, либо самопересекается своими гладкими кусками. Поэтому мы называем  $\mathcal{M}^j$  *сингулярными стратами каспидального типа*.

Одним из основных результатов этой главы является

**Теорема 17.** *Страты  $\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^3, \dots, \mathcal{M}^n$  мономиальными преобразованиями сводятся к некоторым  $A$ -дискриминантным множествам  $\nabla_{A_2}, \nabla_{A_3}, \dots, \nabla_{A_n}$ .*

Напомним определение  $A$ -дискриминантного множества (см. [73], гл. 9). Речь идет о распространении уравнения (0.1) от одной неизвестной величины  $y$  на уравнение от  $k$  неизвестных  $y = (y_1, \dots, y_k)$ :

$$f(y_1, \dots, y_k) := \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A} a_\alpha y_1^{\alpha_1} \dots y_k^{\alpha_k} = 0, \quad (0.20)$$

где  $A \subset \mathbb{Z}^k$  – фиксированное конечное множество показателей, порождающее решетку  $\mathbb{Z}^k$  как аддитивную группу, а коэффициенты  $a_\alpha$  – переменные. Множество коэффициентов (оно же и множество уравнений (0.20), и множество полиномов Лорана  $f$  с показателями  $\alpha \in A$ ) пробегает пространство  $\mathbb{C}^A$ , размерность которого равна мощности  $A$ .

**Определение 0.1.** *Пусть  $\nabla^\circ$  – множество всех  $(a_\alpha) \in \mathbb{C}^A$ , для которых уравнение (0.20) имеет критические корни  $y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k$ , т. е. корни, в кото-*

рых градиент  $f$  равен нулю. Замыкание  $\overline{\nabla^\circ}$  называется  $A$ -дискриминантным множеством и обозначается  $\nabla_A$ .

В случае, когда  $k = 1$ ,  $A = \{0, 1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{Z}$ , множество  $\nabla_A$  превращается в классическое дискриминантное множество  $\nabla$  уравнения (0.2).

В формулировке Теоремы 17 каждое  $\nabla_{A_j}$  – это  $A_j$ -дискриминантное множество уравнения с  $j - 1$  неизвестными, при этом мощность каждого множества  $A_j$  равна  $n + 1$  и  $\nabla_{A_2} = \nabla$ . Например, страт  $\mathcal{M}^3$  для уравнения 4-ой степени мономиальным преобразованием сводится к дискриминантному множеству уравнения

$$a_{00} + a_{10}y_1 + a_{01}y_2 + a_{31}y_1^3y_2 + a_{63}y_1^6y_2^3 = 0.$$

В параграфе 3.4.2 описываются критические страты  $\mathcal{C}^j$  параметризации Горна-Капранова

$$\Psi_{0n} : \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2} \longrightarrow \nabla_{0n} \subset \mathbb{C}^{n-1}$$

для приведенного дискриминантного множества  $\nabla_{0n}$  (явное выражение для  $\Psi_{0n}$  определено формулой (3.10)). Первый страт  $\mathcal{C}^1$  определяется как множество критических значений параметризации  $\Psi_{0n}$ . Ранее в [97] было показано, что критические точки отображения  $\Psi_{0n}$  составляют некоторую гиперплоскость  $L_1 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2}$ , следовательно, первый критический страт  $\mathcal{C}^1$  параметризуется сужением  $\Psi_{0n}$  на  $L_1$ . Таким образом, можно определить страт  $\mathcal{C}^2$  критических значений этого сужения и далее действовать по индукции. Для формулировки итогового результата введем следующие гиперплоскости в  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2}$ :

$$L_j = \left\{ s : \sum_{i=j}^{n-1} i(i-1)\dots(i-(j-1))(n-i)s_i = 0 \right\},$$

где  $s = (s_1 : \dots : s_{n-1})$  – однородные координаты.

**Теорема 18.** Страты  $\mathcal{C}^j$  параметризуются сужениями  $\Psi_{0n}|_{L^j}$  на плоскости  $L^j = L_1 \cap \dots \cap L_j$ .

Связь критических стратов параметризации  $\Psi_{0n}$  с сингулярными стратами  $\mathcal{M}_{0n}^j$  дает доказываемая в § 3.4.3

**Теорема 19.** *Сингулярные страты  $\mathcal{M}_{0n}^{j+2} \subset \nabla_{0n}$  приведенного уравнения (3.8) совпадают с критическими стратами  $\mathcal{C}^j$  параметризации  $\Psi_{0n}$ .*

Таким образом, с учетом Теоремы 18, страты  $\mathcal{M}_{0n}^{j+2}$  параметризуются сужениями  $\Psi_{0n}|_{L^j}$ .

Приведем одно следствие Теоремы 17, касающееся задачи об алгебраических статистиках в рамках исследований по компьютерной биологии [95], [101]. Пусть  $X \subset (\mathbb{C}^*)^m$  – замкнутое неприводимое алгебраическое подмножество (определяющее статистическую модель, в которой роль семейства распределений вероятностей играет вещественный срез  $X \cap \mathbb{R}^m$ ). Ненулевой элемент  $s = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}^m$  определяет мономиальную функцию (функцию правдоподобия)

$$z^s = z_1^{s_1} \dots z_m^{s_m} : X \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

Обозначим через  $X_{sm}$  множество гладких точек  $X$ . *Степенью максимального правдоподобия* множества  $X$  называют число критических значений мономиальной функции  $z^s|_{X_{sm}}$  для достаточно общих  $s \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$  (заметим, что переходя к функции  $\log x^s$  мы сохраняем множество критических точек и можем их рассматривать не только для целых  $s$ ). В [101] Б. Штурмфельс поставил задачу геометрического описания алгебраических подмножеств  $X \subset (\mathbb{C}^*)^m$ , у которых степень максимального правдоподобия равна единице. Недавно в статье [84] было доказано, что степень максимального правдоподобия  $X$  равна единице тогда и только тогда, когда мономиальным преобразованием с конечными слоями  $X$  переводится в приведенное  $A$ -дискриминантное множество. С учетом результата [84], по Теореме 17 получаем такое

**Следствие 0.1.** Если  $q = p + 1$ , то степень максимального правдоподобия всех приведенных стратов  $\mathcal{M}_{pq}^j \cap (\mathbb{C}^*)^{n-1}$ ,  $j = 2, \dots, n$ , равна единице.

В заключительной **четвертой главе** приводятся формулы для особых точек общих алгебраических гиперповерхностей  $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^k$ , заданных уравнениями вида (0.20) от  $k$  неизвестных. Термин «общая алгебраическая гиперповерхность» означает, что в (0.20) коэффициенты переменные. Точка  $y$  называется *особой* для гиперповерхности  $V$ , если в ней многочлен  $f$  равен нулю вместе со своим градиентом. Таким образом, особые точки определяются системой уравнений

$$f(y) = \frac{\partial f}{\partial y_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0.$$

Другими словами, особые точки гиперповерхности  $V$  – это решения уравнения (0.20) на  $A$ -дискриминантном множестве  $\nabla_A$ ; такие решения также называем кратными. В частности, при  $k = 1$  имеем общее алгебраическое уравнение (0.2). Как мы знаем, с помощью элементарной замены это уравнение можно привести к уравнению

$$y^n + x_{n-1}y^{n-1} + \dots + x_1y + 1 = 0. \quad (0.21)$$

Для его дискриминантного множества  $\nabla$  имеется параметризация  $x = \Psi(s)$  вида (0.8), с помощью которой вычисляется сужение решения  $y(x)$  уравнения (0.21) на  $\nabla$ :

$$y(x) \Big|_{\nabla} = y(s) = \left( \frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Заметим, что параметризация дискриминантного множества представляет его нормализацию с помощью параметра  $s$ . Если пытаться записать формулу для сужения  $y(x) \Big|_{\nabla}$  в объемлющих координатах  $x$ , то единой формулы для всех  $x \in \nabla$  не получится. Однако, в гладких точках  $\nabla$ , где  $\text{grad } \Delta$  дискрими-

нанта не равен нулю, такая формула следующая:

$$y(x) \Big|_{\nabla} = \left( \frac{\langle \beta, x \odot \text{grad} \Delta \rangle}{\langle \alpha, x \odot \text{grad} \Delta \rangle} \right)^{\frac{1}{n}},$$

где  $\odot$  – знак покоординатного умножения векторов.

По аналогичной схеме с использованием параметризации Горна-Капранова для  $A$ -дискриминантного множества  $\nabla_A$ , вычисляются решения уравнения (0.20) на  $\nabla_A$ . В уравнении (0.20) можно зафиксировать  $k + 1$  коэффициентов, а именно, достаточно рассматривать приведенное уравнение

$$F(y_1, \dots, y_k) = 1 + \sum_{i=1}^k y_1^{\alpha_{i1}} \dots y_k^{\alpha_{ik}} + \sum_{i=1}^m w_i y_1^{\alpha_{k+i,1}} \dots y_k^{\alpha_{k+i,k}} = 0, \quad (0.22)$$

где матрица  $\delta = (\alpha_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, k$  невырожденная. Дискриминантное множество  $\nabla_A$  этого уравнения допускает параметризацию Горна-Капранова по формуле  $w = (Bs)^B$ . Здесь  $B$  – соответствующий приведению (0.22) правый аннулятор ранга  $m = \#A - k - 1$  для матрицы из вектор столбцов  $\alpha \in A$ , дополненной строкой из единиц. Пусть  $b_0, b_1, \dots, b_k$  – первые  $k + 1$  строк матрицы  $B$ .

В следующей теореме предъясвляется параметризация особых точек для (0.22).

**Теорема 20.** *Вектор-функция  $y(s) = (y_1(s), \dots, y_k(s))$  с координатами*

$$y_j(s) = \prod_{\nu=1}^k \left( \frac{\langle \mathbf{b}_\nu, s \rangle}{\langle \mathbf{b}_0, s \rangle} \right)^{\chi_{j\nu}}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

где  $\chi_{j\nu}$  –  $(j, \nu)$ -ый элемент матрицы  $\delta^{-1}$ , удовлетворяет системе (0.22), т.е. параметризует набор особых точек гиперповерхности  $F(y) = 0$ .

В § 4.2 рассматриваются особые точки общих 0-мерных алгебраических поверхностей, задаваемых системой  $n$  полиномов от  $n$  переменных. Для таких

систем известна параметризация их дискриминантных множеств [5], которая позволяет параметризовать кратные решения указанных систем (Теорема 23).

Автор глубоко признателен своему научному консультанту А.К. Циху за постановку ряда задач и гипотез.

## Глава 1.

# Степенные ряды и интегральные представления для общей алгебраической функции

В 1921 г. Х. Меллин получил интегральную формулу для решения общего приведенного алгебраического уравнения [92]. Ранее он нашел формулу обращения для преобразования Лапласа и обнаружил при этом, что экспоненциальной подстановкой преобразование Лапласа сводится к весьма полезному интегральному преобразованию, названному впоследствии меллиновским. В указанной статье 1921 г. Меллин продемонстрировал хрестоматийную суть интегральных преобразований: зная входной сигнал в одной его идентификации, можно получить его другую идентификацию посредством формулы обращения. В данном случае входной сигнал – общая алгебраическая функция  $y(x)$ , идентифицируется алгебраическим уравнением, и уже этого факта достаточно для явного вычисления прямого преобразования Меллина  $M[y]$  для  $y(x)$ . Применяв формулу обращения  $M^{-1}[M[y]] = y$ , Меллин восстановил  $y(x)$  с идентификацией в виде интеграла типа Меллина-Барнса. Тем самым, было обнаружено, что общая алгебраическая функция является функцией гипер-

геометрического типа и были предъявлены явные степенные ряды для нее.

Цель настоящей главы – получить на основе формулы Меллина другую интегральную формулу для общей алгебраической функции. Полученная формула позволит нам в следующей главе описать некоторые свойства монодромии общей алгебраической функции, которые затруднительно обнаружить с помощью интегральной формулы Меллина.

## 1.1 Формулы Меллина и Биркелана

В 1921 году Меллин [92] (см. также [43]) привел интегральную формулу и разложение в гипергеометрический ряд для решения общего алгебраического уравнения

$$y^n + x_1 y^{n_1} + \dots + x_l y^{n_l} - 1 = 0, \quad n > n_1 > \dots > n_l > 0. \quad (1.1)$$

Указанная формула выражает ветвь  $y(x) = y_0(x)$  с условием  $y_0(0) = 1$ ; эту ветвь называют *главным решением* уравнения (1.1). Отметим, что все остальные ветви получаются из  $y_0(x)$  по формуле

$$y_j(x) = \varepsilon_j y_0(\varepsilon_j^{n_1} x_1, \dots, \varepsilon_j^{n_l} x_l), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

где  $\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi j}{n} i}$  – первообразные корни из единицы.

Интегральная формула Меллина следующая:

$$y_0(x) = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int_{\gamma + i\mathbb{R}^l} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n_1}{n}\zeta_1 - \dots - \frac{n_l}{n}\zeta_l\right) \Gamma(\zeta_1) \dots \Gamma(\zeta_l)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n'_1}{n}\zeta_1 + \dots + \frac{n'_l}{n}\zeta_l + 1\right)} x^{-\zeta} d\zeta. \quad (1.2)$$

Здесь  $\Gamma$  – гамма функция Эйлера,  $\gamma$  – точка из многогранника

$$\{u \in \mathbb{R}^l : u_1 > 0, \dots, u_l > 0, n_1 u_1 + \dots + n_l u_l < 1\},$$

для векторов  $x = (x_1, \dots, x_l)$ ,  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_l)$  используется мультииндексная запись

$$x^{-\zeta} = x_1^{-\zeta_1} \dots x_l^{-\zeta_l}, \quad d\zeta = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_l,$$

наконец,  $n'_j = n - n_j$ .

На основе интегрального представления (1.2) и теории многомерных вычетов в статье [43] были описаны некоторые аналитические продолжения  $y_0(x)$ .

Представление  $y_0(x)$  в виде гипергеометрического ряда (см. [92], [97]) такое:

$$y_0(x) = \frac{1}{n} \sum_{|k| \geq 0} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n}k_1 + \dots + \frac{n_l}{n}k_l\right)}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l! \Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n'_1}{n}k_1 - \dots - \frac{n'_l}{n}k_l + 1\right)} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_l^{k_l}, \quad (1.3)$$

где  $|k| = k_1 + \dots + k_l$ ,  $k_i \geq 0$ .

В 1927 году Биркелан ([64], [65]), для уравнения

$$y^q = y^p + x_1 y^{n_1} + \dots + x_l y^{n_l}, \quad q > p \geq 0, \quad n_1 > \dots > n_l > 0; \quad (1.4)$$

привел разложение в гипергеометрический ряд для  $q - p$  корней  $y_j(x)$ , не обращающихся при  $x_1 = \dots = x_l = 0$  в нуль. Формула Биркелана следующая:

$$y_j(x) = \varepsilon^j \frac{1}{q - p} \sum_{|k| \geq 0} \varepsilon^{jv} \frac{(\tau)_{r-1}}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_l^{k_l}, \quad (1.5)$$

где

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{q-p}}, \quad r = \sum_{\nu=1}^l k_\nu, \quad v = \sum_{\nu=1}^l (n_\nu - q)k_\nu, \quad \tau = \frac{1+v}{q-p} + 1,$$

$$(\lambda)_k = \lambda(\lambda+1) \cdot \dots \cdot (\lambda+k-1)$$

– символ Похгаммера (см. [54], стр. 111 – 112). Ветвь  $y_0(x)$  определяется условием  $y(0) = 1$ . Заметим, что при  $q = 0$  уравнение (1.1) примет вид (1.4). Другими словами, уравнение Меллина является частным случаем уравнения Биркелана.

## 1.2 Решение уравнения (1.1) с помощью интеграла по отрезку

В настоящем разделе предлагается интегральная формула для решения уравнения (1.1) с интегрированием по компакту (отрезку) элементарной функции.

В дальнейшем будет показано (§ 2.1.6), что в случае триномиального уравнения область сходимости интеграла в полученной формуле шире, чем в интеграле Меллина (1.2).

Для краткости письма обозначим

$$n'_i = n - n_i, \quad \xi_i = x_i t^{\frac{n_i}{n}} (1 - t)^{\frac{n'_i}{n}}. \quad (1.6)$$

**Теорема 1.** *Главное решение  $y_0(x)$  уравнения (1.1) допускает представление в виде интеграла*

$$y_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}} \left[ e^{\frac{\pi i}{n}} \ln \left( 1 + \sum_{k=1}^l e^{-\frac{n'_k}{n} \pi i \xi_k} \right) - e^{-\frac{\pi i}{n}} \ln \left( 1 + \sum_{k=1}^l e^{\frac{n'_k}{n} \pi i \xi_k} \right) \right] dt, \quad (1.7)$$

где ветви логарифма определены в области пространства  $\mathbb{C}^l$  переменного  $x = (x_1, \dots, x_l)$ , полученной удалением из  $\mathbb{C}^l$  двух семейств комплексных гиперплоскостей

$$\Sigma_{\pm} = \bigcup_{t \in (0;1)} \left\{ \sum_{k=1}^l x_k t^{\frac{n_k}{n}} (1-t)^{\frac{n'_k}{n}} e^{\pm \frac{n_k}{n} \pi i} = 1 \right\}$$

и выбираются условием  $\ln 1 = 0$ . Таким образом,  $y(x)$  голоморфно продолжается из окрестности нуля в область  $\mathbb{C}^l \setminus (\Sigma_- \cup \Sigma_+)$ .

*Доказательство.* Для доказательства воспользуемся представлением  $y(x)$  в виде гипергеометрического ряда (см. [92], [97]):

$$y_0(x) = \frac{1}{n} \sum_{|k| \geq 0} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n_l}{n} k_l\right) x_1^{k_1} \dots x_l^{k_l}}{k_1! \dots k_l! \Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n'_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n'_l}{n} k_l + 1\right)}, \quad (1.8)$$

где  $|k| = k_1 + \dots + k_l$ ,  $k_i \geq 0$ .

Далее, пользуясь формулой дополнения  $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(1-z) \sin \pi z}{\pi}$ , перепишем рассматриваемый ряд в виде:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= \frac{1}{\pi n} \sum_{|k| \geq 0} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n_l}{n} k_l\right) \Gamma\left(-\frac{1}{n} + \frac{n'_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n'_l}{n} k_l\right)}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} \\
&\quad \times \sin \pi \left( \frac{1}{n} - \frac{n'_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n'_l}{n} k_l + 1 \right) x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_l^{k_l} = \\
&= 1 + \frac{1}{\pi n} \sum_{|k| \geq 1} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n_l}{n} k_l\right) \Gamma\left(-\frac{1}{n} + \frac{n'_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n'_l}{n} k_l\right)}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} \\
&\quad \times \sin \pi \left( \frac{1}{n} - \frac{n'_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n'_l}{n} k_l + 1 \right) x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_l^{k_l}.
\end{aligned}$$

Теперь, применяя интегральное представление для бета-функции

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (Re\ x > 0, Re\ y > 0),$$

а также ее связь с гамма-функцией ([33], стр. 26):

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = B(x, y)\Gamma(x+y),$$

получим

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 + \frac{1}{\pi n} \sum_{|k| \geq 1} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma(k_1 + \dots + k_l) \sin \pi \left( \frac{1}{n} - \frac{n'_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n'_l}{n} k_l + 1 \right)}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} \\
&\quad \times x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_l^{k_l} \int_0^1 t^{\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n_l}{n} k_l - 1} (1-t)^{-\frac{1}{n} + \frac{n'_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n'_l}{n} k_l - 1} dt.
\end{aligned}$$

Покажем, что в последнем выражении можно поменять местами порядок суммирования и интегрирования, т.е. что

$$y_0(x) = 1 + \frac{1}{\pi n} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{|k| \geq 1} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma(k_1 + \dots + k_l)}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} \sin \pi \left( \frac{1}{n} - \frac{n'_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n'_l}{n} k_l + 1 \right) \\ & \quad \times [x_1 t^{\frac{n_1}{n}} (1-t)^{\frac{n'_1}{n}}]^{k_1} \cdot \dots \cdot [x_l t^{\frac{n_l}{n}} (1-t)^{\frac{n'_l}{n}}]^{k_l} dt. \end{aligned}$$

В самом деле, элементы последнего ряда мажорируются величинами

$$\frac{|k|!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} [x_1 t^{\frac{n_1}{n}} (1-t)^{\frac{n'_1}{n}}]^{k_1} \cdot \dots \cdot [x_l t^{\frac{n_l}{n}} (1-t)^{\frac{n'_l}{n}}]^{k_l},$$

которые составляют ряд геометрической прогрессии для функции

$$\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^l \left( x_i t^{\frac{n_i}{n}} (1-t)^{\frac{n'_i}{n}} \right)},$$

абсолютно сходящийся к этой функции при малых  $|x_i|$ .

Поскольку ряд, участвующий под интегралом в выражении функции  $y_0(x)$ , фактически зависит от величин

$$\xi_i = x_i t^{\frac{n_i}{n}} (1-t)^{\frac{n'_i}{n}}, \quad i = 1, \dots, l,$$

целесообразно ввести в рассмотрение ряд

$$\begin{aligned} & H(\xi_1, \dots, \xi_l) = \\ & = \sum_{|k| \geq 1} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma(k_1 + \dots + k_l) \sin \pi \left( \frac{1}{n} - \frac{n'_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n'_l}{n} k_l + 1 \right)}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} \\ & \quad \times \xi_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \xi_l^{k_l}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

В результате чего  $y(x)$  запишется в виде:

$$y_0(x) = 1 + \frac{1}{\pi n} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}} H(\xi_1, \dots, \xi_l) dt. \tag{1.10}$$

После применения к (1.9) формул  $\Gamma(n) = (n-1)!$  и  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ , получим следующее равенство:

$$H(\xi_1, \dots, \xi_l) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i} \sum_{|k| \geq 1} \frac{(-1)^{|k|} (k_1 + \dots + k_l - 1)! e^{\left(\frac{1}{n} - \frac{n'_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n'_l}{n} k_l + 1\right) \pi i}}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} \xi_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \xi_l^{k_l} \\
&- \frac{1}{2i} \sum_{|k| \geq 1} \frac{(-1)^{|k|} (k_1 + \dots + k_l - 1)! e^{-\left(\frac{1}{n} - \frac{n'_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n'_l}{n} k_l + 1\right) \pi i}}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} \xi_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \xi_l^{k_l} = \\
&= -\frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{2i} \sum_{|k| \geq 1} \frac{(k_1 + \dots + k_l - 1)! \left(-e^{-\frac{n'_1}{n} \pi i} \xi_1\right)^{k_1} \cdot \dots \cdot \left(-e^{-\frac{n'_l}{n} \pi i} \xi_l\right)^{k_l}}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} \\
&+ \frac{e^{-\frac{\pi i}{n}}}{2i} \sum_{|k| \geq 1} \frac{(k_1 + \dots + k_l - 1)! \left(-e^{\frac{n'_1}{n} \pi i} \xi_1\right)^{k_1} \cdot \dots \cdot \left(-e^{\frac{n'_l}{n} \pi i} \xi_l\right)^{k_l}}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!}.
\end{aligned}$$

Теперь воспользуемся равенством

$$\sum_{|k| \geq 1} \frac{(k_1 + \dots + k_l - 1)!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_l^{k_l} = -\ln(1 - z_1 - \dots - z_l),$$

в результате чего получим:

$$\begin{aligned}
H(\xi_1, \dots, \xi_l) &= \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{2i} \ln(1 + e^{-\frac{n'_1}{n} \pi i} \xi_1 + \dots + e^{-\frac{n'_l}{n} \pi i} \xi_l) \\
&- \frac{e^{-\frac{\pi i}{n}}}{2i} \ln(1 + e^{\frac{n'_1}{n} \pi i} \xi_1 + \dots + e^{\frac{n'_l}{n} \pi i} \xi_l). \tag{1.11}
\end{aligned}$$

Из (1.10) следует, что условие  $y_0(0) = 1$  будет обеспечено, если в (1.11) выбрать ветви логарифма так, чтобы выполнялось равенство  $H(0) = 0$ , и это достигается выбором ветвей логарифма с помощью условия  $\ln 1 = 0$ .

Итак, показано что

$$\begin{aligned}
H(\xi_1, \dots, \xi_l) &= \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{2i} \ln(1 + e^{-\frac{n'_1}{n} \pi i} \xi_1 + \dots + e^{-\frac{n'_l}{n} \pi i} \xi_l) \\
&- \frac{e^{-\frac{\pi i}{n}}}{2i} \ln(1 + e^{\frac{n'_1}{n} \pi i} \xi_1 + \dots + e^{\frac{n'_l}{n} \pi i} \xi_l), \tag{1.12}
\end{aligned}$$

где  $\xi_i$  выражается через  $x_i$  и  $t$  согласно равенству (1.6), а ветви логарифма выбираются согласно условию  $\ln 1 = 0$ . Логарифмические функции в (1.12)

голоморфны в  $\mathbb{C}^l \setminus \Sigma_- \cup \Sigma_+$ , где  $\Sigma_{\mp}$  определены в формулировке Теоремы 1. После подстановки (1.12) в (1.10) получаем равенство (1.7). Тем самым, Теорема 1 доказана.  $\square$

В заключении параграфа отметим следующий факт. Областями сходимости гипергеометрических рядов (как степенных рядов с центром в точке  $x = 0$ ) для решений  $y(x)$  являются поликруговые области (т.е. задаваемые условиями лишь на модули  $|x_k|$  коэффициентов  $x_k$  уравнения). Структура этих областей в терминах амебы дискриминанта описана в статье [97] (см. также [41]). С другой стороны, область сходимости интеграла Меллина-Барнса (1.2) является секториальной (т.е. задается условиями лишь на аргументы  $\arg x_k$ ); структура этой области в терминах коамебы дискриминанта описана в статье [4]. Что касается интеграла (1.7), то его область сходимости  $\mathbb{C}^l \setminus (\Sigma_+ \cup \Sigma_-)$  не является ни поликруговой, ни секториальной.

### 1.3 Решение уравнения (1.4) с помощью интеграла по контуру

Рассмотрим общее алгебраическое уравнение

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0 = 0. \quad (1.13)$$

Его решение обладает двойной однородностью и простой заменой сводится [97] к уравнению (1.4). Иными словами, любые два коэффициента мы можем «заморозить», полагая их равными  $+1$  и  $-1$ .

Для нахождения решения уравнения (1.4) достаточно рассмотреть уравнение

$$y^q = 1 + x_1 y^{n_1} + \dots + x_l y^{n_l}, \quad n_1 > \dots > n_l > 0, \quad q \neq n_k, \quad (1.14)$$

так как (1.4) сводится к последнему уравнению делением обеих частей на моном наименьшей степени.

В этом разделе будет получена интегральная формула с интегрированием по контуру элементарной функции для решения уравнения (1.14).

Для формулировки утверждения договоримся под символом  $\int_0^{1+}$  понимать интеграл, взятый вдоль петли, которая начинается в точке  $t = 0$ , обходит  $t = 1$  в положительном направлении и возвращается в исходную точку. Итак, справедлива следующая

**Теорема 2.** *Главное решение  $y_0(x)$  уравнения (1.14) допускает представление в виде интеграла*

$$y_0(x) = 1 - \frac{1}{2\pi qi} \int_0^{1+} t^{\frac{1-q}{q}} (t-1)^{-\frac{1+q}{q}} \ln \left( 1 - \sum_{k=1}^l t^{\frac{n_k}{q}} (t-1)^{\frac{q-n_k}{q}} x_k \right) dt, \quad (1.15)$$

в котором ветвь логарифма вблизи  $x = 0$  выбирается условием  $\ln 1 = 0$ . Интеграл (1.15) сходится в области пространства  $\mathbb{C}^l$  переменного  $x = (x_1, \dots, x_l)$ , полученной удалением из  $\mathbb{C}^l$  двух семейств комплексных гиперплоскостей:

$$\Sigma_{\pm} = \bigcup_{t \in (0;1)} \left\{ \sum_{k=1}^l x_k t^{\frac{n_k}{q}} (1-t)^{\frac{q-n_k}{q}} e^{\pm \frac{q-n_k}{q} \pi i} = 1 \right\}.$$

*Доказательство.* Для доказательства Теоремы запишем главное решение уравнения (1.14) в виде ряда Биркелана (1.5):

$$y_0(x) = \frac{1}{q} \sum_{|k| \geq 0} \frac{\Gamma \left( \frac{1 + \sum_{\nu=1}^l (n_{\nu}-q)k_{\nu}}{q} + \sum_{\nu=1}^l k_{\nu} \right)}{\Gamma \left( \frac{1 + \sum_{\nu=1}^l (n_{\nu}-q)k_{\nu}}{q} + 1 \right) k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_l^{k_l} =$$

$$= 1 + \frac{1}{q} \sum_{|k| \geq 1} \frac{\Gamma \left( \frac{1 + \sum_{\nu=1}^l n_\nu k_\nu}{q} \right)}{\Gamma \left( \frac{1 + \sum_{\nu=1}^l (n_\nu - q) k_\nu}{q} + 1 \right) k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_l^{k_l}.$$

Далее моном  $x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_l^{k_l}$  будем обозначать  $x^k$ .

Пользуясь формулой дополнения  $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(1-z) \sin \pi z}{\pi}$ , перепишем последний ряд в виде:

$$y_0(x) = 1 - \frac{1}{\pi q} \sum_{|k| \geq 1} \Gamma \left( \frac{1 + \sum_{\nu=1}^l n_\nu k_\nu}{q} \right) \cdot \Gamma \left( -\frac{1 + \sum_{\nu=1}^l (n_\nu - q) k_\nu}{q} \right) \\ \times \frac{\sin \pi \left( \frac{1 + \sum_{\nu=1}^l (n_\nu - q) k_\nu}{q} \right)}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} x^k.$$

Теперь применяя формулу

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = B(x, y)\Gamma(x + y),$$

связывающую функции гамма и бета, получим:

$$y_0(x) = 1 - \frac{1}{\pi q} \sum_{|k| \geq 1} B \left( \frac{1 + \sum_{\nu=1}^l n_\nu k_\nu}{q}, -\frac{1 + \sum_{\nu=1}^l (n_\nu - q) k_\nu}{q} \right) \Gamma \left( \sum_{\nu=1}^l k_\nu \right) \\ \times \frac{\sin \pi \left( \frac{1 + \sum_{\nu=1}^l (n_\nu - q) k_\nu}{q} \right)}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} x^k. \quad (1.16)$$

Сейчас воспользуемся интегральным представлением бета-функции для случая, когда один из ее аргументов отрицателен. В этом случае, согласно [12],

бета-функция допускает представление в виде контурного интеграла

$$B(x, y) \sin(\pi y) = \frac{1}{2i} \int_0^{1+} t^{x-1} (t-1)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re} x > 0. \quad (1.17)$$

Поясним как получается эта формула:

$$\begin{aligned} \int_0^{1+} t^{x-1} (t-1)^{y-1} dt &= \int_0^1 t^{x-1} e^{(y-1)(\ln(1-t)-i\pi)} dt \int_{C_r} t^{x-1} (t-1)^{y-1} dt + \\ &+ \int_1^0 t^{x-1} e^{(y-1)(\ln(1-t)+i\pi)} dt, \end{aligned}$$

где  $C_r$  – окружность радиуса  $r < 1$  с центром в  $t = 1$ . Если  $\operatorname{Re} y > 0$ , то  $\int_{C_r} t^{x-1} (t-1)^{y-1} dt \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ . Действительно,

$$\left| \int_{C_r} t^{x-1} (t-1)^{y-1} dt \right| \leq A \left| (re^{i\varphi})^{y-1} \right| 2\pi r = A 2\pi |r^y| \rightarrow 0$$

при  $r \rightarrow 0$ , где  $A$  – некоторая постоянная (при фиксированном  $x$ ). Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_0^{1+} t^{x-1} (t-1)^{y-1} dt &= - \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} e^{-i\pi y} dt + \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} e^{i\pi y} dt = \\ &= (e^{i\pi y} - e^{-i\pi y}) B(x, y) = 2i B(x, y) \sin \pi y. \end{aligned}$$

Равенство (1.17) получено в предположении, что  $\operatorname{Re} x > 0$ ,  $\operatorname{Re} y > 0$ . Но в силу того, что выражения, стоящие в обеих частях (1.17), являются аналитическими функциями от  $x, y$  при всех  $y$  и  $\operatorname{Re} x > 0$ , оно справедливо для всех  $y$ .

После применения равенства (1.17) к (1.16) получим:

$$y_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi q i} \sum_{|k| \geq 1} \frac{\Gamma\left(\sum_{\nu=1}^l k_\nu\right) x^k}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} \int_0^{1+} t^{\frac{1+\sum_{\nu=1}^l n_\nu k_\nu}{q}-1} (t-1)^{-\frac{1+\sum_{\nu=1}^l (n_\nu-q)k_\nu}{q}-1} dt.$$

Сменим в последнем равенстве порядок интегрирования и суммирования, в результате чего  $y_0(x)$  примет вид:

$$1 + \frac{1}{2\pi qi} \int_0^{1+} t^{\frac{1-q}{q}} (t-1)^{-\frac{1+q}{q}} \sum_{|k| \geq 1} \frac{\Gamma\left(\sum_{\nu=1}^l k_\nu\right) t^{\frac{\sum_{\nu=1}^l n_\nu k_\nu}{q}} (t-1)^{-\frac{\sum_{\nu=1}^l (n_\nu - q)k_\nu}{q}}}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} x^k dt.$$

В последнем выражении изменен порядок суммирования и интегрирования в силу следующего соображения. Элементы последнего ряда мажорируются величинами

$$\frac{|k|!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} \left[ x_1 t^{\frac{n_1}{q}} (t-1)^{\frac{q-n_1}{q}} \right]^{k_1} \cdot \dots \cdot \left[ x_l t^{\frac{n_l}{q}} (t-1)^{\frac{q-n_l}{q}} \right]^{k_l},$$

которые составляют ряд геометрической прогрессии для функции

$$\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^l \left( x_i t^{\frac{n_i}{q}} (t-1)^{\frac{q-n_i}{q}} \right)},$$

абсолютно сходящийся к этой функции при малых  $|x_i|$ .

Теперь воспользуемся равенством  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . Тогда получим

$$y_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi qi} \int_0^{1+} t^{\frac{1-q}{q}} (t-1)^{-\frac{1+q}{q}} \sum_{|k| \geq 1} \frac{(k_1 + \dots + k_l - 1)!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_l!} \times t^{\frac{n_1 k_1}{q}} \cdot \dots \cdot t^{\frac{n_l k_l}{q}} (t-1)^{\frac{q-n_1 k_1}{q}} \cdot \dots \cdot (t-1)^{\frac{q-n_l k_l}{q}} x^k dt.$$

Наконец, применяя к последнему выражению равенство

$$\sum_{|k| \geq 1} \frac{(k_1 + \dots + k_q - 1)!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_q!} z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_q^{k_q} = -\ln(1 - z_1 - \dots - z_q),$$

получаем следующее выражение для главного решения уравнения (1.14):

$$y_0(x) = 1 - \frac{1}{2\pi qi} \int_0^{1+} t^{\frac{1-q}{q}} (t-1)^{-\frac{1+q}{q}} \ln \left( 1 - \sum_{k=1}^l t^{\frac{n_k}{q}} (t-1)^{\frac{q-n_k}{q}} x_k \right) dt. \quad (1.18)$$

Теперь выберем в последнем равенстве ветвь логарифма так, чтобы выполнялось условие  $y_0(0) = 1$ . Нетрудно видеть, что выполнение последнего условия будет обеспечено выбором ветви логарифма в (1.18) соотношением  $\ln 1 = 0$ .

Далее, при движении  $t$  от 0 к 1 и от 1 к 0, логарифм в (1.18) примет, соответственно, вид

$$\begin{aligned} \ln \left( 1 - \sum_{k=1}^l t^{\frac{n_k}{q}} (1-t)^{\frac{q-n_k}{q}} e^{-\frac{q-n_k}{q}\pi i} x_k \right), \\ \ln \left( 1 - \sum_{k=1}^l t^{\frac{n_k}{q}} (1-t)^{\frac{q-n_k}{q}} e^{\frac{q-n_k}{q}\pi i} x_k \right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Логарифмические функции в (1.19) голоморфны в  $\mathbb{C}^l \setminus \{\Sigma_- \cup \Sigma_+\}$ , где  $\Sigma_{\pm}$  определены в формулировке Теоремы 2. Таким образом, Теорема 2 доказана.  $\square$

## 1.4 Представление решения триномиального уравнения обобщенным гипергеометрическим рядом

В данном параграфе рассматривается алгебраическое уравнение (1.1) при  $p = 1$ , т.е. триномиальное уравнение

$$y^n + xy^m - 1 = 0. \quad (1.20)$$

Доказывается формула для его решения в виде суммы обобщенных гипергеометрических рядов. Напомним, что обобщенным гипергеометрическим (неконфлуэнтным) рядом называется степенной ряд

$$\begin{aligned} {}_nF_{n-1} \left( \begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \end{matrix} \middle| z \right) = \\ = \frac{\Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_{n-1})}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \alpha_1) \dots \Gamma(k + \alpha_n)}{k! \Gamma(k + \beta_1) \dots \Gamma(k + \beta_{n-1})} z^k. \end{aligned} \quad (1.21)$$

**Теорема 3.** *Главное решение уравнения (1.20) допускает представление в виде суммы рядов*

$$y(x) = -\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(j - \frac{1+mj}{n})}{j! \Gamma(1 - \frac{1+mj}{n})} x^j \quad (1.22)$$

$$\times {}_nF_{n-1} \left( \begin{matrix} a_j, a_j + \frac{1}{m}, \dots, a_j + \frac{m-1}{m}, b_j, b_j + \frac{1}{n-m}, \dots, b_j + \frac{n-m-1}{n-m} \\ c_j, c_j + \frac{1}{n}, \dots, \hat{1}, \dots, c_j + \frac{n-1}{n} \end{matrix} \middle| (-1)^m \zeta(x) \right),$$

где

$$a_j = \frac{j}{n} + \frac{1}{mn}, \quad b_j = \frac{j}{n} - \frac{1}{n(n-m)}, \quad c_j = \frac{j}{n} + \frac{1}{n}, \quad (1.23)$$

$$\zeta(x) = \frac{m^m (n-m)^{n-m}}{n^n} x^n, \quad (1.24)$$

а символ  $\hat{1}$  означает пропуск единицы.

Указанные ряды сходятся в круге  $|x| < \frac{n}{m^{\frac{n}{n}} (n-m)^{\frac{n-m}{n}}}$ .

Аналогичная формула была доказана Биркеланом [65]. Он опирался на формулу Лагранжа для неявной функции и вид его решения несколько отличается от нашего.

Отметим также, что в статье [36], было найдено решение  $\omega(t)$  уравнения

$$\omega^n - \omega + t = 0 \quad (1.25)$$

в указанном классе функций (см. также [75]).

**Теорема 4** ([36]). *Решение уравнения (1.25) с условием  $\omega(0) = 0$  представляется рядом*

$$\omega^\mu(t) = t^\mu {}_{n-1}F_{n-2} \left( \begin{matrix} \frac{\mu}{n}, \frac{\mu+1}{n}, \dots, \frac{\mu+n-1}{n} \\ \frac{\mu+1}{n-1}, \frac{\mu+2}{n-1}, \dots, \frac{\mu+n-1}{n-1} \end{matrix} \middle| \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} t^{n-1} \right), \quad (1.26)$$

сходящимся в круге  $|t| < \frac{n-1}{n^{\frac{n-1}{n-1}}}$ .

Отметим и тот факт, что уравнение (1.25) сводится к уравнению

$$y^n + xy - 1 = 0 \quad (1.27)$$

(т.е. к уравнению (1.20) при  $m = 1$ ) с помощью замены  $y = \frac{\omega}{t^{\frac{1}{n}}} e^{\frac{\pi i}{n}}$ ,  $x = \frac{e^{-\frac{\pi i}{n}}}{t^{\frac{n-1}{n}}}$ . Таким образом, ряд (1.26), представляющий решение (1.25) в подходящем круге с центром в точке  $t = 0$ , посредством зависимости  $x = \frac{e^{-\frac{\pi i}{n}}}{t^{\frac{n-1}{n}}}$  является решением (1.27) вне круга  $|x| < \frac{n}{m^{\frac{m}{n}}(n-m)^{\frac{n-m}{n}}}$ . А ряды, о которых идет речь в Теореме 3, являются аналитическим продолжением (1.26) из внешности указанного круга в сам круг.

Напомним, что похожая ситуация возникает и в случае гипергеометрического ряда Гаусса. Ряд  ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right)$ , сходящийся в круге  $|z| < 1$ , аналитически продолжается в его внешность суммой двух рядов Гаусса (см. [12]).

*Доказательство Теоремы 3.* Воспользуемся интегральным представлением Меллина-Барнса (см. [92]), которое в случае уравнения (1.20) примет вид

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i n} \int_{\operatorname{Re} z = \frac{1}{2m}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{mz}{n}\right)\Gamma(z)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n-m}{n}z + 1\right)} x^{-z} dz.$$

Следуя статье [43], вычислим последний интеграл как сумму вычетов, расположенных слева от контура интегрирования. Тогда получим следующее разложение для  $y(x)$  :

$$y(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{mk}{n}\right)}{k! \Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n-m}{n}k + 1\right)} x^k.$$

Далее, пользуясь формулой дополнения  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$  перепишем полученный ряд

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\pi n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{mk}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-m}{n}k - \frac{1}{n}\right) \sin \pi \left(\frac{1}{n} - \frac{n-m}{n}k + 1\right)}{k!} x^k = \\ &= \frac{1}{\pi n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{mk}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-m}{n}k - \frac{1}{n}\right) \sin \pi \left(\frac{1}{n} + \frac{mk}{n}\right)}{k!} x^k. \end{aligned} \quad (1.28)$$

К каждой из гамма-функций, а также к факториалу применим формулу умножения Гаусса-Лежандра

$$\prod_{r=0}^{p-1} \Gamma\left(z + \frac{r}{p}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(p-1)} p^{\frac{1}{2}-pz} \Gamma(pz), \quad p = 2, 3, 4, \dots,$$

согласно которой упомянутые функции переписутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} k! &= \Gamma\left(n \left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{-\frac{1}{2}-k}} \prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n} + \frac{r}{n}\right), \\ \Gamma\left(\frac{1+mk}{n}\right) &= \Gamma\left(m \left(\frac{k}{n} + \frac{1}{mn}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)} m^{\frac{1}{2}-\frac{mk}{n}-\frac{1}{n}}} \prod_{r_1=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{mn} + \frac{r_1}{m}\right), \\ \Gamma\left(\frac{k(n-m)-1}{n}\right) &= \Gamma\left((n-m) \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{n(n-m)}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-m-1)} (n-m)^{\frac{1}{2}-k\frac{n-m}{n}+\frac{1}{n}}} \prod_{r_2=0}^{n-m-1} \Gamma\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{n(n-m)} + \frac{r_2}{n-m}\right). \end{aligned}$$

В результате, (1.28) представится так:

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} n^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} (n-m)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{r_1=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{mn} + \frac{r_1}{m}\right) \prod_{r_2=0}^{n-m-1} \Gamma\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{n(n-m)} + \frac{r_2}{n-m}\right)}{\prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n} + \frac{r}{n}\right)} \zeta_n^k \sin \pi \left(\frac{1}{n} + \frac{mk}{n}\right), \end{aligned}$$

где  $\zeta := \zeta(x) = \frac{m^m(n-m)^{n-m}}{n^n} x^n$  определено в (1.24). Отметим, что в полученном выражении каждая гамма-функция имеет вид  $\Gamma\left(\frac{k}{n} + c_i\right)$ , где  $c_i$  не зависит от  $k$ .

Теперь  $\frac{k}{n}$  представим в виде  $\frac{k}{n} = \frac{j}{n} + \nu$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ , тогда  $y(x)$  запишется в виде суммы  $n$  рядов

$$y(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} n^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} (n-m)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}} \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_n^j$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\prod_{r_1=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{mn} + \frac{r_1}{m} + \nu\right) \prod_{r_2=0}^{n-m-1} \Gamma\left(\frac{j}{n} - \frac{1}{n(n-m)} + \frac{r_2}{n-m} + \nu\right)}{\prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{n} + \frac{r}{n} + \nu\right)} \zeta^{\nu} \\
& \times \sin \pi \left( \frac{1}{n} + \frac{mj}{n} + m\nu \right). \tag{1.29}
\end{aligned}$$

Согласно определению гипергеометрического ряда, нужно выделить в каждом из полученных рядов выражение

$$\frac{\prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{n} + \frac{r}{n}\right)}{\prod_{r_1=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{mn} + \frac{r_1}{m}\right) \prod_{r_2=0}^{n-m-1} \Gamma\left(\frac{j}{n} - \frac{1}{n(n-m)} + \frac{r_2}{n-m}\right)}.$$

Учитывая тождества

$$\begin{aligned}
\prod_{r_1=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{mn} + \frac{r_1}{m}\right) &= (2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)} m^{\frac{1}{2} - \frac{mj}{n} - \frac{1}{n}} \Gamma\left(\frac{mj}{n} + \frac{1}{n}\right), \\
\prod_{r_2=0}^{n-m-1} \Gamma\left(\frac{j}{n} - \frac{1}{n(n-m)} + \frac{r_2}{n-m}\right) &= \\
&= (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-m-1)} (n-m)^{\frac{1}{2} - \frac{n-m}{n}j + \frac{1}{n}} \Gamma\left(\frac{n-m}{n}j - \frac{1}{n}\right), \\
\prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{n} + \frac{r}{n}\right) &= (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{-j - \frac{1}{2}} j!,
\end{aligned}$$

а также, что

$$\sin \pi \left( \frac{1}{n} + \frac{mj}{n} + m\nu \right) = (-1)^{m\nu} \sin \pi \left( \frac{1}{n} + \frac{mj}{n} \right),$$

приходим к следующему представлению для  $y(x)$ :

$$\begin{aligned}
y(x) &= -\frac{1}{\pi n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{mj}{n} + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-m}{n}j - \frac{1}{n}\right)}{j!} x^j \sin \pi \left( \frac{mj}{n} + \frac{1}{n} \right) \\
& \times {}_nF_{n-1} \left( a, a + \frac{1}{m}, \dots, a + \frac{m-1}{m}, b, b + \frac{1}{n-m}, \dots, b + \frac{n-m-1}{n-m} \mid (-1)^m \zeta \right), \\
& \quad c, c + \frac{1}{n}, \dots, \hat{1}, \dots, c + \frac{n-1}{n}
\end{aligned}$$

где значения  $a, b, c$  находятся из (1.23).

Поясним, что пропуск единицы в последнем выражении появляется из-за того, что при  $r = n - j - 1$  гамма-множитель в знаменателе (1.29) равен  $\Gamma(\nu + 1) = \nu!$ , который выделяется отдельным множителем в определении обобщенного гипергеометрического ряда.

Применив к произведению  $\Gamma\left(\frac{mj}{n} + \frac{1}{n}\right) \sin \pi\left(\frac{mj}{n} + \frac{1}{n}\right)$  в последнем выражении формулу дополнения, мы убеждаемся в справедливости (1.22).

Для полного доказательства теоремы осталось найти область сходимости полученных рядов. Известно, что областью сходимости ряда (1.21) является единичный круг  $|z| < 1$  (см. [12]). Отсюда следует, что ряды, о которых идет речь в формулировке теоремы, сходятся при  $|x| < \frac{n}{m^{\frac{m}{n}}(n-m)^{\frac{n-m}{n}}}$ . Теорема доказана.  $\square$

## 1.5 Случай кубического уравнения: соотношение с формулой Кардано

Рассмотрим кубическое уравнение

$$y^3 + xy - 1 = 0. \quad (1.30)$$

Согласно Теореме 3, главное решение (1.30) представляется в виде суммы двух гипергеометрических рядов Гаусса

$$y(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{3}, -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \middle| -\frac{4}{27}x^3\right) - \frac{x}{3} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} \end{matrix} \middle| -\frac{4}{27}x^3\right). \quad (1.31)$$

С другой стороны, формула Кардано для корней (1.30) такая:

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{x^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{x^3}{27}}}.$$

Для определенности, под радикалом  $R(x) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{x^3}{27}}$  будем рассматривать ветвь, удовлетворяющую условию  $R(0) = \frac{1}{2}$ . Покажем, что при  $|x| < \frac{3}{4^{\frac{1}{3}}}$  справедливы равенства

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{3}, -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \middle| -\frac{4}{27}x^3\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{x^3}{27}}}, \quad (1.32)$$

$$-\frac{x}{3} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} \end{matrix} \middle| -\frac{4}{27}x^3\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{x^3}{27}}}. \quad (1.33)$$

Здесь под равенством однозначной и многозначной функции понимаем следующее. В радикале  $\alpha(x) := \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{x^3}{27}}}$  из (1.32) рассматриваем ветвь с условием  $\alpha(0) = 1$ , а в (1.33) выбирается ветвь радикала  $\beta(x) := \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{x^3}{27}}}$ , для которой  $\beta(-1) > 0$ .

Очевидна справедливость равенств

$$\alpha(0) = 1, \beta(0) = 0. \quad (1.34)$$

Нетрудно проверить, что  $\alpha^3(x)$  и  $\beta^3(x)$  удовлетворяют квадратному уравнению

$$z^2(x) = z(x) + \frac{x^3}{27}. \quad (1.35)$$

Вычислим сначала  $\beta(x)$ . Для этого воспользуемся теоремой 4, согласно которой

$$z^{\frac{1}{3}}(x) = -\frac{x}{3} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} \end{matrix} \middle| -\frac{4}{27}x^3\right).$$

В силу выполнения условия  $z(-1) > 0$  следует, что

$$\beta(x) = -\frac{x}{3} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} \end{matrix} \middle| -\frac{4}{27}x^3\right).$$

Равенство (1.33) доказано.

Теперь найдем представление в виде ряда для  $\alpha(x)$ . Для этого воспользуемся формулой Биркелана [65], которая для  $z^{\frac{1}{3}}$  принимает следующий вид:

$$z^{\frac{1}{3}}(x) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{3} - k)}{\Gamma(\frac{4}{3} - 2k)k!} \left(\frac{x}{3}\right)^{3k}.$$

Очевидно, что  $z^{\frac{1}{3}}(0) = 1$ , тогда, в силу (1.34)  $\alpha(x) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{3}-k)}{\Gamma(\frac{4}{3}-2k)k!} \left(\frac{x}{3}\right)^{3k}$ .

Представим полученный ряд в виде ряда Гаусса. Для этого, к каждой из гамма-функции применим формулу дополнения, в результате  $\alpha(x)$  запишется так:

$$\alpha(x) = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2k - \frac{1}{3})}{\Gamma(k + \frac{2}{3})k!} \left(-\frac{x}{3}\right)^{3k}.$$

Теперь к гамма-функции, стоящей в числителе, применим формулу двойного аргумента (которая является частным случаем формулы Гаусса-Лежандра)

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

В результате последний ряд примет вид

$$\alpha(x) = {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6} \mid -\frac{4}{27}x^3\right).$$

Равенство (1.32), а вместе с ним и формула Кардано доказаны.

## 1.6 Уравнение четвертой степени: нелинейная связь с гипергеометрической функцией Гаусса

Рассмотрим уравнение четвертой степени

$$y^4 + xy - 1 = 0. \tag{1.36}$$

В этом параграфе будет показано, что решение (1.36) представимо в классе рядов Гаусса  ${}_2F_1$ .

Из Теоремы 3 следует, что главное решение (1.36) допускает представление

$$y(x) = {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}x^4 \right) - \frac{x}{4} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6} \\ \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}x^4 \right) - \frac{x^2}{32} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{5}{12}, \frac{3}{4}, \frac{13}{12} \\ \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}x^4 \right).$$

Покажем, что каждый из указанных рядов выражается через  ${}_2F_1$ .

**Утверждение 1.1.** *Для главного решения уравнения (1.36) справедливо представление*

$$y(x) = \left[ {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{7}{24}, -\frac{1}{24} \\ \frac{3}{4} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}x^4 \right) \right]^2 - \frac{x}{4} \sqrt{{}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}x^4 \right)} - \frac{x^2}{32} \left[ {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{5}{24}, \frac{13}{24} \\ \frac{5}{4} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}x^4 \right) \right]^2.$$

*Доказательство.* Справедливость соотношений

$${}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}x^4 \right) = \left[ {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{7}{24}, -\frac{1}{24} \\ \frac{3}{4} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}x^4 \right) \right]^2,$$

$${}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{5}{12}, \frac{3}{4}, \frac{13}{12} \\ \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}x^4 \right) = \left[ {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{5}{24}, \frac{13}{24} \\ \frac{5}{4} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}x^4 \right) \right]^2$$

следует из тождеств Клаузена ([68], либо см. [12], стр. 186). Докажем равенство

$${}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6} \\ \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}x^4 \right) = \sqrt{{}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}x^4 \right)}. \quad (1.37)$$

Для этого рассмотрим уравнение  $8r^3 + 8r = x^2$ , которое перепишем в виде

$$(ir)^3 - ir + i\frac{x^2}{8} = 0,$$

как указывается в теореме 4. Применяя к нему (1.26) при  $\mu = 1$  получаем

$$r(x) = \frac{x^2}{8} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}x^4 \right). \quad (1.38)$$

А после применения (1.26) к этому же уравнению при  $\mu = \frac{1}{2}$  приходим к следующему представлению для  $r^{\frac{1}{2}}(x)$ :

$$r^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{x\sqrt{2}}{4} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6} \\ \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}x^4 \right). \quad (1.39)$$

Из (1.38) и (1.39) следует (1.37).  $\square$

## 1.7 Роль дискриминанта в формуле для решения тетраномиального кубического уравнения

Рассмотрим кубическое уравнение с двумя параметрами

$$y^3 + x_1y^2 + x_2y - 1 = 0. \quad (1.40)$$

Известно, что такое уравнение с помощью элементарных преобразований может быть сведено к уравнению с одним параметром. Действительно, с помощью замены переменной  $y = w - \frac{x_1}{3}$  сведем уравнение (1.40) к уравнению

$$w^3 + \left(x_2 - \frac{x_1^2}{3}\right)w + \left(\frac{2}{27}x_1^3 - \frac{1}{3}x_1x_2 - 1\right) = 0.$$

Далее, «растяжением» переменной  $w = -\sqrt[3]{\frac{2}{27}x_1^3 - \frac{1}{3}x_1x_2 - 1} z$  последнее уравнение сводится к (1.30), в котором  $x = x(x_1, x_2) = \frac{x_2 - \frac{x_1^2}{3}}{\sqrt[3]{(\frac{2}{27}x_1^3 - \frac{1}{3}x_1x_2 - 1)^2}}$ .

Решая это уравнение по формуле (1.31), получим

$$z(x_1, x_2) = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -\frac{1}{6}, \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \middle| \frac{4(x_1^2 - 3x_2)^3}{(2x_1^3 - 9x_1x_2 - 27)^2} \right) + \frac{x_1^2 - 3x_2}{\sqrt[3]{(2x_1^3 - 9x_1x_2 - 27)^2}} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{matrix} \middle| \frac{4(x_1^2 - 3x_2)^3}{(2x_1^3 - 9x_1x_2 - 27)^2} \right).$$

После обратной замены корень уравнения (1.40) запишется так:

$$y(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{3} - \sqrt[3]{\frac{2}{27}x_1^3 - \frac{1}{3}x_1x_2 - 1} z(x_1, x_2), \quad (1.41)$$

где выражение для  $z(x_1, x_2)$  определено выше.

Ряды Гаусса, участвующие в решении (1.40), сходятся абсолютно при условии

$$\left| \frac{4(x_1^2 - 3x_2)^3}{(2x_1^3 - 9x_1x_2 - 27)^2} \right| \leq 1. \text{ Уровень}$$

$$\frac{4(x_1^2 - 3x_2)^3}{(2x_1^3 - 9x_1x_2 - 27)^2} = 1$$

определяет дискриминантное множество уравнения (1.40):

$$4x_2^3 - x_1^2x_2^2 - 4x_1^3 + 18x_1x_2 + 27 = 0.$$

Напомним, что дискриминантным множеством  $\nabla$  уравнения (1.1) называется совокупность тех значений  $(x_1, \dots, x_l)$ , при которых (1.1) имеет кратные корни.

Известно значение  ${}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix} \middle| z\right)$  при  $z = 1$ :

$${}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Поэтому,  ${}_2F_1\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{6})\Gamma(\frac{1}{3})} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ,  ${}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{6})\Gamma(\frac{2}{3})} = \sqrt[3]{2}$ . Подставляя эти значения в (1.41), выпишем формулу для решения уравнения (1.40) при  $(x_1, x_2) \in \nabla$ :

$$y(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{2x_1^3 - 9x_1x_2 - 27} + \frac{3x_2 - x_1^2}{3\sqrt[3]{2x_1^3 - 9x_1x_2 - 27}} \sqrt[3]{2}.$$

В параграфе 3.4.3 будет получена общая формула для решения алгебраического уравнения (1.1) в точках  $x$  из дискриминантного множества  $\nabla$ .

## Глава 2.

# Монодромия общей алгебраической функции

Здесь мы изложим два метода аналитического продолжения общей алгебраической функции. Первый из них основан на представлении этой функции в виде ветвящегося интеграла (1.7), и он позволяет описать монодромию общей алгебраической функции вблизи области сходимости ряда Меллина для главного решения.

Второй метод мы называем *логарифмическим*, поскольку принцип его действия заключается в движении пути (по которому ведется аналитическое продолжение) лишь по радиусам и аргументам переменных, а в логарифмической шкале это движение по вещественным и мнимым направлениям. Факт непосредственного аналитического продолжения заключается в замене степенного ряда (с поликруговой областью сходимости) на интеграл Меллина-Барнса (с секториальной областью сходимости).

## 2.1 Монодромия общей алгебраической функции вблизи области $D$

### 2.1.1 Область сходимости гипергеометрического ряда, представляющего решение общего алгебраического уравнения

В первых пяти параграфах настоящей главы будем рассматривать уравнение (1.1) при  $l = n - 1$ :

$$y^n + x_{n-1}y^{n-1} + \dots + x_1y - 1 = 0, \quad (2.1)$$

т.е. когда в нем присутствуют все показатели от 1 до  $n$ . Гипергеометрический ряд с центром в нуле, представляющий главное решение  $y_0(x)$  уравнения (2.1), следующий:

$$\frac{1}{n} \sum_{|k| \geq 0} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}k_1 + \dots + \frac{n-1}{n}k_{n-1}\right)}{k_1! \dots k_{n-1}! \Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}k_1 - \dots - \frac{1}{n}k_{n-1} + 1\right)} x_1^{k_1} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}}, \quad (2.2)$$

где  $|k| = k_1 + \dots + k_{n-1}$ ,  $k_i \geq 0$ .

Опишем область сходимости ряда (2.2). Пусть  $\Delta(x) = \Delta(x_1, \dots, x_{n-1})$  дискриминант уравнения (2.1). Его нулевое множество  $\nabla = \{x \in \mathbb{C}^{n-1} : \Delta(x) = 0\}$  называется дискриминантным множеством уравнения. Введем следующие векторы

$$\alpha = (n-1, \dots, 2, 1), \quad \beta = (1, 2, \dots, n-1),$$

с помощью которых дискриминантное множество  $\nabla$  уравнения (2.1) допускает параметризацию  $\Psi : \mathbb{CP}_s^{n-2} \rightarrow \mathbb{C}_x^{n-1}$  по формуле ([4], [97])

$$x_k = \Psi_k(s) = \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( -\frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-1; \quad s \in \mathbb{CP}_{n-2} \quad (2.3)$$

(здесь  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – знак скалярного произведения). Тогда область сходимости  $D$  ряда (2.2) определяется из параметризации (2.3).

**Теорема 5** ([97]). Система функций

$$|x_k| = |\Psi_k(s)|, \quad k = 1, \dots, n-1; \quad s \in \mathbb{R}_+^{n-1}$$

задает параметризацию границы  $\partial|D|$  изображения  $|D|$  области  $D$  на диаграмме Рейнхардта.

### 2.1.2 Понятие амебы алгебраического множества

Амеба алгебраического множества определяется его изображением в логарифмической шкале. Более точно, рассмотрим отображение

$$\text{Log} : (\mathbb{C}^*)^m \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

определенное формулой

$$\text{Log} : (z_1, \dots, z_m) \longrightarrow (\log |z_1|, \dots, \log |z_m|).$$

**Определение 2.1** ([73]). Амебой алгебраического множества  $V \subset \mathbb{C}^m$  называется образ  $\text{Log } V$ , который обозначается  $\mathcal{A}_V$ .

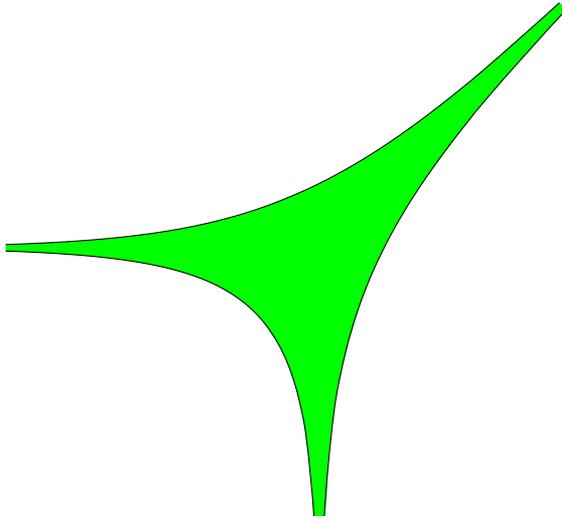


Рис. 6. Амеба полинома  $x_1 + x_2 - 1$

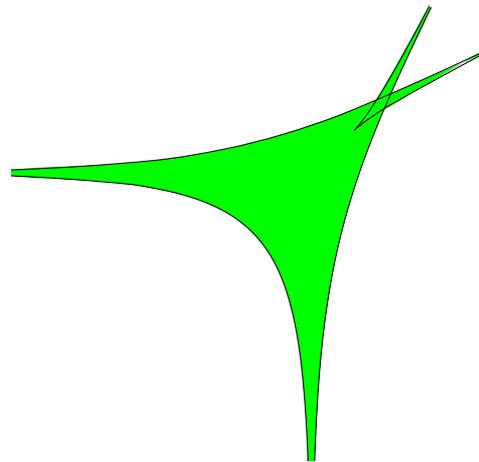


Рис. 7. Амеба дискриминанта кубического уравнения

В случае, когда  $V$  – гиперповерхность, определяемая нулями полинома  $Q$ , вместо записи  $\mathcal{A}_V$  также используют запись  $\mathcal{A}_Q$ .

**Определение 2.2** ([98]). *Контуром амобы  $\mathcal{A}_V$  называется множество критических значений отображения  $\text{Log} : V \longrightarrow \mathcal{A}_V$ .*

Контур амобы комплексной прямой в  $\mathbb{C}^2$  (см. Рис. 6) совпадает с топологической границей амобы. А контур амобы дискриминанта кубического уравнения заходит внутрь амобы. Если  $V$  – гиперповерхность или кривая, гладкая точка  $z \in V$  критическая для  $\text{Log}|_V$  тогда и только тогда, когда логарифмическое отображение Гаусса в ней вещественно (см. [13], [93]).

**Определение 2.3.** *Логарифмическим отображением Гаусса гиперповерхности  $V = \{z : Q(z) = 0\}$  называется отображение  $\gamma : V \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$ , действующее по формуле*

$$\gamma(z) = (z_1 Q'_{z_1} : \dots : z_m Q'_{z_m}).$$

Геометрический смысл этого отображения состоит в том, что  $\gamma(z)$  – нормальная прямая к  $\text{Log}_{\mathbb{C}}(V)$  в точке  $\text{Log}_{\mathbb{C}}(z)$ , где  $\text{Log}_{\mathbb{C}}$  – комплексный логарифм.

### 2.1.3 Касание разрезов $\Sigma_{\pm}$ дискриминантного множества

Рассмотрим логарифмическую проекцию дискриминантной гиперповерхности уравнения (2.1):  $\text{Log} : \nabla \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ . Обозначим через  $K$  множество критических точек этой проекции. Известно [93], [98], что  $K$  равно образу  $\Psi(\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-2})$  вещественного проективного пространства относительно отображения (2.3).

**Предложение 2.1.** *Комплексные гиперплоскости семейств  $\Sigma_{\pm}$  касаются дискриминантного множества  $\nabla$  вдоль подмножеств*

$$K_{\pm} = \left\{ \Psi^{\pm}(s) : s \in \mathbb{R}\mathbb{P}_{n-2}, \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} > 0 \right\} \subset K,$$

где  $\Psi^\pm(s)$  – ветви параметризации (2.3), определяемые условиями  $\arg\left(-\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{1}{n}} = \mp\frac{\pi}{n}$ . В точке  $x = \Psi^\pm(s)$  с  $\nabla$  касается гиперплоскость  $\Sigma_\pm(t)$  семейства  $\Sigma_\pm$ , соответствующая параметру  $t = \frac{\langle\beta,s\rangle}{\langle\alpha,s\rangle + \langle\beta,s\rangle}$ .

На Рис. 8 в логарифмической шкале изображено указанное в Предложении 2.1 свойство касания. В них, как и на Рис. 2, рассмотрен дискриминант кубического уравнения

$$y^3 + x_2y^2 + x_1y - 1 = 0 \quad (2.4)$$

(однако, с двумя параметрами), а в качестве прямых  $\Sigma_\pm(t)$  берутся прямые для значений  $t = 0,15$ ,  $t = 0,5$ ,  $t = 0,9$ .

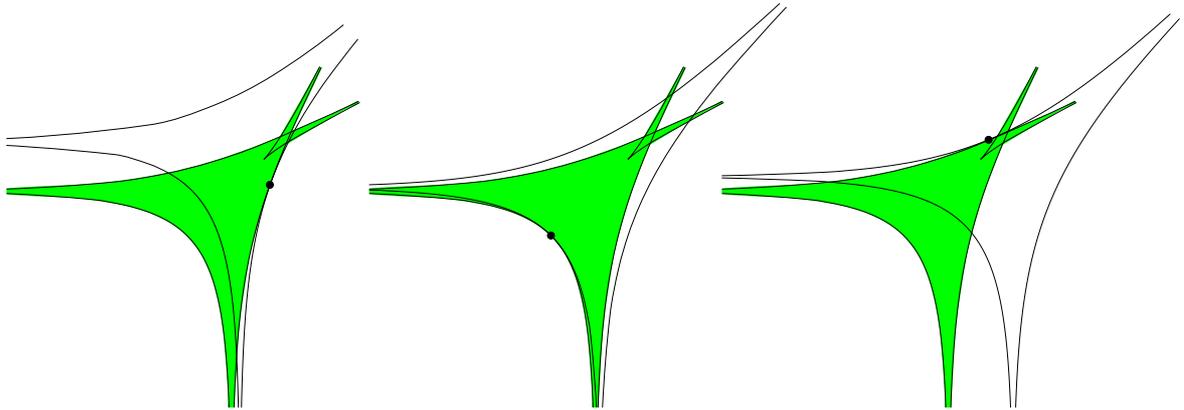


Рис 8. Касание  $\nabla$  гиперплоскостями из  $\Sigma_\pm$  при  $t = 0,15$ ;  $0,5$ ;  $0,9$

*Доказательство предложения 2.1.* Пусть  $F_\pm(x;t)$  – аффинные функции (переменного  $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ ), определяющие  $\Sigma_\pm(t)$ :

$$F_\pm(x;t) = \sum_{k=1}^{n-1} x_k t^{\frac{k}{n}} (1-t)^{\frac{n-k}{n}} e^{\pm \frac{k}{n} \pi i} - 1 =: \sum_{k=1}^{n-1} x_k A_k^\pm(t) - 1.$$

Для рассматриваемых  $s$  точки касания  $\nabla$  и  $\Sigma_\pm(t)$  определяются системой уравнений (относительно  $t = t(s)$ )

$$F_\pm(\Psi(s); t(s)) = 0, \quad \text{grad}_s F_\pm(\Psi(s); t(s)) = 0.$$

Пусть  $s \in \mathbb{RP}_{n-2}$ , причем  $\frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} > 0$ . Для таких  $s$  параметризацию (2.3) можно записать в виде  $n$  ветвей  $x = \Psi^{(j)}(s)$ :

$$x_k = \Psi_k^{(j)}(s) = e^{-\frac{\pi ki}{n}(1+2j)} \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

где в качестве радикала степени  $\frac{k}{n}$  берется арифметическое значение, а  $j$  принимает значения  $0, 1, \dots, n-1$ . Очевидно,  $\Psi^{(0)}(s) = \Psi^+(s)$ ,  $\Psi^{(n-1)}(s) = \Psi^-(s)$ . Вычислим частные производные  $\frac{\partial \Psi_k^{(j)}}{\partial s_\nu}$ . Для  $k \neq \nu$  имеем

$$\frac{\partial \Psi_k^{(j)}}{\partial s_\nu} = B_{k\nu}^{(j)}(s),$$

где

$$B_{k\nu}^{(j)}(s) = e^{-\frac{\pi ki}{n}(1+2j)} \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle^2 \langle \beta, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} [(k + \nu - n) \langle \beta, s \rangle - \nu k |s|].$$

Функция  $B_{k\nu}^{(j)}(s)$  определена также при  $k = \nu$ , и производная  $\frac{\partial \Psi_\nu^{(j)}}{\partial s_\nu}$  выражается через нее по формуле

$$\frac{\partial \Psi_\nu^{(j)}}{\partial s_\nu} = e^{-\frac{\pi \nu i}{n}(1+2j)} \frac{n}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{\nu}{n}} + B_{\nu\nu}^{(j)}(s).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F_\pm(\Psi^{(j)}(s); t)}{\partial s_\nu} = A_\nu^\pm(t) e^{-\frac{\pi \nu i}{n}(1+2j)} \frac{n}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{\nu}{n}} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k^\pm(t) B_{k\nu}^{(j)}(s).$$

Теперь заметим, что

$$A_\nu^+(t) e^{-\frac{\pi \nu i}{n}(1+2j)} \Big|_{j=0} = t^{\frac{\nu}{n}} (1-t)^{\frac{n-\nu}{n}} = A_\nu^-(t) e^{-\frac{\pi \nu i}{n}(1+2j)} \Big|_{j=n-1}.$$

Аналогично, в произведениях  $A_k^+ B_{k\nu}^{(0)}$  и  $A_k^- B_{k\nu}^{(n-1)}$  степень экспоненты исчезает, поэтому

$$F_\pm(\Psi^\pm(s); t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} t^{\frac{k}{n}} (1-t)^{\frac{n-k}{n}} - 1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} |x_k(s)| t^{\frac{k}{n}} (1-t)^{\frac{n-k}{n}} - 1. \quad (2.5)$$

Следовательно, для производной получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t)}{\partial s_{\nu}} &= t^{\frac{\nu}{n}} (1-t)^{\frac{n-\nu}{n}} \frac{n}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{\nu}{n}} + \\ &+ \frac{n}{\langle \alpha, s \rangle^2 \langle \beta, s \rangle} \sum_{k=1}^{n-1} t^{\frac{k}{n}} (1-t)^{\frac{n-k}{n}} s_k \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} ((k + \nu - n) \langle \beta, s \rangle - \nu k |s|). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Положим  $t = \frac{\langle \beta, s \rangle}{n|s|}$ , где  $|s| = s_1 + \dots + s_{n-1}$ . Так как  $n|s| = \langle \alpha, s \rangle + \langle \beta, s \rangle$ , то несложно проверить, что  $t \in (0; 1)$  тогда и только тогда, когда  $\frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} > 0$ .

Покажем, что при указанном  $t = t(s)$  справедливы тождества

$$F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t(s)) \equiv 0, \quad \frac{\partial F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t(s))}{\partial s_{\nu}} \equiv 0, \quad \nu = 1, \dots, n-1.$$

Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} &F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t(s)) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n s_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} \left( \frac{\langle \beta, s \rangle}{n|s|} \right)^{\frac{k}{n}} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{n|s|} \right)^{\frac{n-k}{n}} - 1 = \frac{1}{|s|} \sum_{k=1}^{n-1} s_k - 1 = 0. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t(s))}{\partial s_{\nu}} = \\ &= \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle^2 \langle \beta, s \rangle} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle \beta, s \rangle^{\frac{k}{n}} \langle \alpha, s \rangle^{\frac{n-k}{n}}}{|s|} s_k \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} ((k + \nu - n) \langle \beta, s \rangle - \nu k |s|) + \\ &\quad + \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{\nu}{n}} \frac{\langle \beta, s \rangle^{\frac{\nu}{n}} \langle \alpha, s \rangle^{\frac{n-\nu}{n}}}{|s|} = \\ &= \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle |s|} \sum_{k=1}^{n-1} s_k ((k + \nu - n) \langle \beta, s \rangle - \nu k |s|) + \frac{1}{|s|} = \\ &= \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle |s|} (\langle \beta, s \rangle^2 + (\nu - n) \langle \beta, s \rangle |s| - \nu \langle \beta, s \rangle |s|) + \frac{1}{|s|} = \\ &= \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle |s|} (\langle \beta, s \rangle - n|s|) + \frac{1}{|s|} = 0. \end{aligned}$$

Предложение 2.1 доказано. □

### 2.1.4 Примыкание разрезом $\Sigma_{\pm}$ к области $D$

При доказательстве Предложения 2.1, мы определили  $\Psi^{(j)}(s)$  как ветви параметризации (2.3), с условием

$$\arg \left( -\frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}} = -\frac{\pi}{n}(1 + 2j) \quad (2.7)$$

и отметили справедливость равенств  $\Psi^+(s) = \Psi^{(0)}(s)$ ,  $\Psi^-(s) = \Psi^{(n-1)}(s)$ . Введем термин, на языке которого будет сформулирован основной результат статьи. А именно, назовем «струной» поверхность

$$\mathcal{S}^{(j)} := \{\Psi^{(j)}(s) : s \in \mathbb{R}_+^{n-1}\} \subset \nabla, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Для формулировки следующего утверждения напомним, что  $D$  обозначает область сходимости ряда (2.2).

**Теорема 6.** *Разрезы  $\Sigma_+$ ,  $\Sigma_-$  не пересекают область  $D$  и примыкают к ее границе лишь по двум струнам  $\mathcal{S}^{(0)}$  и  $\mathcal{S}^{(n-1)}$ . Таким образом, при продолжении через границу  $\partial D$  главное решение уравнения (2.1) испытывает ветвление только в точках  $\mathcal{S}^{(0)}$ ,  $\mathcal{S}^{(n-1)}$ .*

*Доказательство.* Покажем, что при  $s \in \mathbb{R}_+^{n-1}$  частные производные  $\frac{\partial F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t)}{\partial s_{\nu}}$  одновременно обращаются в нуль лишь при  $t = \frac{\langle \beta, s \rangle}{n|s|}$ . Ввиду (2.6), уравнение  $\frac{\partial F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t)}{\partial s_1} = 0$  равносильно следующему:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{t \langle \alpha, s \rangle}{1 - t \langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} s_k ((n - k - 1) \langle \beta, s \rangle + k|s|) - \\ - \left( \frac{t \langle \alpha, s \rangle}{1 - t \langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}} = 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{n-2} f_{k+1}(s) b^k = 0, \quad (2.8)$$

где  $b = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{n}}$ ,

$$f_k(s) = \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} s_k ((n-k-1)\langle \beta, s \rangle + k|s|), \quad \text{при } k > 1,$$

$$f_1(s) = \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}} s_1 ((n-2)\langle \beta, s \rangle + |s|) - \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Рассмотрим (2.8) как алгебраическое уравнение относительно  $b$ . Заметим, что при  $s \in \mathbb{R}_+^{n-1}$  коэффициенты  $f_2(s), \dots, f_{n-1}(s)$  этого уравнения положительные. Поэтому (2.8) может иметь не более одного положительного корня  $b = b(s)$ . Поскольку функция  $b = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{n}}$  монотонно возрастает на интервале  $(0; 1)$ , то корню  $b(s)$  может соответствовать только одно значение  $t = t(s)$ . Но выше было показано, что таковым  $t(s)$  является  $t = \frac{\langle \beta, s \rangle}{n|s|}$ .

Обозначим  $|D|$  изображение области  $D$  на диаграмме Рейнхардта. По Теореме 5 система функций

$$r_k(s) = \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad s \in \mathbb{R}_+^{n-1}$$

задает параметризацию границы  $\partial|D|$ . Обозначим  $A_k(t) := t^{\frac{k}{n}}(1-t)^{\frac{n-k}{n}}$ . Согласно представлению (2.5) для  $F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t)$  и следующему за ним доказательству Предложения 2.1, каждая из вещественных гиперплоскостей  $F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t) = 0$  касается  $\partial|D|$ , причем в точках  $t = \frac{\langle \beta, s \rangle}{n|s|}$ . Так как все  $A_k > 0$ , область  $|D|$  лежит под каждой  $\Sigma_{real}(t) = \{r \in \mathbb{R}_+^{n-1} : A_1(t)r_1 + \dots + A_{n-1}(t)r_{n-1} = 1\}$  и потому выпукла.

Обозначим

$$\tilde{F}(x; t) = A_1(t)x_1 + \dots + A_{n-1}(t)x_{n-1}$$

и заметим, что  $\tilde{F}(r; t) \leq 1$  для всех  $r$  из замыкания  $|\overline{D}|$ , причем равенство "=" достигается лишь в точке  $r(s)$  при  $t = \frac{\langle \beta, s \rangle}{n|s|}$ . Теперь рассмотрим функцию  $\tilde{F}(x; t)$  для комплексных  $x = (r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_{n-1} e^{i\theta_{n-1}}) \in \overline{D}$ . Для нее  $\operatorname{Re} \tilde{F}(x; t) \leq$

$\tilde{F}(r; t)$ , причем равенство "=" имеет место лишь при вещественных  $x$ . Отсюда следует, что

$$\Sigma_{\pm}(t) = \{x \in \mathbb{C}^{n-1} : \tilde{F}(x_1 e^{\pm \frac{\pi i}{n}}, \dots, x_{n-1} e^{\pm \frac{\pi(n-1)i}{n}}) = 1\}$$

не пересекают  $D$ , а ее границу  $\partial D$  пересекают лишь в точках  $\Psi^{\pm}(s)$ ,  $s \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ , обеспечивающих согласно (2.5), равенство

$$\tilde{F}(x_1(s) e^{\pm \frac{\pi i}{n}}, \dots, x_{n-1}(s) e^{\pm \frac{\pi(n-1)i}{n}}) = \tilde{F}(|x_1|, \dots, |x_{n-1}|).$$

Теорема 6 доказана. □

Далее покажем, что каждая из струн  $\{\Psi^{\pm}(s) : s \in \mathbb{R}_+^{n-1}\}$  является огибающей к соответствующему семейству гиперплоскостей  $\Sigma_{\pm}$ . Для этого, согласно [26], нужно показать, что при рассматриваемых  $s$  и  $t = t(s)$ , во-первых, выполняется, система равенств

$$F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t(s)) \equiv 0, \quad \frac{\partial F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t(s))}{\partial t} \equiv 0, \quad (2.9)$$

во-вторых, справедливо неравенство

$$\frac{\partial^2 F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t(s))}{\partial t^2} \neq 0. \quad (2.10)$$

Справедливость первого тождества системы равенств (2.9) была показана при доказательстве Предложения 2.1. Проверим второе тождество из (2.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\pm}(x; t)}{\partial t} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k x_k t^{\frac{k-n}{n}} (1-t)^{\frac{n-k}{n}} e^{\pm \frac{k}{n} \pi i} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) x_k t^{\frac{k}{n}} (1-t)^{-\frac{k}{n}} e^{\pm \frac{k}{n} \pi i} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k x_k \left( \frac{1-t}{t} \right)^{\frac{n-k}{n}} e^{\pm \frac{k}{n} \pi i} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) x_k \left( \frac{t}{1-t} \right)^{\frac{k}{n}} e^{\pm \frac{k}{n} \pi i}. \end{aligned}$$

Тогда для точек множества  $K_{\pm}$  имеем следующую цепочку равенств:

$$\frac{\partial F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t(s))}{\partial t} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k s_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{n-k}{n}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k) s_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} \left( \frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} \\
&= \frac{1}{\langle \beta, s \rangle} \sum_{k=1}^{n-1} k s_k - \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) s_k = \frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} - \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} = 0.
\end{aligned}$$

Перейдем к доказательству неравенства (2.10). Как показывают вычисления

$$\frac{\partial^2 F_{\pm}(x; t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) x_k e^{\pm \frac{k}{n} \pi i} \left( \left( \frac{t}{1-t} \right)^{\frac{k}{n}} \frac{1}{t^2} + \left( \frac{1-t}{t} \right)^{\frac{n-k}{n}} \frac{1}{(1-t)^2} \right),$$

применительно ко множеству  $K_{\pm}$  имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t(s))}{\partial t^2} &= -\frac{n|s|^2}{\langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) s_k \left( \frac{1}{\langle \beta, s \rangle} + \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle} \right) = \\
&= -\frac{n^2 |s|^3}{\langle \alpha, s \rangle^2 \langle \beta, s \rangle^2} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) s_k. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial^2 F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t(s))}{\partial t^2} \neq 0, \text{ при } s \in \mathbb{R}_+^{n-1}$$

(заметим, что из условия  $\frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} > 0$ , следует неравенство  $|s| \neq 0$ ).

Итак, показано, что для струн  $\{\Psi^{\pm}(s) : s \in \mathbb{R}_+^{n-1}\}$  выполняются условия (2.9), (2.10). Таким образом доказано следующее

**Предложение 2.2.** *Струны  $\{\Psi^{\pm}(s) : s \in \mathbb{R}_+^{n-1}\}$  являются огибающими для семейства гиперплоскостей  $\Sigma_{\pm}$ .*

### 2.1.5 Монодромия для $y(x)$ вблизи области $D$

Отметим, что для введенных в предыдущем параграфе струн выполняется условие цикличности:  $\mathcal{S}^{(j)} = \mathcal{S}^{(j+nk)}$  (при  $k \in \mathbb{Z}$ ), поэтому достаточно рассматривать  $\mathcal{S}^{(j)}$  для  $j = 0, \dots, n-1$ .

Используя связь между главным решением уравнения (2.1) с остальными решениями: ветви  $y_j(x)$  имеют вид

$$y_j(x) = \varepsilon_j y_0(\varepsilon_j x_1, \varepsilon_j^2 x_2, \dots, \varepsilon_j^{n-1} x_{n-1}), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

из Теоремы 6 получаем

**Следствие 2.1.** *При продолжении через границу  $\partial D$  области  $D$  каждая ветвь  $y_j(x)$  уравнения (2.1) испытывает ветвление лишь в точках  $\mathcal{S}^{(j-1)}$  и  $\mathcal{S}^{(j)}$ .*

Наша цель – найти порядок ветвления каждой из указанных струн. Для этого заметим, что в силу однородности параметризации (2.3) одну из координат вектора  $s = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$  можно считать равной единице. Пусть  $s_{n-1} = 1$ , тем самым будем рассматривать вектор  $s = (s_1, \dots, s_{n-2}, 1)$ .

Зафиксируем произвольную точку  $s^{(0)} = (s_1^{(0)}, \dots, s_{n-2}^{(0)}, 1)$  с положительными координатами и проведем комплексную прямую  $x = u\Psi^{(j_0)}(s^{(0)})$ ,  $u \in \mathbb{C}$ , проходящую через начало координат  $x = 0$  и точку  $\Psi^{(j_0)}(s^{(0)})$  на струне.

Эта прямая имеет непустое пересечение с каждой из струн  $\mathcal{S}^{(j)}$ . Действительно, представив  $u = \rho e^{i\varphi}$ , мы приходим к системе уравнений

$$e^{i(\varphi - \frac{\pi}{n}(1+2j_0))} \rho \frac{ns_k^{(0)}}{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle}{\langle \beta, s^{(0)} \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} = e^{-\frac{\pi i}{n}(1+2j)} \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}},$$

где  $k = 1, \dots, n-1$ , решением которой при  $\varphi = \frac{2\pi}{n}(j_0 - j)$  является  $(\rho, s_1, \dots, s_{n-2}) = (1, s_1^{(0)}, \dots, s_{n-2}^{(0)})$ . Таким образом, для каждого  $j$ , при  $\arg u = \frac{2\pi}{n}(j_0 - j)$  рассматриваемая прямая пересекает струну  $\mathcal{S}^{(j)}$ . Более того, справедливо следующее

**Предложение 2.3.** *Комплексная прямая  $\{x = u\Psi^{(j_0)}(s^{(0)}) : u \in \mathbb{C}\}$  пересекает каждую из струн  $\mathcal{S}^{(j)}$  в единственной точке.*

*Доказательство.* Нужно показать, что система

$$\rho \frac{ns_k^{(0)}}{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle}{\langle \beta, s^{(0)} \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} = \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (2.12)$$

при выбранном  $s^{(0)}$  имеет единственное решение. Для этого выразим из (2.12) переменную  $s_k$ ,  $k = 1, \dots, n-3$  через  $s_{n-2}$  следующим образом. Сначала разделим каждое уравнение из (2.12) на последнее уравнение этой системы (т.е. при  $k = n-1$ ), в результате получим новую систему уравнений:

$$s_k^{(0)} \left( \frac{\langle \beta, s^{(0)} \rangle}{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle} \right)^{\frac{n-k-1}{n}} = s_k \left( \frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \right)^{\frac{n-k-1}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-2. \quad (2.13)$$

Теперь разделим каждое из уравнений полученной системы на последнее уравнение этой системы, возведенное в степень  $n-k-1$ , в результате чего придем к требуемой связи между  $s_k$  и  $s_{n-2}$ :

$$s_k = \frac{s_k^{(0)}}{(s_{n-2}^{(0)})^{n-k-1}} s_{n-2}^{n-k-1}, \quad k = 1, \dots, n-3. \quad (2.14)$$

Представим  $\langle \alpha, s \rangle$ ,  $\langle \beta, s \rangle$ , с учетом последнего выражения, в виде многочленов с положительными коэффициентами:

$$\langle \alpha, s \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \frac{s_k^{(0)}}{(s_{n-2}^{(0)})^{n-k-1}} s_{n-2}^{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k s_{n-2}^{n-k-1},$$

$$\langle \beta, s \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{s_k^{(0)}}{(s_{n-2}^{(0)})^{n-k-1}} s_{n-2}^{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k s_{n-2}^{n-k-1},$$

здесь, по-прежнему,  $s_{n-1} = s_{n-1}^{(0)} = 1$ . Учитывая полученные соотношения, запишем последнее уравнение системы (2.13) в виде

$$s_{n-2}^{(0)} \left( \frac{\langle \beta, s^{(0)} \rangle}{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle} \right)^{\frac{1}{n}} = s_{n-2} \left( \frac{\sum_{k=1}^{n-1} b_k s_{n-2}^{n-k-1}}{\sum_{k=1}^{n-1} a_k s_{n-2}^{n-k-1}} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.15)$$

Несложно увидеть, что функция  $g(s_{n-2}) = s_{n-2} \left( \frac{\sum_{k=1}^{n-1} b_k s_{n-2}^{n-k-1}}{\sum_{k=1}^{n-1} a_k s_{n-2}^{n-k-1}} \right)^{\frac{1}{n}}$  является строго возрастающей при  $s_{n-2} > 0$ . Для этого достаточно представить  $g(s_{n-2})$  в виде

$$g(s_{n-2}) = s_{n-2}^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\sum_{k=1}^{n-1} b_k s_{n-2}^{n-k-1}}{a_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{a_k}{s_{n-2}^{k-1}}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

и учесть, что  $a_k, b_k > 0$ . Следовательно, уравнение (2.15) имеет лишь одно решение  $s_{n-2} = s_{n-2}^{(0)}$ . Из (2.14) получаем, что  $s_k = s_k^{(0)}$  для  $k = 1, \dots, n-3$ . Предложение доказано.  $\square$

Итак, согласно Предложению 2.3, комплексная прямая  $x = u\Psi^{(j_0)}(s^{(0)})$  пересекает каждую из  $n$  струн  $\mathcal{S}^{(j)}$  ровно в одной точке. Обозначим через  $\sigma_j$  петлю, лежащую в указанной прямой, проходящую через  $x = 0$  и окружающую лишь струну  $\mathcal{S}^{(j)}$ . Согласно Следствию 2.1, каждая из струн  $\mathcal{S}^{(j)}$  является точкой ветвления лишь двух ветвей  $y_j(x)$  и  $y_{j+1}(x)$  (с учетом цикличности) из набора  $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$  всех ветвей.

Также из Следствия 2.1 несложно сделать вывод, что ветвь  $y_j(x)$  при обходе петли  $\sigma_j$  переходит в ветвь  $y_{j+1}(x)$  (здесь понимаем, что  $j = 0, \dots, n-1$ , т.е. учитываем условие цикличности по  $\text{mod } n$ ). Действительно, если предположить, что рассматриваемая ветвь переходит в отличную от  $y_{j+1}(x)$  ветвь, то точка  $\mathcal{S}^{(j)}$  будет являться точкой ветвления бесконечного порядка, т. к. лишь две ветви  $y_j(x)$  и  $y_{j+1}(x)$  имеют ветвление в этой точке. Аналогично получаем, что ветвь  $y_j(x)$  при обходе петли  $\sigma_{j-1}$  переходит в ветвь  $y_{j-1}(x)$ .

Наконец, укажем порядок ветвления струн  $\mathcal{S}^{(j)}$ . Как было показано, ветвь  $y_j(x)$  при обходе петли  $\sigma_j$  переходит в ветвь  $y_{j+1}(x)$ . А ветвь  $y_{j+1}(x)$  при обходе петли  $\sigma_j$  переходит в ветвь  $y_{(j+1)-1}(x) = y_j(x)$ . Итак, ветвь  $y_j$  при двукратном

обходе петли  $\sigma_j$  перешла сама в себя. Следовательно, порядок ветвления струн  $\mathcal{S}^{(j)}$  равен двум. Таким образом, доказана следующая

**Теорема 7.** *При продолжении через границу  $\partial D$  области  $D$  всякая ветвь  $y_j(x)$  решения уравнения (2.1) имеет ветвление лишь в паре струн  $\mathcal{S}^{(j)}$  и  $\mathcal{S}^{(j-1)}$ , причем второго порядка. При этом ветвь  $y_j(x)$  при обходе петли  $\sigma_j$  переходит в ветвь  $y_{j+1}$ , а при обходе петли  $\sigma_{j-1}$  переходит в ветвь  $y_{j-1}$ .*

### 2.1.6 Монодромия решений триномиального уравнения

Рассмотрим уравнение вида (1.1) в случае  $l = 1$ , т. е. когда в уравнении всего один параметр, который мы обозначим через  $x$ . Соответствующее уравнение

$$y^n + xy^m - 1 = 0, \quad (2.16)$$

где  $0 < m < n$ , назовем *триномиальным уравнением*. Для него главное решение (1.7) запишется в виде

$$y_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}} \left[ e^{\frac{\pi i}{n}} \ln(1 + e^{-\frac{n-m}{n}\pi i} x t^{\frac{m}{n}} (1-t)^{\frac{n-m}{n}}) - \right. \\ \left. - e^{-\frac{\pi i}{n}} \ln(1 + e^{\frac{n-m}{n}\pi i} x t^{\frac{m}{n}} (1-t)^{\frac{n-m}{n}}) \right] dt. \quad (2.17)$$

Максимальное значение функции  $t^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}}$  на отрезке  $[0; 1]$  равно  $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}$ , поэтому множества

$$\Sigma_{\pm} = \bigcup_{t \in (0;1)} \{x t^{\frac{m}{n}} (1-t)^{\frac{n-m}{n}} e^{\pm \frac{m}{n}\pi i} = 1\}$$

представляют собой пару лучей

$$\Sigma_{\pm} = \left\{ \tau e^{\mp \frac{m\pi i}{n}} : \tau \geq \frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}} \right\}$$

(см. Рис. 9).

Следует отметить, что сектор, ограниченный продолжениями этих лучей до их пересечения (в начале координат), является областью сходимости интеграла Меллина-Барнса (1.2), представляющего главное решение  $y_0(x)$  триномиального уравнения (2.16) (имеется ввиду сектор, содержащий луч  $x > 0$ ).

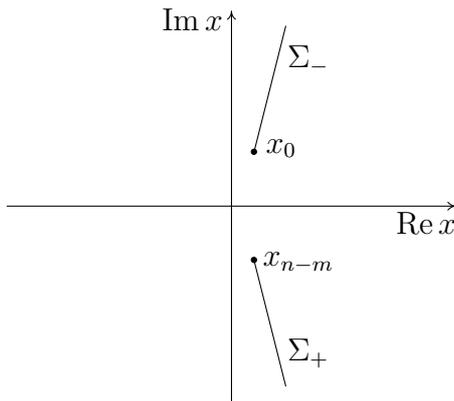


Рис. 9. Разрезы  $\Sigma_+$  и  $\Sigma_-$  для триномиального уравнения

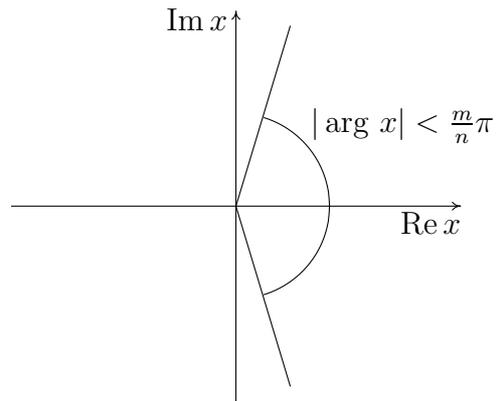


Рис. 10. Сектор сходимости интеграла Меллина-Барнса

Действительно, интеграл имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+i\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{m}{n}\zeta\right) \Gamma(\zeta)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n-m}{n}\zeta + 1\right)} x^{-\zeta} d\zeta, \quad (2.18)$$

где  $0 < \gamma < \frac{1}{m}$ , и согласно [25], его область сходимости вычисляется по формуле

$$|\arg x| < \frac{\pi}{2} \left( \frac{m}{n} + 1 - \frac{n-m}{n} \right) = \frac{m}{n} \pi$$

(см. Рис. 10). Поясним, что в соответствии с [25], здесь в скобках просуммированы со знаком "+" модули коэффициентов при  $y$  в аргументах гамма-функции в числителе интеграла (2.18) и со знаком "-" — коэффициент в знаменателе. Поскольку по Теореме 1 интеграл (2.17) сходится во всей плоскости переменного  $x$ , кроме двух лучей, мы видим, что в случае триномиального уравнения область сходимости интеграла (2.17) значительно шире области

сходимости интеграла Меллина-Барнса (2.18).

Не ограничивая общности будем считать, что  $m$  и  $n$  взаимно просты (уравнение (2.16) сводится к этому случаю заменой  $y = z^d$ , где  $d$  — наибольший общий делитель для  $m$  и  $n$ ). В этом случае дискриминант уравнения допускает наиболее краткую запись и он равен (см. [97])

$$\Delta = (-1)^n [(-1)^m n^n - m^m (n - m)^{n-m} x^n].$$

Таким образом, дискриминантное множество составляет следующая последовательность точек

$$x_s = \frac{e^{\pi i \frac{m+2s}{n}}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}}, \quad s = 0, \dots, n-1,$$

лежащих на одной окружности. Заметим, что точки  $x_0$  и  $x_{n-m}$  дискриминантного множества — суть начала лучей  $\Sigma_-$  и  $\Sigma_+$ , вне которых, по Теореме 1,  $y(x)$  голоморфна и однозначна. Поэтому, обозначив через  $\sigma_s$  петлю, проходящую через  $x = 0$  и окружающую лишь точку  $x_s$ , мы приходим к следующему утверждению:

**Следствие 2.2.** *Главная ветвь  $y_0(x)$  триномиального уравнения (2.16) переходит в себя при обходе каждой из петель  $\sigma_s$ , кроме  $\sigma_0$  и  $\sigma_{n-m}$ .*

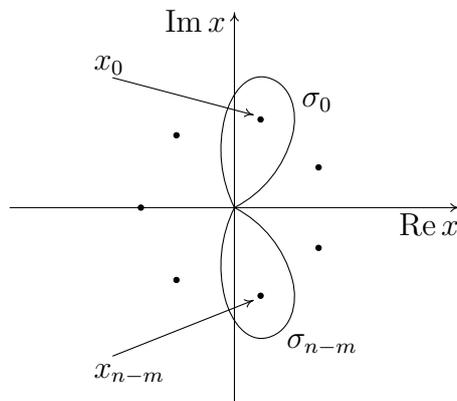


Рис. 11

Используя рассуждение симметрии и то, что остальные ветви имеют вид

$$y_j(x) = \varepsilon_j y_0(\varepsilon_j^{n_1} x_1, \dots, \varepsilon_j^{n_l} x_l), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

где  $\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi j}{n}i}$  – первообразные корни из единицы, получаем

**Следствие 2.3.** *Каждая ветвь  $y_j(x)$  имеет ветвление лишь в паре точек*

$$x = \frac{e^{\frac{m}{n}(\pm 1 - 2j)\pi i}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}}.$$

Покажем, что каждая из дискриминантных точек  $x_s$  является точкой ветвления лишь двух ветвей из набора  $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$  всех ветвей. Так как при  $0 \leq j_1, j_2 \leq n-1$  уравнения

$$e^{\frac{m}{n}(\pm 1 - 2j_1)\pi i} = e^{\frac{m}{n}(1 - 2j_2)\pi i}, \quad e^{\frac{m}{n}(\pm 1 - 2j_1)\pi i} = e^{\frac{m}{n}(-1 - 2j_2)\pi i}$$

имеют лишь решения  $j_2 = (j_1 + 1)(\text{mod } n)$ ,  $j_2 = (j_1 - 1)(\text{mod } n)$ , то каждая пара ветвей  $y_j$  и  $y_{(j+1)(\text{mod } n)}$ ,  $y_j$  и  $y_{(j-1)(\text{mod } n)}$  имеет единственную общую точку ветвления. Обозначим ее  $x_s$  и найдем  $s$ . Для этого решим уравнения

$$e^{\frac{m}{n}(-1 - 2j)\pi i} = e^{\frac{\pi i}{n}(m + 2s_1)}, \quad e^{\frac{m}{n}(1 - 2j)\pi i} = e^{\frac{\pi i}{n}(m + 2s_2)},$$

откуда получаем  $s_1 = -m(j+1)(\text{mod } n)$ ,  $s_2 = -mj(\text{mod } n)$ .

Ветвь  $y_j$  при обходе петли  $\sigma_{-m(j+1)(\text{mod } n)}$  переходит в ветвь  $y_{(j+1)(\text{mod } n)}$ . Действительно, если предположить, что рассматриваемая ветвь переходит в отличную от  $y_{(j+1)(\text{mod } n)}$  ветвь, то точка  $x_{-m(j+1)(\text{mod } n)}$  будет являться точкой ветвления бесконечного порядка, так как лишь две ветви  $y_j$  и  $y_{(j+1)(\text{mod } n)}$  имеют ветвление в этой точке. Аналогично получаем, что ветвь  $y_j$  при обходе петли  $\sigma_{-mj(\text{mod } n)}$  переходит в ветвь  $y_{(j-1)(\text{mod } n)}$ .

Найдем порядок ветвления точек  $x_s$ . Как было выше показано, ветвь  $y_j$  при обходе петли  $\sigma_{-m(j+1)(\text{mod } n)}$  переходит в ветвь  $y_{(j+1)(\text{mod } n)}$ , в свою очередь, ветвь  $y_{(j+1)(\text{mod } n)}$  при обходе петли  $\sigma_{-m(j+1)(\text{mod } n)}$  переходит в ветвь

$y_{(j+1-1)(\text{mod } n)} = y_j$ . Таким образом, ветвь  $y_j$  при двукратном обходе петли  $\sigma_{-m(j+1)(\text{mod } n)}$  переходит сама в себя. Следовательно, порядок ветвления точек  $x_s$  равен двум. Итак, доказана

**Теорема 8.** *Если  $m$  и  $n$  взаимно просты, то всякая ветвь  $y_j(x)$  триномиального уравнения (2.16) имеет ветвление (причем второго порядка) лишь в паре точек*

$$\frac{e^{\frac{m}{n}(1-2j)\pi i}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}} = x_{-mj(\text{mod } n)}, \quad \frac{e^{\frac{m}{n}(-1-2j)\pi i}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}} = x_{-m(j+1)(\text{mod } n)}.$$

При этом, ветвь  $y_j$  при обходе петли  $\sigma_{-mj(\text{mod } n)}$  переходит в ветвь  $y_{(j-1)(\text{mod } n)}$ , а при обходе петли  $\sigma_{-m(j+1)(\text{mod } n)}$  — в ветвь  $y_{(j+1)(\text{mod } n)}$ .

Пользуясь Теоремой 8 несложно доказать неразрешимость в радикалах решения уравнения (2.16) степени выше 4. (О разрешимости в радикалах общего алгебраического уравнения с помощью теории Галуа см. [47]). Действительно, согласно доказательству Теоремы 8, каждая дискриминантная точка  $x_{-mj(\text{mod } n)}$  является точкой ветвления лишь двух ветвей  $y_{(j-1)(\text{mod } n)}$  и  $y_{j(\text{mod } n)}$ . Это означает, что при обходе каждой из петель  $\sigma_{-mj(\text{mod } n)}$  все ветви кроме двух:  $y_{j-1}$  и  $y_j$  переходят в себя, а упомянутые ветви  $y_{j-1}, y_j$  — одна в другую (напомним, что в наших предположениях  $(m, n) = 1$ ). В этом случае группа монодромии решения  $y(x)$  порождается смежными транспозициями

$$(0, 1), (1, 2), \dots, (n-2, n-1).$$

Хорошо известно (см., например, [16], с. 166), указанные транспозиции порождают всю симметрическую группу подстановок  $S_n$ . Однако, из курса высшей алгебры известно ([16], с. 418), что группа  $S_n$  неразрешима при  $n \geq 5$  (и разрешима при  $n < 5$ ). Тогда неразрешимость в радикалах рассматриваемого уравнения следует из следующей теоремы.

**Теорема 9** ([50], стр. 176). *Функция представима в радикалах тогда и только тогда, когда она является алгебраической функцией и имеет разрешимую группу монодромии.*

В связи со сказанным отметим, что В.И. Арнольдом было дано топологическое, без использования теории Галуа, доказательство того факта, что группа монодромии алгебраической функции, представимой в радикалах, разрешима.

## 2.2 Логарифмический метод аналитического продолжения общей алгебраической функции

Здесь для удобства будем записывать уравнение (1.1) в следующем виде:

$$y^n + x_l y^{n_l} + \dots + x_1 y^{n_1} - 1 = 0, \quad (2.19)$$

где  $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_l < n_{l+1} = n$ . Гипергеометрический ряд для степени решения  $y^\mu(x)$ ,  $\mu > 0$  уравнения (2.19) следующий:

$$y_0^\mu(x) = \frac{\mu}{n} \sum_{|k| \geq 0} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\left(\frac{\mu}{n} + \frac{n_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n_l}{n} k_l\right)}{k_1! \dots k_l! \Gamma\left(\frac{\mu}{n} - \frac{n'_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n'_l}{n} k_l + 1\right)} x_1^{k_1} \dots x_l^{k_l}. \quad (2.20)$$

В продолжении этой главы пополним перечень аналитических продолжений из [43], а именно, приведем все ряды Лорана-Пюизо с центром в точке  $x = 0$ , представляющие аналитические продолжения  $y_0(x)$ . Также опишем области сходимости этих рядов. Рассмотрим и способ аналитического продолжения  $y_0(x)$  в другие ряды.

### 2.2.1 Идея логарифмического метода на примере триномиального уравнения

Поясним основную идею предстоящих исследований на примере кубического уравнения

$$y^3 + xy - 1 = 0.$$

Согласно [92] главное решение этого уравнения допускает представление в виде интеграла

$$y_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+i\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}z)\Gamma(z)}{\Gamma(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z + 1)} x^{-z} dz, \quad (2.21)$$

который сходится в секторе  $|\arg x| < \frac{\pi}{3}$ . Здесь  $\gamma + i\mathbb{R}$  – вертикальная прямая, разделяющая полюсы гамма-функций, стоящих в числителе. Вычисляя интеграл (2.21) как сумму вычетов в полюсах  $z = -k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , происходящих от функции  $\Gamma(z)$ , получаем ряд

$$y_0(x) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}k)}{\Gamma(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}k) k!} x^k, \quad (2.22)$$

сходящийся в круге  $|x| < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ . Вычисляя же (2.21) как сумму вычетов в полюсах  $z = 1 + 3k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , происходящих от  $\Gamma(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}z)$ , приходим к ряду

$$y(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + 3k)}{\Gamma(2 + 2k) k!} \frac{1}{(-x)^{3k}}, \quad (2.23)$$

который сходится при  $|x| > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ , т.е. вне указанного круга.

С другой стороны, согласно [58], (отрицательная) степень решения  $\frac{1}{y_0^\mu(x)}$ ,  $\mu > 0$  рассматриваемого уравнения допускает представление в виде интеграла Меллина-Барнса

$$\frac{1}{y_0^\mu(x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+i\mathbb{R}} \frac{\frac{\mu}{3}\Gamma(z)\Gamma(\frac{\mu}{3} - \frac{2z}{3})}{\Gamma(\frac{\mu}{3} + 1 + \frac{z}{3})} (-x)^{-z} dz, \quad (2.24)$$

сходящегося в секторе  $\frac{\pi}{3} < \arg x < \frac{5\pi}{3}$ .

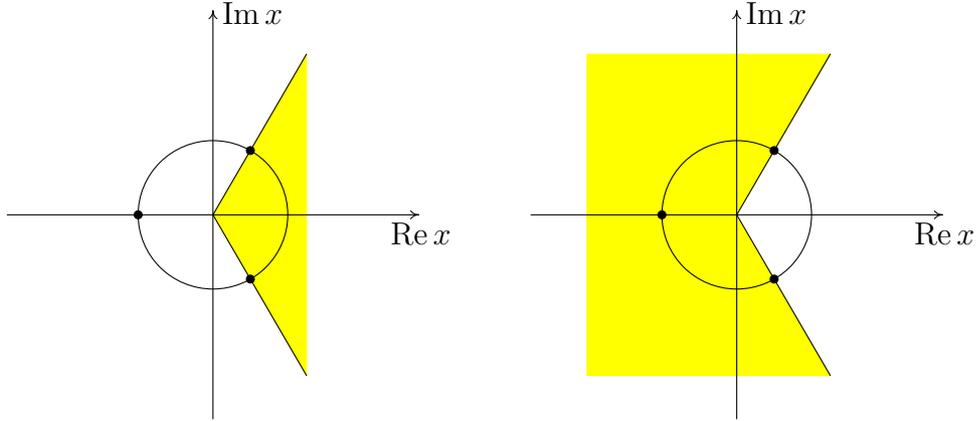


Рис. 12.

Заметим, что если  $y(x)$  является решением рассматриваемого кубического уравнения, то  $y(x)$  удовлетворяет уравнению

$$y(x) = -\frac{x}{y(x)} + \frac{1}{y^2(x)}. \quad (2.25)$$

Вычисляя интеграл (2.24) как сумму вычетов в полюсах  $z = \frac{\mu}{2} + \frac{3}{2}k$ , и подставляя в эту сумму получаемые ряды при  $\mu = 1$  и  $\mu = 2$ , получим ряд

$$y(x) = \frac{1}{2}(-x)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k)}{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}k)k!} \left(-\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}k}, \quad |x| > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}. \quad (2.26)$$

Если будем вычислять (2.24) как сумму вычетов в полюсах функции  $\Gamma(s)$ , расположенных левее контура интегрирования, то вновь получим ряд (2.22).

Таким образом, для рассматриваемого кубического уравнения мы получили три степенных ряда, сходящихся в круге  $|x| < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$  (это главное решение (2.22) рассматриваемого уравнения, и два других, соответствующих значениям  $j = 1, 2$ ), а также три ряда, сходящихся вне указанного круга (это ряд (2.23) и две ветви ряда (2.26)). В силу того, что области сходимости рассматриваемых рядов имеют непустое пересечение с секторами, в которых аналитичны интегралы для  $y(x)$  и  $\frac{1}{y^\mu(x)}$ , то ряды (2.23) и (2.26) являются аналитическим продолжением ряда (2.22) из круга  $|x| < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$  в его внешность. При этом (2.23)

продолжается через сектор  $|\arg x| < \frac{\pi}{3}$  (см. Рис. 12 слева), а ряд (2.26) – через сектор  $\frac{\pi}{3} < \arg x < \frac{5\pi}{3}$  (Рис. 12 справа).

Аналогично кубическому уравнению можно было рассмотреть любое триномиальное уравнение  $y^n + x_1 y^{n_1} - 1 = 0$ . Напомним, что все дискриминантные точки такого уравнения лежат на одной окружности (жирные точки на Рис. 12 в случае кубического уравнения). Все они являются точками ветвления второго порядка для решения  $y(x)$  (см. параграф 2.1.6).

## 2.2.2 Понятие коамебы и область сходимости интеграла Меллина-Барнса

**Определение 2.4.** *Коамебой алгебраической гиперповерхности (или полинома  $Q$ )*

$$V = \{z \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^m : Q(z) = 0\}$$

*называется ее образ в  $\mathbb{R}^m$  при отображении*

$$\text{Arg} : (z_1, \dots, z_m) \longrightarrow (\arg z_1, \dots, \arg z_m).$$

Коамебу обозначают  $\mathcal{A}'_V$ . Коамебу достаточно изображать в кубе  $[-\pi, \pi]^m \subset \mathbb{R}^m$ , в остальные точки она продолжается с учетом периодичности. На рисунках 13, 14 изображены коамебы прямой  $z_1 + z_2 = 1$  и дискриминанта кубического уравнения (2.4) Коамеба прямой  $z_1 + z_2 = 1$  получается из коамебы прямой  $z_1 + z_2 + 1 = 0$ , с помощью параллельного переноса на вектор  $(\pi, \pi)$ . Коамеба дискриминанта уравнения (2.4) изображена на Рис. 14. [4].

Следующая теорема описывает область сходимости интеграла Меллина-Барнса.

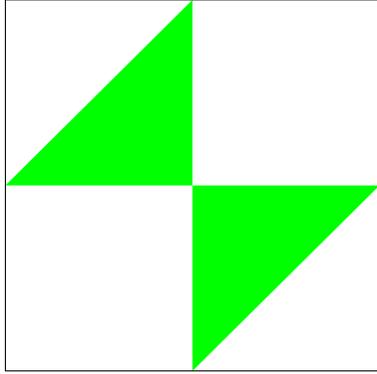


Рис. 13. Коамеба полинома  $z_1 + z_2 - 1$

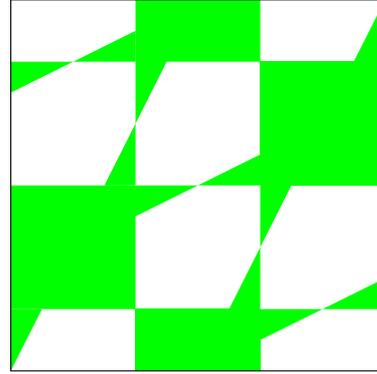


Рис. 14. Коамеба дискриминанта кубического уравнения

**Теорема 10** ([4]). *Областью сходимости интеграла Меллина-Барнса*

$$y_0^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int_{\gamma+i\mathbb{R}^l} \frac{\frac{\mu}{n}\Gamma(\frac{\mu}{n} - \frac{n_1}{n}z_1 - \dots - \frac{n_l}{n}z_l)\Gamma(z_1)\dots\Gamma(z_l)}{\Gamma(\frac{\mu}{n} + \frac{n'_1}{n}z_1 + \dots + \frac{n'_l}{n}z_l + 1)} x^{-z} dz, \quad (2.27)$$

*представляющего положительную степень  $\mu$  главного решения уравнения (2.19), является секториальная область*

$$S = \text{Arg}^{-1} \left\{ |\theta_\nu| < \frac{\pi n_\nu}{n}, \nu \in I, |n_j\theta_k - n_k\theta_j| < \pi n_j \right\}. \quad (2.28)$$

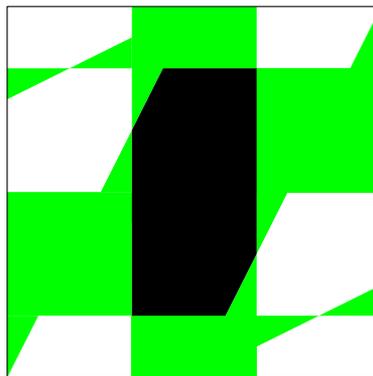


Рис. 15. Область сходимости интеграла Меллина-Барнса

На Рис. 15 в виде черного шестиугольника изображена область сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение кубического уравнения (2.4).

### 2.2.3 Формулировки теорем об аналитическом продолжении

Для исследования общего уравнения (2.19) нам потребуются некоторые понятия. Напомним, что степенные ряды сходятся вплоть до ближайших особенностей функции, которую они представляют. В случае алгебраической функции  $y(x)$  такой особенностью является дискриминантное множество  $\nabla$  уравнения (2.19). Поэтому структура областей сходимости степенных рядов (Лорана-Пюизо) для продолжений  $y(x)$  тесно связана с дискриминантным множеством. С другой стороны, области сходимости степенных рядов являются поликруговыми и логарифмически выпуклыми. Тем самым, в нашем случае геометрия областей сходимости должна описываться в терминах логарифмической проекции дискриминантного множества, т.е. в терминах *амебы* гиперповерхности  $\nabla$ , которая определяется (см. [73]) как образ  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\nabla = \text{Log}\nabla$  (см. §2.1.2).

Вместо интегралов Меллина-Барнса (2.21) и (2.24) мы исследуем их многомерные аналоги. Важную роль при этом играет теория многомерных вычетов, а именно так называемый принцип разделяющих циклов, с помощью которого интеграл представляется суммой рядов.

Заметим, что уравнение (2.19) определяется набором показателей  $0, n_1, \dots, n_l, n$  входящих в него мономов, т.е. выделенными точками отрезка  $[0, n]$ . Под разбиением  $\tau$  отрезка  $[0, n]$  будем понимать совокупность смежных подотрезков, полученных делением  $[0, n]$  точками подмножества из  $\{n_1, \dots, n_l\}$ . Среди таких подмножеств рассматривается и пустое множество, в этом случае разбиение состоит из одного элемента, а именно, из  $[0, n]$ . На самом деле рассматриваемые разбиения – это триангуляции отрезка  $[0, n]$  с вершинами из набора чисел  $0, n_1, \dots, n_l, n$ . Известно [73], что существует биекция между множеством разбиений  $\{\tau\}$  и множеством вершин многогранника Ньютона для дискриминанта  $\Delta(x)$  уравнения (2.19). В то же время,

каждой вершине  $v$  многогранника Ньютона для  $\Delta(x)$  соответствует некоторая связная компонента  $E_v$  дополнения амебы дискриминантного множества  $\nabla = \{x : \Delta(x) = 0\}$  (см. [73]). Таким образом, мы имеем следующую цепочку соответствий:

$$\{\tau\} \longleftrightarrow \{v_\tau\} \longrightarrow \{E_\tau\}.$$

Например, дополнение амебы  $\mathcal{A}_\nabla$  для дискриминанта уравнения  $y^5 + x_2y^2 + x_1y - 1 = 0$  состоит из четырех связных компонент, соответствующих допустимым разбиениям отрезка  $[0, 5]$  (см. Рис. 16).

Для любой пары  $p, q \in \{0, 1, \dots, l, l+1\}$  упорядоченных ( $p < q$ ) номеров введем два вектора

$$b_p = \frac{1}{n_q - n_p} (-n_p, n_1 - n_p, \dots [p] \dots [q] \dots, n_{l+1} - n_p),$$

$$b_q = \frac{1}{n_q - n_p} (-n_q, n_1 - n_q, \dots [p] \dots [q] \dots, n_{l+1} - n_q),$$

где  $n_{l+1} = n$ . С помощью этих векторов определим выражение

$$A_k^{p,q} := \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{n_q - n_p} + \langle b_p, k \rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{n_q - n_p} + \langle b_q, k \rangle + 1\right) k_0! \dots [p] \dots [q] \dots k_{l+1}!},$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – знак скалярного произведения, причем под  $k$  понимается вектор  $k = (k_0, k_1, \dots [p] \dots [q] \dots, k_{l+1})$ . В приведенных обозначениях справедлива

**Теорема 11.** *Для любой упорядоченной пары  $p, q \in \{0, 1, \dots, l+1\}$  ряд (2.20) допускает аналитическое продолжение  $y_{p,q}^\mu(x)$  в виде  $(n_q - n_p)$ -значного ряда*

*Пуизо*

$$\frac{\mu}{n_q - n_p} \left(-\frac{x_p}{x_q}\right)^{\frac{\mu}{n_q - n_p}} \sum_{|k| \geq 0} A_k^{p,q} \frac{(-1)^{k_0 + \langle b_p, k \rangle} x_p^{\langle b_q, k \rangle}}{x_q^{\langle b_p, k \rangle}} x_1^{k_1} \dots [p] \dots [q] \dots x_l^{k_l}. \quad (2.29)$$

Область сходимости  $D_{p,q}$  этого ряда содержит каждую из областей  $\text{Log}^{-1}(E_\tau)$ , для которой разбиение  $\tau$  содержит отрезок  $[n_p, n_q]$ . В каждой

области  $\text{Log}^{-1}(E_\tau)$  сходится ровно  $n$  рядов  $y_{p,q}$ , если учитывать, что каждый ряд является  $(n_q - n_p)$ -значным. Тем самым (2.29) составляет полный набор всех центрированных в нуле степенных разложений решения уравнения (2.19).

В (2.29) следует полагать  $x_0 = -1$  при  $p = 0$ ,  $x_{l+1} = 1$  при  $q = l + 1$ . Очевидно, что для пары  $p = 0$ ,  $q = l + 1$  ряд (2.29) совпадает с главным решением (2.20). Рис. 16 (справа) иллюстрирует в виде жирного затемнения образ  $\text{Log}D_{0,1}$  для рассмотренного выше уравнения пятой степени. Как видно из рисунка, этот образ содержит связные компоненты дополнения амебы, соответствующим разбиениям  $\{[0, 1], [1, 5]\}$  и  $\{[0, 1], [1, 2], [2, 5]\}$ .

Оказывается, для некоторых пар рядов из списка (2.29) можно предъявить конструктивное непосредственное аналитическое продолжение одного ряда в другой. Рассмотрим отображение  $\text{Arg} : (\mathbb{C} \setminus 0)_x^l \rightarrow \mathbb{R}_\theta^l$ , определяемое формулой

$$\text{Arg} : (x_1, \dots, x_l) \rightarrow (\arg x_1, \dots, \arg x_l).$$

Введем в  $(\mathbb{C} \setminus 0)^l$  следующую секториальную область (т.е. определяемую только условиями на аргумент  $\arg x_j = \theta_j$ ):

$$S' = \text{Arg}^{-1} \left\{ |\theta_\nu + \pi| < \frac{\pi n'_\nu}{n}, \nu \in I, |n'_k(\theta_j + \pi) - n'_j(\theta_k + \pi)| < \pi n'_k \right\}, \quad (2.30)$$

где  $I$  — набор индексов  $\{1, \dots, l\}$ ;  $j, k \in I$ ,  $j < k$ .

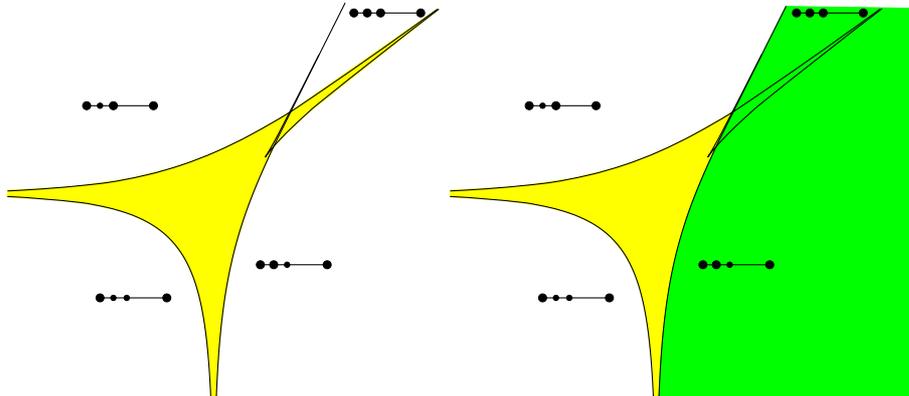


Рис. 16.

**Теорема 12.** *Ряд  $y_{0,q}$  есть результат аналитического продолжения главного решения  $y_0$  из области  $D_{0,l+1}$  в  $D_{0,q}$  через сектор  $S$ , а  $y_{p,l+1}$  – результат аналитического продолжения  $y_0$  из  $D_{0,l+1}$  в  $D_{p,l+1}$  через сектор  $S'$ .*

#### 2.2.4 Доказательство Теоремы 12

Отметим, что в [43] на основе (2.27) для главного решения  $y_0(x)$  уравнения (2.19) были получены аналитические продолжения вида  $y_{0,j}$ ,  $j = 1, \dots, l+1$ . В статье [4] было показано, что областью сходимости интеграла (2.27) является сектор (2.28). В силу того, что область сходимости ряда  $y_{0,j}$  имеет непустое пересечение с секториальной областью сходимости  $S$  интеграла (2.27), то можно сделать вывод, что каждый ряд  $y_{0,j}$  аналитически продолжается из ряда (2.20) посредством интеграла (2.27). Первая часть Теоремы доказана.

В статье [58] была указана формула для отрицательной степени главного решения  $\frac{1}{y_0^\mu(x)}$  уравнения (2.19). Она имеет следующий вид:

$$\frac{1}{(2\pi i)^l} \int_{\gamma+i\mathbb{R}^l} \frac{\frac{\mu}{n} \Gamma(\frac{\mu}{n} - \frac{n'_1}{n} z_1 - \dots - \frac{n'_l}{n} z_l) \Gamma(z_1) \dots \Gamma(z_l)}{\Gamma(\frac{\mu}{n} + \frac{n_1}{n} z_1 + \dots + \frac{n_l}{n} z_l + 1)} (-x)^{-z} dz, \quad (2.31)$$

здесь  $\gamma$  – точка из симплекса

$$\sigma = \{u \in \mathbb{R}_+^l : n'_1 u_1 + \dots + n'_l u_l < \mu\}.$$

Покажем, что с помощью указанного интеграла можно получить аналитические продолжения главного решения (2.20), и это будут ряды  $y_{p,l+1}$ ,  $p = 0, \dots, l$ . Воспользуемся методом, с помощью которого вычисляются общие многомерные интегралы Меллина-Барнса

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int_{\gamma+i\mathbb{R}^l} \frac{\prod_{j=1}^M \Gamma(\langle a^j, z \rangle + b_j)}{\prod_{k=1}^N \Gamma(\langle c^k, z \rangle + d_k)} x^{-z} dz, \quad (2.32)$$

где все параметры вещественные:  $a^j, c^k \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_j, d_k \in \mathbb{R}$ , а точка  $\gamma \in \mathbb{R}^l$  выбрана так, что вертикальное подпространство интегрирования  $\gamma + i\mathbb{R}^l$  не пересекает полюсы подынтегральной функции, состоящие из семейства гиперплоскостей

$$\langle a^j, z \rangle + b_j = -\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, M.$$

Основой метода является принцип разделяющих циклов, сформулированный А.К. Цихом [51](см. также [99], [32]). В формулировке этого принципа речь идет о вычислении интегралов

$$\frac{1}{(2\pi i)^l} \int_{\Delta_g} \frac{h(z) dz}{f_1(z) \dots f_l(z)} \quad (2.33)$$

типа Гротендика, где полюсы подынтегральной мероморфной формы ассоциированы с голоморфным собственным отображением  $f = (f_1, \dots, f_l) : \mathbb{C}^l \rightarrow \mathbb{C}^l$ , а множество интегрирования  $\Delta_g$  есть остов полиэдра  $\Pi_g$ , ассоциированного с другим голоморфным собственным отображением  $g = (g_1, \dots, g_l) : \mathbb{C}^l \rightarrow \mathbb{C}^l$ . В случае, когда отображения  $f$  и  $g$  совпадают, интеграл (2.33) равен сумме вычетов Гротендика подынтегральной формы по всем нулям отображения  $f$  в полиэдре  $\Pi_g$ . На самом деле в этом случае остов  $\Delta_g$  гомологичен сумме локальных циклов, разделяющих полярные дивизоры  $D_j = \{f_j = 0\}$ ,  $j = 1, \dots, l$ , т.е. таких циклов, которые участвуют в определении локального вычета Гротендика [51]. В вопросе о представлении интеграла (2.33) суммой вычетов Гротендика важную роль играет следующее понятие.

**Определение 2.5.** *Полиэдр  $\Pi_g$  называется согласованным с семейством гиперповерхностей (дивизоров)  $\{D_j\}$ , если  $j$ -ая грань полиэдра  $\Pi_g$  не пересекает  $D_j$  для всех  $j$  от 1 до  $l$ .*

**Теорема 13** (принцип разделяющих циклов [51]). *Если полиэдр  $\Pi_g$  ограничен и согласован с семейством полярных дивизоров  $\{D_j\}$ , то интеграл (2.33) равен сумме вычетов Гротендика в области  $\Pi_g$ .*

В случае неограниченных полиэдров кроме условия согласованности полиэдра и семейства полярных дивизоров, надо требовать достаточно быстрого убывания подынтегральной формы в  $\Pi_g$ , подобно тому как это делается в классической лемме Жордана, где в качестве  $\Pi_g$  выступает полуплоскость. Эти условия описаны в статье [99].

Первоначально заданный интеграл (2.32) можно привести к каноническому виду (2.33) следующим образом. Вертикальное подпространство интегрирования  $\gamma + i\mathbb{R}^l$  можно интерпретировать как остов некоторого полиэдра, причем в случае  $l = 1$  оно может быть остовом лишь двух полиэдров - левой и правой полуплоскости с разделяющей линией  $\gamma + i\mathbb{R}$ . Однако в случае  $l > 1$  это подпространство может служить остовом бесконечного числа полиэдров и наша задача состоит в том, чтобы разбить все множество полярных гиперплоскостей в (2.32) на  $l$  дивизоров, и одновременно подклеить к  $\gamma + i\mathbb{R}^l$  полиэдр, согласованный с этим семейством дивизоров. В качестве полиэдров мы будем брать следующие

$$\Pi_g = \{z \in \mathbb{C}^l : \operatorname{Re} g_j(z) < r_j, j = 1, \dots, l\},$$

где  $g_j(z)$  – линейные функции с вещественными коэффициентами. Ясно, что  $\Pi_g = \pi + i\mathbb{R}^l$ , где  $\pi$  – ортант (симплициальный  $l$ -мерный конус) в вещественном подпространстве  $\mathbb{R}^l \subset \mathbb{C}^l$  (см. Рис. 17, 18).

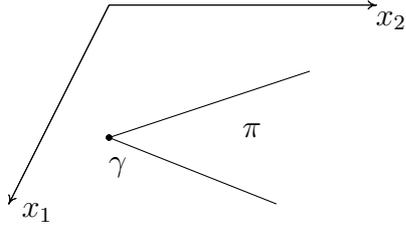


Рис. 17

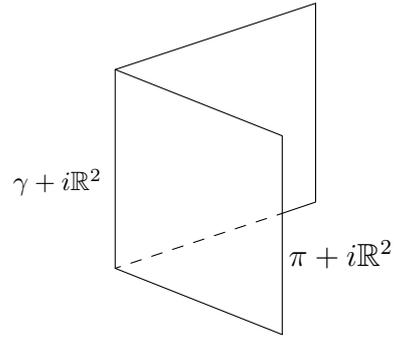


Рис. 18

Применим рассмотренный метод к интегралу (2.31). Полярное множество в нем состоит из  $n + 1$  семейств гиперплоскостей

$$D_j = \{z = -\nu, \nu \in \mathbb{N}\}, \quad j = 1, \dots, l,$$

$$D_{l+1} = \left\{ \frac{\mu}{n} - \frac{n'_1}{n} z_1 - \dots - \frac{n'_l}{n} z_l = -\nu, \nu \in \mathbb{N} \right\}.$$

В случае  $l = 2$  вещественные части этих гиперплоскостей (прямых) изображены на Рис. 19 наборами вертикальных, горизонтальных и наклонных прямых. Нетрудно видеть, что существует  $l + 1$  ортантов  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_l$  с вершиной в точке  $\gamma \in \sigma$  таких, что  $\Pi_0 = \pi_0 + i\mathbb{R}^l$  согласован с набором дивизоров  $D_1, \dots, D_l$ , а  $\Pi_j = \pi_j + i\mathbb{R}^l$  — с набором дивизоров  $D_1, \dots, [j] \dots, D_l, D_{l+1}$ . Поэтому согласно принципа разделяющих циклов мы имеем  $l + 1$  вычетных формул для интеграла (2.31). Такая формула в полиэдре  $\Pi_0$  дает сумму вычетов по точкам  $z_1 = -k_1, \dots, z_l = -k_l$ , которая приводит к ряду Тейлора для функции  $\frac{1}{y_0^\mu(x)}$ .

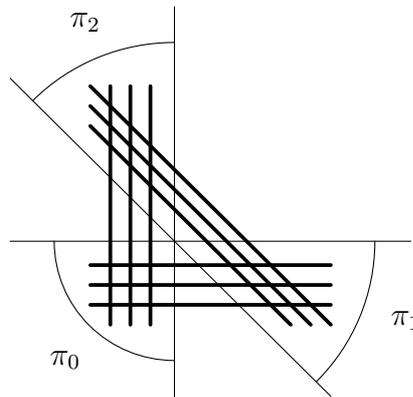


Рис. 19

Посмотрим вычетную формулу в полиэдре  $\Pi_p$ . Точки пересечения  $z(k)$  дивизоров  $D_1, \dots [p] \dots D_l, D_{l+1}$  в нем следующие:

$$z_j = -k_j, \quad j \neq p, \quad z_p = \frac{\mu}{n - n_p} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p}}^l \frac{n'_i}{n'_p} k_i.$$

(напомним, что  $n_0 = 0$ ). Сумма вычетов в точках  $z(k)$  определяет следующий ряд для функции  $\frac{1}{y^\mu(x)}$ :

$$\frac{\mu}{n'_p} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\left(\frac{\mu}{n'_p} - \langle b_n, k \rangle\right)}{k_0! \dots [p] \dots k_l! \Gamma\left(\frac{\mu}{n'_p} - \langle b_p, k \rangle + 1\right)} (-x_1)^{k_1} \dots (-x_p)^{\langle b_n, k \rangle - \frac{\mu}{n'_p}} \dots (-x_l)^{k_l}, \quad (2.34)$$

где  $\langle b_p, k \rangle$  и  $\langle b_n, k \rangle$  определены в параграфе 2.2. Так как  $y(x)$  удовлетворяет уравнению

$$y(x) = -\frac{x_l}{y^{n-n_l-1}(x)} - \dots - \frac{x_1}{y^{n-n_1-1}(x)} + \frac{1}{y^{n-1}(x)},$$

то с помощью (2.34) решение  $y(x)$  представится в виде суммы  $l + 1$  рядов:

$$y(x) = \frac{1}{n'_p} \sum_{j=0}^l (-x_j)(n'_j - 1) \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\left(\frac{n'_j-1}{n'_p} - \langle b_n, k \rangle\right)}{k_0! \dots [p] \dots k_l! \Gamma\left(\frac{n'_j-1}{n'_p} - \langle b_p, k \rangle + 1\right)} \times (-x_1)^{k_1} \dots (-x_p)^{\langle b_n, k \rangle - \frac{n'_j-1}{n'_p}} \dots (-x_l)^{k_l}.$$

Здесь следует полагать  $x_0 = 1$ . Далее введем переобозначения  $k_j \rightarrow k_j - 1$  при всех  $j \neq p$ , в результате этого выделится общий множитель

$$\frac{1}{n'_p} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l} \frac{(-1)^{|k|+1} \Gamma\left(-\frac{1}{n'_p} - \langle b_n, k \rangle\right)}{k_0! \dots [p] \dots k_l! \Gamma\left(\frac{n'_p-1}{n'_p} - \langle b_p, k \rangle + 1\right)} (-x_1)^{k_1} \dots (-x_p)^{\langle b_n, k \rangle + \frac{1}{n'_p}} \dots (-x_l)^{k_l}.$$

Тогда, после очевидных преобразований приходим к следующему выражению для  $y(x)$ :

$$y(x) = \frac{1}{n'_p} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l} \frac{(-1)^{|k|+1} \Gamma\left(-\frac{1}{n'_p} - \langle b_n, k \rangle\right)}{k_0! \dots [p] \dots k_l! \Gamma\left(\frac{n'_p-1}{n'_p} - \langle b_p, k \rangle + 1\right)} \left(\frac{n'_p-1}{n'_p} - \langle b_p, k \rangle\right)$$

$$\times (-x_1)^{k_1} \dots (-x_p)^{\langle b_n, k \rangle + \frac{1}{n_p}} \dots (-x_l)^{k_l}.$$

Воспользовавшись известными свойствами  $\Gamma$ -функции

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \quad \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} = (-1)^n \frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(1-z-n)}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

перепишем последний ряд в окончательном виде

$$y(x) = \frac{1}{n_p'} (-x_p)^{\frac{1}{n_p'}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n_p'} + \langle b_p, k \rangle\right)}{k_0! \dots [p] \dots k_l! \Gamma\left(\frac{n_p'+1}{n_p'} + \langle b_n, k \rangle\right)} \\ \times (-x_1)^{k_1} \dots [p] \dots (-x_l)^{k_l} (-x_p)^{\langle b_n, k \rangle}.$$

Несложно видеть, что полученный ряд совпадает с  $y_{p,l+1}$ . Следуя рассуждениям статьи [4] несложно показать, что область сходимости интеграла (2.31) определяется неравенствами (2.30). Таким образом, ряды  $y_{p,l+1}$  являются аналитическим продолжением ряда (2.20) с помощью интеграла (2.31), сходящегося в секторе  $S'$ . Теорема 12 доказана.

### 2.2.5 Доказательство Теоремы 11

При доказательстве Теоремы будем пользоваться формулой Биркелана [65] в виде кратного ряда для решения  $z_{p,q}^\mu(r)$  уравнения

$$z^{n_q} = z^{n_p} + r_1 z^{m_1} + \dots + r_l z^{m_l}, \quad m_p < m_q, \quad (2.35)$$

которая для ветви решения с условием  $z(0) = 1$  имеет следующий вид:

$$\frac{\mu}{n_q - n_p} \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu + (m_1 - n_p)\alpha_1 + \dots + (m_l - n_p)\alpha_l}{n_q - n_p}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu + (m_1 - n_q)\alpha_1 + \dots + (m_l - n_q)\alpha_l}{n_q - n_p} + 1\right) \alpha_1! \dots \alpha_l!} r_1^{\alpha_1} \dots r_l^{\alpha_l}. \quad (2.36)$$

Итак, рассмотрим мономиальные преобразования переменной  $y$  и параметров  $x_j$  уравнения (2.19), сводящие его к виду (2.35). Эти преобразования мож-

но записать следующим образом:

$$1) \quad y = e^{\frac{\pi i}{n}} r_{l+1}^{\frac{1}{n}} z, \quad x_q = \frac{1}{e^{\frac{nq}{n}\pi i} r_{l+1}^{\frac{nq}{n}}}, \quad x_j = -\frac{r_j}{e^{\frac{n_j}{n}\pi i} r_{l+1}^{\frac{n_j}{n}}}, \quad j = 1, \dots, l, \quad j \neq q,$$

в этом случае (2.19) сводится к

$$z^{n_q} = 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{l+1} r_j z^{n_j},$$

т.е. к (2.35) при  $n_p = 0, m_j = n_j$ ;

$$2) \quad y = \frac{z}{r_0^{\frac{1}{n}}}, \quad x_p = -\frac{1}{r_0^{\frac{n_p}{n}}}, \quad x_j = -\frac{r_j}{r_0^{\frac{n_j}{n}}}, \quad j = 1, \dots, l, \quad j \neq p,$$

после указанных замен (2.19) преобразуется к виду

$$z^n = z^{n_p} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^l r_j z^{n_j},$$

т.е. к (2.35) при  $n_q = n, m_j = n_j$ ;

$$3) \quad y = e^{\frac{\pi i}{n}} \left( \frac{r_{l+1}}{r_0} \right)^{\frac{1}{n}} z,$$

$$x_q = \frac{1}{e^{\frac{nq}{n}\pi i} r_{l+1}^{\frac{nq}{n}} r_0^{\frac{n'_q}{n}}}, \quad x_p = -\frac{1}{e^{\frac{np}{n}\pi i} r_{l+1}^{\frac{np}{n}} r_0^{\frac{n'_p}{n}}}, \quad x_j = -\frac{r_j}{e^{\frac{n_j}{n}\pi i} r_{l+1}^{\frac{n_j}{n}} r_0^{\frac{n'_j}{n}}}, \quad (2.37)$$

$$j = 1, \dots, l, \quad j \neq p, \quad k \neq q;$$

при этом преобразовании (2.19) примет вид

$$z^{n_q} = z^{n_p} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p, q}}^{l+1} r_j z^{n_j}, \quad (2.38)$$

что соответствует (2.35) при  $p \neq 0, q \neq l + 1$ .

Случаи 1), 2) приводят к рядам Пюизо, вычисленным в предыдущем параграфе, т.е. при  $p = 0$  или  $q = l + 1$ . Здесь мы рассмотрим случай 3). Согласно формуле Биркелана решение (2.38) запишется так:

$$z_{p,q}^{\mu}(r) = \frac{\mu}{n_q - n_p}$$

$$\times \sum_{|k| \geq 0} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{n_q - n_p} + \langle b_p, k \rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{n_q - n_p} + \langle b_q, k \rangle + 1\right) k_0! \dots [p] \dots [q] \dots k_{l+1}!} r_0^{k_0} \dots [p] \dots [q] \dots r_{l+1}^{k_{l+1}}.$$

Из (2.37) находим:

$$r_{l+1} = (-1)^{\frac{n'_p}{n_q - n_p}} \frac{x_q^{\frac{n'_p}{n_p - n_q}}}{x_p^{\frac{n'_q}{n_p - n_q}}}, \quad r_0 = (-1)^{\frac{n_q}{n_p - n_q}} \frac{x_p^{\frac{n_q}{n_p - n_q}}}{x_q^{\frac{n_p}{n_p - n_q}}}, \quad r_j = (-1)^{\frac{n_p - n_j}{n_p - n_q}} \frac{x_p^{\frac{n_j - n_q}{n_q - n_p}}}{x_q^{\frac{n_j - n_p}{n_q - n_p}}} x_j.$$

Применяя указанные соотношения, а также учитывая, что  $y = e^{\frac{\pi i}{n}} \left(\frac{r_{l+1}}{r_0}\right)^{\frac{1}{n}} z$ , получаем выражение для  $y_{p,q}^\mu(x)$  при  $q \neq l+1$ ,  $p \neq 0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{n_q - n_p} \left(-\frac{x_p}{x_q}\right)^{\frac{\mu}{n_q - n_p}} \sum_{|k| \geq 0} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{n_q - n_p} + \langle b_p, k \rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{n_q - n_p} + \langle b_q, k \rangle + 1\right) k_0! \dots [p] \dots [q] \dots k_{l+1}!} \\ & \times \left( (-x_p)^{\frac{n_q}{n_p - n_q}} x_q^{\frac{n_p}{n_q - n_p}} \right)^{k_0} \left( \left(-\frac{1}{x_q}\right)^{\frac{n'_p}{n_q - n_p}} \frac{1}{x_p^{\frac{n'_q}{n_p - n_q}}} \right)^{k_{l+1}} \\ & \times \left( \left(-\frac{1}{x_q}\right)^{\frac{n_p - n_1}{n_p - n_q}} \frac{x_1}{x_p^{\frac{n_q - n_1}{n_q - n_p}}} \right)^{k_1} \dots [p] \dots [q] \dots \left( \left(-\frac{1}{x_q}\right)^{\frac{n_p - n_l}{n_p - n_q}} \frac{x_l}{x_p^{\frac{n_q - n_l}{n_q - n_p}}} \right)^{k_l} = \\ & = \frac{\mu}{n_q - n_p} \left(-\frac{x_p}{x_q}\right)^{\frac{\mu}{n_q - n_p}} \sum_{|k| \geq 0} A_k^{p,q} \frac{(-1)^{k_0 + \langle b_p, k \rangle} x_p^{\langle b_q, k \rangle}}{x_q^{\langle b_p, k \rangle}} x_1^{k_1} \dots [p] \dots [q] \dots x_l^{k_l}. \end{aligned}$$

Итак, формула (2.29) доказана.

Выясним область сходимости полученного ряда. При использовании дробно-мономиальной замены  $x = x(r)$  по формуле (2.37), в логарифмической шкале амеба  $\mathcal{A}_\nabla$  дискриминанта уравнения (2.35) получается из амебы  $\mathcal{A}'_\nabla$  дискриминанта (2.19) невырожденным афинным преобразованием. В [97] доказано, что область сходимости ряда (2.36) содержит все связные компоненты  $E'_\tau$ , соответствующие разбиениям, содержащим  $[n_p, n_q]$ . В таком случае, это же верно для полученного ряда  $y_{p,q}^\mu(x)$ .

Теперь покажем, что в каждой области  $\text{Log}^{-1}(E_\tau)$  сходится ровно  $n$  рядов  $y_{p,q}$ . Рассмотрим произвольную связную компоненту  $E_\tau$ , соответствующую некоторому разбиению  $\tau$  отрезка  $[0, n]$ . Обозначим совокупность смежных отрезков, образующих  $\tau$  следующим образом:  $[0, n_{i_1}], [n_{i_1}, n_{i_2}], \dots, [n_{i_{k-1}}, n]$ . Согласно доказанному, в области  $\text{Log}^{-1}(E_\tau)$  сходятся те ряды  $y_{p,q}$ , для которых  $[n_p, n_q]$  совпадает с одним из указанных отрезков. Выше отмечалось, что каждый ряд  $y_{p,q}$  является  $(n_q - n_p)$ -значным, т.е. определяет  $(n_q - n_p)$  рядов. Итак, в области  $\text{Log}^{-1}(E_\tau)$  сходится  $n_{i_1}$  рядов для  $y_{0,i_1}$ ,  $(n_{i_2} - n_{i_1})$  рядов для  $y_{i_1,i_2}, \dots, (n - n_{i_{k-1}})$  рядов для  $y_{i_{k-1},l+1}$ . В результате получаем, что в  $\text{Log}^{-1}(E_\tau)$  сходится ровно  $n_{i_1} + (n_{i_2} - n_{i_1}) + \dots + (n - n_{i_{k-1}}) = n$  рядов. Теорема 11 доказана.

## Глава 3.

# Структура классического дискриминанта и его нулевого множества

Дискриминанты вездесущи. Люди знакомятся с ними еще в раннем школьном возрасте. К дискриминантам проявляют интерес математики, работающие в различных направлениях таких, как алгебраическая геометрия, теория сингулярностей (вместе с интригующей теорией катастроф), многомерный комплексный анализ, теория представлений и т.д. В настоящей главе рассматриваются вопросы о структуре классического дискриминанта и его нулевого множества с точки зрения иерархии семейства всех  $A$ -дискриминантов (т.е. дискриминантов многочленов любого числа переменных).

Теория  $A$ -дискриминантов была сформирована И.М. Гельфандом, А.В. Зелевинским и М.М. Капрановым в книге [73]. Их подход к изучению дискриминантов основан на принципах алгебраической, комбинаторной и дифференциальной геометрий. Когда мы говорим о структуре классического дискриминанта, то прежде всего имеем ввиду сингулярную стратификацию его нулевого множества (т.е. дискриминантного множества). Разумеется, такие стратифи-

кации изучались многими математиками (см. например, книгу В.А. Васильева [15] или статью В.И. Арнольда и др. [10]).

Наше поле зрения наиболее близко примыкает к тематике статей Д. Гильберта [81] (1887) и Каца [86] (2003). Гильберт рассматривал стратификацию «по кратностям», т.е. под стратом понимал  $k$ -мерную часть дискриминантного множества, состоящую из многочленов степени  $n$  вида

$$(y - t_1)^{\mu_1} \dots (y - t_k)^{\mu_k}, \quad \mu_1 + \dots + \mu_k = n.$$

Мы такие страты обозначаем  $\mathcal{M}^{\mu_1, \dots, \mu_k}$ .

Главное наше внимание обращено к исследованию объединения  $\mathcal{M}^j$  всех  $\mathcal{M}^{\mu_1, \dots, \mu_k}$ , для которых  $\max\{\mu_1, \dots, \mu_k\} \geq j$ . Одно из основных наблюдений о свойствах стратов  $\mathcal{M}^j$  было сделано в статье [86], которое состоит в том, что касательный конус к  $\mathcal{M}^j$  составляет  $\mathcal{M}^{j-1}$ . Основной результат настоящей главы гласит, что страты  $\mathcal{M}^j$  сводятся к  $A$ -дискриминантным гиперповерхностям мономиальными преобразованиями. В основе нашего исследования лежит Теорема Капранова о дифференциально-геометрической характеристике  $A$ -дискриминантных гиперповерхностей. Попутно мы получаем формулу для сужения общей алгебраической функции на классическое дискриминантное множество, которая будет распространена в следующей главе на  $A$ -дискриминантные и смешанные  $(A_1, \dots, A_n)$ -дискриминантные множества.

### 3.1 Общие факты о структуре дискриминанта и дискриминантного множества

#### 3.1.1 Многогранник Ньютона для дискриминанта

Напомним, что *многогранником Ньютона*  $\mathcal{N}(\Delta)$  многочлена  $\Delta(a_0, \dots, a_n)$  называется выпуклая оболочка в  $\mathbb{R}^{n+1}$  множества всех показателей  $k =$

$(k_0, k_1, \dots, k_n)$  мономов, участвующих в  $\Delta$ . В качестве  $\Delta$  рассмотрим дискриминант многочлена

$$f(y) = a_0 + a_1y + \dots + a_{n-1}y^{n-1} + a_ny^n. \quad (3.1)$$

Заметим, что многогранник Ньютона многочлена (3.1) – это отрезок  $[0, n] \subset \mathbb{R}$ . Следующая теорема показывает, что каждая вершина многогранника Ньютона  $\mathcal{N}(\Delta)$  для дискриминанта многочлена  $f$  определяется подходящей триангуляцией (т.е. разбиением на отрезки) отрезка  $[0, n]$  – многогранника Ньютона исходного многочлена  $f$ . Каждое разбиение определяется набором целых точек

$$0 = i_0 < i_1 < \dots < i_s < i_{s+1} = n.$$

Ясно, что такой набор также идентифицируется подмножеством  $I \subset \{1, 2, \dots, n-1\}$  вида  $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_s\}$ ,  $0 \leq s \leq n-1$ . Мощность всех указанных подмножеств равна  $2^{n-1}$ , поскольку в их перечень мы включаем и пустое подмножество, соответствующее значению  $s = 0$ .

**Теорема 14** ([73], с. 412). *Многогранник Ньютона дискриминанта многочлена (3.1) комбинаторно эквивалентен  $(n-1)$ -мерному кубу; он содержит  $2^{n-1}$  вершин, которые находятся в биективном соответствии со всевозможными подмножествами*

$$I \subset \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

*Вершина  $v_I$ , соответствующая подмножеству  $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_s\}$ , имеет координаты*

$$k_0 = i_1 - i_0 - 1, \quad k_n = i_{s+1} - i_s - 1 \quad (3.2)$$

$$k_{i_q} = i_{q+1} - i_{q-1}, \quad \text{для } i_q \in I,$$

$$k_i = 0, \quad \text{для } i \notin I \cup \{0, n\}.$$

Пусть  $l_q = i_{q+1} - i_q$  ( $0 \leq q \leq s$ ). Тогда моном

$$a^{v_I} = a_0^{l_0-1} a_{i_1}^{l_1+l_0} a_{i_2}^{l_2+l_1} \dots a_{i_s}^{l_s+l_{s-1}} a_n^{l_s-1}$$

встречается в  $\Delta$  с коэффициентом

$$c_{v_I} = \prod_{q=0}^s (-1)^{\frac{l_q(l_q-1)}{2}} l_q^{l_q}. \quad (3.3)$$

Проиллюстрируем утверждение теоремы на примере кубического многочлена

$$f(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3.$$

Дискриминант  $\Delta$  этого многочлена следующий:

$$\Delta = -27a_0^2 a_3^2 - 4a_1^3 a_3 - 4a_0 a_2^3 + a_1^2 a_2^2 + 18a_0 a_1 a_2 a_3.$$

В рассматриваемом случае имеется 4 подмножества  $I \subset \{1, 2\}$ :

$$I_0 = \emptyset, \quad I_1 = \{1\}, \quad I_2 = \{2\}, \quad I_3 = \{1, 2\}.$$

Соответствующие мономы будут следующими:

$$-27a_0^2 a_3^2, \quad -4a_1^3 a_3, \quad -4a_0 a_2^3, \quad a_1^2 a_2^2.$$

Что касается монома  $18a_0 a_1 a_2 a_3$ , то он соответствует внутренней целочисленной точке  $(1, 1, 1, 1) \in \mathcal{N}(\Delta)$ , и теорема о нем ничего не утверждает.

Далее будем рассматривать (3.1) при  $a_0 = a_n = 1$ , т.е. *приведенный (редуцированный) многочлен*

$$f_{red}(y) = 1 + a_1 y + \dots + a_{n-1} y^{n-1} + y^n. \quad (3.4)$$

Многогранник Ньютона дискриминанта этого многочлена лежит в  $\mathbb{R}^{n-1}$  (координаты  $k_0$  и  $k_n$ , участвующие в выражении (3.2), будут отсутствовать). Дискриминант многочлена (3.4) также будем называть *приведенным дискриминантом*. Например, для кубического уравнения приведенный дискриминант

равен

$$\Delta = 27 + 4a_1^3 + 4a_2^3 - 18a_1a_2 - a_1^2a_2^2.$$

В статье [97] приведены неравенства, определяющие многогранник Ньютона  $\mathcal{N}(\Delta)$  для дискриминанта уравнения (3.4). Таких неравенств  $2 \cdot (n - 1)$  штук, и они следующие:

$$t_k \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n-1} \min(j, k)[n - \max(j, k)]t_j \leq nk(n - k), \quad k = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (3.5)$$

Так, многогранник Ньютона приведенного дискриминанта кубического уравнения задается системой неравенств

$$t_1 \geq 0, \quad t_2 \geq 0, \quad 2t_1 + t_2 \leq 6, \quad t_1 + 2t_2 \leq 6.$$

(Рис. 20).

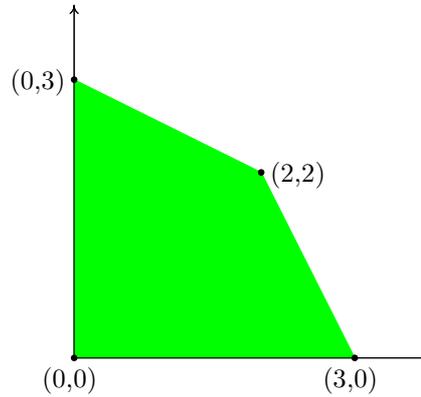


Рис. 20. Многогранник Ньютона приведенного дискриминанта кубического уравнения

### 3.1.2 Приведенные дискриминанты и параметризации их нулевых множеств

В силу того, что решение  $y(a)$  уравнения (1.13) двойной однородностью (см. § 1.3) вместо уравнения (1.13) достаточно рассматривать приведенное уравнение

$$z_0 + z_1y + \dots + y^p + \dots + y^q + \dots + z_{n-1}y^{n-1} + z_ny^n = 0, \quad (3.6)$$

т.е. уравнение с фиксированной любой парой коэффициентов. При рассмотрении уравнения (3.6) мы всегда подразумеваем, что  $p < q$ .

Свойство биоднородности для решения  $y(a)$  переносится и на дискриминант  $D(a)$  уравнения (1.13); этот дискриминант мы называем *классическим*. Нулевое множество дискриминанта  $D(a)$  обозначим  $\nabla$  и будем его называть *дискриминантным множеством* уравнения (1.13) или полинома  $f$ . При этом дискриминантное множество уравнения (3.6) будем обозначать  $\nabla_{pq}$ .

В [97] доказано, что  $\nabla_{pq}$  уравнения (3.6) допускает следующую  $(q - p)$ -значную параметризацию в терминах параметров  $s_0, \dots [p] \dots [q] \dots, s_n$ :

$$z_k = s_k \left( \frac{1}{q-p} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p, q}}^n (i-q)s_i \right)^{\frac{k-q}{q-p}} \left( \frac{1}{q-p} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p, q}}^n (p-i)s_i \right)^{\frac{p-k}{q-p}}, \quad k \neq p, q. \quad (3.7)$$

Отображение  $\mathbb{CP}^{n-2} \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ , определенное формулой (3.7), обозначим  $\Psi_{pq}$ . Среди приведенных уравнений (3.6) выделим уравнение при  $p = 0, q = n$ , в котором выберем эксклюзивное обозначение для коэффициентов:

$$1 + x_1 y + \dots + x_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0. \quad (3.8)$$

При этом связь между коэффициентами уравнений (3.6) и (3.8) следующая:

$$z_k = x_k x_p^{\frac{k-q}{q-p}} x_q^{\frac{p-k}{q-p}}, \quad k \neq p, q. \quad (3.9)$$

Здесь и далее запись  $k \neq p, q$  означает, что  $k \in \{0, \dots [p] \dots [q] \dots, n\}$ . При этом имеется ввиду, что в (3.9)  $x_0 = 1, x_n = 1$ .

Согласно (3.7) (см. также [4]), параметризацию дискриминантного множества  $\nabla_{0n}$  уравнения (3.8)

$$\Psi_{0n} : \mathbb{CP}_s^{n-2} \rightarrow \mathbb{C}_x^{n-1}$$

дискриминантного множества уравнения (3.8) можно записать в следующем виде:

$$x_k = \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (3.10)$$

где  $\alpha, \beta$  – целочисленные векторы

$$\alpha = -(n-1, \dots, 2, 1), \quad \beta = -(1, 2, \dots, n-1). \quad (3.11)$$

Отметим, что указанная параметризация  $n$ -значная, все ее значения определяются выбором  $n$  значений радикала  $\left(\frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle}\right)^{\frac{1}{n}}$ .

При замене  $x \longrightarrow z$ , определенной формулой (3.9), параметризация  $\nabla_{0n}$  перейдет в следующую параметризацию  $\nabla_{pq}$ :

$$z_k = s_k s_p^{\frac{k-q}{q-p}} s_q^{\frac{p-k}{q-p}}, \quad k \neq p, q, \quad (3.12)$$

где  $s_0 = \frac{\langle \alpha, s \rangle}{n}$ ,  $s_n = \frac{\langle \beta, s \rangle}{n}$ . Таким образом, мы можем записывать параметризацию  $\nabla_{pq}$  по формуле (3.12) с использованием  $n+1$  переменных  $s_0, s_1, \dots, s_n$ , связанных соотношениями:

$$\sum_{i=0}^n (i-q)s_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n (p-i)s_i = 0. \quad (3.13)$$

## 3.2 Срезки дискриминанта на грани его многогранника Ньютона

### 3.2.1 Грани многогранника Ньютона дискриминанта, являющиеся призмами

В дальнейшем нам удобно использовать обозначения для некоординатных гиперграней, участвующих в (3.5):

$$g_k := \left\{ t \in \mathcal{N}(\Delta) : \sum_{j=1}^{n-1} \min(j, k)[n - \max(j, k)]t_j = nk(n-k) \right\}, \quad (3.14)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Многогранник  $G$  размерности  $d$  назовем  $d$ -призмой, если у него две гиперграни (которые будем называть *основаниями*) являются конгруэнтными

многогранниками с параллельными соответствующими ребрами, причем все остальные ребра параллельны друг другу и соединяют соответствующие вершины оснований.

**Теорема 15.** *Гиперграни  $g_2$  и  $g_{n-2}$  многогранника Ньютона  $\mathcal{N}(\Delta)$  дискриминанта приведенного многочлена (3.4) степени  $n$  являются  $(n-2)$ -призмами.*

Для доказательства Теоремы 15 нам потребуются две леммы. Напомним, что в соответствии с Теоремой 14, каждая вершина  $v_I = v_{i_1, \dots, i_s}$  многогранника Ньютона  $\mathcal{N}(\Delta)$  дискриминанта многочлена (3.4) записывается в виде

$$\left(0, \dots, \overbrace{i_1}^{\wedge}, \dots, \overbrace{i_2}^{\wedge}, \dots, \overbrace{i_3}^{\wedge}, \dots, \overbrace{i_{s-1}}^{\wedge}, \dots, \overbrace{n}^{\wedge}, \dots, 0\right) \quad (3.15)$$

(на свободных местах стоят нули).

**Лемма 3.1.** *Каждая вершина  $v_I = v_{i_1, i_2, \dots, i_s}$  многогранника Ньютона  $\mathcal{N}(\Delta)$  дискриминанта многочлена (3.4) принадлежит всем  $s$  гиперграням  $g_k$ ,  $k = i_1, \dots, i_s$  и не лежит ни в одной из оставшихся  $n-1-s$  гиперграней набора (3.14).*

*Доказательство Леммы 3.1.* Сначала покажем, что вершина  $v_{i_1, \dots, i_s}$  лежит в гипергранях  $g_k$  при  $k = i_1, \dots, i_s$ . Согласно (3.14) для принадлежности указанной вершины грани  $g_{i_p}$ ,  $p = 1, 2, \dots, s$  следует доказать справедливость равенства

$$(n - i_p) \sum_{\nu=1}^p i_\nu t_{i_\nu} + i_p \sum_{\nu=p+1}^s (n - i_\nu) t_{i_\nu} = n(n - i_p) i_p, \quad (3.16)$$

где  $t_{i_\nu}$  – ненулевые координаты вершины  $v_{i_1, \dots, i_s}$ , которые в соответствии с (3.15) записываются в виде  $t_{i_\nu} = i_{\nu+1} - i_{\nu-1}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, s$ , где  $i_0 = 0$ ,  $i_{s+1} = n$ .

Преобразуем обе суммы, стоящие в левой части равенства (3.16). Первая сумма  $\sum_{\nu=1}^p i_\nu (i_{\nu+1} - i_{\nu-1})$  равна  $i_p i_{p+1}$ . Что касается второй суммы  $\sum_{\nu=p+1}^s (n - i_\nu)$

$i_\nu)(i_{\nu+1} - i_{\nu-1})$ , то здесь все слагаемые, кроме четырех сокращаются, в результате получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=p+1}^s (n - i_\nu)(i_{\nu+1} - i_{\nu-1}) &= -ni_p - ni_{p+1} + i_p i_{p+1} + n^2 = i_p(i_{p+1} - n) + n(n - i_{p+1}) = \\ &= (n - i_p)(n - i_{p+1}). \end{aligned}$$

Тогда для левой части в (3.16) получим

$$\begin{aligned} (n - i_p) \sum_{\nu=1}^p i_\nu t_{i_\nu} + i_p \sum_{\nu=p+1}^s (n - i_\nu) t_{i_\nu} &= \\ = (n - i_p) i_p i_{p+1} + i_p (n - i_p)(n - i_{p+1}) &= n(n - i_p) i_p, \end{aligned}$$

т.е. требуемое равенство (3.16).

Далее для произвольного разбиения отрезка  $[0, n]$  точками  $i_1, \dots, i_s$  докажем следующий факт. Если  $i' \notin \{i_1, \dots, i_s\}$ , то и вершина  $v_{i_1, \dots, i_s}$  не лежит в гиперграни  $g_{i'}$ . Пусть  $i'$  лежит между  $i_p$  и  $i_{p+1}$ . Следовательно, нам нужно показать, что

$$(n - i') \sum_{\nu=1}^p i_\nu t_{i_\nu} + i' \sum_{\nu=p+1}^s (n - i_\nu) t_{i_\nu} \neq ni'(n - i'),$$

т.е. что при  $i'$ , не совпадающим с точками  $i_1, \dots, i_s$  разбиения отрезка  $[0, n]$ , не обращается в нуль функция

$$h(i') = (n - i') \sum_{\nu=1}^p i_\nu (i_{\nu+1} - i_{\nu-1}) + i' \sum_{\nu=p+1}^s (n - i_\nu)(i_{\nu+1} - i_{\nu-1}) - ni'(n - i').$$

Несложно убедиться, что  $h(i') = 0$  при  $i' = i_p$  и  $i' = i_{p+1}$ . Действительно, пользуясь доказанными в Лемме 3.1 равенствами

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^p i_\nu t_{i_\nu} &= \sum_{\nu=1}^p i_\nu (i_{\nu+1} - i_{\nu-1}) = i_p i_{p+1}, \\ \sum_{\nu=p+1}^s (n - i_\nu) t_{i_\nu} &= \sum_{\nu=p+1}^s (n - i_\nu)(i_{\nu+1} - i_{\nu-1}) = (n - i_p)(n - i_{p+1}), \end{aligned}$$

получаем, что

$$h(i') = (n - i')i_p i_{p+1} + i'(n - i_p)(n - i_{p+1}) - ni'(n - i').$$

Тогда для  $h(i_p)$  имеем:

$$\begin{aligned} h(i_p) &= (n - i_p)i_p i_{p+1} + i_p(n - i_p)(n - i_{p+1}) - ni_p(n - i_p) = \\ &= i_p(n - i_p)(i_{p+1} + n - i_{p+1} - n) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что  $h(i_{p+1}) = 0$ .

Так как  $h$  – многочлен степени два относительно  $i'$ , то делаем вывод, что

$$h(i') = n(i' - i_p)(i' - i_{p+1}).$$

Беря во внимание тот факт, что  $i'$  не является точкой разбиения отрезка  $[0, n]$ , т.е.  $i' \neq i_p, i' \neq i_{p+1}$ , делаем вывод, что  $h(i') \neq 0$ . Лемма 3.1 доказана.  $\square$

**Лемма 3.2.** Пусть  $i', i''$  – две различные целые точки отрезка  $[0, n]$ , не принадлежащие  $\{i_1, \dots, i_s\}$ . Тогда справедливы равенства векторов из  $\mathbb{R}^{n-1}$ :

$$\overline{v_{i'} v_{i', i''}} = \overline{v_{i_1, \dots, i_s, i'} v_{i_1, \dots, i_s, i', i''}}, \quad i_s < i' < i'';$$

$$\overline{v_{i''} v_{i', i''}} = \overline{v_{i'', i_1, \dots, i_s} v_{i', i'', i_1, \dots, i_s}}, \quad i' < i'' < i_s.$$

*Доказательство Леммы 3.2.* Вычислим координаты вершин  $\mathcal{N}(\Delta)$ , участвующих в лемме:

$$v_{i'} = \left(0, \dots, \widehat{i'}, \dots, 0\right), \quad v_{i', i''} = \left(0, \dots, \widehat{i''}, \dots, \widehat{n - i'}, \dots, 0\right),$$

$$v_{i_1, \dots, i_s, i'} = \left(0, \dots, \widehat{i_2}, \dots, \widehat{i_3 - i_1}, \dots, \widehat{i_s - i_{s-2}}, \dots, \widehat{n - i_s}, \dots, 0\right),$$

$$v_{i_1, \dots, i_s, i', i''} = \left(0, \dots, \widehat{i_2}, \dots, \widehat{i_3 - i_1}, \dots, \widehat{i_s - i_{s-2}}, \dots, \widehat{i'' - i_s}, \dots, \widehat{n - i'}, \dots, 0\right)$$

(на свободных местах стоят нули). Отсюда

$$v_{i',i''} - v_{i'} = v_{i_1,\dots,i_s,i',i''} - v_{i_1,\dots,i_s,i'} = \left(0, \dots, \overbrace{i'' - n}^{i'}, \dots, \overbrace{n - i'}^{i''}, \dots, 0\right),$$

аналогично

$$v_{i',i''} - v_{i''} = v_{i',i'',i_1,\dots,i_s} - v_{i'',i_1,\dots,i_s} = \left(0, \dots, \overbrace{i''}^{i'}, \dots, \overbrace{-i'}^{i''}, \dots, 0\right).$$

Тем самым, лемма доказана. □

Теперь можно перейти к доказательству Теоремы 15.

*Доказательство Теоремы 15.* Докажем сначала теорему для гиперграни  $g_2$ . Согласно Лемме 3.1 все вершины многогранника  $\mathcal{N}(\Delta)$  вида  $v_{\dots,2,\dots}$ , т.е. соответствующие разбиению отрезка  $[0, n]$ , содержащему точку 2 в качестве подразделения, и только такого вида, лежат в гиперграни  $g_2$ . Покажем, что эти точки составляют призму. Для этого все указанные разбиения разделим на две группы. Первую группу составляют все разбиения, не содержащие 1 в качестве подразделения, им соответствуют вершины  $\mathcal{N}(\Delta)$  вида  $v_{2,\dots}$ , вторую группу – все такие разбиения, которые содержат 1 в качестве подразделения, последним соответствуют вершины  $\mathcal{N}(\Delta)$  вида  $v_{1,2,\dots}$ .

Сначала покажем, что вершины каждой из групп лежат в двух параллельных плоскостях размерности  $n - 3$ . А именно, вершины первой группы лежат в плоскости, которая задается уравнениями

$$t_1 = 0, \quad (n - 2)t_2 + (n - 3)t_3 + \dots + 1t_{n-1} = n(n - 2). \quad (3.17)$$

Координаты вершин  $v_{2,\dots}$  можно записать в виде (3.15), где  $i_1 = 2$ . Подставляя эти координаты в левую часть второго уравнения из (3.17), получаем

$$\sum_{\nu=1}^s (n - i_\nu)(i_{\nu+1} - i_{\nu-1}) = \sum_{\nu=1}^s n(i_{\nu+1} - i_{\nu-1} - i_\nu i_{\nu+1} + i_{\nu-1} i_\nu) =$$

$$= ni_s + ni_{s+1} - ni_0 - ni_1 - i_s i_{s+1} + i_0 i_1 = n(n-2).$$

Учитывая, что  $i_{s+1} = n, i_0 = 0, i_1 = 2$ , получаем  $n(n-2)$ , т.е. второе равенство в (3.17) выполняется.

Далее, согласно Лемме 3.2 каждая вершина  $\mathcal{N}(\Delta)$ , соответствующая второй группе разбиений, т.е. всякая точка вида  $v_{1,2,i_1,\dots,i_s}$ ,  $s = 0, \dots, n-3$ , получается из точки  $v_{2,i_1,\dots,i_s}$  первой группы разбиений с помощью параллельного переноса на вектор  $(2, -1, 0, \dots, 0)$ . Отсюда следует конгруэнтность основания, образованного точками вида  $v_{1,2,i_1,\dots,i_s}$ , и основания, содержащего точки  $v_{2,i_1,\dots,i_s}$ ,  $s = 0, \dots, n-3$ , а также параллельность соответствующих ребер. Для грани  $g_2$  теорема доказана.

Из параллельности оснований, а также из того, что основание, образованное вершинами  $\mathcal{N}(\Delta)$  вида  $v_{1,2,\dots}$ , проходит через точку многогранника  $v_{1,2,\dots,n-1} = (2, \dots, 2)$  следует, что уравнение этого основания следующее:

$$t_1 = 2, (n-2)t_2 + (n-3)t_3 + \dots + 1t_{n-1} = (n-1)(n-2). \quad (3.18)$$

Аналогичные рассуждения применимы для гиперграни  $g_{n-2}$ , каждая точка которой имеет вид  $v_{\dots,n-2,\dots}$ . Для нее каждая вершина  $\mathcal{N}(\Delta)$  вида  $v_{i_1,\dots,i_s,n-2,n-1}$ ,  $s = 0, \dots, n-3$ , принадлежащая одному из оснований призмы, получается с помощью параллельного переноса на вектор  $(0, \dots, -1, 2)$  из точки вида  $v_{i_1,\dots,i_s,n-2}$ , принадлежащей другому основанию. При этом, уравнения оснований призмы  $g_{n-2}$  следующие:

$$t_{n-1} = 0, 1t_1 + 2t_2 + \dots + (n-2)t_{n-2} = n(n-2),$$

$$t_{n-1} = 2, 1t_1 + 2t_2 + \dots + (n-2)t_{n-2} = (n-1)(n-2).$$

Теорема доказана. □

### 3.2.2 Факторизуемость срезов дискриминанта на гиперграни его многогранника Ньютона и асимптоты некоторых стратов самопересечения

*Срезкой* (сужением) дискриминанта  $\Delta$  на гипергрань  $g_k$  его многогранника Ньютона мы называем многочлен  $\Delta|_{g_k}$ , состоящий из всех мономов  $\Delta$ , показатели которых принадлежат  $g_k$ . Основное наблюдение, которое делается в этом разделе, составляет следующее утверждение о дискриминантах многочленов степеней 4, 5, 6.

**Теорема 16.** *Для степеней  $n = 4, 5, 6$  срезы  $\Delta_n|_{g_k}$  дискриминанта многочлена степени  $n$  факторизуются с точностью до монома в виде произведения  $\Delta_k \Delta_{n-k}$  дискриминантов многочленов степеней  $k$  и  $n - k$ . Совместные нули множителей  $\Delta_k$  и  $\Delta_{n-k}$  определяют асимптотическое поведение на бесконечности стратов самопересечения дискриминантного множества  $\Delta_n = 0$ .*

**Замечание 3.1.** *Вероятно утверждение Теоремы 16 верно для любой степени  $n$ .*

#### Срезы дискриминанта на гиперграни-призмы

В этой части параграфа мы рассматриваем срезы дискриминанта приведенного многочлена (3.4) на гиперграни  $g_2$  и  $g_{n-2}$ , которые, согласно Теореме 15, являются призмами размерности  $n - 2$ . Для каждой из двух призм профакторизуем дискриминант по всем целочисленным точкам  $v_I$  из этих призм, соответствующим некоторому разбиению  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ .

При  $n = 4$  имеем многочлен

$$f_{red}(y) = 1 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + y^4.$$

В этом случае призмы  $g_2$  и  $g_{n-2}$  совпадают, поэтому лишь одна из граней  $\mathcal{N}(\Delta)$  является 2-призмой, т.е. параллелограммом. Согласно уравнениям (3.14) гипергрань  $g_2$  определяется системой

$$\begin{cases} 3t_1 + 2t_2 + t_3 \leq 12, \\ t_1 + 2t_2 + t_3 = 8, \\ t_1 + 2t_2 + 3t_3 \leq 12, \end{cases}$$

в положительном ортанте. Целочисленное решение этой системы состоит из четырех целочисленных точек

$$v_2 = (0, 4, 0), \quad v_{12} = (2, 3, 0), \quad v_{123} = (2, 2, 2), \quad v_{23} = (0, 3, 2),$$

которые являются вершинами параллелограмма. Пользуясь формулой (3.3), составим срезку:

$$\Delta|_{g_2} = 16a_2^4 - 4a_1^2a_2^3 + a_1^2a_2^2a_3^2 - 4a_2^3a_3^2.$$

Оказывается, она факторизуется в виде произведения

$$\Delta|_{g_2} = 16a_2^4 + a_1^2a_2^2a_3^2 - 4a_2^2a_3^2 - 4a_1^2a_2^3 = a_2^2(4a_2 - a_3^2)(4a_2 - a_1^2), \quad (3.19)$$

где биномиальные множители являются дискриминантами квадратных многочленов

$$a_2y^2 + a_3y + 1 \quad \text{и} \quad a_2y^2 + a_1y + 1.$$

Под символом  $\mathcal{M}^{i,j}$  будем понимать страт дискриминантного множества для многочлена (3.4) степени  $n$ , состоящий из таких  $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$ , при которых (3.4) имеет один корень кратности  $i$ , а другой – кратности  $j$ . В данном случае нас интересует страт самопересечения  $\mathcal{M}^{2,2}$ . Этот страт состоит из всех  $a = (a_1, a_2, a_3)$ , для которых выполняется равенство полиномов

$$1 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + y^4 = (y - b)^2(y - c)^2$$

с параметрами  $b$  и  $c$ . В обозначении  $t := b + c$  этот страт параметризуется в виде

$$a_1 = \mp 2t, \quad a_2 = t^2 \pm 2, \quad a_3 = -2t. \quad (3.20)$$

Его асимптоты при  $t \rightarrow \infty$  определяются старшими членами параметризации, т.е. следующей сдвинутой однопараметрической

$$a_1 = \mp 2t, \quad a_2 = t^2, \quad a_3 = -2t.$$

Несложно видеть, что оба множителя  $(4a_2 - a_3^2)$  и  $(4a_2 - a_1^2)$  срезки (3.19) обращаются в нуль на указанной однопараметрической.

Для  $\mathbf{n} = \mathbf{5}$  многочлен (3.4) принимает вид

$$f_{red}(y) = 1 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + y^5. \quad (3.21)$$

В этом случае, согласно Теореме 15 гиперграни  $g_2$  и  $g_3$  являются 3-призмами.

Гипергрань  $g_3$  определяется следующей системой:

$$\begin{cases} 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 + t_4 \leq 20, \\ 3t_1 + 6t_2 + 4t_3 + 2t_4 \leq 30, \\ 2t_1 + 4t_2 + 6t_3 + 3t_4 = 30, \\ t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 \leq 20. \end{cases}$$

Вычисления показывают, что решение последней системы, определяющее срезку  $\Delta|_{g_3}$  дискриминанта уравнения (3.21) состоит из следующих десяти точек:

$$\begin{aligned} v_3 &= (0, 0, 5, 0), \quad v_{13} = (3, 0, 4, 0), \quad v_{23} = (0, 3, 3, 0), \quad v_{123} = (2, 2, 3, 0), \\ v_{34} &= (0, 0, 4, 2), \quad v_{134} = (3, 0, 3, 2), \quad v_{234} = (0, 3, 2, 2), \quad v_{1234} = (2, 2, 2, 2), \\ &(1, 1, 4, 0), \quad (1, 1, 3, 2), \end{aligned}$$

причем, как видим, первые пять точек лежат на основании призмы в гиперплоскости  $t_4 = 0$ , а оставшиеся точки – на основании в гиперплоскости  $t_4 = 2$ .

Выражение для  $\Delta|_{g_3}$  следующее:

$$\begin{aligned} \Delta|_{g_3} = & 108a_3^5 + 16a_1^3a_3^4 + 16a_2^3a_3^3 - 4a_1^2a_2^2a_3^3 - 27a_3^4a_4^2 - 4a_1^3a_3^3a_4^2 - 4a_2^3a_3^2a_4^2 + \\ & + a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2 - 72a_1a_2a_3^4 + 18a_1a_2a_3^3a_4^2. \end{aligned}$$

Оказывается, эта срезка также факторизуется:

$$\Delta|_{g_3} = a_3^2(4a_3 - a_4^2)(27a_3^2 + 4a_1^3a_3 + 4a_2^3 - a_1^2a_2^2 - 18a_1a_2a_3). \quad (3.22)$$

Отметим, что множитель  $4a_3 - a_4^2$ , стоящий в полученном выражении, есть дискриминант  $\Delta_{2;3,4}(a_3, a_4)$  квадратного многочлена  $f_{2;3,4}(y) = a_3y^2 + a_4y + 1$ , а последний множитель – это дискриминант  $\Delta_{3;3,2,1}(a_1, a_2, a_3)$  кубического многочлена

$$f_{3;3,2,1}(y) = a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + 1.$$

Теперь перейдем к геометрическому смыслу этих множителей. А именно, покажем, что  $\Delta_{2;3,4}(a_3, a_4)$  и  $\Delta_{3;3,2,1}(a_1, a_2, a_3)$  обращаются в нуль в предельных положениях страта самопересечения  $\mathcal{M}^{2,3}$  многочлена (3.21).

В точках этого страта многочлен (3.21) представляется в виде

$$1 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4 + y^5 = (y - c)^2(y - b)^3.$$

где  $c^2b^3 = -1$ . Относительно переменного  $b$  страт допускает параметризацию

$$\begin{aligned} a_1 = -\frac{3}{b} + 2b^3\sqrt{-\frac{1}{b^3}}, \quad a_2 = \frac{3}{b^2} - b^3 - 6b^2\sqrt{-\frac{1}{b^3}}, \quad a_3 = 3b^2 - \frac{1}{b^3} + 6b\sqrt{-\frac{1}{b^3}}, \\ a_4 = -3b - 2\sqrt{-\frac{1}{b^3}}. \end{aligned}$$

В предельном положении при  $b \rightarrow 0$  асимптота этой кривой определяется сдвинутой однопараметрической

$$a_1 = -\frac{3}{b}, \quad a_2 = \frac{3}{b^2}, \quad a_3 = -\frac{1}{b^3}, \quad a_4 = -2\sqrt{-\frac{1}{b^3}},$$

на которой обращаются в нуль оба немонмиальные множители в (3.22).

Срезка  $\Delta|_{g_2}$  дискриминанта получается из  $\Delta|_{g_3}$  с помощью замены  $a_1 \longleftrightarrow a_4$ ,  $a_2 \longleftrightarrow a_3$ , поэтому мы автоматически получаем факторизацию

$$\Delta|_{g_2} = a_2^2(4a_2 - a_1^2)(27a_2^2 + 4a_2a_4^3 + 4a_3^3 - a_3^2a_4^2 - 18a_2a_3a_4).$$

Участвующие здесь множители

$$4a_2 - a_1^2 = \Delta_{2;2,1}(a_1, a_2), 27a_2^2 + 4a_2a_4^3 + 4a_3^3 - a_3^2a_4^2 - 18a_2a_3a_4 = \Delta_{3;2,3,4}(a_2, a_3, a_4)$$

являются дискриминантами многочленов

$$f_{2;2,1}(y) = a_2y^2 + a_1y + 1, \quad f_{3;2,3,4}(y) = a_2y^3 + a_3y^2 + a_4y + 1.$$

На этот раз множители  $\Delta_{2;2,1}(a_1, a_2)$ ,  $\Delta_{3;2,3,4}(a_2, a_3, a_4)$  одновременно зануляются на асимптоте страта  $\mathcal{M}^{2,3}$  при  $b \rightarrow \infty$ . Эта асимптота определяется сдвинутой однопараметрической

$$a_1 = 2b^3\sqrt{-\frac{1}{b^3}}, \quad a_2 = -b^3, \quad a_3 = 3b^2, \quad a_4(b) = -3b.$$

Перейдем к рассмотрению многочлена (3.4) при  $\mathbf{n} = \mathbf{6}$ :

$$f_{red}(y) = 1 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4 + a_5y^5 + y^6. \quad (3.23)$$

Вычислим срезку  $\Delta|_{g_4}$ . Согласно (3.14), целочисленные точки из  $\mathcal{N}(\Delta)$ , принадлежащие  $g_4$  определяются следующими условиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5t_1 + 4t_2 + 3t_3 + 2t_4 + t_5 \leq 30, \\ 4t_1 + 8t_2 + 6t_3 + 4t_4 + 2t_5 \leq 48, \\ 3t_1 + 6t_2 + 9t_3 + 6t_4 + 3t_5 \leq 54, \\ 2t_1 + 4t_2 + 6t_3 + 8t_4 + 4t_5 = 48, \\ t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 \leq 30, \end{array} \right.$$

причем, как следует из уравнений для оснований призм, полученных в параграфе 3.2.1, для уровня  $t_5$  возможны значения 0, 1, 2. Для основания  $t_5 = 0$  получаем систему

$$\begin{cases} t_4 \geq 3, \\ t_3 + 2t_4 \geq 8, \\ t_2 + 2t_3 + 3t_4 \geq 15, \\ t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 = 24, \end{cases} \quad (3.24)$$

решением которой являются 16 точек из  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^5$ , причем 8 из них являются вершинными точками:

$$\begin{aligned} v_{1234} &= (2, 2, 2, 3, 0), \quad v_{234} = (0, 3, 2, 3, 0), \quad v_{134} = (3, 0, 3, 3, 0), \\ v_{34} &= (0, 0, 4, 3, 0), \quad v_{124} = (2, 3, 0, 4, 0), \quad v_{24} = (0, 4, 0, 4, 0), \\ v_{14} &= (4, 0, 0, 5, 0), \quad v_4 = (0, 0, 0, 6, 0). \end{aligned}$$

оставшиеся 8 точек

$$\begin{aligned} (1, 1, 3, 3, 0) \quad (3, 1, 1, 4, 0), \quad (1, 2, 1, 4, 0), \quad (2, 0, 2, 4, 0), \quad (0, 1, 2, 4, 0), \\ (2, 1, 0, 5, 0), \quad (0, 2, 0, 5, 0), \quad (1, 0, 1, 5, 0) \end{aligned}$$

не являются вершинными, но соответствуют некоторым мономам дискриминанта рассматриваемого уравнения. При  $t_5 = 1$  для каждой целочисленной точки из  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^5$ , являющейся решением системы (3.24), не существует соответствующего монома, участвующего в дискриминанте рассматриваемого многочлена шестой степени. Что же касается плоскости при  $t_5 = 2$ , то здесь воспользуемся тем фактом, что каждая точка этого основания получается из основания, определенного условием  $t_5 = 0$ , с помощью параллельного переноса на вектор  $(0, 0, 0, -1, 2)$ . В результате получаем такие точки на оставшемся основании (при  $t_5 = 2$ ):

$$v_{12345} = (2, 2, 2, 2, 2), \quad v_{2345} = (0, 3, 2, 2, 2), \quad v_{1345} = (3, 0, 3, 2, 2),$$

$$v_{345} = (0, 0, 4, 2, 2), \quad v_{1245} = (2, 3, 0, 3, 2), \quad v_{245} = (0, 4, 0, 3, 2),$$

$$v_{145} = (4, 0, 0, 4, 2), \quad v_{45} = (0, 0, 0, 5, 2);$$

$$(1, 1, 3, 2, 2) \quad (3, 1, 1, 3, 2), \quad (1, 2, 1, 3, 2), \quad (2, 0, 2, 3, 2),$$

$$(0, 1, 2, 3, 2), \quad (2, 1, 0, 4, 2), \quad (0, 2, 0, 4, 2), \quad (1, 0, 1, 4, 2).$$

Тогда для срезки  $\Delta|_{g_4}$  получаем следующее представление:

$$\begin{aligned} \Delta|_{g_4} = & -(4a_1^2a_2^2a_3^2a_4^3 - 16a_2^3a_3^2a_4^3 - 16a_1^3a_3^3a_4^3 - 108a_3^4a_4^3 - 16a_1^2a_2^3a_4^4 + 64a_2^4a_4^4 \\ & - 108a_1^4a_4^5 + 1024a_4^6) + (72a_1a_2a_3^3a_4^3 + 72a_1^3a_2a_3a_4^4 - 320a_1a_2^2a_3a_4^4 - 24a_1^2a_3^2a_4^4 \\ & + 576a_2a_3^2a_4^4 + 576a_1^2a_2a_4^5 - 512a_2^2a_4^5 - 768a_1a_3a_4^5) - a_5^2((-a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2 \\ & + 4a_2^3a_3^2a_4^2 + 4a_1^3a_3^3a_4^2 + 27a_3^4a_4^2 + 4a_1^2a_2^3a_4^3 - 16a_2^4a_4^3 + 27a_1^4a_4^4 - 256a_4^5) \\ & + (-18a_1a_2a_3^3a_4^2 - 18a_1^3a_2a_3a_4^3 + 80a_1a_2^2a_3a_4^3 + 6a_1^2a_3^2a_4^3 - 144a_2a_3^2a_4^3 \\ & - 144a_1^2a_2a_4^4 + 128a_2^2a_4^4 + 192a_1a_3a_4^4)), \end{aligned}$$

которое допускает факторизацию

$$\begin{aligned} \Delta|_{g_4} = & -a_4^2(a_5^2 - 4a_4)(6a_1^2a_3^2a_4 + 27a_1^4a_4^2 - 18a_1^3a_2a_3a_4 + 80a_1a_2^2a_3a_4 - 144a_1^2a_2a_4^2 \\ & + 4a_1^3a_3^3 - 18a_1a_2a_3^3 + 192a_1a_3a_4^2 - 256a_4^3 - a_1^2a_2^2a_3^2 - 16a_2^4a_4 \\ & + 128a_2^2a_4^2 + 27a_3^4 + 4a_1^2a_2^3a_4 - 144a_2a_3^2a_4 + 4a_2^3a_3^2). \end{aligned}$$

В полученном произведении множитель  $a_5^2 - 4a_4$  есть дискриминант  $\Delta_{2;4,5}(a_4, a_5)$  квадратного многочлена

$$f_{2;4,5}(y) = a_4y^2 + a_5y + 1,$$

а последний множитель – дискриминант  $\Delta_{4;4,3,2,1}(a_1, a_2, a_3, a_4)$  полинома четвертой степени

$$f_{4;4,3,2,1}(y) = a_4y^4 + a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + 1.$$

Таким образом, для  $\Delta|_{g_4}$  имеем следующее представление:

$$\Delta|_{g_4} = a_4^2 \Delta_{2;4,5}(a_4, a_5) \Delta_{4;4,3,2,1}(a_1, a_2, a_3, a_4). \quad (3.25)$$

Рассмотрим страт  $\mathcal{M}^{2,4}$  состоящий из многочленов (3.23), допускающих представление

$$1 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + a_5 y^5 + y^6 = (y - a)^2 (y - b)^4$$

с условием  $a^2 b^4 = 1$ . Его параметризация следующая:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{4}{b} - 2b^2, \quad a_2 = \frac{6}{b^2} + 8b + b^4, \quad a_3 = -\frac{4}{b^3} - 12 - 4b^3, \\ a_4 &= \frac{1}{b^4} + \frac{8}{b} + 6b^2, \quad a_5 = -\frac{2}{b^2} - 4b. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Соответствующая значению  $b = 0$  асимптотическая линия такая:

$$a_1 = -\frac{4}{b}, \quad a_2 = \frac{6}{b^2}, \quad a_3 = -\frac{4}{b^3}, \quad a_4 = \frac{1}{b^4}, \quad a_5 = -\frac{2}{b^2}.$$

На ней обращаются в нуль оба множителя  $\Delta_{2;4,5}$  и  $\Delta_{4;4,3,2,1}$  факторизации для  $\Delta|_{g_4}$ .

Перейдем к гипергранице  $g_2$ . Для нее выражение  $\Delta|_{g_2}$  получается из  $\Delta|_{g_4}$  с помощью замены  $a_1 \longleftrightarrow a_5$ ,  $a_2 \longleftrightarrow a_4$ . Поэтому имеем следующее представление дискриминанта на  $g_2$ :

$$\begin{aligned} \Delta|_{g_2} &= a_2^2 (a_1^2 - 4a_2) (6a_5^2 a_3^2 a_2 + 27a_5^4 a_2^2 - 18a_5^3 a_4 a_3 a_2 + 80a_5 a_4^2 a_3 a_2 - 144a_5^2 a_4 a_2^2 \\ &+ 4a_5^3 a_3^3 - 18a_5 a_4 a_3^3 + 192a_5 a_3 a_2^2 - 256a_2^3 - a_5^2 a_4^2 a_3^2 - 16a_4^4 a_2 + 128a_4^2 a_2^2 + 27a_4^3 \\ &+ 4a_5^2 a_4^3 a_2 - 144a_4 a_3^2 a_2 + 4a_4^3 a_3^2) = a_2^2 \Delta_{2;2,1}(a_1, a_2) \Delta_{4;2,3,4,5}(a_2, a_3, a_4, a_5), \end{aligned}$$

где  $\Delta_{2;2,1}(a_1, a_2)$ ,  $\Delta_{4;2,3,4,5}(a_2, a_3, a_4, a_5)$  – дискриминанты полиномов

$$f_{2;2,1}(y) = a_2 y^2 + a_1 y + 1, \quad f_{4;2,3,4,5}(y) = a_2 y^4 + a_3 y^3 + a_4 y^2 + a_5 y + 1.$$

При  $b \rightarrow \infty$  асимптотическая линия следующая:

$$a_1 = -2b^2, \quad a_2 = b^4, \quad a_3 = -4b^3, \quad a_4 = 6b^2, \quad a_5 = -4b.$$

На ней зануляются оба множителя факторизации для  $\Delta|_{g_2}$ .

### Срезки дискриминанта на оставшиеся гиперграни

Снова перейдем к полиному (3.21) степени 5. Рассмотрим срезки  $\Delta|_{g_k}$  его дискриминанта на оставшиеся гиперграни  $g_k$ , т.е. на  $g_1$  и  $g_4$ . Гипергрань  $g_4$  определяется системой

$$\begin{cases} 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 + t_4 \leq 20, \\ 3t_1 + 6t_2 + 4t_3 + 2t_4 \leq 30, \\ 2t_1 + 4t_2 + 6t_3 + 3t_4 \leq 30, \\ t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 = 20, \end{cases}$$

Как показывают вычисления, среди целочисленных решений этой системы, участвующих в показателях мономов дискриминанта  $\Delta$ , являются следующие точки:

$$\begin{aligned} &(1, 1, 3, 2), (3, 1, 1, 3), (2, 2, 2, 2), (3, 0, 3, 2), (2, 0, 2, 3), (1, 0, 1, 4), \\ &(0, 1, 2, 3), (2, 1, 0, 4), (0, 3, 2, 2), (2, 3, 0, 3), (1, 2, 1, 3), (4, 0, 0, 4), \\ &(0, 0, 0, 5), (0, 2, 0, 4), (0, 4, 0, 3), (0, 0, 4, 2). \end{aligned}$$

При этом срезка дискриминанта  $\Delta$  на  $g_4$  равна:

$$\begin{aligned} \Delta|_{g_4} &= 18a_1a_2a_3^3a_4^2 + 18a_1^3a_2a_3a_4^3 + a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2 - 4a_1^3a_3^3a_4^2 - 6a_1^2a_3^2a_4^3 - 192a_1a_3a_4^4 \\ &+ 144a_2a_3^2a_4^3 + 144a_1^2a_2a_4^4 - 4a_2^3a_3^2a_4^2 - 4a_1^2a_2^3a_4^3 - 80a_1a_2^2a_3a_4^3 - 27a_1^4a_4^4 + 256a_4^5 \\ &- 128a_2^2a_4^4 + 16a_2^4a_4^3 - 27a_3^4a_4^2 = a_4^2(18a_1a_2a_3^3 + 18a_1^3a_2a_3a_4 + a_1^2a_2^2a_3^2 - 4a_1^3a_3^3 \\ &- 6a_1^2a_3^2a_4 - 192a_1a_3a_4^2 + 144a_2a_3^2a_4 + 144a_1^2a_2a_4^2 - 4a_2^3a_3^2 - 4a_1^2a_2^3a_4 - 80a_1a_2^2a_3a_4 \\ &- 27a_1^4a_4^2 + 256a_4^3 - 128a_2^2a_4^2 + 16a_2^4a_4 - 27a_3^4) = a_4^2\Delta_{4;4,3,2,1}(a_1, a_2, a_3, a_4), \end{aligned}$$

где  $\Delta_{4;4,3,2,1}(a_1, a_2, a_3, a_4)$  – дискриминант многочлена

$$f_{4;1,2,3}(y) = a_4y^4 + a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + 1,$$

и поэтому он неприводимый.

Формально, не теряя связи с представлением срезки в виде произведения двух дискриминантов в предыдущем пункте, можем ее записать в виде произведения

$$\Delta|_{g_4} = a_4^2 \Delta_{4;4,3,2,1}(a_1, a_2, a_3, a_4) \Delta_{1;4}(a_4)$$

двух дискриминантов, поскольку дискриминант  $\Delta_{1;4}(a_4)$  двучлена  $f_{1;4}(y) = a_4 y + 1$  равен 1.

Далее, поступая как и в предыдущем параграфе, т.е. представляя многочлен (3.21) в виде произведения двух множителей

$$1 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + y^5 = (y - a)^4 (y - b), \quad a^4 b = -1.$$

получаем параметризацию страта  $\mathcal{M}_{04}^4$  (см. параграф 3.4):

$$a_1 = a^4 - \frac{4}{a}, \quad a_2 = -4a^3 + \frac{6}{a^2}, \quad a_3 = 6a^2 - \frac{4}{a^3}, \quad a_4 = -4a + \frac{1}{a^4}. \quad (3.27)$$

В предельном положении при  $a \rightarrow 0$  параметризация этого страта примет вид:

$$a_1 = -\frac{4}{a}, \quad a_2 = \frac{6}{a^2}, \quad a_3 = -\frac{4}{a^3}, \quad a_4 = \frac{1}{a^4}.$$

Вычисления показывают, что при этих значениях  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  многочлен  $\Delta_{4;4,3,2,1}(a_1, a_2, a_3, a_4)$  обращается в нуль.

Что касается срезки  $\Delta|_{g_1}$  дискриминанта многочлена (3.21), то она получается из срезки  $\Delta|_{g_4}$  с помощью замены  $a_1 \longleftrightarrow a_4, a_2 \longleftrightarrow a_3$ . Учитывая это, получим что

$$\Delta|_{g_1} = a_1^2 \Delta_{4;1,2,3,4}(a_1, a_2, a_3, a_4),$$

где  $\Delta_{4;1,2,3,4}(a_1, a_2, a_3, a_4)$  – дискриминант многочлена

$$f_{4;1,2,3,4}(y) = a_1 y^4 + a_2 y^3 + a_3 y^2 + a_4 y + 1.$$

При  $a \rightarrow \infty$  параметризация (3.27) страта  $\mathcal{M}_{04}^4$  примет вид

$$a_1 = a^4, \quad a_2 = -4a^3, \quad a_3 = 6a^2, \quad a_4 = -4a.$$

Как показывают вычисления, теперь в этом предельном положении рассматриваемого страта зануляется многочлен  $\Delta_{4;1,2,3,4}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ .

В заключении этого параграфа покажем факторизуемость срезки  $\nabla|_{g_3}$  дискриминанта многочлена (3.23) **степени 6**. Гипергрань  $g_3$  определяется системой

$$\left\{ \begin{array}{l} 5t_1 + 4t_2 + 3t_3 + 2t_4 + t_5 \leq 30, \\ 4t_1 + 8t_2 + 6t_3 + 4t_4 + 2t_5 \leq 48, \\ 3t_1 + 6t_2 + 9t_3 + 6t_4 + 3t_5 = 54, \\ 2t_1 + 4t_2 + 6t_3 + 8t_4 + 4t_5 \leq 48, \\ t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 \leq 30. \end{array} \right.$$

Ее решения составляют 25 точек:

$$\begin{aligned} &(1, 1, 3, 3, 0), (1, 1, 4, 0, 3), (2, 2, 2, 3, 0), (2, 2, 3, 0, 3), (0, 3, 3, 1, 1), \\ &(0, 3, 2, 2, 2), (3, 0, 4, 1, 1), (3, 0, 3, 2, 2), (0, 0, 4, 3, 0), (0, 0, 5, 0, 3), \\ &(0, 3, 4, 0, 0), (3, 0, 5, 0, 0), (2, 2, 3, 1, 1), (1, 1, 3, 2, 2), (0, 0, 5, 1, 1), \\ &(0, 0, 4, 2, 2), (1, 1, 5, 0, 0), (2, 2, 4, 0, 0), (0, 3, 2, 3, 0), (0, 3, 3, 0, 3), \\ &(3, 0, 3, 3, 0), (3, 0, 4, 0, 3), (0, 0, 6, 0, 0), (1, 1, 4, 1, 1), (2, 2, 2, 2, 2). \end{aligned}$$

Соответственно, срезка  $\nabla|_{g_3}$  записывается в виде:

$$\begin{aligned} \nabla|_{g_3} = &72a_1a_2a_3^3a_4^3 + 72a_1a_2a_3^4a_5^3 + 4a_1^2a_2^2a_3^2a_4^3 + 4a_1^2a_2^2a_3^3a_5^3 + 72a_2^3a_3^3a_4a_5 \\ &+ 4a_2^3a_3^2a_4^2a_5^2 - +72a_1^3a_3^4a_4a_5 + 4a_1^3a_3^3a_4^2a_5^2 - 108a_3^4a_4^3 - 108a_3^5a_5^3 - 108a_2^3a_3^4 \\ &- 108a_1^3a_3^5 - 18a_1^2a_2^2a_3^3a_4a_5 - 18a_1a_2a_3^3a_4^2a_5^2 + 486a_3^5a_4a_5 + 27a_3^4a_4^2a_5^2 \\ &+ 486a_1a_2a_3^5 + 27a_1^2a_2^2a_3^4 - 16a_2^3a_3^2a_4^3 - 16a_2^3a_3^3a_5^3 - 16a_1^3a_3^3a_4^3 \end{aligned}$$

$$-16a_1^3a_3^4a_5^3 - 729a_3^6 - 324a_1a_2a_3^4a_4a_5 - a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2.$$

Вычисления показывают, что это выражение допускает разложение на множители:

$$\begin{aligned} & -a_3^2(27a_3^2 - 18a_1a_2a_3^2 - a_1^2a_2^2 + 4a_2^3 + 4a_1^3a_3) \\ & \times (27a_3^2 - 18a_3a_4a_5 - 9a_3a_5^2 + 4a_4^3 - 3a_4a_5^2 - a_5^3). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем факторизацию:

$$\nabla|_{g_3} = -a_3^2\Delta_{3;3,2,1}\Delta_{3;3,4,5},$$

где  $\Delta_{3;3,2,1}(a_1, a_2, a_3)$ ,  $\Delta_{3;3,4,5}(a_3, a_4, a_5)$  – дискриминанты многочленов

$$f_{3;3,2,1}(y) = a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + 1, \quad f_{3;3,4,5}(y) = a_3y^3 + a_4y^2 + a_5y + 1.$$

Вероятно, совместные нули дискриминантных множителей  $\Delta_{3;3,2,1}(a_1, a_2, a_3)$  и  $\Delta_{3;3,4,5}(a_3, a_4, a_5)$  отвечают за асимптоты двумерного страта  $\mathcal{M}^{2,2,2}$ , в точках которого дискриминантное множество уравнения 6-ой степени допускает 3-кратное самопересечение.

### 3.3 A-дискриминантные множества

Рассмотрим уравнение с  $k$  неизвестными  $y = (y_1, \dots, y_k)$ :

$$f(y_1, \dots, y_k) := \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A} a_\alpha y_1^{\alpha_1} \dots y_k^{\alpha_k} = 0, \quad (3.28)$$

где  $A \subset \mathbb{Z}^k$  – фиксированное конечное множество показателей, порождающее решетку  $\mathbb{Z}^k$  как аддитивную группу, а коэффициенты  $a_\alpha$  – переменные.

Множество коэффициентов (оно же и множество уравнений (3.28), и множество полиномов Лорана  $f$  с показателями  $\alpha \in A$ ) пробегает пространство  $\mathbb{C}^A$ , размерность которого равна мощности  $A$ .

**Определение 3.1** ([73], глава 9). Пусть  $\nabla^\circ$  – множество всех  $(a_\alpha) \in \mathbb{C}^A$ , для которых уравнение (3.28) имеет критические корни  $y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k$ , т.е. корни, в которых градиент  $f$  равен нулю. Замыкание  $\overline{\nabla^\circ}$  называется  $A$ -дискриминантным множеством и обозначается  $\nabla_A$ . Если множество  $\nabla_A$  есть гиперповерхность (т.е.  $\text{codim} \nabla_A = 1$ ), то определяющий многочлен называется  $A$ -дискриминантом.

В случае, когда  $k = 1$ ,  $A = \{0, 1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{Z}$ , множество  $\nabla_A$  превращается в классическое дискриминантное множество  $\nabla$ .

Обозначим  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus 0$ , и всякую его декартову степень будем рассматривать как комплексный алгебраический тор, т.е. как группу с покомпонентным умножением. Элементы  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$  тора  $(\mathbb{C}^*)^{k+1}$  определяют действие на пространстве полиномов по формуле

$$\lambda : f(y_1, \dots, y_k) \rightarrow \lambda_0 f(\lambda_1 y_1, \dots, \lambda_k y_k).$$

Будем рассматривать это действие на пространстве полиномов с фиксированным набором показателей  $A$ , т.е. записываемых в виде (3.28). Действие  $\lambda$  сохраняет  $A$ -дискриминантное множество  $\nabla_A$ . На языке коэффициентов  $(a_\alpha)_{\alpha \in A} \in \mathbb{C}^A$  полинома  $f$  это действие записывается в виде

$$a_\alpha \rightarrow \lambda_0 \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_k^{\alpha_k} a_\alpha, \quad \alpha \in A,$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  – координаты  $\alpha$ .

В торической части  $(\mathbb{C}^*)^A \subset \mathbb{C}^A$  орбиты указанного действия – это классы смежности по  $(k+1)$ -параметрической подгруппе, определенной вложением

$$\varphi : (\mathbb{C}^*)^{k+1} \rightarrow (\mathbb{C}^*)^A, \quad \varphi(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)_\alpha = \lambda_0 \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_k^{\alpha_k}, \quad \alpha \in A$$

(инъективность  $\varphi$  следует из условия, что  $A$  порождает решетку  $\mathbb{Z}^k$ ). Если перенумеровать множество показателей  $\alpha \in A$  в виде  $\alpha^1, \dots, \alpha^N$  ( $N$  – мощность

$A$ ), то это вложение можно записать как

$$(a_\alpha) = \lambda^A,$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{N1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & \dots & \alpha_{Nk} \end{pmatrix},$$

полученной присоединением строки из единиц к  $(k \times N)$ -матрице, у которой  $j$ -ый столбец состоит из координат  $\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jk}$  элемента  $\alpha^j \in A$  (мы оставляем обозначение  $A$  для указанной матрицы).

Матрица  $A$  действует на  $\mathbb{Z}^A$  в качестве двойственного гомоморфизма  $\varphi^* : \mathbb{Z}^A \rightarrow \mathbb{Z}^{k+1}$ , ядро  $\ker A =: L_A$  которого есть решетка соотношений между столбцами матрицы  $A$ .

Двойственная точная последовательность к последовательности

$$0 \longrightarrow L_A \longrightarrow \mathbb{Z}^A \xrightarrow{\varphi^*} \mathbb{Z}^{k+1} \longrightarrow 0$$

имеет вид

$$1 \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^{k+1} \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{C}^*)^A \xrightarrow{p} H(L_A) \rightarrow 1,$$

где  $H(L_A) = \text{Hom}(L_A, \mathbb{C}^*)$  – тор на решетке  $L_A$ , а  $p$  – естественная проекция. Поскольку дискриминантное множество  $\nabla_A$  инвариантно относительно  $\lambda$ -действия, его торическая часть  $\nabla_A \cap (\mathbb{C}^*)^N$  проектируется отображением  $p$  в некоторое алгебраическое подмножество  $\tilde{\nabla}_A \subset H(L_A)$ , которое называется *приведенным  $A$ -дискриминантным множеством* (см [73], [85]).

Чтобы задать удобную систему координат на  $H(L_A)$ , расширим матрицу  $A$  до квадратной унимодулярной (целочисленной с определителем  $\pm 1$ ) матрицы

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix},$$

приписывая к  $A$  матрицу  $C$  из  $m = N - k - 1$  строк. отображение

$$(\mathbb{C}^*)^{k+1} \times (\mathbb{C}^*)^m \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^A, \quad (\lambda, z) \longrightarrow \lambda^A z^C = (a_\alpha)$$

является изоморфизмом, при этом  $z \in (\mathbb{C}^*)^m$  играет роль координат в  $H(L_A)$ , а сам тор  $H(L_A)$  вкладывается в  $(\mathbb{C}^*)^A$  в качестве  $m$ -параметрической:

$$H(L_A) \cong \left\{ (a_\alpha) = z^C : z \in (\mathbb{C}^*)^m \right\}.$$

Сужение пространства коэффициентов уравнения (3.28) на замыкание  $\overline{H(L_A)} \subset \mathbb{C}^A$  задает *приведенное уравнение* для (3.28).

Наиболее удобные приведения уравнения (3.28) ассоциируются с матрицами  $C$ , у которых  $k + 1$  столбцов нулевые, а остальные  $m$  столбцов составляют единичную матрицу. Такие матрицы можно использовать для расширения  $A$  до унимодулярной, если в  $A$  имеется  $k + 1$  столбцов с номерами  $j_1, \dots, j_{k+1} \in \{1, \dots, N\}$ , составляющих унимодулярную матрицу. В этом случае приведение уравнения (3.28) сводится к фиксации коэффициентов:  $a_{\alpha^{j_1}} = \dots = a_{\alpha^{j_{k+1}}} = 1$ .

Расширение  $\widehat{A}$  автоматически определяет базис решетки  $L_A$ . А именно, записав обратную матрицу в виде  $(\widehat{A})^{-1} = (D|B)$ , где  $D$  и  $B$  – блоки с  $k + 1$  и  $m$  столбцами соответственно, получим

$$A \cdot B = 0, \quad C \cdot B = E_m$$

( $E_m$  – единичная матрица размера  $m \times m$ ).

Таким образом,  $B$  – правый аннулятор для  $A$  ранга  $m$ , столбцы которого составляют базис  $L_A$ . Запишем этот аннулятор в виде

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{Nm} \end{pmatrix}.$$

Учитывая соотношение  $C \cdot B = E_m$ , получаем обращение параметризации  $(a_\alpha) = z^C$  для  $H(L_A)$ :

$$z = (a_\alpha)^B. \quad (3.29)$$

Матрица  $B$  определяет следующее отображение

$$\Psi_B : \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1} \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^m, \quad s \longrightarrow z = (Bs)^B, \quad (3.30)$$

где  $s = (s_1 : \dots : s_m)$  – однородные координаты в  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$ , (напомним, что  $m = N - k - 1$ ). Покоординатная запись отображения  $\Psi_B$  следующая:

$$z_k = \prod_{j=1}^N \langle b_j, s \rangle^{b_{jk}}, \quad k = 1, \dots, m,$$

где  $b_j = (b_{j1}, \dots, b_{jm})$  – строки матрицы  $B$ .

Поскольку первая строка матрицы  $A$  ортогональна каждому столбцу матрицы  $B$ , получаем выражения от  $s$  нулевой степени однородности, т.е.  $(Bs)^B$  корректно определено на  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$ . Отображение  $\Psi_B(s)$ , определяемое формулой (3.30), называют *параметризацией Горна-Капранова* для  $\tilde{\nabla}_A$ . Важность этого отображения объясняется теоремой Капранова [85], гласящей:

- Отображение  $\Psi_B$  параметризует приведенное  $A$ -дискриминантное множество  $\tilde{\nabla}_A \subset H(L_A) \cong (\mathbb{C}^*)^m$ ;
- Если  $\tilde{\nabla}_A$  – гиперповерхность, то  $\Psi_B$  – бирациональный изоморфизм, совпадающий с обращением логарифмического обращения Гаусса  $\gamma_{\tilde{\nabla}_A}$  для этой гиперповерхности.

Напомним понятие *логарифмического отображения Гаусса* [85] для поверхности  $V$  чистой размерности  $m - k$ . Это отображение  $\gamma_V : V \longrightarrow Gr(m, k)$ , которое каждой неособой точке  $z \in V$  ставит в соответствие комплексную нормальную плоскость к образу  $\log V$  в точке  $\log z$  (здесь  $\log$  – комплексный логарифм).

Переход от общего уравнения (3.28) к приведенному можно осуществлять путем фиксации  $(k + 1)$  коэффициентов с индексами  $\alpha^{j_1}, \dots, \alpha^{j_{k+1}}$ , если эти индексы не лежат в  $(k - 1)$ -мерной плоскости. В этом случае аннулятор  $B$  матрицы  $A$  с условием  $C \cdot B = E_m$  будет состоять из рациональных элементов. При этом необходимо учитывать выборы ветвей радикалов в формуле (3.29). Это делается с помощью теоремы о факторах (см., например, [5]).

### 3.4 Сингулярные страты каспидального типа для классического дискриминанта

В настоящем параграфе мы исследуем подмножества  $\mathcal{M}^j \subset \nabla$ , состоящие из таких  $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ , для которых уравнение (1.13) имеет корни кратности  $\geq j$ . Эти подмножества образуют вложенную цепочку

$$\nabla = \mathcal{M}^2 \supset \mathcal{M}^3 \supset \dots \supset \mathcal{M}^n.$$

Каждое  $\mathcal{M}^{j+1}$  принадлежит множеству сингулярных точек  $\text{sing } \mathcal{M}^j$ , при этом страт  $S^j = \mathcal{M}^j \setminus \mathcal{M}^{j+1}$  состоит из точек, где  $\mathcal{M}^j$  либо неособо, либо самопересекается своими гладкими кусками. Поэтому мы называем  $\mathcal{M}^j$  *сингулярными стратами каспидального типа*.

Одним из основных результатов является

**Теорема 17.** *Страты  $\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^3, \dots, \mathcal{M}^n$  мономиальными преобразованиями сводятся к некоторым  $A$ -дискриминантным множествам  $\nabla_{A_2}, \nabla_{A_3}, \dots, \nabla_{A_n}$ .*

План изложения следующий. В начале мы интерпретируем некоторые факты о стратах  $\mathcal{M}^j$  на языке понятия амебы алгебраической поверхности. Затем в разделе 3.4.2 описываются критические страты  $\mathcal{C}^j$  параметризации Горна-

Капранова

$$\Psi_{0n} : \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2} \rightarrow \nabla_{0n} \subset \mathbb{C}^{n-1}$$

для приведенного дискриминантного множества  $\nabla_{0n}$  (явное выражение для  $\Psi_{0n}$  определено формулой (3.10)). Первый страт  $\mathcal{C}^1$  определяется как множество критических значений параметризации  $\Psi_{0n}$ . Ранее в [97] было показано, что критические точки отображения  $\Psi_{0n}$  составляют некоторую гиперплоскость  $L_1 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2}$ , следовательно, первый критический страт  $\mathcal{C}^1$  параметризуется сужением  $\Psi_{0n}$  на  $L_1$ . Таким образом, можно определить страт  $\mathcal{C}^2$  критических значений этого сужения и далее действовать по индукции. Для формулировки итогового результата введем следующие гиперплоскости в  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2}$ :

$$L_j = \left\{ s : \sum_{i=j}^{n-1} i(i-1) \dots (i-(j-1))(n-i)s_i = 0 \right\},$$

где  $s = (s_1 : \dots : s_{n-1})$  – однородные координаты.

**Теорема 18.** *Страты  $\mathcal{C}^j$  параметризуются сужениями  $\Psi_{0n}|_{L^j}$  на плоскости  $L^j = L_1 \cap \dots \cap L_j$ .*

Связь критических стратов параметризации  $\Psi_{0n}$  с сингулярными стратами  $\mathcal{M}_{0n}^j$  дает доказываемая в § 3.4.3

**Теорема 19.** *Сингулярные страты  $\mathcal{M}_{0n}^{j+2} \subset \nabla_{0n}$  приведенного уравнения (3.8) совпадают с критическими стратами  $\mathcal{C}^j$  параметризации  $\Psi_{0n}$ .*

Таким образом, с учетом Теоремы 18, страты  $\mathcal{M}_{0n}^{j+2}$  параметризуются сужениями  $\Psi_{0n}|_{L^j}$ .

В § 3.4.4 утверждение Теоремы 18 переносится с приведенного уравнения (3.8) на приведенное уравнение (3.6) для произвольной пары  $p, q$ . Фактически там вычисляются уравнения плоскостей  $L_{pq}^j$ , в которые перейдут плоскости  $L^j$

при переходах уравнений (3.8)  $\rightarrow$  (1.13)  $\rightarrow$  (3.6). В последнем параграфе этой главы доказывается Теорема 17.

В заключение отметим следующее. Параметризация Горна-Капранова для классического дискриминантного множества проявляет благосклонность к каспидальным сингулярным стратам  $\mathcal{M}_{pq}^j$ : ее сужение на пространство параметров для  $\mathcal{M}_{pq}^j$  критично на линейном подпространстве. Благодаря именно этому свойству получается доказательство Теоремы 17. Сингулярные страты классического дискриминантного множества  $\nabla_{pq}$ , отвечающие за самопересечения  $\nabla$  своими гладкими кусками, уже параметризуются сужениями отображения Горна-Капранова на поверхности степени  $> 1$ . Аналогично, критическое множество параметризации Горна-Капранова для приведенного неклассического  $A$ -дискриминантного множества также имеет степень  $> 1$ . Тем не менее, не кажется безнадежной возможность решения задачи об описании каспидальных сингулярных стратов (определяемых критическими значениями сужений параметризации Горна-Капранова на подходящий флаг подмногообразий) всех  $A$ -дискриминантных множеств.

### 3.4.1 Амебы некоторых стратов приведенного дискриминантного множества

Отметим, что в случае  $q = p + 1$  отображение (3.7) бирационально, и в соответствии с Теоремой Капранова является обращением логарифмического отображения Гаусса для  $\nabla_{pq}$ . В общем оно есть  $(q - p)$ -значное обращение  $\gamma_{\nabla_{pq}}^{-1}$ .

Определенную информацию о приведенном дискриминантном множестве и его сингулярных стратах можно получить в логарифмической шкале в терминах понятия амебы алгебраической поверхности  $V$ . В случае, когда  $V$  –

гиперповерхность или кривая, точка  $z \in V_{sm}$  критическая для  $\text{Log}|_V$  тогда и только тогда, когда логарифмическое отображение Гаусса в ней вещественно (см. [93], [13]).

Таким образом, для  $V = \nabla_{pq}$  контур амебы параметризуется сужением отображения  $\Psi_{pq}|_{\mathbb{RP}^{n-2}}$  на вещественное проективное подпространство. Аналогично, контур амебы для страта  $\mathcal{M}_{pq}^{n-1}$  параметризуется сужением  $\Psi_{pq}$  на вещественный срез  $L^{n-3} \cap \mathbb{RP}^{n-2}$ .

Рассмотрим в качестве примера приведенное дискриминантное множество  $\nabla_{04}$  для уравнения степени 4. Согласно Теоремам 17 и 19 его страт  $\mathcal{M}_{04}^3$  параметризуется сужением параметризации

$$\Psi_{04} : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \nabla_{04} \subset \mathbb{C}^3$$

на комплексную прямую своих критических точек

$$L^1 = L_1 = \{(s_1 : s_2 : s_3) : 1 \cdot 3 \cdot s_1 + 2 \cdot 2 \cdot s_2 + 3 \cdot 1 \cdot s_3 = 0\}.$$

Выбирая  $s_1$  в качестве аффинной координаты на  $L_1$ , сужение  $\Psi_{04}|_{L_1}$  приобретает вид

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{8s_1}{3s_1-1} \left( \frac{3s_1-1}{-s_1+3} \right)^{\frac{1}{4}} \\ x_2 &= 2\frac{3s_1+3}{3s_1-1} \left( \frac{3s_1-1}{-s_1+3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ x_3 &= -\frac{8}{3s_1-1} \left( \frac{3s_1-1}{-s_1+3} \right)^{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

На Рис. 21 изображены амеба и ее контур для страта  $\mathcal{M}_{04}^3$ , допускающего указанную параметризацию. Из параметризации видно, что щупальцы амебы соответствуют набору значений

$$s_1 = -\infty, -1, 0, \frac{1}{3}, 3.$$

Значению  $s_1 = 1$  соответствует нульмерный страт  $\mathcal{M}_{04}^4$ ; это критическая точка параметризации. Таким образом, контур амебы нульмерного страта  $\mathcal{M}_{04}^4$

является точкой возврата (каспидальной точкой) для контура амобы примыкающего к нему одномерного страта  $\mathcal{M}_{04}^3$ .

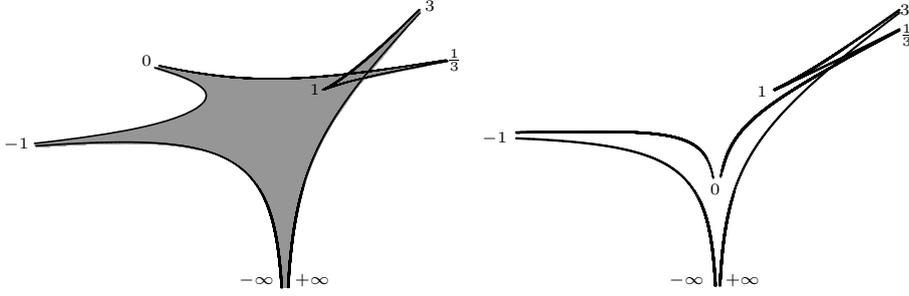


Рис. 21. Амеба страта  $\mathcal{M}_{04}^3$  для уравнения степени 4 (слева) и ее контур в другом ракурсе (справа)

Чтобы проследить характер примыкания контуров амоб стратов  $\mathcal{M}_{04}^2 = \nabla_{04}$  и  $\mathcal{M}_{04}^3$  требуется определенная деликатность. В аффинных координатах  $s_1, s_2$  пространства  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  параметризация  $\Psi_{04}$  для  $\mathcal{M}_{04}^2 = \nabla_{04}$  следующая:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-4s_1}{3s_1+2s_2+1} \left( \frac{3s_1+2s_2+1}{s_1+2s_2+3} \right)^{\frac{1}{4}} \\ x_2 &= \frac{-4s_2}{3s_1+2s_2+1} \left( \frac{3s_1+2s_2+1}{s_1+2s_2+3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ x_3 &= \frac{-4}{3s_1+2s_2+1} \left( \frac{3s_1+2s_2+1}{s_1+2s_2+3} \right)^{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Для построения контура амобы надо вычислить образ  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^2$  относительно отображения  $\text{Log} \circ \Psi_{04}$ . Это отображение имеет полярные особенности на четырех прямых (пятая прямая  $-s_3 = 0$  – бесконечно удаленная относительно выбранной аффинной части):

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad 3s_1 + 2s_2 + 1 = 0, \quad s_1 + 2s_2 + 3 = 0.$$

На Рис. 22 эти прямые изображены наряду с критической прямой  $L^1$  (жирная прямая, переходящая при отображении  $\text{Log} \circ \Psi_{04}$  в контур амобы для  $\mathcal{M}_{04}^3$ ). Кроме того, следует учесть причастность гиперболы

$$(s_1 + 1)(s_1 + 2s_2 + 3) = 2,$$

изображенной пунктиром. Образ комплексной гиперболы относительно  $\Psi_{04}$  есть страт  $\mathcal{M}_{04}^{2,2}$ , отвечающий за наличие двух корней кратности 2. Параметризация этого страта определяется формулой (3.20). Множество  $\mathcal{M}_{04}^{2,2}$  составляет страт самопересечения для дискриминантного множества  $\nabla_{04}$ . Сужение параметризации  $\Psi_{04}$  на указанную гиперболу принимает равные значения в точках  $(s_1, s_2)$ ,  $(s'_1, s'_2)$ , для которых  $s_1 \cdot s'_1 = 1$ .

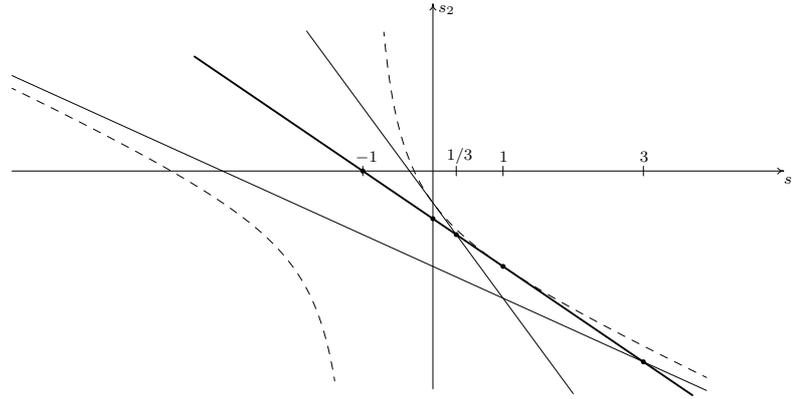


Рис. 22. Особенности параметризации  $\Psi_{04}$ : 4 полярных прямых, критическая прямая и гипербола самопересечений

На Рис. 23 приводятся некоторые фрагменты примыканий контура амобы для  $\nabla_{04}$  к контуру амобы для страта  $\mathcal{M}_{04}^3$ . Они показывают, что контур амобы для страта  $\mathcal{M}_{04}^3$  является кривой возврата контура амобы для  $\nabla_{04}$ . Вблизи острия контура для амобы  $\mathcal{M}_{04}^3$  (соответствующему значению  $s_1 = 1$  в параметризации контура) примыкание изображается куском в виде сетки и скрытой за ней двумя возвратными кусками серого цвета. Эти куски пересекаются в общем положении по кривой, которая выходит из острия и представляет часть контура амобы для страта самопересечения  $\mathcal{M}_{04}^{2,2}$ .

В целом, поверхность справа составляет фигуру, известную под названием «ласточкин хвост». Она получается как часть контура амобы для  $\nabla_{04}$ , для которой вещественные аффинные параметры  $s_1, s_2$  пробегают подходящим образом выбранную окрестность луча  $L^1 \cap \{s_1 > 0\}$ .

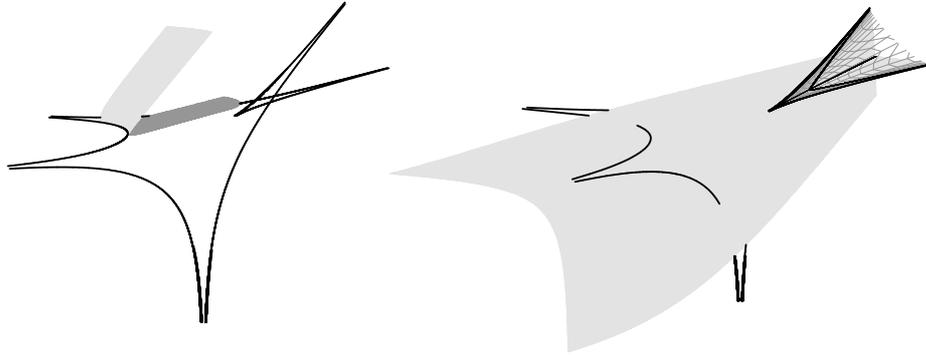


Рис. 23. Фрагменты примыкания контура амебы для  $\nabla_{04}$   
к контуру амебы для страта  $\mathcal{M}_{04}^3$

### 3.4.2 Критические страты параметризации $\Psi_{0n}$ классического приведенного дискриминантного множества $\nabla_{0n}$

Здесь мы докажем Теорему 18 для приведенного уравнения (3.8). Напомним, что параметризация  $\nabla_{0n}$  была выписана в явном виде в параграфе 3.1.2. Итак, обозначим  $\mathcal{C}^1 \subset \nabla_{0n}$  – подмножество критических значений параметризации  $\Psi_{0n}$  на ее области определения  $\langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle \neq 0$ . В [97] было показано, что  $\mathcal{C}^1$  параметризуется сужением отображения  $\Psi_{0n}$  на гиперплоскость

$$\mathcal{C}^1 = \{s : \langle \alpha \cdot \beta, s \rangle = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2},$$

где  $\alpha \cdot \beta$  – покоординатное произведение векторов.

Для  $j \geq 2$  определим страты  $\mathcal{C}^j$  по индукции, считая  $\mathcal{C}^j$  множеством критических значений для сужения  $\Psi_{0n}|_{\mathcal{L}^{j-1}}$ , где  $\mathcal{L}^{j-1}$  – множество критических точек отображения  $\Psi_{0n}|_{\mathcal{L}^{j-2}}$ . Таким образом, мы получаем две цепочки вложений алгебраических множеств

$$\nabla \supset \mathcal{C}^1 \supset \dots \supset \mathcal{C}^{n-2}, \quad \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2} \supset \mathcal{L}^1 \supset \dots \supset \mathcal{L}^{n-2}.$$

Определим в  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2}$  гиперплоскости

$$L_j := \left\{ s : \sum_{i=j}^{n-1} i(i-1)\dots(i-(j-1))(n-i)s_i = 0 \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, n-2,$$

в терминах которых Теорема 18 формулируется следующим образом:

*Страты  $\mathcal{C}^j$  параметризуются сужениями  $\Psi_{0n}|_{L^j}$  на плоскость  $L^j = L_1 \cap \dots \cap L_j$ .*

*Доказательство Теоремы 18.* Проведем индукцию по  $j$ . Базу индукции (для  $j = 1$ ) составляет упомянутое выше утверждение из статьи [97] о том, что  $\mathcal{C}^1$  параметризуется сужением  $\Psi_{0n}|_{L_1}$  на гиперплоскость  $L_1 = \{s : \langle \alpha \cdot \beta, s \rangle = 0\} = L^1$ .

Пусть теперь  $2 \leq j \leq n-2$ , и предположим, что  $\mathcal{L}^j = L_j$ , т.е. что  $\mathcal{C}^j$  задается сужением  $\Psi_{0n}|_{L^j}$ . Напомним, что  $L^j = L_1 \cap \dots \cap L_j$ , и ясно, что плоскость  $L^j$  задается трапециодальной системой линейных уравнений. В качестве однородных координат на  $L^j$  можно взять переменные  $s_{j+1}, s_{j+2}, \dots, s_{n-1}$ . С помощью последнего уравнения переменная  $s_j$  выражается через них по формуле

$$s_j|_{L^j} = -\frac{1}{(n-j)j!} \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1)\dots(i-(j-1))(n-i)s_i. \quad (3.31)$$

Рекуррентным образом для остальных переменных  $s_1, \dots, s_{j-1}$  получаем

$$s_k|_{L^j} = \frac{(-1)^{j+k+1}}{k!(j-k)!(n-k)} \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1)\dots[i-k]\dots(i-j)(n-i)s_i, \quad (3.32)$$

где квадратная скобка  $[i-k]$  обозначает знак пропуска множителя  $i-k$ . Чтобы получить это выражение, надо записать индуктивно предполагаемое выражение для  $s_k|_{L^{j-1}}$  (получаемое из (3.32) заменой  $j+1$  на  $j$ ) в виде линейной комбинации переменных  $s_j, s_{j+1}, \dots, s_{n-1}$ , и вместо  $s_j$  подставить выражение (3.31).

Из (3.32) несложно получить представление для  $\langle \alpha, s \rangle|_{L^j}$  и  $\langle \beta, s \rangle|_{L^j}$ :

$$\langle \alpha, s \rangle|_{L^j} = \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \sum_{i=j+1}^{n-1} (i-1)(i-2)\dots(i-j)(n-i)s_i, \quad (3.33)$$

$$\langle \beta, s \rangle|_{L^j} = -\frac{(n-j-1)!}{(n-1)!} \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1)\dots(i-j)s_i. \quad (3.34)$$

Итак, по предположению индукции,  $\mathcal{C}^j$  параметризуется в виде сужения  $\Psi_{0n}|_{L^j}$ , т.е. по формуле (3.10), в которой  $s_1, \dots, s_j$  выражаются через  $s_{j+1}, \dots, s_{n-1}$  в соответствии с (3.31) и (3.32). Найдем критические точки для  $\Psi_{0n}|_{L^j}$ . Поскольку функция  $\log x_k$  локально биголоморфно зависит от  $x_k$ , достаточно найти критические точки для отображения  $(\log x_1, \dots, \log x_{n-1})|_{L^j}$ . Так как размерность плоскости  $L^j$  равна  $n-2-j =: d$ , эти критические точки характеризуются условием тривиальности дифференциальных  $d$ -форм:

$$\omega_K := \bigwedge_{i=1}^d d \log x_{k_i} \Big|_{L^j} \equiv 0$$

для всех  $d$ -наборов  $K = (k_1, \dots, k_d) \subset \{1, \dots, n-1\}$ . Форма  $\omega_K$  имеет вид

$$\omega_K = \bigwedge_{i=1}^d \left( \frac{ds_{k_i}}{s_{k_i}} - \frac{n-k_i}{n} \frac{d\langle \alpha, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} - \frac{k_i}{n} \frac{d\langle \beta, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right) \Big|_{L^j} = \sum_{|I|=d} C_{KI}(s) ds_I, \quad (3.35)$$

где  $|I|$  – мощность подмножества  $I \subset \{j+1, \dots, n-1\} =: J$ , а  $ds_I$  – внешнее произведение  $ds_i$  по всем  $i \in I$ . Так как  $|I| = d$ , то каждое  $I$  получается из  $J$  удалением одного элемента:  $I = J \setminus \{l\}$ . Поэтому Теорема 18 равносильна следующему утверждению.

**Предложение 3.1.** *Все коэффициенты  $C_{K, J \setminus \{l\}}(s)$  дифференциальных форм (3.35) одновременно обращаются в нуль тогда и только тогда, когда  $s \in L^{j+1}$ .*

*Доказательство.* Для доказательства Предложения 3.1 рассмотрим вначале случай, когда  $l \in K$ . В этом случае произведение всех  $d$  дифференциалов

$\frac{ds_{k_i}}{s_{k_i}}$  в левой части (3.35) не дает вклада в коэффициент  $C_{K,J\setminus\{l\}}$ , поскольку  $ds_K \neq ds_{J\setminus\{l\}}$ . В то же время, произведения этих дифференциалов в количестве менее  $d - 2$  штук также не дают вклада, так как произведение более чем двух агрегатов

$$\varphi_{k_i} := -\frac{n - k_i}{n} \frac{d\langle\alpha, s\rangle}{\langle\alpha, s\rangle} - \frac{k_i}{n} \frac{d\langle\beta, s\rangle}{\langle\beta, s\rangle}$$

равно нулю. Поэтому, с точностью до делящегося на  $ds_l$  слагаемого, произведение  $\bigwedge_{i=1}^d$  в левой части (3.35) представляется в виде

$$\frac{ds_{k_1}}{s_{k_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{\varphi_l} \wedge \dots \wedge \frac{ds_{k_d}}{s_{k_d}} + \sum_{\substack{i=1 \\ k_i \neq l}}^d \frac{l - k_i}{n} \frac{ds_{k_1}}{s_{k_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\overbrace{d\langle\alpha, s\rangle}^{k_i}}{\langle\alpha, s\rangle} \wedge \dots \wedge \frac{\overbrace{d\langle\beta, s\rangle}^l}{\langle\beta, s\rangle} \wedge \dots \wedge \frac{ds_{k_d}}{s_{k_d}}. \quad (3.36)$$

Для обоснования такого представления надо учесть, что

$$\varphi_{k_i} \wedge \varphi_l = \frac{l - k_i}{n} \frac{d\langle\alpha, s\rangle}{\langle\alpha, s\rangle} \wedge \frac{d\langle\beta, s\rangle}{\langle\beta, s\rangle}.$$

При этом выбор знака  $+1$  в каждом слагаемом в (3.36) объясняется тем, что если  $k_i < l$ , мы вначале  $\varphi_{k_i}$  ставим непосредственно перед  $\varphi_l$ , производим их умножение, и  $\frac{d\langle\alpha, s\rangle}{\langle\alpha, s\rangle}$  возвращаем на место  $k_i$ ; если же  $k_i > l$ , то  $\varphi_{k_i}$  ставим непосредственно за  $\varphi_l$ , производим умножение, дающее результат

$$\frac{l - k_i}{n} \frac{d\langle\beta, s\rangle}{\langle\beta, s\rangle} \wedge \frac{d\langle\alpha, s\rangle}{\langle\alpha, s\rangle},$$

и  $d\langle\alpha, s\rangle$  возвращаем на место  $k_i$ .

Пусть  $k_{q+1}$  – наименьший номер в  $K$  среди вошедших в  $J$ , так что  $k_1, \dots, k_q$  – это элементы из  $K$ , не лежащие в  $J$ . Следовательно, множество  $J \cap K$  состоит из  $d - q$  элементов  $k_{q+1}, \dots, k_d$ , а в  $J \setminus K =: J_q$  остается  $q + 1$  элементов, обозначим их  $j_1, \dots, j_{q+1}$ .

Поскольку выражение (3.36) мы рассматриваем на  $L^j$ , где координатами выступают  $s_{j+1}, \dots, s_{n-1}$ , нам необходимо использовать функциональную за-

зависимость функций  $s_{k_1}, \dots, s_{k_q}, \langle \alpha, s \rangle, \langle \beta, s \rangle$  от этих координат. С этой целью введем обозначения для якобианов:

$$\frac{\partial(s_{k_1}, \dots, s_{k_q}, \langle \beta, s \rangle)}{\partial(s_{j_1}, \dots, s_{j_{q+1}})} =: \delta_\alpha, \quad \frac{\partial(s_{k_1}, \dots, s_{k_q}, \langle \alpha, s \rangle)}{\partial(s_{j_1}, \dots, s_{j_{q+1}})} =: \delta_\beta.$$

Через  $\delta_{s_{k_i}}$  обозначим определитель, полученный из  $\delta_\alpha$  заменой  $s_{k_i}$  на  $\langle \alpha, s \rangle$ . Рассмотрим также следующие определители, которые получаются из  $\delta_\alpha$  присоединением строки и столбца:

$$\frac{\partial(\langle \alpha, s \rangle, s_{k_1}, \dots, s_{k_q}, \langle \beta, s \rangle)}{\partial(s_i, s_{j_1}, \dots, s_{j_{q+1}})} =: \Delta_i, \quad i = j + 1, \dots, n - 1.$$

В этих обозначениях выражение (3.36) показывает, что коэффициент  $C_{KI} = C_{K, J \setminus \{l\}}$  дифференциальной формы (3.35) с точностью до знака запишется следующим образом:

$$\frac{\sum_{i=1}^q (l - k_i) \delta_{s_{k_i}} s_{k_i} + \sum_{i=q+1}^d (l - k_i) \Delta_{k_i} s_{k_i} - (n - l) \delta_\beta \langle \beta, s \rangle - l \delta_\alpha \langle \alpha, s \rangle}{n s_{k_1} \dots [l] \dots s_{k_d} \langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle}. \quad (3.37)$$

Обозначим через  $\tilde{C}_{K, J \setminus \{l\}}$  числитель последнего выражения, который является линейной функцией от  $s_{j+1}, \dots, s_{n-1}$ . Вычислим эту функцию.

**Лемма 3.3.** *Числитель  $\tilde{C}_{K, J \setminus \{l\}}$  рациональной функции (3.37) равен*

$$\left( c_{s_{k_1}} \delta_{s_{k_1}} + \dots + c_{s_{k_q}} \delta_{s_{k_q}} - c_\beta \delta_\beta - c_\alpha \delta_\alpha \right) \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1) \dots (i-j)(n-i) s_i, \quad (3.38)$$

где  $c_{s_k}, c_\alpha, c_\beta$  – числовые множители, стоящие перед знаками сигма в выражениях (3.31)-(3.34) для сужений функций  $s_k, \langle \alpha, s \rangle, \langle \beta, s \rangle$  на  $L^j$ . Таким образом,  $C_{K, J \setminus \{l\}}(s) = 0$  на  $L^{j+1}$ .

*Доказательство.* Разложим определители  $\Delta_{k_i}$ , участвующие в числителе выражения (3.37) по первому столбцу:

$$\Delta_{k_i} = \frac{\partial \langle \alpha, s \rangle}{\partial s_{k_i}} \delta_\alpha - \frac{\partial s_{k_1}}{\partial s_{k_i}} \delta_{s_{k_1}} - \frac{\partial s_{k_2}}{\partial s_{k_i}} \delta_{s_{k_2}} - \dots - \frac{\partial s_{k_q}}{\partial s_{k_i}} \delta_{s_{k_q}} - \frac{\partial \langle \beta, s \rangle}{\partial s_{k_i}} \delta_\beta.$$

Здесь выбор знаков в слагаемых объясняется тем, что в  $\Delta_{k_i}$  алгебраические дополнения элементов  $\frac{\partial s_{k_\nu}}{\partial s_{k_i}}$  отличаются знаками  $(-1)^{\nu-1}$  от определителей  $\delta_{s_{k_\nu}}$ ,  $\nu = 1, \dots, q$ . В аналогичных соотношениях находятся алгебраические дополнения элементов  $\frac{\partial \langle \alpha, s \rangle}{\partial s_{k_i}}$  и  $\frac{\partial \langle \beta, s \rangle}{\partial s_{k_i}}$  с определителями  $\delta_\alpha$  и  $\delta_\beta$ .

Напомним, что через  $J_q$  мы обозначили  $J \setminus \{k_{q+1}, \dots, k_d\}$ . Учитывая указанное равенство для  $\Delta_{k_i}$ , приходим к следующему выражению для числителя (3.37):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{K, J \setminus \{l\}} &= \sum_{\nu=1}^q \left( (l - k_\nu) s_{k_\nu} - \left( \sum_{i=j+1}^{n-1} - \sum_{i \in J_q} \right) \frac{\partial s_{k_\nu}}{\partial s_i} (l - i) s_i \right) \delta_{s_{k_\nu}} - \\ &- \left( (n - l) \langle \beta, s \rangle + \left( \sum_{i=j+1}^{n-1} - \sum_{i \in J_q} \right) \frac{\partial \langle \beta, s \rangle}{\partial s_i} (l - i) s_i \right) \delta_\beta + \\ &+ \left( -l \langle \alpha, s \rangle + \left( \sum_{i=j+1}^{n-1} - \sum_{i \in J_q} \right) \frac{\partial \langle \alpha, s \rangle}{\partial s_i} (l - i) s_i \right) \delta_\alpha. \end{aligned}$$

Ввиду линейной зависимости от  $s_{j+1}, \dots, s_{n-1}$ , функции  $s_{k_\nu}$  представляются в виде  $\sum_{i=j+1}^{n-1} \frac{\partial s_{k_\nu}}{\partial s_i} s_i$ , поэтому с учетом формул (3.31) и (3.32) выражение в скобках при  $\delta_{s_{k_\nu}}$  преобразуется к следующему

$$\begin{aligned} (l - k_\nu) s_{k_\nu} - \left( \sum_{i=j+1}^{n-1} - \sum_{i \in J_q} \right) \frac{\partial s_{k_\nu}}{\partial s_i} (l - i) s_i &= \sum_{i=j+1}^{n-1} (i - k_\nu) \frac{\partial s_{k_\nu}}{\partial s_i} s_i + \sum_{i \in J_q} \frac{\partial s_{k_\nu}}{\partial s_i} (l - i) s_i = \\ &= c_{s_{k_\nu}} \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1) \dots (i-j)(n-i) s_i + \sum_{i \in J_q} \frac{\partial s_{k_\nu}}{\partial s_i} (l - i) s_i. \end{aligned}$$

Аналогичным образом преобразуются выражения, стоящие в скобках при  $\delta_\alpha$  и  $\delta_\beta$ :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=q+1}^d \frac{\partial \langle \alpha, s \rangle}{\partial s_{k_i}} (l - k_i) s_{k_i} - l \langle \alpha, s \rangle = \\ &= -c_\alpha \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1) \dots (i-j)(n-i) s_i - \sum_{i \in J_q} \frac{\partial \langle \alpha, s \rangle}{\partial s_i} (l - i) s_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n-l)\langle\beta, s\rangle + \sum_{i=q+1}^d \frac{\partial\langle\beta, s\rangle}{\partial s_{k_i}}(l-k_i)s_{k_i} = \\
& = c_\beta \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1)\dots(i-j)(n-i)s_i - \sum_{i\in J_q} \frac{\partial\langle\beta, s\rangle}{\partial s_i}(l-i)s_i.
\end{aligned}$$

В результате указанных преобразований  $\tilde{C}_{K, J\setminus\{l\}}$  записывается в следующем виде:

$$\left( \sum_{\nu=1}^q c_{s_{k_\nu}} \delta_{s_{k_\nu}} - c_\beta \delta_\beta - c_\alpha \delta_\alpha \right) \sum_{i=j+1}^{n-1} i(i-1)\dots(i-j)(n-i)s_i + \sum_{i\in J_q} \Delta_i(i-l)s_i.$$

Так как  $k_{q+1}, \dots, k_d \notin J_q$ , то при  $i \in J_q$  детерминант  $\Delta_i$  имеет два равных столбца, следовательно, обращается в нуль. В итоге мы получаем искомую формулу (3.38) для  $\tilde{C}_{K, J\setminus\{l\}}$ , и Лемма 3.3 доказана.  $\square$

Пусть теперь  $l \notin K$ . Коэффициент  $C_{KI} = C_{K, J\setminus\{l\}}$  в (3.35) равен сужению определителя  $\det \frac{\partial \log x_K}{\partial s_{J\setminus\{l\}}}$  на  $L^j$ . Присоединим к этому определителю  $l$ -ые строку и столбец, дополнив его до определителя  $\det \frac{\partial \log x_{K,l}}{\partial s_J}$  размера  $(d+1) \times (d+1)$ . В силу того, что мы работаем в однородных координатах  $s_{j+1}, \dots, s_{n-1}$  плоскости  $L^j$ , дополненный определитель равен нулю на  $L^j$ . По Лемме 3.3, в его разложении по  $l$ -му столбцу алгебраические дополнения всех недиагональных элементов обращаются в нуль на  $L^{j+1}$  (эти дополнения имеют вид  $\det \frac{\partial \log x_{K'}}{\partial s_{J\setminus\{i\}}}$ , где  $K' = (K \cup \{l\}) \setminus \{i\}$ , и потому  $i \notin K'$ ). Следовательно, для доказательства равенства  $\det \frac{\partial \log x_K}{\partial s_{J\setminus\{l\}}} = 0$  на  $L^{j+1}$  в случае  $l \notin K$ , требуется показать что, хотя бы в одной точке  $s$  гиперплоскости  $L^{j+1}$  диагональный элемент  $\frac{\partial \log x_l(s)}{\partial s_l} \neq 0$ . В силу однородности функций  $x_k(s)$ , достаточно рассмотреть случай  $l = n-1$ . Итак, выберем на  $L^{j+1}$  следующие значения для  $s_{j+1}, s_{j+2}, \dots, s_{n-1}$ :

$$-\frac{(j+2)(n-j-2)}{n-j-1} s_{j+2} - \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-j)}{(j+1)!}, s_{j+2}, 0, \dots, 0, 1.$$

Вычисление показывает, что для таких значений производная  $\frac{\partial \log x_{n-1}}{\partial s_{n-1}}$  равна рациональной функции от  $s_{j+2}$

$$\frac{1}{n(n-j-2)} \frac{(j+1) \prod_{i=2}^{j+1} (n-i)}{s_{j+2}(j+1)! + \prod_{i=2}^{j+1} (n-i)} - \frac{(n-1)(n-j-1) \prod_{i=1}^{j+1} (n-i)}{ns_{j+2}(j+2)! + n \prod_{i=1}^{j+2} (n-i)} + 1,$$

у которой числитель – многочлен второй степени с коэффициентом  $(j+1)!(j+2)!$  при  $s_{j+2}^2$ . Следовательно,  $\frac{\partial \log x_{n-1}}{\partial s_{n-1}}$  не обращается тождественно в нуль на  $L^{j+1}$ , а потому  $C_{K, J \setminus \{l\}} \equiv 0$  на  $L^{j+1}$ .

Для завершения доказательства Предложения 3.1 укажем такой набор  $K = (k_1, \dots, k_d)$ , при котором множитель  $c_{s_{k_1}} \delta_{s_{k_1}} + \dots + c_{s_{k_q}} \delta_{s_{k_q}} - c_\beta \delta_\beta - c_\alpha \delta_\alpha$  в выражении (3.38) для  $\tilde{C}_{KI}$  не обращается в нуль. Например, пусть  $K = J \setminus \{j+1\}$ , т.е.

$$(k_1, \dots, k_d) = (j+2, j+3, \dots, n-1).$$

В этом случае  $q = 0$ , поэтому рассматриваемый множитель состоит лишь из двух слагаемых, причем с ненулевой суммой:

$$-\left( c_\beta \frac{\partial \langle \alpha, s \rangle}{\partial s_{j+1}} + c_\alpha \frac{\partial \langle \beta, s \rangle}{\partial s_{j+1}} \right) = \frac{(-1)^{j+1} n(n-j-1)!}{(n-1)!}.$$

Итак, коэффициенты  $C_{KI}(s)$  формы (3.35) одновременно обращаются в нуль тогда и только тогда, когда  $s \in L^{j+1}$ . Тем самым, Предложение 3.1, вместе с Теоремой 18, доказаны.  $\square$

### 3.4.3 Равенство стратов $\mathcal{M}_{0n}^{j+2}$ и $\mathcal{C}^j$

В этом параграфе мы докажем Теорему 19, которая гласит, что

*сингулярные страты  $\mathcal{M}_{0n}^{j+2} \subset \nabla_{0n}$  приведенного уравнения (3.8) совпадают с критическими стратами  $\mathcal{C}^j$  параметризации  $\Psi_{0n}$ .*

Доказательство Теоремы 19 будет основано на трех леммах. Пусть  $t$  – корень уравнения (3.8) кратности  $\geq \mu$ , т.е.

$$f(y) = (y - t)^\mu f_{n-\mu}(y), \quad (3.39)$$

где

$$f(y) = 1 + x_1 y + \dots + x_{n-1} y^{n-1} + y^n$$

– многочлен, определяющий уравнение (3.8), а

$$f_{n-\mu}(y) := \sum_{k=0}^{n-\mu} x_k^{(n-\mu)} y^k$$

– многочлен степени  $n - \mu$ . В этих обозначениях  $x_k^{(n)} = x_k$  для  $k = 1, \dots, n - 1$ ; мы также полагаем  $x_n^{(n)} = 1 =: x_n$ ,  $x_0^{(n)} = 1 =: x_0$ .

**Лемма 3.4.** Для  $\mu = 1, \dots, n$  коэффициенты многочлена  $f_{n-\mu}$  в соотношении (3.39) выражаются через коэффициенты  $x_i$  многочлена  $f$  по формуле:

$$x_\nu^{(n-\mu)} = \frac{1}{(\mu - 1)!} \sum_{i=\nu+\mu}^n (i - \nu - \mu + 1)_{\mu-1} x_i t^{i-\nu-\mu}, \quad (3.40)$$

где  $(a)_b = a(a + 1) \dots (a + b - 1)$  – символ Похгаммера.

*Доказательство.* Для  $p < \mu$  многочлен  $f_{n-p}$  делится на  $y - t$ . Результат деления есть многочлен

$$f_{n-p-1}(y) = \sum_{k=0}^{n-p-1} y^k \sum_{\nu=k+1}^{n-p} x_\nu^{(n-p)} t^{\nu-k-1},$$

таким образом, коэффициенты  $x_k^{(n-p-1)}$  и  $x_\nu^{(n-p)}$  связаны соотношением

$$x_k^{(n-p-1)} = \sum_{\nu=k+1}^{n-p} x_\nu^{(n-p)} t^{\nu-k-1}. \quad (3.41)$$

В частности, многочлен  $f_{n-1}(y)$  равен

$$f_{n-1}(y) = \sum_{k=0}^{n-1} y^k \sum_{\nu=k+1}^n x_\nu t^{\nu-k-1},$$

тем самым, формула (3.40) верна для  $\mu = 1$ . Проведем индукцию по  $\mu$ . Воспользовавшись соотношением (3.41) и индуктивным предположением, получаем

$$x_k^{n-(\mu+1)} = \sum_{\nu=k+1}^{n-\mu} x_\nu^{(n-\mu)} t^{\nu-k-1} = \frac{1}{(\mu-1)!} \sum_{\nu=k+1}^{n-\mu} \sum_{i=\nu+\mu}^n (i-\nu-\mu+1)_{\mu-1} x_i t^{i-k-\mu-1}.$$

Здесь двойное суммирование ведется по точкам  $(\nu, i)$  из треугольника, задаваемого неравенствами  $i - \nu - \mu \geq 0$ ,  $k + \mu + 1 \leq i \leq n$ . Каждая точка этого треугольника однозначно определяется значениями пары линейных функций  $i$ ,  $i - \nu$ , поэтому, обозначая величину  $i - \nu - \mu + 1$  новой переменной  $j$ , мы можем написать

$$x_k^{n-(\mu+1)} = \frac{1}{(\mu-1)!} \sum_{i=k+\mu+1}^n x_i t^{i-k-\mu-1} \sum_{j=1}^{i-k-\mu} (j)_{\mu-1}.$$

(Здесь при расстановке пределов для индексов суммирования мы учли, что в координатах  $(j, i)$  указанный выше треугольник переходит в треугольник  $j - i + k + \mu \leq 0$ ,  $k + \mu + 1 \leq i \leq n$ ). В последнем равенстве вторая сумма равна

$$\sum_{j=1}^{i-k-\mu} (j)_{\mu-1} = \frac{1}{\mu} (i - k - \mu)_\mu. \quad (3.42)$$

Это равенство легко обосновывается индукцией по  $i - k - \mu$ . Таким образом,

$$x_k^{n-(\mu+1)} = \frac{1}{\mu!} \sum_{i=k+\mu+1}^n (i - k - \mu)_\mu x_i t^{i-k-\mu-1}.$$

Лемма 3.4 доказана. □

Далее для  $s = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ , участвующего в параметризации (3.10), рассмотрим величину

$$\left( \frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}} =: t(s). \quad (3.43)$$

Значение  $y = t(s)$  является корнем уравнения (3.8) при  $x = \Psi_{0n}(s)$ , причем кратности не ниже двух. Действительно,

$$f(t(s)) = \frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} + \frac{ns_{n-1}}{\langle \alpha, s \rangle} + \dots + \frac{ns_1}{\langle \alpha, s \rangle} + 1 \equiv 0,$$

поскольку  $\langle \alpha, s \rangle + \langle \beta, s \rangle = -n(1, \dots, 1)$ . В свою очередь, согласно Лемме 3.4, результат деления  $f(y)$  на  $y - t(s)$ , вычисленный при  $x = \Psi_{0n}(s)$ ,  $y = t(s)$ , равен (для краткости письма вместо  $t(s)$  пишем  $t$ )

$$\begin{aligned} f_{n-1}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} t^k \sum_{\nu=k+1}^n x_\nu t^{\nu-k-1} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=k+1}^n x_\nu t^\nu = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{\nu=k+1}^{n-1} x_\nu t^\nu + t^n \right) = \\ &= \frac{1}{t \langle \alpha, s \rangle} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \langle \beta, s \rangle + n \sum_{\nu=k+1}^{n-1} s_\nu \right) = \frac{1}{t \langle \alpha, s \rangle} \left( n \langle \beta, s \rangle - n \langle \beta, s \rangle \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

**Лемма 3.5.** Если  $f_{n-\mu}(y)$  удовлетворяет соотношению (3.39) при  $t = t(s)$ , то для  $s \in L^{\mu-2}$

$$f_{n-\mu}(t(s)) = -\frac{n}{\mu! t^\mu(s) \langle \alpha, s \rangle} \sum_{i=\mu-1}^{n-1} i(i-1) \dots (i-\mu+2)(n-i)s_i. \quad (3.44)$$

*Доказательство.* Согласно (3.40) имеем:

$$f_{n-\mu}(y) = \frac{1}{(\mu-1)! t^\mu} \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \left( \frac{y}{t} \right)^\nu \sum_{i=k+\mu}^n (i-\nu-\mu+1)_{\mu-1} x_i t^i.$$

Для краткости письма введем обозначение  $A(s) := \frac{1}{(\mu-1)! t^\mu \langle \alpha, s \rangle}$ . Тогда

$$f_{n-\mu}(t(s)) = A(s) \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \left( (n-\nu-\mu+1)_{\mu-1} \langle \beta, s \rangle + n \sum_{i=k+\mu}^{n-1} (i-\nu-\mu+1)_{\mu-1} s_i \right).$$

Согласно (3.34)

$$\langle \beta, s \rangle|_{L^{\mu-2}} = -\frac{(n-\mu+1)!}{(n-1)!} \sum_{i=\mu-1}^{n-1} i(i-1) \dots (i-\mu+2)s_i,$$

поэтому при  $s \in L^{\mu-2}$  выражение для  $f_{n-\mu}(t(s))$  переписется с точностью до множителя  $(-A(s))$  так:

$$\sum_{\nu=0}^{n-\mu} \left( \frac{(n-\mu+1)!}{(n-1)!} (n-\nu-\mu+1)_{\mu-1} \sum_{i=\mu-1}^{n-1} i(i-1) \dots (i-\mu+2)s_i - \right.$$

$$-n \sum_{i=\nu+\mu}^{n-1} (i - \nu - \mu + 1)_{\mu-1} s_i).$$

В полученном выражении найдем коэффициент при  $s_i$ ,  $i \geq \mu - 1$ . Он представляется выражением

$$(i - \mu + 2)_{\mu-1} \frac{(n - \mu + 1)!}{(n - 1)!} \sum_{\nu=0}^{n-\mu} (n - \nu - \mu + 1)_{\mu-1} - n \sum_{\nu=0}^{i-\mu} (i - \nu - \mu + 1)_{\mu-1}$$

(при  $i = \mu - 1$  последнее выражение равно нулю). Далее воспользуемся вытекающей из (3.42) формулой

$$\sum_{\nu=0}^{\xi-\mu} (\xi - \nu - \mu + 1)_{\mu-1} = \frac{(\xi - \mu + 1)_{\mu}}{\mu}, \quad (3.45)$$

с помощью которой выражение для рассматриваемого коэффициента при  $s_i$  приводится к виду  $\frac{ni(i-1)\dots(i-\mu+2)(n-i)}{\mu}$ . Что после умножения на  $(-A(s))$  соответствует доказываемой формуле (3.44). Лемма 3.5 доказана.  $\square$

**Лемма 3.6.** Уравнение (3.8) при  $x = \Psi_{0n}(s)$  имеет в точке  $y = \left(\frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle}\right)^{\frac{1}{n}}$  корень кратности  $\geq \mu + 2$  тогда и только тогда, когда  $s \in L^{\mu}$ .

*Доказательство.* Линейная функция от  $s$ , задаваемая суммой в (3.44), является определяющей функцией гиперплоскости  $L_{\mu-1}$ . Из рассуждений, сделанных перед Леммой 3.5, мы знаем, что при  $x = \Psi_{0n}(s)$  выполняется равенство  $f(y) = (y - t(s))^2 f_{n-2}(y)$ . При этом, согласно (3.44)

$$f_{n-2}(t(s)) = 0 \iff s \in L^1.$$

Последнее означает, что  $t(s)$  – корень кратности  $\geq 3$  тогда и только тогда, когда  $s \in L^1$ . Далее по индукции с помощью Леммы 3.5 получаем, что в соотношении  $f(y) = (y - t)^{\mu+1} f_{n-\mu-1}(y)$  многочлен  $f_{n-\mu-1}(y)$  удовлетворяет условию:  $f_{n-\mu-1}(t(s)) = 0$  тогда и только тогда, когда  $s \in L^{\mu}$ . Лемма 3.6 доказана.  $\square$

Теперь доказательство Теоремы 19 мы можем закончить следующим образом. Пусть  $f(y)$  – многочлен, представляющий левую часть (3.8). Предположим, что  $x \in \mathcal{C}^j$ , т.е.  $x = \Psi_{0n}(s)$ , где  $s \in L^j$ . По Лемме 3.6 значение  $y = \left(\frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle}\right)^{\frac{1}{n}}$  является корнем многочлена  $f(y)$  кратности  $\geq j + 2$ . Это означает, что  $x \in \mathcal{M}_{0n}^{j+2}$ .

Обратно, пусть  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{M}_{0n}^{j+2}$ , т.е.  $f(y)$  имеет корень  $a$  кратности  $\mu \geq j + 2$ . Рассмотрим следующую систему  $n$  уравнений от неизвестного  $s = (s_1 : \dots : s_{n-1}) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2}$ :

$$\left(\frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle}\right)^{\frac{1}{n}} = a, \quad \Psi_{0n}(s) = x.$$

Для определенности будем считать, что  $x_{n-1} \neq 0$  (уравнение (3.8) не имеет кратных корней при  $x = 0$ , поэтому хотя бы одна координата выбранного вектора отлична от нуля). В таком случае в аффинной части  $s_{n-1} \neq 0$  система однозначно разрешима и ее решение  $s^*$  следующее:

$$\frac{s_k^*}{s_{n-1}^*} = \frac{x_k}{x_{n-1} a^{n-k-1}}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

По Лемме 3.6  $s^* \in L^\mu$ , а потому  $x = \Psi_{0n}(s^*) \in \mathcal{C}^j$ . Теорема 19 доказана.

#### 3.4.4 Параметризации стратов $\mathcal{M}_{pq}^j$

В предыдущих двух параграфах мы описали параметризации стратов  $\mathcal{M}_{0n}^{j+2}$  дискриминантного множества  $\nabla_{0n}$  уравнения (3.8). Согласно Теоремам 18 и 19 страт  $\mathcal{M}_{0n}^{j+2}$  дискриминантного множества  $\nabla_{0n}$  параметризуется сужением  $\Psi_{0n}$  на плоскость  $L^j = L_1 \cap \dots \cap L_j$ , где  $\Psi_{0n}$  определено формулой (3.10).

С использованием символа Похгаммера, запишем определяющую функцию  $l_j$  гиперплоскости  $L_j$  в виде

$$l_j(s) = \sum_{i=0}^n (i-j+1)_j (n-i) s_i, \quad j = 1, \dots, n-2.$$

Здесь коэффициенты при  $s_0$  и  $s_n$  нулевые, поэтому  $l_j$  не зависят от  $s_0$  и  $s_n$ .

Нам удобно переадресовать  $L^j$  другим пересечением гиперплоскостей. А именно, введем для  $j = 3, 4, \dots, n - 2$  гиперповерхности

$$L'_j = \left\{ s : \sum_{i=0}^n (i-p)(i-q)(i-j+3)_{j-2} (n-i) s_i = 0 \right\}.$$

**Лемма 3.7.** *Имеет место равенство*

$$L_1 \cap \dots \cap L_j = L_1 \cap L_2 \cap L'_3 \dots \cap L'_j.$$

*Доказательство.* Линейная комбинация

$$(j-2-q)(j-2-p)l_{j-2} + (2j-3-p-q)l_{j-1} + l_j$$

есть линейная форма

$$l'_j := \sum_{i=0}^n (i-p)(i-q)(i-j+3)_{j-2} (n-i) s_i,$$

определяющая  $L'_j$ . Таким образом, уравнение для  $L'_j$  есть следствие уравнений для  $L_1, \dots, L_j$ , а уравнение для  $L_j$  – следствие уравнений для  $L_1, L_2, L'_3, \dots, L'_j$ . Лемма (3.7) доказана.  $\square$

Обозначим через  $l_j^{pq}$  линейную функцию от  $s_0, \dots, [p] \dots [q] \dots, s_n$ , полученную подстановкой в  $l_j$  следующих выражений для  $s_p$  и  $s_q$ :

$$s_p = \frac{1}{q-p} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p, q}}^n (i-q) s_i, \quad s_q = \frac{1}{q-p} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p, q}}^n (p-i) s_i, \quad (3.46)$$

равносильных соотношениям (3.13).

Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2}$  с однородными координатами  $s = (s_j)$ ,  $j \neq p, q$  систему уравнений

$$l_1^{pq}(s) = l_2^{pq}(s) = l_3^{pq}(s) = \dots = l_j^{pq}(s) = 0, \quad (3.47)$$

и определяемую ею плоскость, обозначим  $L_{pq}^j$ . Согласно Лемме 3.7,  $L_{pq}^j$  есть образ плоскости  $L^j = L_1 \cap \dots \cap L_j$  при замене  $s_p$  и  $s_q$  на линейные функции (3.46). Обозначим  $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ .

**Лемма 3.8.** *Для любого набора  $I = \{i_0, i_1, \dots, i_{j-1}\} \subset [n] \setminus \{p, q\}$  решение системы (3.47) параметризуется через переменные  $s' = (s_i)$ ,  $i \in ([n] \setminus \{p, q\}) \setminus I$  по формуле*

$$s_{i_\nu} = - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_\nu}}^n \frac{(i-p)(i-q)}{(i_\nu-p)(i_\nu-q)} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq \nu}}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_\nu-i_m} s_i, \quad \nu = 0, 1, \dots, j-1. \quad (3.48)$$

**Замечание 3.2.** *Формально в (3.48) не делается ограничений на индексы суммирования  $([n] \setminus \{p, q\}) \setminus I$ , однако ввиду наличия множителей  $i-p, i-q$  и  $i-i_m$  у коэффициента при  $s_i$ , правая часть в (3.48) зависит лишь от  $s'$ .*

*Доказательство.* Покажем, что указанные в (3.48) выражения для  $s_{i_\nu}$  являются решением первого уравнения системы, т.е. уравнения

$$\sum_i (i-p)(i-q)s_i = 0.$$

Для рассматриваемых  $s_{i_\nu}$  левая часть уравнения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i \neq i_0} (i-p)(i-q) \prod_{m=1}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_0-i_m} s_i - \sum_{i \neq i_1} (i-p)(i-q) \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq 1}}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_1-i_m} s_i - \dots \\ & \dots - \sum_{i \neq i_{j-1}} (i-p)(i-q) \prod_{m=0}^{j-2} \frac{i-i_m}{i_{j-1}-i_m} s_i + \sum_{i \neq i_0, \dots, i_{j-1}} (i-p)(i-q)s_i. \end{aligned}$$

Здесь коэффициент при  $s_i$  ( $i \neq i_0, \dots, i_{j-1}$ ) есть многочлен степени  $\leq j+1$  относительно  $i$ :

$$g_1(i) := (i-p)(i-q) \left( 1 - \sum_{\sigma=0}^{j-1} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq \sigma}}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_\sigma-i_m} \right).$$

Этот многочлен равен нулю для  $j+2$  различных значений  $i = p, q, i_0, \dots, i_{j-1}$ , поэтому он равен нулю тождественно, т.е. (3.48) удовлетворяет первому уравнению системы (3.47).

Аналогичными рассуждениями доказывается, что указанные в (3.48) выражения для  $s_{i_\nu}$  являются корнями уравнения  $l_2^{pq}(s) = 0$ .

Покажем, что эти выражения есть корни каждого из уравнений  $l_\tau^{pq} = 0$ ,  $3 \leq \tau \leq j$  системы (3.47). Подстановка выражений (3.48) в многочлен  $l_\tau^{pq}(s)$  дает

$$\begin{aligned} & -(i_0 - j + 3)_{j-2}(n - i_0) \sum_{i \neq i_0} (i - p)(i - q) \prod_{m=1}^{j-1} \frac{i - i_m}{i_0 - i_m} s_i - \\ & -(i_1 - j + 3)_{j-2}(n - i_1) \sum_{i \neq i_1} (i - p)(i - q) \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq 1}}^{j-1} \frac{i - i_m}{i_1 - i_m} s_i - \dots \\ & \dots - (i_{j-1} - j + 3)_{j-2}(n - i_{j-1}) \sum_{i \neq i_{j-1}} (i - p)(i - q) \prod_{m=0}^{j-2} \frac{i - i_m}{i_{j-1} - i_m} s_i + \\ & + \sum_{i \neq i_0, \dots, i_{j-1}} (i - p)(i - q)(i - j + 3)_{j-2}(n - i) s_i. \end{aligned}$$

Коэффициент при  $s_i$  ( $i \neq i_0, \dots, i_{j-1}$ ) есть многочлен степени  $\leq j+1$  относительно  $i$ :

$$\begin{aligned} g_\tau(i) := & -(i_0 - j + 3)_{j-2}(n - i_0)(i - p)(i - q) \prod_{m=1}^{j-1} \frac{i - i_m}{i_0 - i_m} - \\ & -(i_1 - j + 3)_{j-2}(n - i_1)(i - p)(i - q) \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq 1}}^{j-1} \frac{i - i_m}{i_1 - i_m} - \dots \\ & \dots - (i_{j-1} - j + 3)_{j-2}(n - i_{j-1})(i - p)(i - q) \prod_{m=0}^{j-2} \frac{i - i_m}{i_{j-1} - i_m} + \\ & + (i - p)(i - q)(i - j + 3)_{j-2}(n - i). \end{aligned}$$

Опять  $g_\tau(i) = 0$  для  $j+2$  различных значений  $i = p, q, i_0, \dots, i_{j-1}$ , т.е.  $g_\tau(i) \equiv 0$ .

Лемма доказана.  $\square$

Напомним, что параметризация дискриминантного множества  $\nabla_{pq}$  определяется отображением (3.12), в котором знаки  $s_p$  и  $s_q$  представляются линейными функциями (3.46). Вычислим значения этих функций на плоскости  $L_{pq}^j$ .

**Лемма 3.9.** *На плоскости  $L_{pq}^j$ , определяемой системой (3.47), справедливы следующие представления для  $s_p$  и  $s_q$ :*

$$s_p = \frac{1}{q-p} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p, q}}^n (i-q) \prod_{m=0}^{j-1} \frac{i_m - i}{i_m - p} s_i, \quad (3.49)$$

$$s_q = \frac{1}{q-p} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p, q}}^n (p-i) \prod_{m=0}^{j-1} \frac{i_m - i}{i_m - q} s_i. \quad (3.50)$$

Таким образом, приведенный страт  $\mathcal{M}_{pq}^{j+2}$  параметризуется отображением (3.12), в котором  $s_{i_0}, \dots, s_{i_{j-1}}, s_p, s_q$  выражаются через  $s' = (s_i)$ ,  $i \neq i_0, \dots, i_{j-1}, p, q$ , по формулам (3.48), (3.49), (3.50).

*Доказательство.* С учетом (3.48) имеем:

$$\begin{aligned} (q-p)s_p &= \sum_{i \neq p, i_0, \dots, i_{j-1}} (i-q)s_i - \sum_{i \neq i_0} \frac{(i-p)(i-q)}{i_0-p} \prod_{m=1}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_0-i_m} s_i - \\ &- \sum_{i \neq i_1} \frac{(i-p)(i-q)}{i_1-p} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq 1}}^{j-1} \frac{i-i_m}{i_1-i_m} s_i - \dots - \sum_{i \neq i_{j-1}} \frac{(i-p)(i-q)}{i_{j-1}-p} \prod_{m=0}^{j-2} \frac{i-i_m}{i_{j-1}-i_m} s_i. \end{aligned}$$

Здесь в правой части равенства коэффициент при  $s_i$  является многочленом степени  $j+1$  относительно  $i$  с корнями  $q, i_0, \dots, i_{j-1}$ , т.е. он имеет те же корни, что и коэффициент при  $s_i$  в правой части выражения (3.49) (это тоже многочлен степени  $j+1$ ). Для определения коэффициента пропорциональности удобно взять  $i = p$ , что и приводит к обоснованию представления (3.49). Представление (3.50) доказывается аналогично. Лемма 3.9 доказана.  $\square$

### 3.4.5 Доказательство Теоремы 17

Здесь мы докажем Теорему 17 о том, что каждый страт  $\mathcal{M}^j$  бимономиальным преобразованием сводится к  $A_j$ -дискриминантному множеству  $\nabla_{A_j}$ . Доказательство этой теоремы составляют две леммы.

Вначале проиллюстрируем идею доказательства на примере страта  $\mathcal{M}^3$  для уравнения степени 4. Учитывая бимономиальную зависимость (3.29) между коэффициентами исходного и приведенного уравнений, утверждение Теоремы 17 достаточно доказать для приведенных стратов. Итак, рассмотрим приведенный страт  $\mathcal{M}_{01}^3$ , т.е. страт дискриминантного множества  $\nabla_{01}$ , отвечающий за наличие корней кратности  $\geq 3$  у приведенного уравнения

$$1 + y + z_2 y^2 + z_3 y^3 + z_4 y^4 = 0.$$

В соответствии с формулой (3.7), параметризация  $\Psi_{01}(s)$  дискриминантного множества  $\nabla_{01}$  этого уравнения следующая

$$\begin{aligned} z_2 &= s_2(s_2 + 2s_3 + 3s_4)^1(-2s_2 - 3s_3 - 4s_4)^{-2} \\ z_3 &= s_3(s_2 + 2s_3 + 3s_4)^2(-2s_2 - 3s_3 - 4s_4)^{-3} \\ z_4 &= s_4(s_2 + 2s_3 + 3s_4)^3(-2s_2 - 3s_3 - 4s_4)^{-4}. \end{aligned}$$

Прямая  $L_{01}^1 \subset \mathbb{CP}^2$  ее критических точек задается уравнением  $s_2 + 3s_3 + 6s_4 = 0$ . Поэтому страт  $\mathcal{M}_{01}^3$ , определяемый сужением  $\Psi_{01}|_{L_{01}^1}$ , задается в однородных координатах  $s' = (s_3 : s_4)$  указанной прямой параметризацией

$$\begin{aligned} z_2 &= (-3s_3 - 6s_4)(-s_3 - 3s_4)^1(3s_3 + 8s_4)^{-2} \\ z_3 &= s_3(-s_3 - 3s_4)^2(3s_3 + 8s_4)^{-3} \\ z_4 &= s_4(-s_3 - 3s_4)^3(3s_3 + 8s_4)^{-4}. \end{aligned}$$

Фигурирующие здесь пять линейных функций определяют своими коэффици-

ентами матрицу

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 8 \\ -3 & -6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мономиальное отображение  $M: (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (w_3, w_4)$ , действующее по формуле

$$w_3 = z_3 z_2^{-3}, \quad w_4 = z_4 z_2^{-6},$$

преобразует параметризацию  $\mathcal{M}_{01}^3$  в отображение

$$\begin{aligned} w_3 &= s_3^1 s_4^0 (-3s_3 - 6s_4)^{-3} (-s_3 - 3s_4)^{-1} (3s_3 + 8s_4)^3 \\ w_4 &= s_3^0 s_4^1 (-3s_3 - 6s_4)^{-6} (-s_3 - 3s_4)^{-3} (3s_3 + 8s_4)^8, \end{aligned}$$

имеющее вид  $w = (Bs')^B$ . Такое отображение параметризует приведенное  $A$ -дискриминантное множество. Чтобы определить  $A$ , достаточно указать левый целочисленный аннулятор матрицы  $B$  размера  $3 \times 5$ , у которого первая строка состоит из единиц, а вектор-столбцы порождают решетку  $\mathbb{Z}^3$ . В качестве такого аннулятора можно взять

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, по Теореме Капранова (см. § 3.3)  $w = (Bs')^B$  параметризует приведенное  $A$ -дискриминантное множество уравнения

$$a_{10}y_1 + a_{01}y_2 + a_{00} + a_{31}y_1^3y_2 + a_{63}y_1^6y_2^3 = 0.$$

Соответствующее приведение этого уравнения получается фиксацией  $a_{10} = a_{01} = a_{00} = 1$  и обозначением  $a_{31} =: w_3$ ,  $a_{63} =: w_4$ .

Отметим, что здесь аннулятор  $A$  матрицы  $B$  выбирался с условием неотрицательности его элементов. В общей схеме, которой мы будем следовать, аннулятор матрицы  $B$  для данного примера представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 \end{pmatrix},$$

отличающейся от  $A$  умножением на унимодулярную  $(3 \times 3)$ -матрицу.

Следующая лемма обобщает приведенное наблюдение. В ней  $p, q, i_0, \dots, i_{j-1}$  – любая последовательность попарно различных чисел из  $\{0, 1, \dots, n\}$ , причем  $1 \leq j \leq n - 2$ .

**Лемма 3.10.** *Рассмотрим два набора переменных*

$$z = (z_i), i \neq p, q,$$

$$w = (w_k), k \neq p, q, i_0, \dots, i_{j-1}.$$

Отображение  $M : (\mathbb{C}^*)_z^{n-1} \rightarrow (\mathbb{C}^*)_w^{n-1-j}$ , определенное формулой

$$w_k = z_k \prod_{\nu=0}^{j-1} z_{i_\nu}^{-\frac{(k-p)(k-q)}{(i_\nu-p)(i_\nu-q)} \prod_{m \neq \nu} \frac{k-i_m}{i_\nu-i_m}}, \quad k \neq p, q, i_0, \dots, i_{j-1}, \quad (3.51)$$

преобразует параметризацию страта  $\mathcal{M}_{pq}^{j+2}$  к виду  $w = (Bs')^B$ , где  $B$  – рациональная  $(n+1) \times (n-1-j)$ -матрица ранга  $(n-1-j)$ , у которой сумма строк нулевая, а  $s' = (s_k)$ ,  $k \neq p, q, i_0, \dots, i_{j-1}$ .

*Доказательство.* Страт  $\mathcal{M}_{pq}^{j+2}$  параметризуется сужением отображения  $\Psi_{pq}$  на  $L_{pq}^j$ . Согласно Лемме 3.9, композиция  $M \circ \Psi_{pq}|_{L_{pq}^j}$  преобразования (3.51) с параметризацией страта  $\mathcal{M}_{pq}^{j+2}$  следующая:

$$w_k = s_k \prod_{\nu=0}^{j-1} s_{i_\nu}^{-\frac{(k-p)(k-q)}{(i_\nu-p)(i_\nu-q)} \prod_{m \neq \nu} \frac{k-i_m}{i_\nu-i_m}} \times$$

$$\begin{aligned} & \frac{k-q}{q-p} - \sum_{\nu=0}^{j-1} \frac{(k-p)(k-q)}{(q-p)(i_\nu-p)} \prod_{m \neq \nu} \frac{k-i_m}{i_\nu-i_m} & \frac{p-k}{q-p} + \sum_{\nu=0}^{j-1} \frac{(k-p)(k-q)}{(q-p)(i_\nu-q)} \prod_{m \neq \nu} \frac{k-i_m}{i_\nu-i_m} \\ & \times s_p & s_q \end{aligned}, \quad (3.52)$$

где  $s_{i_\nu}$ ,  $s_p$  и  $s_q$  выражаются через  $s'$  по формулам (3.48), (3.49) и (3.50).

Покажем, что параметризация (3.52) имеет вид  $(Bs')^B$ , т.е. что в выражении (3.52) для  $w_k$  степень каждой из линейных функций  $s_{i_\nu}$ ,  $s_p$ ,  $s_q$  равна коэффициенту функции при  $s_k$ . Для  $s_{i_\nu}$  это сразу видно из формулы (3.48). Что касается коэффициента функции  $s_p$ , то в силу (3.49) следует убедиться в равенстве двух многочленов от  $k$ :

$$\frac{k-q}{q-p} \prod_{m=0}^{j-1} \frac{i_m-k}{i_m-p} = \frac{k-q}{q-p} - \sum_{\nu=0}^{j-1} \frac{(k-p)(k-q)}{(q-p)(i_\nu-p)} \prod_{m \neq \nu} \frac{k-i_m}{i_\nu-i_m}. \quad (3.53)$$

Левый многочлен имеет степень  $j+1$ , а правый – не выше  $j+1$ . При этом каждый из  $j+1$  различных корней  $k = q, i_0, \dots, i_{j-1}$  левого многочлена является корнем правого многочлена. Действительно, при  $k = i_\sigma$  правый многочлен равен нулю:

$$\frac{i_\sigma - q}{q - p} - \sum_{\nu=0}^{j-1} \frac{(i_\sigma - p)(i_\sigma - q)}{(q - p)(i_\sigma - p)} \prod_{m \neq \nu} \frac{i_\sigma - i_m}{i_\nu - i_m} = 0,$$

(здесь слагаемое с номером  $\nu = \sigma$  равно  $\frac{(i_\sigma - q)}{(q - p)}$ , а все остальные – нулевые).

Сравнивая значения этих многочленов при  $k = p$ , делаем вывод, что они совпадают. Также доказывается аналогичное равенство для  $s_q$ .

Наличие множителя  $s_k$  в (3.52) говорит о том, что матрица  $B = (b_{jk})$ , где  $j \in [n]$ ,  $k \in [n] \setminus \{p, q, i_0, \dots, i_{j-1}\}$ , имеет единичную подматрицу размера  $n-1-j$ , состоящую из строк  $b_j = (b_{jk})$  с номерами  $j \in [n] \setminus \{p, q, i_0, \dots, i_{j-1}\}$ . Поэтому  $\text{rang } B = n - j - 1$ .

Наконец, докажем, что сумма строк матрицы  $B$  нулевая. Для этого вспомним, что  $\Psi_{pq}(s) = (B_{pq}s)^{B_{pq}}$ , где  $B_{pq}$  – матрица размера  $(n+1) \times (n-1)$  с нулевой суммой строк. Последнее означает, что  $\mathbf{1} \cdot B_{pq} = 0$ , где  $\mathbf{1}$  – вектор из  $n+1$  единиц. Из равенства  $M \circ \Psi_{pq}|_{L_{pq}^j} = (Bs')^B$  следует, что  $B = B_{pq} \cdot C$ , где

$C - (n - 1) \times (n - j - 1)$ -матрица из показателей отображения (3.51). Отсюда получаем, что  $\mathbf{1} \cdot B = (\mathbf{1} \cdot B_{pq}) \cdot C = 0$ , т.е. что сумма строк матрицы  $B$  также нулевая. Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 3.11.** *Если набор  $p, q, i_0, \dots, i_{j-1}$  можно упорядочить в последовательность, у которой начиная со второго каждое число отличается на единицу от предыдущего, то отображение (3.51) мономиальное и оно переводит  $\mathcal{M}_{pq}^{j+2}$  в приведенное  $A_{j+2}$ -дискриминантное множество.*

*Доказательство.* Вначале докажем мономиальность (3.51); это означает, что в условиях леммы показатели в выражении (3.52) при  $s_{i_\nu}, s_p, s_q$  являются целыми. Для рассмотрения случая функции  $s_p$  расположим числа  $i_0, \dots, i_{j-1}, q$  в порядке возрастания, обозначив их  $b_0 < b_1 < \dots < b_j$ . В этих обозначениях, ввиду равенства (3.53), в (3.52) степень  $s_p$  лишь знаком отличается от произведения  $\prod_{m=0}^j \frac{b_m - k}{b_m - p}$ . По условию леммы найдется такой номер  $\tau$ , что в последовательности  $b_0 < b_1 < \dots < b_{\tau-1} < p < b_\tau < \dots < b_j$  каждое число больше предыдущего на единицу. Следовательно, произведение  $\prod_{m=0}^j \frac{b_m - k}{b_m - p}$  представляется в виде произведения дробей:

$$\frac{(b_0 - k) \dots (b_{\tau-1} - k)}{(-1)^\tau \tau!} \frac{(b_\tau - k) \dots (b_j - k)}{(j + 1 - \tau)!} \quad (3.54)$$

(при  $p = 0$  вместо двух дробей будет одна). Поскольку в последнем выражении  $k < b_0$ , либо  $k > b_j$ , такое произведение дробей с точностью до знака равно произведению чисел сочетаний  $C_{|b_{\tau-1}-k|}^\tau \cdot C_{|b_j-k|}^{j+1-\tau}$ , т.е. является целым числом. Для степени  $s_q$  рассуждения аналогичные.

Теперь докажем, что в условиях доказываемой леммы степень  $s_{i_\nu}$ , т.е. выражение

$$-\frac{(k-p)(k-q)}{(i_\nu-p)(i_\nu-q)} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq \nu}}^{j-1} \frac{k-i_m}{i_\nu-i_m} \quad (3.55)$$

является целым числом. По такой же схеме для каждого  $\nu$  составим из чисел  $i_0, \dots, [i_\nu], \dots, i_{j-1}, p, q$  возрастающую последовательность  $b_0 < b_1 \dots < b_j$  и запишем (3.55) в виде произведения  $-\prod_{m=0}^j \frac{k-b_m}{i_\nu-b_m}$ . Снова образуем возрастающую последовательность  $b_0 < \dots < b_{\tau-1} < i_\nu < b_\tau < \dots < b_j$ , в которой каждое число на единицу больше предыдущего. В результате выражение (3.55) с точностью до знака приобретет вид (3.54), поэтому оно принимает целые значения.

Таким образом, по Теореме Капранова получаем, что (3.52) параметризует приведенное  $A_{j+2}$ -дискриминантное множество уравнения (3.28), где набор показателей составляет целочисленную матрицу  $A_{j+2} = \{\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^n\} \subset \mathbb{Z}^{j+1}$ , являющуюся левым аннулятором ранга  $j+1$  матрицы  $B$ . Осталось заметить, что в наших условиях отображение (3.51) мономиальное, так как его показатели совпадают с (3.55), и потому – целые. Лемма 3.11 доказана.  $\square$

Для доказательства Теоремы 17 достаточно заметить, что удовлетворяющие условию Леммы 3.11 наборы  $p, q, i_0, \dots, i_{j-1}$  существуют. Например, такими являются наборы  $0, 1, 2, \dots, j+1$ . В этом случае формулы (3.48)-(3.50) можно записать так:

$$s_m = - \sum_{i=j+2}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{j+1} \frac{i-k}{m-k} s_i, \quad m = 0, \dots, j+1.$$

Здесь произведение  $\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{j+1} \frac{i-k}{m-k}$  можно переписать в терминах биномиальных коэффициентов в следующем виде:

$$\begin{aligned} (-1)^{j-m} \frac{i(i-1) \dots (i-m+1)(i-m-1)(i-m-2) \dots (i-j-1)}{m! (j+1-m)!} &= \\ &= (-1)^{j-m} C_i^m C_{i-m-1}^{i-j-2} \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к следующему выражению для матрицы  $B$ :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{C_{j+1}^0 C_{j+2}^0}{(-1)^j} & \frac{C_{j+2}^1 C_{j+3}^0}{(-1)^j} & \cdots & \frac{C_{n-1}^{n-j-2} C_n^0}{(-1)^j} \\ \frac{C_j^0 C_{j+2}^1}{(-1)^{j+1}} & \frac{C_{j+1}^1 C_{j+3}^1}{(-1)^{j+1}} & \cdots & \frac{C_{n-2}^{n-j-2} C_n^1}{(-1)^{j+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1^0 C_{j+2}^j & C_2^1 C_{j+3}^j & \cdots & C_{n-j-1}^{n-j-2} C_n^j \\ -C_{j+2}^{j+1} & -C_{j+3}^{j+1} & \cdots & -C_n^{j+1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве ее левого аннулятора служит матрица

$$A_{j+2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{C_{j+1}^0 C_{j+2}^0}{(-1)^{j+1}} & \frac{C_{j+2}^1 C_{j+3}^0}{(-1)^{j+1}} & \cdots & \frac{C_{n-1}^{n-j-2} C_n^0}{(-1)^{j+1}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{C_j^0 C_{j+2}^1}{(-1)^j} & \frac{C_{j+1}^1 C_{j+3}^1}{(-1)^j} & \cdots & \frac{C_{n-2}^{n-j-2} C_n^1}{(-1)^j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -C_1^0 C_{j+2}^j & -C_2^1 C_{j+3}^j & \cdots & -C_{n-j-1}^{n-j-2} C_n^j \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что скалярное произведение каждой строки матрицы  $A_{j+2}$  с любым столбцом матрицы  $B$  состоит лишь из двух слагаемых, равных по абсолютной величине и с противоположными знаками.

## Глава 4.

# Формулы для особых точек общих алгебраических поверхностей

В разделе 3.4.3 было обнаружено, что существует простая явная формула (3.43) для решения общего приведенного алгебраического уравнения, суженного на дискриминантное множество уравнения. Это означает, что кратные корни алгебраического уравнения вычисляются проще, чем простые. Чтобы этот факт не казался парадоксальным, следует иметь в виду, что формула (3.43) записана в терминах параметризующей дискриминантное множество  $\nabla$  переменной  $s$ , поэтому чтобы решение записать в терминах коэффициентов уравнения, необходимо обращать параметризацию  $\nabla$ . Однако, элемент удивительности остается, поскольку на множестве гладких точек  $\nabla$  параметризация обращается в виде явной полиномиальной формулы для логарифмического отображения Гаусса дискриминантного множества, тем самым получается простая явная формула решения в радикалах (см. формулу (4.9)).

Задача нахождения сужения  $y(x) \Big|_{\nabla}$  общей алгебраической функции на дискриминантное множество  $\nabla$  равносильна поиску решения системы уравнений  $f(y) = f'(y) = 0$  как функции  $y(x)$  коэффициентов полинома  $f(y)$ . При рассмотрении полинома  $f(y_1, \dots, y_k)$  многих переменных аналогичная задача (с

заменой производной  $f$  на градиент, а  $\nabla$  – на  $A$ -дискриминантное множество  $\nabla_A$ ) сводится к поиску особых точек гиперповерхности  $f(y_1, \dots, y_k) = 0$ ; так как коэффициенты  $f$  – переменные, то такую гиперповерхность мы называем *общей*. Рассматриваемая задача равносильна поиску кратных решений полиномиального уравнения. С этой точки зрения такую задачу можно рассматривать для общих систем полиномиальных уравнений. Она соответствует нахождению особых точек 0-мерных алгебраических поверхностей.

## 4.1 Формула для особых точек общей алгебраической гиперповерхности

Пусть  $A \subset \mathbb{Z}^k$  – фиксированное конечное подмножество, порождающее  $\mathbb{Z}^k$  как группу. Рассмотрим общую гиперповерхность  $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^k$ , определенную уравнением

$$f(y_1, \dots, y_k) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha y^\alpha = 0 \quad (4.1)$$

с переменными коэффициентами  $a_\alpha$ . Наша задача – получить формулу для особых точек гиперповерхности (4.1), т.е. таких точек  $y = y(a)$ , в которых выполняются равенства

$$f(y) = \frac{\partial f}{\partial y_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0.$$

Иными словами, речь идет о формулах для критических точек полинома Лорана  $f(y)$ .

В § 3.3 отмечалось, что вместо (4.1) можно рассматривать приведенное уравнение

$$F(y_1, \dots, y_k) = 1 + \sum_{i=1}^k y_1^{\alpha_{i1}} \dots y_k^{\alpha_{ik}} + \sum_{i=1}^m w_i y_1^{\alpha_{k+i,1}} \dots y_k^{\alpha_{k+i,k}} = 0, \quad (4.2)$$

причем матрица

$$\delta := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{k1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & \dots & \alpha_{kk} \end{pmatrix}$$

является невырожденной.

Среди приведенных уравнений вида (4.2) наиболее простыми являются следующие приведения:

$$g(y_1, \dots, y_k) := 1 + y_1^{\alpha_{11}} + \dots + y_k^{\alpha_{kk}} + \sum_{i=1}^m w_i y_1^{\alpha_{k+i,1}} \dots y_k^{\alpha_{k+i,k}} = 0, \quad (4.3)$$

так называемые канонические приведенные уравнения. В настоящем параграфе мы сначала укажем решение уравнения (4.3) на приведенном  $A$ -дискриминантном множестве. Далее покажем, что уравнение (4.2) системой мономиальных замен сводится к виду (4.3), при этом аннулятор матриц  $A_F$  и  $A_g$ , составленных по показателям слагаемых, участвующих в многочленах  $F$  и  $g$ , соответственно, один и тот же. Следует отметить, что идеология сведений общих приведенных уравнений к каноническим описана в статье [5] на основе теоремы об инвариантных факторах.

Итак, по многочлену  $g(y_1, \dots, y_k)$  составим матрицу, содержащую  $N = k + m + 1$  столбцов:

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1,1} & \alpha_{k+2,1} & \dots & \alpha_{N-1,1} \\ 0 & 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 & \alpha_{k+1,2} & \alpha_{k+2,2} & \dots & \alpha_{N-1,2} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{kk} & \alpha_{k+1,k} & \alpha_{k+2,k} & \dots & \alpha_{N-1,k} \end{pmatrix}.$$

Одним из наиболее простых правых аннуляторов для  $A_g$  есть следующая мат-

рица  $B_g$  (содержащая единичную матрицу в качестве подматрицы):

$$B_g = \begin{pmatrix} -1 + \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_{k+1,j}}{\alpha_{jj}} & -1 + \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_{k+2,j}}{\alpha_{jj}} & \dots & -1 + \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_{N-1,j}}{\alpha_{jj}} \\ -\frac{\alpha_{k+1,1}}{\alpha_{11}} & -\frac{\alpha_{k+2,1}}{\alpha_{11}} & \dots & -\frac{\alpha_{N-1,1}}{\alpha_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\alpha_{k+1,k}}{\alpha_{kk}} & -\frac{\alpha_{k+2,k}}{\alpha_{kk}} & \dots & -\frac{\alpha_{N-1,k}}{\alpha_{kk}} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, несложно увидеть, что при умножении первой строки матрицы  $A_g$  на каждую из строк  $B_g$  получается нуль. Что же касается произведения остальных строк  $A_g$  на каждый из столбцов матрицы  $B_g$ , то не обращаются в нуль лишь два слагаемых, равных по модулю, но противоположных по знаку. В силу строения матрицы  $B_g$  очевидно, что ее ранг равен  $m$ .

В соответствии со строками  $B_g$  введем в рассмотрение векторы

$$b_0 = \left( -1 + \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_{k+1,j}}{\alpha_{jj}}, -1 + \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_{k+2,j}}{\alpha_{jj}}, \dots, -1 + \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_{N-1,j}}{\alpha_{jj}} \right),$$

$$b_1 = \left( -\frac{\alpha_{k+1,1}}{\alpha_{11}}, -\frac{\alpha_{k+2,1}}{\alpha_{11}}, \dots, -\frac{\alpha_{N-1,1}}{\alpha_{11}} \right), \dots,$$

$$b_k = \left( -\frac{\alpha_{k+1,k}}{\alpha_{kk}}, -\frac{\alpha_{k+2,k}}{\alpha_{kk}}, \dots, -\frac{\alpha_{N-1,k}}{\alpha_{kk}} \right).$$

Следовательно, матрица  $B_g$  задает следующее отображение  $w = (B_g s)^{B_g}$ :

$$w_i = s_i \langle b_0, s \rangle^{-1 + \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_{k+i,j}}{\alpha_{jj}}} \langle b_1, s \rangle^{-\frac{\alpha_{k+i,1}}{\alpha_{11}}} \dots \langle b_k, s \rangle^{-\frac{\alpha_{k+i,k}}{\alpha_{kk}}}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

здесь  $s = (s_1, \dots, s_m)$ . В этих обозначениях имеет место

**Предложение 4.1.** Вектор-функция  $y(s) = (y_1(s), \dots, y_k(s))$  с координатами

$$y_1(s) = \left( \frac{\langle b_1, s \rangle}{\langle b_0, s \rangle} \right)^{\frac{1}{\alpha_{11}}}, \dots, y_k(s) = \left( \frac{\langle b_k, s \rangle}{\langle b_0, s \rangle} \right)^{\frac{1}{\alpha_{kk}}}$$

является решением системы уравнений

$$g(y_1, \dots, y_k) = \frac{\partial g(y_1, \dots, y_k)}{\partial y_1} = \dots = \frac{\partial g(y_1, \dots, y_k)}{\partial y_k} = 0. \quad (4.4)$$

Тем самым в Предложении 4.1 предъясвляется параметризация решения уравнения (4.3) на приведенном  $A_g$ -дискриминантном множестве  $\tilde{\nabla}_{A_g}$ .

*Доказательство.* Справедливость Предложения проверяется подстановкой вектор функции  $y(s)$ , определенной формулой (4.4), в систему. При  $y(s) = (y_1(s), \dots, y_k(s))$ ,  $w = (B_g s)^{B_g}$  левая часть (4.3) принимает вид

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{\langle b_1, s \rangle}{\langle b_0, s \rangle} + \dots + \frac{\langle b_k, s \rangle}{\langle b_0, s \rangle} + \\ & + \sum_{i=1}^m \left( s_i \langle b_0, s \rangle^{-1 + \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_{k+i,j}}{\alpha_{jj}}} \langle b_1, s \rangle^{-\frac{\alpha_{k+i,1}}{\alpha_{11}}} \dots \langle b_k, s \rangle^{-\frac{\alpha_{k+i,k}}{\alpha_{kk}}} \right) \\ & \quad \times \left( \frac{\langle b_1, s \rangle}{\langle b_0, s \rangle} \right)^{\frac{\alpha_{k+i,1}}{\alpha_{11}}} \dots \left( \frac{\langle b_k, s \rangle}{\langle b_0, s \rangle} \right)^{\frac{\alpha_{k+i,k}}{\alpha_{kk}}} = \\ & = \frac{\langle b_0, s \rangle + \langle b_1, s \rangle + \dots + \langle b_k, s \rangle}{\langle b_0, s \rangle} + \frac{s_1 + \dots + s_m}{\langle b_0, s \rangle}. \end{aligned}$$

Но последняя сумма равна нулю в силу того, что  $\langle b_0, s \rangle + \langle b_1, s \rangle + \dots + \langle b_k, s \rangle = -(s_1 + \dots + s_m)$  (напомним, что сумма всех строк матрицы  $B_g$  равна нулю, а сама матрица  $B_g$  состоит из строк  $b_0, \dots, b_k$ , дополненных единичной матрицей).

Для частной производной  $\frac{\partial g(y_1, \dots, y_k)}{\partial y_j}$  при рассматриваемых  $y(s)$  и  $w(s)$  имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(y_1(s), \dots, y_k(s))}{\partial y_j} &= \alpha_{jj} \left( \frac{\langle b_0, s \rangle}{\langle b_j, s \rangle} \right)^{\frac{1}{\alpha_{jj}} - 1} + \left( \frac{\langle b_0, s \rangle}{\langle b_j, s \rangle} \right)^{\frac{1}{\alpha_{jj}}} \frac{1}{\langle b_0, s \rangle} \sum_{i=1}^m \alpha_{k+i,j} s_i = \\ &= \left( \frac{\langle b_0, s \rangle}{\langle b_j, s \rangle} \right)^{\frac{1}{\alpha_{jj}}} \frac{1}{\langle b_0, s \rangle} \left( \alpha_{jj} \langle b_j, s \rangle + \sum_{i=1}^m \alpha_{k+i,j} s_i \right) = 0. \end{aligned}$$

Итак, Предложение доказано.  $\square$

Теперь перейдем к уравнению (4.2). Как было сказано выше, последнее уравнение с помощью замены переменной сводится к уравнению (4.3). Для того, чтобы записать формулы замены, обозначим через  $z_i$  мономы  $y_1^{\frac{\alpha_{i1}}{|\delta|}} \dots y_k^{\frac{\alpha_{ik}}{|\delta|}}$ , где  $|\delta|$  – определитель матрицы  $\delta$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  и выразим отсюда  $y_j$ . Непосредственной подстановкой  $y_j$  в уравнения системы проверяется справедливость следующей леммы.

**Лемма 4.1.** *Решением системы*

$$z_i = y_1^{\frac{\alpha_{i1}}{|\delta|}} \dots y_k^{\frac{\alpha_{ik}}{|\delta|}}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4.5)$$

*являются*

$$y_j = \prod_{\nu=1}^k z_\nu^{\chi_{j\nu}}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (4.6)$$

где  $\chi_{j\nu}$  –  $(j, \nu)$ -элемент матрицы  $\delta^{-1}$ .

Применим Лемму 4.1 к уравнению (4.2), представив

$$y_j = \prod_{\nu=1}^k z_\nu^{(-1)^{\nu+j} M_{\nu j}},$$

где  $M_{\nu j}$  – минор, полученный из  $\delta$ , путем вычеркивания  $\nu$ -ого столбца и  $j$ -ой строки. В этом случае (4.2) можно переписать следующим образом:

$$1 + \sum_{i=1}^k z_i^{|\delta|} + \sum_{i=1}^m w_i \left( \prod_{\nu=1}^k z_\nu^{(-1)^{\nu+1} M_{\nu 1}} \right)^{\alpha_{k+i,1}} \dots \left( \prod_{\nu=1}^k z_\nu^{(-1)^{\nu+k} M_{\nu k}} \right)^{\alpha_{k+i,k}} = 0,$$

здесь переменная  $z$  связана с  $y$  по формулам (4.5)-(4.6). Приведя подобные в степенях при  $z_\nu$ , запишем последнее уравнение в форме (4.3):

$$1 + \sum_{i=1}^k z_i^{|\delta|} + \sum_{i=1}^m w_i \prod_{\nu=1}^k z_\nu^{(-1)^{\nu+1} (M_{\nu 1} \alpha_{k+i,1} - M_{\nu 2} \alpha_{k+i,2} + \dots + (-1)^{k-1} M_{\nu k} \alpha_{k+i,k})} = 0.$$

Выше мы рассматривали матрицу, полученную из  $\delta$ , с помощью замены  $\nu$ -ого столбца на столбец  $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik})^T$ . Далее будем обозначать ее  $\delta_\nu^i$ . В этих

обозначениях последнее уравнение примет вид:

$$1 + \sum_{i=1}^k z_i^{|\delta|} + \sum_{i=1}^m w_i \prod_{\nu=1}^k z_{\nu}^{|\delta^{k+i}|} = 0, \quad (4.7)$$

где  $|\delta_{\nu}^{k+i}|$  – определитель матрицы  $\delta_{\nu}^{k+i}$ . Как следует из рассуждений, сделанных в начале параграфа для уравнения такого вида, правым аннулятором матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & |\delta| & 0 & \dots & 0 & |\delta_1^{k+1}| & |\delta_1^{k+2}| & \dots & |\delta_1^{N-1}| \\ 0 & 0 & |\delta| & \dots & 0 & |\delta_2^{k+1}| & |\delta_2^{k+2}| & \dots & |\delta_2^{N-1}| \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |\delta| & |\delta_k^{k+1}| & |\delta_k^{k+2}| & \dots & |\delta_k^{N-1}| \end{pmatrix},$$

составленной по последнему многочлену, является следующая матрица  $B$ :

$$B = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{|\delta|} \sum_{j=1}^k |\delta_j^{k+1}| & -1 + \frac{1}{|\delta|} \sum_{j=1}^k |\delta_j^{k+2}| & \dots & -1 + \frac{1}{|\delta|} \sum_{j=1}^k |\delta_j^{N-1}| \\ -\frac{|\delta_1^{k+1}|}{|\delta|} & -\frac{|\delta_1^{k+2}|}{|\delta|} & \dots & -\frac{|\delta_1^{N-1}|}{|\delta|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{|\delta_k^{k+1}|}{|\delta|} & -\frac{|\delta_k^{k+2}|}{|\delta|} & \dots & -\frac{|\delta_k^{N-1}|}{|\delta|} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что  $B$  является также и правым аннулятором матрицы

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{N-1,1} \\ 0 & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{N-1,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & \dots & \alpha_{N-1,k} \end{pmatrix},$$

составленной по уравнению (4.2) (напомним, что в этом уравнении в качестве переменной участвует  $y_i$ ; также следует напомнить про равенство  $k+m = N-1$ ). Несложно увидеть, что первая строка матрицы  $A_F$  ортогональна каждому столбцу матрицы  $B$ . Что же касается остальных строк из  $A_F$ , то результат умножения строки

$$(0, \alpha_{1t}, \alpha_{2t}, \dots, \alpha_{N-1,t}), \quad 1 \leq t \leq k$$

на произвольный столбец матрицы  $B$  дает сумму

$$-\frac{1}{|\delta|}(\alpha_{1t}|\delta_1^u| + \alpha_{2t}|\delta_2^u| + \dots + \alpha_{kt}|\delta_k^u|) + \alpha_{ut}, \quad u = k+1, k+2, \dots, N-1. \quad (4.8)$$

Чтобы убедиться, что она равна нулю, достаточно рассмотреть определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ut} & \alpha_{1t} & \alpha_{2t} & \dots & \alpha_{kt} \\ \alpha_{u1} & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{k1} \\ \alpha_{u2} & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{uk} & \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix},$$

который, в силу присутствия в нем двух равных строк, обращается в нуль.

Раскладывая его по первой строке, получаем следующее равенство:

$$\alpha_{ut}|\delta| - \alpha_{1t}|\delta_1^u| - \alpha_{2t}|\delta_2^u| - \dots - \alpha_{kt}|\delta_k^u| = 0,$$

откуда и следует равенство нулю выражения (4.8). Тем самым показано, что каждая строка матрицы  $A_F$  ортогональна любому из столбцов матрицы  $B$ .

Итак, матрица  $B$  определяет векторы

$$\mathbf{b}_0 = \left( -1 + \frac{1}{|\delta|} \sum_{j=1}^k |\delta_j^{k+1}|, -1 + \frac{1}{|\delta|} \sum_{j=1}^k |\delta_j^{k+2}|, \dots, -1 + \frac{1}{|\delta|} \sum_{j=1}^k |\delta_j^{N-1}| \right),$$

$$\mathbf{b}_1 = \left( -\frac{|\delta_1^{k+1}|}{|\delta|}, -\frac{|\delta_1^{k+2}|}{|\delta|}, \dots, -\frac{|\delta_1^{N-1}|}{|\delta|} \right), \dots,$$

$$\mathbf{b}_k = \left( -\frac{|\delta_k^{k+1}|}{|\delta|}, -\frac{|\delta_k^{k+2}|}{|\delta|}, \dots, -\frac{|\delta_k^{N-1}|}{|\delta|} \right),$$

она же задает и отображение  $w = (Bs)^B$  :

$$w_i = s_i \langle \mathbf{b}_0, s \rangle^{-1 + \frac{1}{|\delta|} \sum_{j=1}^k |\delta_j^{k+i}|} \langle \mathbf{b}_1, s \rangle^{-\frac{|\delta_1^{k+i}|}{|\delta|}} \dots \langle \mathbf{b}_k, s \rangle^{-\frac{|\delta_k^{k+i}|}{|\delta|}}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь, как и выше, вектор  $s = (s_1, \dots, s_m)$ . Далее применим Предложение 4.1 к уравнению (4.7). Тогда получим, что на приведенном  $A$ -дискриминантном множестве  $\widetilde{\nabla}_A$  корень рассматриваемого уравнения имеет вид

$$z_\nu = \left( \frac{\langle \mathbf{b}_\nu, s \rangle}{\langle \mathbf{b}_0, s \rangle} \right)^{\frac{1}{|\delta|}}, \quad \nu = 1, 2, \dots, k.$$

Наконец, воспользовавшись формулой (4.6) из Леммы 4.1, связывающей уравнения (4.2) и (4.7), приходим к следующему утверждению, выражающему основной результат параграфа.

**Теорема 20.** *Вектор-функция  $y(s) = (y_1(s), \dots, y_k(s))$  с координатами*

$$y_j(s) = \prod_{\nu=1}^k \left( \frac{\langle \mathbf{b}_\nu, s \rangle}{\langle \mathbf{b}_0, s \rangle} \right)^{\chi_{j\nu}}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

где  $\chi_{j\nu}$  –  $(j, \nu)$ -ый элемент матрицы  $\delta^{-1}$ , удовлетворяет системе (4.2), т.е. параметризует набор особых точек гиперповерхности  $F(y) = 0$ .

Эта формула обобщает формулу, доказанную в разделе 3.4.3 для кратных корней уравнения (3.8). А именно, кратные корни уравнения (3.8) выражаются по формуле

$$y(s) = \left( \frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}},$$

где  $\alpha, \beta$  – целочисленные векторы, определенные по формуле (3.11).

Напомним, что логарифмическое отображение Гаусса гиперповерхности определяется в ее гладких точках по формуле

$$(x_1, \dots, x_k) \longrightarrow (x_1 \Delta'_{x_1} : \dots : x_k \Delta'_{x_k}).$$

Учитывая то, что параметризация дискриминантного множества  $\nabla$  является обращением логарифмического отображения Гаусса, получаем формулу для решения  $y(x)$  уравнения (3.8) в гладких точках  $\nabla$ :

$$y(x)\Big|_{\nabla} = \left( \frac{\langle \beta, x \odot \text{grad} \Delta \rangle}{\langle \alpha, x \odot \text{grad} \Delta \rangle} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (4.9)$$

Для того, чтобы записать формулу для кратных корней других приведенных уравнений (3.6), введем, в соответствии с параметризацией (3.7) дискриминантного множества этого уравнения,  $(n - 1)$ -мерные векторы:

$$\beta_p = \frac{1}{q - p}(-q, 1 - q, \dots [p - q] \dots [0] \dots, n - q),$$

$$\beta_q = \frac{1}{q - p}(p, p - 1, \dots [0] \dots [p - q] \dots, p - n).$$

С помощью несложных преобразований убеждаемся, что кратные корни уравнения (3.6) допускают параметризацию

$$z(s) = \left( \frac{\langle \beta_q, s \rangle}{\langle \beta_p, s \rangle} \right)^{\frac{1}{q-p}}, \quad s = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{C}\mathbb{P}_{n-2}.$$

Заметим, что при  $q - p = 1$  указанные корни находятся однозначно.

## 4.2 Кратные решения общей системы из $n$ полиномиальных уравнений от $n$ неизвестных

### 4.2.1 О дискриминантном множестве системы $n$ полиномов Лорана от $n$ переменных

В данном разделе излагаются некоторые результаты статьи [5], которые применяются в следующем разделе для получения формул критических точек полиномиального отображения. Рассмотрим полиномиальное отображение

$$P = (P_1, \dots, P_n) : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}^n,$$

где  $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C} \setminus 0)^n$  — комплексный алгебраический тор, а  $P_i$  — полиномы Лорана, т.е. полиномы от переменных  $y_1, y_1^{-1}, \dots, y_n, y_n^{-1}$ . Будем считать, что множества  $A^{(i)}$  показателей мономов в  $P_i$  фиксированы, а все коэффициенты переменные. В таком случае будем говорить, что  $P$  — *общее полиномиальное отображение из  $\mathbb{T}^n$  в  $\mathbb{C}^n$* .

Для таких отображений обозначим через  $\nabla^\circ$  множество всех коэффициентов, при которых  $P$  имеет в  $\mathbb{T}^n$  кратные нули, т.е. нули, в которых якобиан  $P$  равен нулю.

**Определение 4.1.** *Дискриминантным множеством  $\nabla$  отображения  $P$  называется замыкание множества  $\nabla^\circ$  в пространстве коэффициентов.*

Таким образом, здесь для нас представляет интерес система полиномиальных уравнений вида

$$\sum_{\lambda \in A^{(i)}} a_\lambda^{(i)} y^\lambda = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.10)$$

с неизвестными  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{T}^n$  и переменными коэффициентами  $a_\lambda^{(i)}$ , где  $A^{(i)} \subset \mathbb{Z}^n$  — фиксированные конечные подмножества,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $y^\lambda = y_1^{\lambda_1} \dots y_n^{\lambda_n}$ .

При  $n = 1$ , когда  $A^{(1)} = \{0, 1, \dots, m\}$ , система (4.10) представляет собой общее алгебраическое уравнение степени  $m$

$$a_m y^m + \dots + a_1 y + a_0 = 0. \quad (4.11)$$

Выше отмечалось (§ 1.3), что функция  $y(a)$  обладает свойством двойной однородности. Это значит, что достаточно рассматривать *приведенное уравнение* вида

$$y^m + a_{m-1} y^{m-1} + \dots + a_1 y - 1 = 0, \quad (4.12)$$

либо любое уравнение, полученное из (4.11) фиксацией какой-то пары коэффициентов.

Что же касается случая  $n > 1$ , то подобно рассмотренному случаю для  $n = 1$  удобно рассматривать приведенную систему

$$y^{\omega^{(i)}} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} x_{\lambda}^{(i)} y^{\lambda} - 1 = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.13)$$

где матрица из столбцов выделенных показателей  $(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}) = \omega$  невырожденная, а  $\Lambda^{(i)} := A^{(i)} \setminus \{\omega^{(i)}, 0\}$ . Не ограничивая общности, будем считать, что в (4.13) каждое уравнение имеет мономы с переменными коэффициентами, т.е. все множества  $\Lambda^{(i)}$  непустые (в противном случае задача нахождения дискриминанта сводится к подсистеме из  $k < n$  уравнений с  $k$  неизвестными). В статье [5] показано, что, как правило, систему (4.10) можно привести к виду (4.13).

Далее обозначим через  $\Lambda$  – дизъюнктивное объединение множеств  $\Lambda_i$ , пусть  $\#\Lambda = N$  – число коэффициентов в системе (4.13). Множество  $\Lambda$  можно интерпретировать как матрицу

$$\Lambda = \left( \Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)} \right) = (\lambda^1, \dots, \lambda^N), \quad (4.14)$$

столбцами которой являются векторы  $\lambda^k = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$  из показателей мономов системы (4.13). Здесь имеется ввиду, что блок  $\Lambda^{(i)}$  матрицы  $\Lambda$  соответствует  $i$ -му уравнению системы (4.13), а нумерация столбцов  $\lambda^k$  внутри каждого из блоков  $\Lambda^{(i)}$  произвольная, но фиксированная.

Обозначим матрицу из вектор-столбцов  $\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}$  в (4.13) через  $\omega$ . Введем две  $(n \times N)$ -матрицы

$$\Phi := \omega^{-1} \Lambda, \quad \tilde{\Phi} = \Phi - \chi,$$

где  $\chi$  – матрица,  $i$ -я строка которой представляет характеристическую функцию подмножества  $\Lambda^{(i)} \subset \Lambda$ , т.е. элементы этой строки равны 1 на местах  $\lambda \in \Lambda^{(i)}$  и 0 – на всех остальных местах  $\lambda \in \Lambda$ . Строки матриц  $\Phi$  и  $\tilde{\Phi}$  обозначим  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  и  $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$ .

Рассмотрим два экземпляра пространства  $\mathbb{C}^N$ : одно из них  $\mathbb{C}_x^\Lambda$  переменных  $x = (x_\lambda)$ , а другое  $\mathbb{C}_s^\Lambda$  переменных  $s = (s_\lambda)$ , причем  $\mathbb{C}_s^\Lambda$  будем трактовать пространством однородных координат для  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$ . Определим алгебраическое (многозначное) отображение

$$\Delta : \mathbb{C}\mathbb{P}_s^{N-1} \rightarrow \mathbb{C}_x^N = \mathbb{C}_{x^{(1)}}^{\Lambda^{(1)}} \times \cdots \times \mathbb{C}_{x^{(n)}}^{\Lambda^{(n)}}$$

из проективного пространства в пространство коэффициентов  $x = (x_\lambda)$  системы (4.13), полагая

$$x_\lambda^{(i)} = -\frac{s_\lambda^{(i)}}{\langle \tilde{\varphi}_i, s \rangle} \prod_{k=1}^n \left( \frac{\langle \tilde{\varphi}_k, s \rangle}{\langle \varphi_k, s \rangle} \right)^{\varphi_{k\lambda}}, \quad \lambda \in \Lambda^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.15)$$

где  $\varphi_{k\lambda}$  – координата с номером  $\lambda \in \Lambda^{(i)} \subset \Lambda$  строки  $\varphi_k$ .

Поясним, как выбираются ветви радикалов дробно-линейных функций в (4.15). Введем для этих функций обозначения:

$$W_k = \frac{\langle \tilde{\varphi}_k, s \rangle}{\langle \varphi_k, s \rangle}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Имеет место равенство  $\omega^{-1} = BD_m^{-1}A$ , где  $A$  и  $B$  – унимодулярные матрицы, а  $D_m$  – диагональная матрица с целыми положительными числами  $m_1, \dots, m_n$  на диагонали. Поэтому в обозначениях  $W = (W_1, \dots, W_n)$ ,  $W^B = V$  произведения в (4.15) можно записать в виде

$$\prod_{k=1}^n \left( \frac{\langle \tilde{\varphi}_k, s \rangle}{\langle \varphi_k, s \rangle} \right)^{\varphi_{k\lambda}} = W^{\varphi_\lambda} = (W^B)^{D_m^{-1}A\lambda} = \left( V_1^{1/m_1}, \dots, V_n^{1/m_n} \right)^{A\lambda},$$

где  $\varphi_\lambda$  – вектор-столбец с координатами  $\varphi_{k\lambda}$ . Для всех  $\lambda \in \Lambda$  векторы  $A\lambda$  целочисленные. Выбирая для каждого  $k$  все  $m_k$  значений радикала  $V_k^{1/m_k}$ , мы получим все требуемые ветви для  $\Delta$ . Формально их  $m_1 \dots m_n = |\det \omega|$  штук, но некоторые из этих ветвей могут повторяться.

Говорят, что дискриминантное множество  $\nabla$  системы (4.13) зависит от всех групп коэффициентов  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ , если  $\nabla$  не факторизуется в виде  $\nabla' \times \mathbb{C}^{\Lambda^{(k)}}$ , где  $\nabla'$  – алгебраическое подмножество в  $\mathbb{C}^{\Lambda^{(1)}} \times \dots [k] \dots \times \mathbb{C}^{\Lambda^{(n)}}$ .

Если множество показателей полинома Лорана  $Q(y_1, \dots, y_n)$  не лежит в  $k$ -мерной плоскости, то говорят, что  $Q(y_1, \dots, y_n)$  по-существу зависит не менее чем от  $k + 1$  переменных. В противном случае, т.е. когда все показатели лежат в некоторой  $k$ -мерной плоскости, существует мономиальная замена  $y = t^\theta$  с невырожденной рациональной (=целочисленной)  $(n \times n)$ -матрицей  $\theta$ , преобразующая  $Q(y)$  к виду  $Q(t^\theta) = (\text{моном}) \times \tilde{Q}(t)$ , где  $\tilde{Q}$  зависит не более чем от  $k$  переменных  $t_j$ .

**Теорема 21** ([5]). 1) Если в (4.13) каждая подсистема из  $k \leq n - 1$  уравнений по-существу зависит не менее чем от  $k + 1$  переменных (в частности, если многогранник Ньютона каждого уравнения в (4.13)  $n$ -мерный), то дискриминантное множество  $\nabla$  системы (4.13) параметризуется по формуле (4.15).

2) Если  $\nabla$  имеет неприводимые компоненты, зависящие от всех групп переменных коэффициентов  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ , то объединение всех таких компонент также параметризуется по формуле (4.15).

Если неприводимая компонента  $\nabla$  зависит менее чем от  $n$  групп коэффициентов  $x^{(i_1)}, \dots, x^{(i_k)}$ , то она параметризуется формулой, построенной аналогично (4.15) по подсистеме уравнений с номерами  $i_1, \dots, i_k$ .

**Теорема 22** ([5]). Если дискриминантное множество  $\nabla$  системы (4.13) является неприводимой гиперповерхностью, зависящей от всех групп переменных, то его параметризация (4.15) является обращением логарифмического отображения Гаусса:  $\Delta(s) = \gamma^{-1}(s)$ .

Для классического дискриминанта этот результат отмечался в [97]. Следуя [97], параметризацию  $\nabla$  в виде  $\gamma^{-1}(s)$  назовем параметризацией Горна-Капранова, учитывая результаты статей [82], [85].

Одним из достаточных условий для того, чтобы дискриминантное множество  $\nabla$  системы (4.13) являлось гиперповерхностью, является следующее

**Предложение 4.2** ([5]). *Если все векторы  $\varphi_i, \tilde{\varphi}_i, i = 1, \dots, n$  имеют ненулевые координаты, то образ  $\nabla$  отображения (4.15) есть гиперповерхность.*

#### 4.2.2 Формулы для кратных решений общей системы из $n$ полиномиальных уравнений от $n$ неизвестных

Рассмотрим общую приведенную систему (4.13)  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными, где  $\omega$  – невырожденная матрица. Пусть  $\Lambda$  есть дизъюнктное объединение множеств  $\Lambda^{(i)}$  и  $N := \#\Lambda$ , т.е. число переменных коэффициентов системы (4.13). Множество коэффициентов системы есть векторное пространство  $\mathbb{C}^N \cong \mathbb{C}^\Lambda$ , в котором координаты точек  $x = x_\lambda$  индексируются элементами  $\lambda \in \Lambda$ . Координаты, соответствующие  $i$ -ому уравнению системы, индексируются  $x^i$ .

При нахождении решения системы (4.13) важную роль играет *линеаризация* этой системы, подробно изученная в статье [5]. Для этого в пространстве  $\mathbb{C}^\Lambda \times \mathbb{T}^n$  с координатами  $x = (x_\lambda^{(i)})$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  используется замена переменной  $(\xi, W) \rightarrow (x, y)$  в  $\mathbb{C}^\Lambda \times T^n$ :

$$x_\lambda^{(i)} = \xi_\lambda^{(i)} W^{\omega^{-1}\lambda} W_i^{-1}, \quad \lambda = (\lambda_k) \in \Lambda^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$y = W^{-\omega^{-1}},$$

где  $W = (W_1 \dots, W_n)$ ,  $\xi = (\xi_\lambda^{(i)})$ . В результате система (4.13) преобразуется в систему линейных уравнений

$$W_i = 1 + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} \xi_\lambda^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.16)$$

Далее, пусть  $\Phi$  и  $\tilde{\Phi}$  – две матрицы:

$$\Phi = \omega^{-1}\Lambda, \quad \tilde{\Phi} = \Phi - \chi,$$

где  $\chi$  – матрица,  $i$ -ая строка которой есть характеристическая функция подмножества  $\Lambda^{(i)} \subset \Lambda$ . При замене  $\xi \rightarrow x$  в пространстве коэффициентов  $\mathbb{C}^\Lambda$ , определенной формулой

$$x_\lambda^{(i)} = \xi_\lambda^{(i)} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \sum_{\tau \in \Lambda^{(k)}} \xi_\tau^{(k)} \right)^{\varphi_{k\lambda} - \delta_k^i}, \quad \lambda = (\lambda_k) \in \Lambda^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.17)$$

(здесь  $\delta_k^i$  – символ Кронекера) решение  $y(x)$  системы (4.13) принимает вид

$$\tilde{y}(\xi) = y(x(\xi)) = (W(\xi))^{-\omega^{-1}}, \quad (4.18)$$

где  $W(\xi) = (W_1(\xi^{(1)}), \dots, W_n(\xi^{(n)}))$  – вектор, составленный из линейных функций (4.16). При замене (4.17) коэффициентов системы (4.13) решение  $y(x)$  переходит в решение  $\tilde{y}(\xi)$ , аналитическое в области

$$G = \left\{ \xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}) \in \mathbb{C}^\Lambda : \prod_{k=1}^n \left( 1 + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(k)}} \xi_\lambda^{(k)} \right) \neq 0 \right\}.$$

Множество критических точек линеаризации (4.17) есть нулевое множество ее якобиана

$$\frac{\partial(x)}{\partial(\xi)} = \prod_{i=1}^n W_i(\xi)^{|\varphi_i| - (\#\Lambda^{(i)}) - 1} \times \det \left( \delta_j^k + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(k)}} \varphi_{j\lambda} \xi_\lambda \right)_{j,k=1, \dots, n}.$$

Якобиан обращается в нуль на гиперповерхности

$$L = \{ \xi : P_\Phi(\xi) = 0 \}$$

с определяющим полиномом

$$P_\Phi(\xi) = \det \left( \delta_j^k + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(k)}} \varphi_{j\lambda} \xi_\lambda \right)_{j,k=1, \dots, n}.$$

В предположении, что все строки  $\varphi_i$  матрицы  $\Phi$  ненулевые, отображение  $\mathbb{C}\mathbb{P}_s^{N-1} \rightarrow \mathbb{C}^\Lambda$ , определенное дробно-линейными функциями

$$\xi_\lambda = -\frac{s_\lambda}{\langle \varphi_j, s \rangle}, \quad \lambda \in \Lambda^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.19)$$

параметризует  $L$  (см. [5]). Кроме того, замыкание множества критических значений  $x(L \cap G)$  линеаризации  $x(\xi)$  совпадает с дискриминантным множеством системы (4.13):

$$\overline{x(L \cap G)} = \nabla.$$

Принимая во внимание вышесказанное, можем параметризовать множество критических точек системы (4.13), подставив параметризацию (4.19) в представление решений (4.18). Сначала подставляя (4.19) в (4.16), получим

$$W_i = \frac{\langle \tilde{\varphi}_i, s \rangle}{\langle \varphi_i, s \rangle},$$

где  $\varphi_i, \tilde{\varphi}_i$  – строки матриц  $\Phi, \tilde{\Phi}$  соответственно. Далее применяя (4.18), получаем следующую параметризацию решения  $y(s)$ :

$$y_j(s) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\langle \tilde{\varphi}_i, s \rangle}{\langle \varphi_i, s \rangle} \right)^{-\hat{\omega}_i^j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.20)$$

где  $\hat{\omega}^j$  – строки матрицы  $\hat{\omega} := \omega^{-1}$ . Таким образом, доказана

**Теорема 23.** *Сужение на дискриминантное множество решения  $y = (y_1(x), \dots, y_n(x))$  общей приведенной системы уравнений (4.13) выражается формулой (4.20).*

## Заключение

Приведем **основные результаты**, полученные в диссертационной работе.

1. Найдена новая формула решения общего алгебраического уравнения в виде ветвящегося интеграла с широкой областью сходимости.
2. Описана монодромия общей алгебраической функции в окрестности области сходимости представляющего ее гипергеометрического ряда Меллина. Построен новый, так называемый *логарифмический* метод аналитического продолжения алгебраических функций.
3. Исследованы сингулярные страты каспидального типа для классического дискриминантного множества.
4. Доказано, что мономиальными преобразованиями сингулярные страты каспидального типа переводятся в  $A$ -дискриминантные множества. Тем самым, обнаружена иерархия между сингулярными стратами семейства всех  $A$ -дискриминантных множеств.
5. Получены явные формулы для особых точек общих алгебраических гиперповерхностей.

## Литература

- [1] Александров, А.Г. Индекс дифференциальных форм на полных пересечениях/ А.Г. Александров// Функци. анализ и его прил. — 2015. — Т. 49, вып. 1. — С. 1–17.
- [2] Александров, А.Г. Кратный вычет и весовая фильтрация на логарифмическом комплексе де Рама/ А.Г. Александров// Функци. анализ и его прил. — 2013. — Т. 47, вып. 4. — С. 1–17.
- [3] Антипова, И.А. Выражение суперпозиции общих алгебраических функций через гипергеометрические ряды/ И.А. Антипова// Сиб. матем. журн. — 2003. — Т. 44, № 5. — С. 972–980.
- [4] Антипова, И.А. Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений/ И.А. Антипова// Матем. сб. — 2007. — Т. 198, № 4. — С. 3–20.
- [5] Антипова, И.А. Дискриминантное множество системы  $n$  полиномов Лорана от  $n$  переменных/ И.А. Антипова, А.К. Цих// Изв. РАН. Сер. Матем. — 2012. — Т. 76, № 5, — С. 29–56.
- [6] Антипова, И.А. О множестве сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решения тетраномимального алгебраического уравнения/ И.А. Антипова, Т.В. Зыкова// Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. — 2010. — Т. 3, № 4. — С. 475–486.

- [7] Арнольд, В.И. Кольцо когомологий группы крашенных кос/ В.И. Арнольд// Матем. заметки. — 1969. — Т. 5, вып. 2. — С. 227–231.
- [8] Арнольд, В.И. О косах алгебраических функций и когомологиях ласточкиных хвостов/ В.И. Арнольд// УМН. — 1968. — Т. 23, вып. 4(142). — С. 247–248.
- [9] Арнольд, В.И. Топологические инварианты алгебраических функций. II/ В.И. Арнольд// Функц. анализ и его прил. — 1970. — Т. 4, вып. 2. — С. 1–9.
- [10] Арнольд, В.И. Особенности. I. Локальная и глобальная теория/ В.И. Арнольд, В.А. Васильев, В.В. Горюнов, О.В. Ляшко// Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 1988. — Т. 6. — С. 5–250.
- [11] Атанов, А.В. Аффинно-однородные поверхности типа  $(0, 0)$  в пространстве  $\mathbb{C}^3$ / А.В. Атанов, А.В. Лобода// Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, Вып. 2. — С. 309–313.
- [12] Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции/ Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М.: Наука, 1973. — Т. 1.
- [13] Бушуева, Н.А. Об амебах алгебраических множеств высших коразмерностей/ Н.А. Бушуева, А.К. Цих// Тр. МИАН. — 2012. — Т. 279. — С. 59–71.
- [14] Васильев, В.А. Ветвящиеся интегралы/ В.А. Васильев. — М.: МЦНМО, 2000. — 430 с.
- [15] Васильев, В.А. Топология дополнения к дискриминантам/ В.А. Васильев. — М.: Фазис, 1997. — 538 с.
- [16] Винберг, Э.Б. Курс алгебры/ Э.Б. Винберг. — М.: Факториал Пресс, 2001. — 544 с.

- [17] Витушкин, А.Г. 13-я проблема Гильберта и смежные вопросы/ А.Г. Витушкин// УМН. 2004. — Т. 59, вып. 1(355). — С. 11–21.
- [18] Витушкин, А.Г. Доказательство существования аналитических функций многих переменных, не представимых линейными суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций меньшего числа переменных/ А.Г. Витушкин// ДАН СССР. — 1964. — Т. 156, № 6. — С. 1258–1261.
- [19] Витушкин, А.Г. К тринадцатой проблеме Гильберта/ А.Г. Витушкин// ДАН СССР. — 1954. — Т. 96, № 4. — С. 701–704.
- [20] Витушкин, А.Г. Полвека - как один день/ А.Г. Витушкин// УМН. — 2002. Т. 57, вып. 1(343). — С 191–206.
- [21] Гельфанд, И.М. Гипергеометрические функции и торические многообразия/ И.М. Гельфанд, А.В. Зелевинский, М.М. Капранов// Функц. анализ и его прилож. — 1989. — Т. 23, №2. — С. 12–26.
- [22] Дикенштейн, А. Алгебраичность решений системы уравнений Меллина и ее монодромия/ А. Дикенштейн, Т.М. Садыков// ДАН. — 2007. — Т. 412, №4. — С. 448–450.
- [23] Дикенштейн, А. Базисы в пространстве решений системы уравнений Меллина/ А. Дикенштейн, Т.М. Садыков// Матем. сб. — 2007. — Т. 198, №9. — С. 59–80.
- [24] Евграфов, М.А. Ряды и интегральные представления/ М.А. Евграфов// Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 1986. — Т. 13. — С. 5–92.

- [25] Жданов О.Н. Исследование кратных интегралов Меллина-Барнса с помощью многомерных вычетов/ О.Н. Жданов, А.К. Цих// Сиб. мат. журн. — 1998. — Т. 39, №2. — С. 282–298.
- [26] Залгаллер, В.А. Теория огибающих/ В.А. Залгаллер. — М.: Наука, 1975. — 106 с.
- [27] Клейн, Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени/ Ф. Клейн// М.: Наука, 1989. — 336 с.
- [28] Колмогоров, А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных/ А.Н. Колмогоров// ДАН СССР. — 1956. — Т. 108, № 2. — С. 179–182.
- [29] Колмогоров, А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций одного переменного и сложения/ А.Н. Колмогоров// ДАН СССР. — 1957. — Т. 114, № 5. — С. 953–956.
- [30] Куликов, В.Р. О решениях и формулах Варинга для систем  $n$  алгебраических уравнений от  $n$  неизвестных/ В.Р. Куликов, В.А. Степаненко// Алгебра и анализ. — 2014. — Т. 26, Вып 5. — С. 200–231.
- [31] Куликов, В.С. Фундаментальная группа дополнения к гиперповерхности в  $\mathbb{C}^n$ / В.С. Куликов// Изв. РАН., Серия матем. — 1991. — Т. 55, №2. — С. 407–428.
- [32] Кытманов, А.М. Интегральные представления и вычеты (по работам красноярской школы). В кн.: Комплексный анализ в современной ма-

- тематике. К 80-летию со дня рождения Б.В. Шабата/ А.М. Кытманов, А.К. Цих. — М.: Фазис, 2001. — С. 198–216.
- [33] Лебедев, Н.Н. Специальные функции и их приложения/ Н.Н. Лебедев. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит. 1963. — 358 с.
- [34] Лобода, А.В. Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности в  $\mathbb{C}^2$ / А.В. Лобода// Функц. анализ и его прил. — 2013. — Т. 47, Вып. 2. — С. 38–54.
- [35] Лобода, А.В. О полном списке аффинно-однородных поверхностей  $(\varepsilon, 0)$ -типов в пространстве  $\mathbb{C}^3$ / А.В. Лобода, А.В. Шиповская// Изв. вузов. Матем. — 2015. — №6. — С. 75–81.
- [36] Переломов, А.М. Гипергеометрические решения некоторых алгебраических уравнений/А.М. Переломов// Теоретическая и математическая физика. — 2004. — Т. 140, №1 — С. 3–13.
- [37] Прасолов, В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии/ В.В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2004. — 352 с.
- [38] Прасолов, В.В. Многочлены/ В.В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2014. — 336 с.
- [39] Прасолов, В.В. Эллиптические функции и алгебраические уравнения/ В.В. Прасолов, Ю.П. Соловьев — М.: Факториал, 1997. — 288 с.
- [40] Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции/ А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М.: Наука, 1983. — 688 с.
- [41] Садыков, Т.М. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных/ Т.М. Садыков, А.К. Цих. — М.: Наука, 2014. — 408 с.

- [42] Семушева, А.Ю. Об областях сходимости гипергеометрических рядов многих переменных/ А.Ю. Семушева// Сиб. матем. журн. 2006. — Т. 47, №4. — С. 888–897.
- [43] Семушева, А.Ю. Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений/ А.Ю. Семушева, А.К. Цих// В кн.: Комплексный анализ и дифференциальные операторы (к 150-летию С.В. Ковалевской). — КрасГУ. — 2000. — С. 134–146.
- [44] Семушева, А.Ю. Области сходимости гипергеометрических рядов многих комплексных переменных/ А.Ю. Семушева, А.К. Цих// Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. — 2009. — Т. 2, №2. — С. 221–229.
- [45] Степаненко, В.А. О решении системы  $n$  алгебраических уравнений от  $n$  неизвестных с помощью гипергеометрических функций/ В.А. Степаненко// Вестник КрасГУ. Серия физ.-мат. науки. — 2003. — № 1. — С. 35–48.
- [46] Умемура, Х. Решения алгебраических уравнений с помощью тэта-констант (Приложение в книге Мамфорд Д. «Лекции о тэта-функциях»)/ Х. Умемура. — М.: Мир, 1988. С. 362 - 370 (Оригинальное издание: Mumford, D. Tata lectures on Theta 1, 2/ D. Mumford. — Progress in Math. — Vol. 28, 43. Birkhäuser, 1983, 1984).
- [47] Хованский, А.Г. О разрешимости и неразрешимости уравнений в явном виде/ А.Г. Хованский// УМН. — 2004. — Т. 59, Вып. 4(358). — С. 69–146.
- [48] Хованский, А.Г. О суперпозициях голоморфных функций с радикалами/ А.Г. Хованский// УМН. — 1971. — Т. 26, № 3. — С. 213–214.
- [49] Хованский, А.Г. Теория Галуа, накрытия и римановы поверхности/ А.Г. Хованский. — М.: МЦНМО, 2007. — 96 с.

- [50] Хованский, А.Г. Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде/ А.Г. Хованский. — М.: МЦНМО, 2008. — 296 с.
- [51] Цих, А.К. Многомерные вычеты и их применения/ А.К. Цих. — Новосибирск: Наука, 1988. — 241 с.
- [52] Чеботарев, Н.Г. К проблеме резольвент/ Н.Г. Чеботарев// Учен. зап. Казан. гос. ун-та. — 1954. — Т. 114, № 2. — С. 189–193.
- [53] Чеботарев, Н.Г. Теория алгебраических функций/ Н.Г. Чеботарев. — М.: ЛКИ, 2007. — 396 с.
- [54] Чеботарев, Н.Г. Теория Галуа/ Н.Г. Чеботарев. — М.: Объединенное научн.-техн. изд. НКТП СССР, 1936 — 155 с.
- [55] Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ/ Б.В. Шабат — Ч. 2. М.: Наука, 1976, — 400 с.
- [56] Alekseev, V.B. Abel's theorem in problems and solutions based on the lectures of professor V.I. Arnold/ V.B. Alekseev. — Kluwer Academic Publishers, 2006. — 269 p.
- [57] Bârsan, V. Physical relevance of the Passare-Tsikh solution of the principal quintic equation/ V. Bârsan, G. Nemnes// Journ. of Adv. Research in Phys. — 2011. — № 1. — P. 1 – 6.
- [58] Belardinelli, G. Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébriques générales/ G. Belardinelli. — Memorial des Sciences Mathématiques CXLV. Gauthier-Villars. — Paris. — 1960.

- [59] Beloshapka, V. Classification of homogeneous CR-manifolds in dimension 4/ V.K. Beloshapka, I.G. Kossovskiy// Journ. of Math. Analysis and Applications (Elsevier Inc.). — 2011. — № 374. — P. 655–672.
- [60] Beukers, F. Algebraic  $A$ -hypergeometric functions/ F. Beukers// Invent. Math. — 2010. — V. 180, № 3. — P. 589–610.
- [61] Beukers, F. Monodromy of  $A$ -hypergeometric functions/ F. Beukers. — <http://arxiv.org/abs/1101.0493v1>. — 2011.
- [62] Beukers, F. Monodromy for the hypergeometric function  ${}_nF_{n-1}$ / F. Beukers, G. Heckman// Invent. Math. 1989. — V. 95. — P. 325–354.
- [63] Bieberbach, L. Bemerkung zum dreizehnten Hilbertschen Problem/ L. Bieberbach// J. reine angew. Math. — 1931. — V. 165. — P. 89–92.
- [64] Birkeland, R. Les équations algébriques et les fonctions hypergéométriques/ R. Birkeland// Ark. Norske Vid.-Akad. Oslo. — 1927. — V. 8. — P. 1–23.
- [65] Birkeland, R. Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen/ R. Birkeland// Math. Ztschr. — 1927. — V. 26. — P. 566–578.
- [66] Bod, E. Algebraicity of the Appell-Lauricella and Horn hypergeometric functions/ E. Bod// Differ. equations. — 2012. — V. 252, № 1. — P. 541–566.
- [67] Bring, E.S. Meletamata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum. — Uppsala. — 1786. — V. 107.
- [68] Clausen, T. Ueber die Fälle, wenn die Reihe von der Form  $y = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta \cdot \beta + 1}{\gamma \cdot \gamma + 1} x^2 + \text{etc.}$  ein quadrat von der Form  $z = 1 + \frac{\alpha'}{1} \cdot \frac{\beta'}{\gamma'} \cdot \frac{\delta'}{\epsilon'} x + \frac{\alpha' \cdot \alpha' + 1}{1 \cdot 2} \cdot$

$\frac{\beta' \cdot \beta' + 1}{\gamma' \cdot \gamma' + 1} \cdot \frac{\delta' \cdot \delta' + 1}{\epsilon' \cdot \epsilon' + 1} x^2 + \text{etc.}$  hat/ T. Clausen// Journ. Reine Ang. Math. — 1828. — V. 3. — P. 89–91.

- [69] Dwork, B. Generalized hypergeometric functions/ B. Dwork. Oxford University Press. — 1990.
- [70] Esterov, A. The Discriminant of a System of Equations/ A. Esterov// Adv. Math. — 2013. — V. 245. — P. 534–572.
- [71] Evyatar, A. On polynomial equations/ A. Evyatar// Israel J. Math. — 1971. — V. 10. — P. 321–326.
- [72] Forsberg, M. Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas/ M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh// Adv. in Math. — 2000. — V. 151. — P. 45–70.
- [73] Gelfand, I. Discriminants, resultants and multidimensional determinants/ I. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky — Birkhäuser: Boston, 1994. — 523 p.
- [74] Gelfand, I. Generalized Euler integrals and  $A$ -hypergeometric functions/ I. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky// Adv. Math. — 1990. — V. 84. — P. 255–271.
- [75] Glasser, M.L. Hypergeometric functions and the trinomial equation/ M.L. Glasser// Journ. of Computational and Applied Math. — 2000. — V. 118, № 1-2. — P. 169–173.
- [76] Gorodentsev, A. On Associated Discriminants of Polynomials in One Variable/ A. Gorodentsev, B. Shapiro// BeitrSge Algebra Geom. — 1998. — V. 39, № 1. — P. 53–74.

- [77] Hermite Ch. Sur la resolution de l'équation du cinquième degré/  
Ch. Hermite// C. R. Acad. Sci. — 1858. — V. 46. — P. 508–515.
- [78] Hermite, Ch. Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de  
l'équation du cinquième degré/ Ch. Hermite — Paris. — 1858. — V. 107.
- [79] Hilbert, D. Mathematische Probleme/ D. Hilbert// Archiv der Mathematik  
und Physik. — 1900. — V. 3, № 1. — P. 44–63, 213–237.
- [80] Hilbert, D. Über die Gleichung neunten Grades/ D. Hilbert// Math. Ann. —  
1927. — V. 97. — P. 243–250.
- [81] Hilbert, D. Über die Singularitäten der Diskriminantenfläche/ D. Hilbert//  
Mathem. Annalen. — 1887. — V. 30. — P. 437–441.
- [82] Horn, J. Über die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und  
dreier Veränderlichen/ J. Horn// Math. Ann. — 1889. — V. 34. — P. 544–  
600.
- [83] Horn, J. Über hypergeometrische Functionen zweier Veränderlichen/  
J. Horn// Math. Ann. — 1940. — V. 117. — P. 384–414.
- [84] Huh, J. Discriminants, Horn uniformization, and varieties with maximum  
likelihood degree one/ J. Huh. — arxiv: 13.01.2732v2 [math AG], 16 Jan.  
2013.
- [85] Kapranov, M.M. A characterization of A-discriminantal hypersurfaces in terms  
of the logarithmic Gauss map/ M.M. Kapranov// Math. Ann. — 1991. —  
V. 290. — P. 277–285.

- [86] Katz, G. How Tangents Solve Algebraic Equations, or a Remarkable Geometry of Discriminant Varieties/ G. Katz// Expo. Math. — 2003. — V. 21. — P. 219–261.
- [87] Klein, F. Vorlesungen über die hypergeometrische Function/ F. Klein. — Berlin: J. Springer, 1933.
- [88] Kronecker, L. Sur la resolution de l'équation du cinquième degré/ L. Kronecker// C. R. Acad. Sci. — 1858. — V. 46. — P. 1150–1152.
- [89] Kronecker, L. Über die Discriminante algebraischer Functionen einer Variablen/ L. Kronecker// Journ. reine angew. Math. — 1881. — V. 91. — P. 301–334.
- [90] Maier, R. The uniformization of certain algebraic hypergeometric functions/ R. Maier// Adv. in Math. — 2014. — V. 253. — P. 86–138.
- [91] Mayr, K. Über die Auflösung algebraischer Gleichungssysteme durch hypergeometrische Functionen/ K. Mayr// Monatshefte für Mathematik und Physik. — 1937. — V. 45. — P 280–313.
- [92] Mellin, H.J. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma/ H.J. Mellin// C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. — 1921. — V. 172. — P. 658–661.
- [93] Mikhalkin, G. Real algebraic curves, the moment map and amoebas/ G. Mikhalkin // Ann. of Math. —2000. — V. 151, № 2. — P. 309–326.
- [94] Ostrowski, A. Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen/ A. Ostrowski// Math. J. — 1920. — V. 8. — P. 241–298.

- [95] Pachter, L. Algebraic statistics for computational biology/ L. Pachter, B. Sturmfels. — Cambridge university press, 2005. — 434 p.
- [96] Passare, M. Singularities of hypergeometric functions in several variables/ M. Passare, T. Sadykov, A. Tsikh// Compositio Math. — 2005. V. 141. — P. 787–810.
- [97] Passare, M. Algebraic equations and hypergeometric series M. Passare, A. Tsikh. In the book «The legacy of Niels Henrik Abel». Springer: Berlin-Heidelberg-New York, 2004. — P. 653–672.
- [98] Passare, M. Amoebas: their spines and their contours/ M. Passare, A. Tsikh// Contemporary Math. — 2005. — V. 377. — P. 275–288.
- [99] Passare, M. A multidimensional Jordan residue lemma with an application to Mellin–Barnes integrals/ M. Passare, A. Tsikh, O. Zhdanov// Aspects of Math. E. — 1994. — V. 26. — P. 233–242.
- [100] Sofo, A. Generalized hypergeometric function identities at argument  $+/-1$ / A. Sofo// Integral transforms and special func. — 2014. — V. 25, № 11. — P. 909–921.
- [101] Sturmfels, B. Open problems in algebraic statistics/ B.Sturmfels// Emerging applications of algebraic Geometry. IMA volumes in mathematics and its applications. Springer, New-York. — 2009. — V. 149. — P. 351–364.
- [102] Sturmfels, B. Solving algebraic equations in terms of A-hypergeometric series/ B.Sturmfels// Discrete Math. — 2000. — V. 210. — P. 171–181.
- [103] Sylvester, J. On the so-called Tschirnhausen transformation/ J. Sylvester// J. reine angew. Math. — 1886. — V. 100. — P. 465–487.

- [104] Tanabe, S. On Horn-Kapranov uniformisation of the discriminantal loci/  
S. Tanabe// Advanced Studies in Pure Math. — 2007. — V. 46. — P. 223–249.
- [105] Tschebotaröw, N. Über ein algebraisches Problem von Herrn Hilbert/  
N. Tschebotaröw// Math. Ann. — 1931. — V. 104. — P. 456–471; V. 105.  
— P. 240–255.
- [106] Tschirnhaus. Nova methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data  
aequatione/ Tschirnhaus// Acta eruditorum. — 1683. — V. 2. — Leipzig. —  
P. 204–207.
- [107] Vitushkin, A.G. On representation of functions by means of superpositions  
and related topics/ A.G Vitushkin// Enseign. Math. (2). — 1977. — V. 23. —  
P. 255–320.
- [108] Weyman, J. On the Hilbert functions of multiplicity ideals/ J. Weyman// J.  
of Algebra. — 1993. — V. 161. — P. 358–369.
- [109] Wiman, A. Über die Anwendung der Tschirnhausen-Transformation auf die  
Reduktion algebraischer Gleichungen/A. Wiman// Nova Acta Soc. Sci. Upsal.  
—1928. — P. 3–8.

## Работы автора по теме диссертации

- [110] Михалкин, Е.Н. Некоторые аспекты преобразования Чирнгауза/ Е.Н. Михалкин// Вестник КрасГУ. Физ.-мат. науки. — 2004. — Вып. 1. — С. 86–92.
- [111] Михалкин, Е.Н. Решение триномиальных алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций/ Е.Н. Михалкин// Вестник КрасГУ. Физ.-мат. науки. — 2005. — Вып. 1 — С. 136–139.
- [112] Михалкин, Е.Н. О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций/ Е.Н. Михалкин// Сиб. матем. журн. 2006. — Т. 47, № 2. — С. 365–371.
- [113] Михалкин, Е.Н. О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов по контуру/ Е.Н. Михалкин// Вестник КрасГУ. Физ.-мат. науки. — 2006. — Вып. 1. — С. 98–101.
- [114] Михалкин, Е.Н. О решении уравнения пятой степени/ Е.Н. Михалкин// Изв. вузов. Математика. 2009. — № 6. — С. 20–30.
- [115] Михалкин, Е.Н. О разрезах, примыкающих к дискриминантному множеству алгебраического уравнения/ Е.Н. Михалкин// Научные ведомости БелГУ. Серия: Матем. Физика. — 2010. — № 5(76). — Вып. 18. — С. 119–126.
- [116] Михалкин, Е.Н. Некоторые формулы для решений триномиальных и тетраномиальных алгебраических уравнений/ Е.Н. Михалкин// Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. — 2012. — Т. 5. — Вып. 2. — С. 230–238.

- [117] Антипова, И.А. Аналитические продолжения общей алгебраической функции с помощью рядов Пуизо/ И.А. Антипова, Е.Н. Михалкин// Тр. МИАН. — 2012. — Т. 279. — С. 9–19.
- [118] Михалкин, Е.Н. Сингулярные страты каспидального типа для классического дискриминанта/ Е.Н. Михалкин, А.К. Цих// Мат. сб. — 2015.— Т. 206, № 2. — С. 119–148.
- [119] Михалкин, Е.Н. О монодромии общей алгебраической функции/ Е.Н. Михалкин// Сиб. матем. журн. — 2015. — Т. 56, № 2. — С. 409–419.
- [120] Mikhalkin, E.N. Amoebas of cuspidal strata for classical discriminant/ E.N. Mikhalkin, A.V. Shchuplev, A.K. Tsikh// В кн. «Complex Analysis and Geometry». — Springer: Japan. — 2015. — V. 144. — P. 257–272.
- [121] Mikhalkin E.N. On the structure of the classical discriminant/ E.N. Mikhalkin, A.K. Tsikh// Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. — 2015. — Т. 8. — Вып. 4. — С. 435–446.