На правах рукописи

МАЛЬЦЕВ Николай Владимирович

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПОДКОЛЕЦ В МАТРИЧНЫХ КОЛЬЦАХ И РЕГУЛЯРНОСТЬ ПРИСОЕДИНЕННОЙ ГРУППЫ В РАДИКАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2011

Диссертация выполнена на кафедре алгебры и математической логики Института математики Сибирского федерального университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент КОЛЕСНИКОВ Сергей Геннадьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, доцент БАРДАКОВ Валерий Георгиевич,
	доктор физико-математических наук, доцент ПОПОВ Алексей Михайлович
Ведущая организация:	Национальный исследовательский Томский государственный университет

Защита состоится 23 декабря 2011 года в 15.30 на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан "   " ноября 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Бушуева Н.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ [1]

Актуальность темы. Дифференцирование алгебр Ли $L(R)$ и Йордана $J(R)$, ассоциированных с ассоциативной алгеброй R, называют соответственно лиевым или йордановым дифференцированием алгебры R. Аналогично их определяют для ассоциативного кольца R, а также лиевы и йордановы изоморфизмы и автоморфизмы R.

Лиевы и йордановы дифференцирования и изоморфизмы алгебр и колец имеют давний интерес. Хорошо известно, что для нильпотентного дифференцирования δ алгебры Ли над полем нулевой характеристики $exp\,(\delta)$ есть автоморфизм алгебры. Такие автоморфизмы простых комплексных алгебр Ли являются ключевыми при построении групп Шевалле над произвольным полем и даже ассоциативно-коммутативным кольцом. Согласно классической теореме И.Н. Херстейна [21], йорданово дифференцирование первичного кольца характеристики $\neq 2$ всегда является дифференцированием самого кольца. Теорему для йордановых изоморфизмов см. [22], [23]. Развитие исследований отражают W.E. Baxter, W.S. Martindale, A.B. Михалёв, K.I. Beidar ([8], [13]) и др.

Для простых и полупервичных колец аналоги теорем Херстейна изучали J. M. Cusack, M. Brešar, M.A. Chebotar, P. Šemrl, J. Vukman ([11], [16], [14]). Для колец и алгебр (с ненулевым нильпотентным идеалом) $NT(n, R)$ нильтреугольных и $T(n, R)$ треугольных $n \times n$-матриц с различными ограничениями на кольцо коэффициентов лиевы и йордановы дифференцирования изучали A.H.A. Driss, Y. Cao, L. Ben Yakoub, S. Ou, D. Wang, R. Yao,

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00717).

J.H. Chun, J.W. Park ([19], [28], [17]) и, соответственно (случай $T(n, R)$), S.P. Coelho, C.P. Milies, D. Benkovič, S. Jondrup ([15], [24],[10] и др.).

N.M. Ghosseiri [20] изучал более общее, чем $T(n, R)$, параболическое (то есть содержащее $T(n, R)$) подкольцо полного матричного кольца $M(n, R)$. Главный пример получается здесь следующим образом. Обозначим через e_{ij} матричные единицы. Набор $I = \{I_{ij}\}$ идеалов кольца R с условием $I_{ij}I_{jk} \subseteq I_{ik}$, для любых i, j, k из множества $\Gamma_n = \{1, \ldots, n\}$ называют ковром идеалов степени n [4]. Очевидно, он определяет подкольцо $\sum_{i,j \in \Gamma_n} I_{ij} e_{ij}$, называемое – при условии параболичности $I_{ij} = R, i \geq j$, – ковровым параболическим.

Когда R есть кольцо без 2-кручения, N.M. Ghosseiri доказал разложимость йорданового дифференцирования коврового параболического подкольца в сумму дифференцирования и антидифференцирования. В.М. Левчук и О.В. Радченко установили аналог теоремы Херстейна для дифференцирований кольца $NT(\Gamma, R)$ нильтреугольных финитарных Γ-матриц $||a_{ij}||_{i,j \in \Gamma}$ над любым ассоциативным кольцом R с единицей, где Γ — произвольное линейно упорядоченное множество [26], [5]. Естественно возникает

Задача (A). *Описать лиевы и йордановы дифференцирования коврового параболического подкольца кольца финитарных* Γ*-матриц над произвольным ассоциативным кольцом с единицей.*

Далее. Автоморфизмы радикального кольца

$$K_n(R, J) = NT(n, R) + M(n, J)$$

изучались в [25]. Известно, что когда R есть кольцо $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ классов вычетов целых чисел по модулю p^m (p – простое число, $m \geqslant 1$), присоединенная группа кольца $K_n(R,J)$ изоморфна силовской p-подгруппе группы $GL_n(R)$. Подобное представление использовалось для силовских p-подгрупп классических групп и групп Шевалле над кольцом $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ при исследовании их центральных рядов и автоморфизмов (см. [1, Вопросы 6.34 и 12.42]). Вопрос 8.3 Верфрица из Коуровской тетради [1] и его аналог о регулярности указанных силовских подгрупп изучали А.В. Ягжев [7] и С.Г. Колесников [2], [3]. В диссертации исследуется

Задача (Б). *Перечислить регулярные силовские p-подгруппы классических линейных групп или, более общо, групп Шевалле нормальных типов над кольцом $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$.*

Целью диссертации является решение задачи (Б) для симплектических и ортогональных групп четной размерности при малых m и полное решение задачи (А).

Методы исследования являются классическими для общей теории групп и колец. Применяются также специальные методы теории групп и колец матриц.

Научная новизна и практическая ценность. Все основные результаты диссертации являются новыми. Диссертация носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях p-групп и дифференцированиях колец, при чтении спецкурсов.

Апробация диссертации. Основные результаты представлены на Международной алгебраической конференции (Красноярск, 2007), Всероссийской конференции по математике и механике (Томск, 2008), Международной алгебраической конференции "Алгебра, логика и приложения"

(Красноярск, 2010), Международной конференции "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2011).

Публикации.Основные результаты диссертации опубликованы в работах [30]—[36], включая публикации в журналах из перечня ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация включает введение, две главы и список литературы. Нумерация всех утверждений в диссертации сквозная. Текст диссертации изложен на 67 страницах. Список литературы включает 48 наименования.

Содержание диссертации

Основными результатами диссертации являются следующие:

– доказано, что всякое дифференцирование коврового параболического подкольца S кольца финитарных матриц над ассоциативным кольцом с единицей есть сумма локально внутреннего и индуцированного дифференцирований;

– показано, что всякое йорданово и лиево дифференцирование S являются суммой обычного дифференцирования и явно указанных экстремальных дифференцирований (получено полное решение задачи А));

– выявлены для $m = 1, 2$ все значения p и n, при которых силовские p-подгруппы симплектической $Sp_{2n}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ и ортогональной $O^+_{2n}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ групп нерегулярны (частичное решение задачи Б)).

Первая глава посвящена описанию дифференцирований ковровых параболических подколец колец финитарных матриц над ассоциативным кольцом с единицей и ассоциированных с ним колец Ли и Йордана. В разделе 1.1 даются определения финитарных и слабофинитарных матриц, параболического и коврового кольца, индуцированного и локально внутреннего дифференцирований.

Основной в разделе 1.2 является

Теорема 1. *Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей и Γ — произвольная цепь, $|\Gamma| \geqslant 2$. Тогда любое дифференцирование коврового параболического подкольца $S_I(R)$ есть сумма локально внутреннего и индуцированного дифференцирований.*

Теорема 1 опубликована в [34]. Для конечной цепи Γ она была доказана в [20].

Для описания йордановых и лиевых дифференцирований в разделе 1.3 выделяются следующие экстремальные дифференцирования. Пусть $\Gamma = \{1, \ldots, n\}$, $n \geqslant 2$, и совокупность $\{\varphi_i \mid i \in \Gamma\}$ аддитивных отображений кольца R в центр $Z(R)$ удовлетворяет условию $\varphi_i(xy) = \varphi_j(yx)$ для любых $i, j \in \Gamma$ и любых $x \in I_{ij}$, $y \in I_{ji}$. Отображение Φ, которое произвольной матрице $A = (a_{ij}) \in S_I(R)$ ставит в соответствие матрицу

$$\Phi(A) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(a_{ii})E.$$

является лиевым дифференцированием кольца $S_I(R)$. Если дополнительно потребовать, чтобы $2\varphi_i(R) = 0$ для всех $i \in \Gamma$, то Φ будет йордановым дифференцированием $S_I(R)$ (тривиальным, когда $2 \in R^*$). Обозначим их через Φ_I и Φ_J соответственно.

Определим также отображение Π кольца $S_I(R)$ в себя, положив

$$\Pi(A) = \pi(a_{1n})e_{n1}, \quad A = (a_{ij}) \in S_I(R),$$

где $\pi : I_{1n} \longrightarrow R$ — аддитивное отображение, удовлетворяющее условиям:

1) $\pi(xy) = \pm y\pi(x)$, $\pi(yx) = \pm\pi(x)y$, $x \in I_{1n}$, $y \in R$; $\pi(xy \pm yx) = 0$, $x, y \in I_{1n}$;

2) $\pi(I_{1n}I_{in}) = \pi(I_{1i}I_{1n}) = \pi(I_{1i}I_{in}) = 0$, $1 < i < n$.

Отображение Π будет йордановым дифференцированием подкольца $S_I(R)$, если в 1) выбран знак "$+$", и лиевым, когда выбран знак "$-$".

Поставленную выше задачу А) решают следующие две теоремы, доказанные в разделе 1.4.

Теорема 2. *Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, Γ – произвольная конечная цепь, $|\Gamma| > 2$. Тогда произвольное йорданово (лиево) дифференцирование коврового параболического подкольца $S_I(R)$ является суммой обычного дифференцирования и дифференцирований Δ и Φ_J (соответственно Δ и Φ_Λ).*

Теорема 3. *Всякое йорданово и лиево дифференцирование коврового параболического подкольца $S_I(R)$ является обычным дифференцированием, если цепь Γ бесконечна и R – ассоциативное кольцо с единицей.*

Теоремы 2 и 3 доказаны совместно с С.Г. Колесниковым и опубликованы в работах [32]–[34].

Глава 2 посвящена перенесению результатов, полученных А.В. Ягжевым [7] и С.Г. Колесниковым [2], [3] при решении вопроса 8.3 Верфрица из

Коуровской тетради, на симплектические группы и ортогональные группы чётной размерности.

В разделе 2.1 приводится определение регулярной p-группы, строятся силовские p-подгруппы симплектической $Sp_{2n}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ и ортогональной $O^+_{2n}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ групп, и доказывается ряд вспомогательных теоретико-числовых результатов.

Основные результаты второй главы заключены в следующих двух теоремах, которые доказываются в разделах 2.2 и 2.3 соответсвенно.

Теорема 4. *Силовская p-подгруппа симплектической группы $Sp_{2n}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ нерегулярна при любом $m \geqslant 1$, если $p < 2n$, и при любом $m \geqslant 2$, когда $p < 4n$.*

Теорема 5. *Силовская p-подгруппа ортогональной группы $O^+_{2n}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ нерегулярна при любом $m \geqslant 1$, если $p < 2n-2$, и при любом $m \geqslant 2$, когда $p < 4n-4$.*

Теоремы 4 и 5 дают полное решение задачи Б) для силовских p-подгрупп указанных групп в случае, когда $m = 1, 2$.

Результаты главы 2 были анонсированы в [36] и опубликованы в [35]. Теорема 4 доказана в нераздельном соавторстве с С.Г. Колесниковым. Доказательство теоремы 5 принадлежит автору.

Автор благодарен своим научным руководителям В.М. Левчуку и С.Г. Колесникову за постановку задач и внимание к работе.

Список литературы

[1] *Коуровская тетрадь.* Нерешённые вопросы теории групп, 16-е издание, 2006// ред. Мазуров В.Д., Хухро Е.И., http://www.math.nsc.ru/

[2] *Колесников С.Г.*, О регулярности силовских p-подгрупп групп $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$// Иссл. по матем. анализу и алгебре, Т.3 (2001), 117–124.

[3] *Колесников С.Г.*, О регулярных силовских p-подгруппах групп Шевалле над кольцом $\mathbb{Z}_{p^m}$// Сиб. матем. журнал, Т.46, № 6 (2006), 1289–1295.

[4] *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.,* Основы теории групп, *М.: Наука.*, 1982.

[5] *Радченко О. В.* О двух теоремах для групп лиева типа и ассоциированных колец //Дисс. на соискание ученой степени к.ф.-м.н., Красноярск:СФУ, 2009.

[6] *Левчук В. М.* Некоторые локально нильпотентные матричные кольца, Мат. Заметки, Т.42, №5), (1987), 631 - 541.

[7] *Ягжев А.В.*, О регулярности силовских p-подгрупп полных линейных групп над кольцами вычетов// Матем. заметки, Т.56, № 6 (1994), 106–116.

[8] *Baxter W.E. and Martindale III W.S.,* Jordan homomorphisms of semiprime rings, J. Algebra, 56 (1979), 457 - 471.

[9] *Benkart G. M. and Osborn J. M.,* Derivations and automorphisms of non associative matrix algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 263, (1981), 411 - 430. .

[10] *Bencovic D.* Jordan derivations and antiderivations on triangular matrices, Linear Algebra Appl, 397, (2005), 235-244 .

[11] *Bresar M., Vukman J.,* Jordan derivations on prime rings, // Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 37, (1988), 321-322.

[12] *Beidar K.I., Chebotar M.A.* On Lie derivations of Lie ideals of prime algebras // Israel J. Math, Vol. 123, (2001), 131-148.

[13] *Beidar K.I., Martindale III W. S., Mikhalev A. V.* Rings with generalized identites.- Marcel Dekver. inc. (1996).

[14] *Brešar M., Chebotar M.A., Šemrl P.* On derivations of prime rings // Comm. Algebra, Vol. 27, №7 (1999), 3129-3135.

[15] *Coelho S. P. and Milies C. P.,* Derivations of upper triangular matrix rings // Linear Alg. Appl., 187 (1993), 263-267.

[16] *Cusack J. M.* Jordan derivations on rings, Proc. Amer. Math. Soc, Vol.53, №2, (1975), 321-324 .

[17] *Chun J. H., Park J.W.* Derivations on subrings of matrix rings, Bull. Korean Math. Soc, 43,(2006), 635-644 .

[18] *Cheung W.*, Lie derivations of triangular algebras // Linear Multilinear Algebra, Vol. 51, № 3, (2003), 299-310.

[19] *Driss A.H.A., Cao Y., Ben Yakoub L.* A note on derivations of strictly upper triangular matrices over rings // JP J. Algebra Number Theory Appl, Vol. 4, № 1, (2004), 89-102.

[20] *Ghosseiri N. M.* Jordan derivations of some classes of matrix rings, Taiwanese Journal of Mathematics, 11(1),(2007), 51-62.

[21] *Herstein I. N,* Jordan derivations of prime rings, Proc. Amer. Math. Soc, 8,(1957) 1104 - 1110.

[22] *Herstein I.N.* Jordan homomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc, Vol. 81 (1956), 331-351.

[23] *Herstein I.N.* Topics in Ring Theory, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1969.

[24] *Jondrup S.*, Automorphism and derivations of triangular matrix //Linear Alg. Appl., 22 (1995), 205–215.

[25] *Levchuk V.M., Kuzucuoglu F.* The automorphism group of certain radical matrix rings, Jour. of Algebra, 243 (2001) 473-485.

[26] *Levchuk V.M., Radchenko O. V.* Derivations of the locally nilpotent matrix rings, Jour. of Algebra and Its Appl, 9(5), (2010), 717-724.

[27] *Martindale III W.S.* Lie derivations of primitive rings // Michigan J. Math, Vol. 11, (1964), 183-187.

[28] *Ou S., Wang D., Yao R.* Derivations of the Lie algebra of strictly upper triangular matrices over a commutative ring, Linear Algebra Appl, 424, (2007), 378-383 .

[29] *Zhang J.,Yu W.* Jordan derivations of triangular algebras, Linear Algebra Appl, 419, (2006), 251-255 .

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[30] *Мальцев Н.В.* Кольцо слабо финитарных матриц.// Межд. конф. "Алгебра и её приложения": Красноярск, (2007), с. 91.

[31] *Мальцев Н.В.* Финитарные кольца нильтреугольных матриц. // Всеросс. конф. по математике и механике, Томск:ТГУ, (2008), с. 54.

[32] *Мальцев Н.В.* Дифференцирования кольца финитарных треугольных матриц и ассоциированных колец Ли и Йордана // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. Красноярск:СФУ, Т. 2, №3, (2009), 319-326.

[33] *Колесников С. Г., Мальцев Н.В.* Дифференцирования матричных колец, содержащих подкольцо треугольных матриц. // Межд. конф. "Алгебра, логика и приложения": Красноярск, (2010), с. 52

[34] *Колесников С. Г., Мальцев Н.В.* Дифференцирования матричных колец, содержащих подкольцо треугольных матриц. // Известия вузов. Математика. Казань:КФУ, № 11, (2011), 23-33.

[35] *Колесников С. Г., Мальцев Н. В.* О регулярности силовских p-подгрупп симплектических и ортогональных групп над кольцом $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. Красноярск:СФУ, Т.4, № 4, (2011), 489-497.

[36] *Колесников С. Г., Мальцев Н. В.* О регулярности силовских p-подгрупп симплектических и ортогональных групп над кольцом $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ // Межд. конф. "Мальцевские чтения – 2011, Новосибирск: ИМ СО РАН, (2011), с.47.