На правах рукописи

Макосий Алексей Иванович

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ИНВОЛЮЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2011

Работа выполнена в *Институте вычислительного моделирования Сибирского отделения РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК*

Научный руководитель:	*доктор физико-математических наук, доцент Тимофеенко Алексей Викторович*
Официальные оппоненты:	*доктор физико-математических наук, профессор Егорычев Георгий Петрович кандидат физико-математических наук Зюбин Сергей Александрович*
Ведущая организация:	*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск*

Защита состоится 4 марта 2011 г. в 15.30 на заседании диссертационного совета *Д 212.099.02* в *Сибирском федеральном университете*, расположенном по адресу: *660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.*

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке *Сибирского федерального университета.*

Автореферат разослан 28 января 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета *Бушуева Н.А.*

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации.

Многие задачи теории групп и ее приложений сводятся к проблеме нахождения множества порождающих элементов, удовлетворяющих ряду определенных свойств. Для конечных простых групп и близких к ним наибольший интерес вызывают порождающие множества минимальной мощности, в которых особую роль играют инволюции.

Всякая конечная простая неабелева группа содержит инволюции и порождается любым классом сопряженных инволюций. Естественно возникает вопрос: каково минимальное число инволюций (необязательно сопряженных), порождающих конечную простую неабелеву группу? К 90-м годам прошлого века стало известно, что тремя инволюциями порождена каждая конечная простая неабелева группа, исключая группу $U_3(3)$ [1].

С другой стороны, были описаны группы, порожденные тремя инволюциями, порядки произведений каждых двух из которых невелики. Например, если эти порядки равны 2, 3, 5, то соответствующая группа является либо знакопеременной группой A_5, либо ее инволютивным расширением. Несколько лет назад было выяснено [2–7] какие конечные простые неабелевы группы порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Такие тройки инволюций, если они существуют в группе, называются далее *мазуровскими тройками инволюций* этой *группы.*

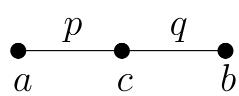
Я. Н. Нужин [2–6] доказал, что в некоторых линейных группах размерностей, не превосходящих 4, и в знакопеременных группах A_6, A_7, A_8 мазуровских троек инволюций не существует, а в других знакопеременных группах и простых группах лиева типа указал явно по мазуровской тройке. Ясно, что если (i, j, k) — мазуровская тройка инволюций, причем $ij = ji$, то тройки инволюций вида (ij, i, k) и (ij, j, k) также являются мазуровскими.

В работе [7] показано, что среди спорадических групп, только группы Матье M_{11}, M_{22}, M_{23} и группа Маклафлина McL не обладают мазуровскими тройками инволюций. Вместе с тем, несколько ранее отсутствие мазуровских троек инволюций в этих группах было показано в работе [8], положившей начало циклу работ по следующей задаче:

B1. (А. В. Тимофеенко). *Указать алгоритмы поиска мазуровских троек инволюций в конечных простых группах и создать электронный атлас таких троек.*

Если (i, j, k) — мазуровская тройка инволюций конечной простой группы G и $|ij| = 2, |ik| = p, |jk| = q$, то определим $C_2(G)$ как множество всех таких упорядоченных пар чисел (p, q). Мы не различаем две мазуровские тройки инволюций, если соответствующие числа p и q равны.

Группу типа Коксетера со следующим графом Коксетера при $p, q \geq 3$,



Д. Докович предложил называть $TC(p, q)$-группой. Вопрос, какие конечные простые неабелевы группы являются $TC(p, q)$-группами, равносилен вопросу о существовании мазуровских троек инволюций в конечных простых группах. В работе [8] поставлен более сильный вопрос.

B2. (Я. Н. Нужин). *Какие конечные простые группы являются $TC(p, q)$-группами при фиксированных p и q?*

Особый интерес представляют частные случаи для малых p и q, а именно, когда $(p, q) = (4, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 6)$. Известно, что линейная группа $L_2(11)$ является $TC(5, 5)$-группой и $TC(5, 6)$-группой, а знакопеременная группа A_5 — $TC(5, 5)$-группой. Известно [9] также, что если $(p, q) \in \{(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 4)\}$, то $TC(p, q)$-группа не проста. Построив (под)множество

$C_2(G)$, мы получаем ответ на вопрос о принадлежности группы G классу $TC(p, q)$.

Если группа порождена тремя инволюциями i, j, k, то, очевидно, что произведение элементов $ijkkji = 1$, а если $ij = ji$, то единице равно произведение пяти инволюций (ij — одна из них), порождающих эту группу. И тогда возникает следующий вопрос («Коуровская тетрадь», вопрос 14.69):

В3. (Я. Н. Нужин). *Для каждой конечной простой неабелевой группы найти минимум числа порождающих инволюций, удовлетворяющих дополнительному условию, в каждом из следующих случаев.*

1) Произведение порождающих инволюций равно 1.

2) (Malle-Saxl-Weigel) Все порождающие инволюции сопряжены.

3) (Malle-Saxl-Weigel) Выполняются одновременно свойства 1) и 2).

4) Все порождающие инволюции сопряжены и две из них перестановочны.

С точки зрения строения порождающего множества конечной простой группы нужно выделить гипотезу Дж. Томпсона, занесенную В. Д. Мазуровым в «Коуровскую тетрадь» как вопрос 9.24.

В4. (Дж. Томпсон). *Гипотеза: всякая конечная простая неабелева группа G представима в виде $G = CC$, где C — некоторый класс сопряженных элементов группы G.*

Возможности вычислительных методов были эффективно использованы в данной работе при изучении парных силовских пересечений в конечных почти простых группах. Важным инструментом в такого рода исследованиях является параметр $l_p(G)$. Пусть G — конечная группа с силовской p-подгруппой P и условием $O_p(G) = 1$, где $O_p(G)$ обозначает наибольшую нормальную p-подгруппу группы P. Если $X = \{P^g \mid P^g \cap P = 1, g \in G\}$, то, очевидно, что подгруппа P действует сопряжениями на множестве X. Через $l_p(G)$ обозначим число орбит при этом действии.

B5. (В. И. Зенков). *Чему равно значение $l_2(Aut(G))$ для групп Шевалле малых рангов над полем порядка не превосходящего 9?*

Как заметил В. И. Зенков изучение групп над полями порядков не более 9 является базисным при рассмотрении общего случая. Он же предложил автору использовать компьютерные вычисления для решения данного вопроса.

Цель диссертации. Целью диссертационной работы является построение новых порождающих множеств с некоторыми условиями, создание геометрических интерпретаций соответствующих групп и вычисление ряда параметров порождающих и связанных с ними множеств в контексте вопросов B1—B5.

Основные результаты. Основные результаты диссертации связаны с решением вопросов B1, B2, B5 и состоят в следующем:

– указан явный вид некоторых мазуровских троек инволюций спорадической группы Бэби B;

– создан комбинаторный алгоритм поиска мазуровских троек инволюций в группе, позволяющий, с точностью до сопряженности, указать все такие тройки. Этот алгоритм реализован для последовательного и параллельного варианта компьютерных вычислений;

– получено точное значение, либо нижняя оценка числа орбит при действии силовской 2-подгруппы сопряжениями на множестве силовских 2-подгрупп, тривиально пересекающихся с ней в группах автоморфизмов ряда групп лиева типа.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Диссертационная работа носит теоретический характер.

Методы исследования. Основным инструментом изучения групп в представляемой работе являются компьютерные вычисления с помощью системы компьютерной алгебры *GAP* [10]. Применяются методы параллельного программирования. Специфика инструментария позволяет конструктивно отвечать на поставленные вопросы, что весьма важно для приложений.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные результаты могут быть использованы в теории групп и ее приложениях. Практическая значимость диссертации обусловлена тем, что созданные алгоритмы могут быть легко интегрированы в систему компьютерной алгебры *GAP*, а результаты посредством создания электронного атласа доступны для прикладных исследований.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Международной конференции по математике и механике, посвященной 125-летию ТГУ и 55-летию ММФ (Томск, 2003 г.), Всероссийской научно-технической конференции «Параллельные вычисления в задачах математической физики» (Ростов, 2004 г.), Межрегиональной школе-семинаре «Распределенные и кластерные вычисления» (Красноярск, 2004 и 2005 гг.), Международной алгебраической конференции по теории групп (Екатеринбург, 2005 г.), посвященной 100-летию со дня рождения П. Г. Конторовича и 70-летию Л. Н. Шеврина, Международном российско-китайском семинаре «Алгебра и логика» (Иркутск, 2007 г.), Международной алгебраической конференции, посвященной 80-летию со дня рождения А.И. Кострикина (Нальчик, 2009 г.), Международной конференции «Алгебра, логика и приложения» (Красноярск, 2010 г.), Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2009 и 2010 гг.), Красноярском алгебраическом семинаре.

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [M1-M15], в том числе в статье [M10], входящей в перечень ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, приложения и списка литературы (43 наименования). Нумерация теорем, лемм, следствий и примеров включает последовательно номер главы, параграфа и порядковый номер в параграфе. Объем диссертации 83 страницы.

Содержание работы

Первая глава состоит из пяти параграфов и посвящена вопросам B1—B3, связанными с задачей построения порождающих множеств инволюций для конечных простых групп. Показано, что группа $U_3(3)$ порождается четырьмя инволюциями и получены все, с точностью до изоморфизма их графов Коксетера, такие четверки инволюций.

Указан алгоритм поиска мазуровских троек инволюций в конечной простой группе и с его помощью построены все, с точностью до порядков пар неперестановочных инволюций, мазуровские тройки инволюций знакопеременных групп $A_n, 12 \leqslant n \leqslant 16$. Следующая теорема исправляет неточность работы [2].

Теорема 1.2.1. *Знакопеременная группа* $A_{4m}, m \geqslant 3$, *порождается тремя инволюциями* i, j, k, *две из которых перестановочны, причем в качестве таких инволюций можно взять подстановки:*
$i = (1,2)(3,4)...(n-5, n-4)(n-3, n)(n-2, n-1)$,
$j = (5,6)(7,8)...(n-3, n-2)(n-1, n)$,
$k = (2,3)(4,5)...(n-4, n-3), n = 4m$.

С использованием подгруппового строения построено подмножество мазуровских троек инволюций спорадической группы Бэби B.

Пусть a, b — указанные в электронном атласе конечных групп [11] порождающие элементы спорадической группы Бэби B,

$c = (ab)^{-13}(abababb)^{10}(ab)^{13}$, $d = b^{(abb)^{17}}cb^{(abb)^{17}}c(bb)^{(abb)^{17}}, e = cd, f = cd^2$,

$K = \{c,\ df^2e^2f^3ef^3e^3fe^2fe^2fe^4fe^2fef^2c,\ e^2f^2e^2fefe^2fe^2f^5ef^3efefe^4f^2efe^4fe,\ fe^4fef^2ef^5ef^2efef^2e^2f^2ef^3efe^3f^2e^2f^2e^2f^3ef^4e,\ df^2e^2f^3ef^3e^2fe^4fef^2efe^2f^3e^3f^2e^2fef^2efe^2f,\ f^3efe^2f^2defef^3efe^2f^2e,\ df^2e^2fefe^2fe^5fe^2fef^3ef^3efe^2f^3e^3f^3efef^4,\ e^2fefe^2fe^5fe^2fef^3ef^2efe^2fe^2fefef^4ef^5,\ d^2f^2e^2f^3ef^3e^4(fe)^3f^2efe^2f^2(ef)^4ef^2e^2f^2e^2f^3ef,\ d^2f^3e^3fe^3f^2ef^3ef^2ef^4e^2f^2ef^2e^2\}$.

Теорема 1.2.4. *Если a, b — указанные в электронном атласе конечных групп порождающие элементы спорадической группы Бэби B, то тройка инволюций (i, j, k), где $i = a$, $j = \big((ababbababababbabababbababbabb)^6\big)^{babbabbababb}$ или $j = \big((babababbababbababababbababbabbabb)^{12}\big)^{ababbababab}$, для всех $k \in K$ является мазуровской тройкой инволюций этой группы.*

Найденные мазуровские тройки инволюций позволяют указывать новые определяющие соотношения для группы. Так спорадическая группа Янко J_1 является группой типа Коксетера со следующими определяющими соотношениями: $J_1 = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^2, (ac)^3, (bc)^7, (abc)^{19}, (bcbca)^{15}\rangle$.

В третьем параграфе указан алгоритм и его компьютерная реализация построения гамильтоновых циклов в графе Кэли конечной группы, порождённой инволюциями мазуровской тройки. Приведены примеры гамильтоновых циклов. Теорема 1.2.4 и результаты третьего параграфа получены в нераздельном соавторстве с научным руководителем и опубликованы в [М9-М11].

В четвертом параграфе для групп $L_3(q)$ исследован вопрос о минимальном значении числа порождающих инволюций, произведение которых равно единице. Если обозначить через $n_k(G)$ минимум числа порождающих инволюций группы G, произведение которых равно единице и удовлетворяющих условию под номером k в вопросе В3, то справедлива

Теорема 1.4.1. *Если $G \simeq L_3(q)$ и $q = 7, 13, 19, 25, 31, 37$, то $n_k(G) = 5, 1 \leqslant k \leqslant 5$.*

В пятом параграфе некоторые знакопеременные группы классифицированы как группы типа Коксетера. В шестом параграфе размещены множества $C_2(G)$ для знакопеременных групп $A_n, 12 \leqslant n \leqslant 16$, и спорадической группы Бэби B. Результаты параграфов 1,2,4-6 опубликованы в работах [M2-M4,M6,M8,M12].

Во второй главе приведены результаты исследования вопросов B4, B5. В первом параграфе предложены два алгоритма проверки гипотезы Томпсона и доказана

Теорема 2.1.1. *Любая из групп лиева типа* $F_4(2)$, $F_6(2)$, ${}^3F_4(2)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^3D_4(3)$, ${}^2E_6(2)$, ${}^2F_4(8)$, ${}^2G_2(3)$, $G_2(q), q \leqslant 5$, *представима квадратом некоторого класса сопряженных элементов.*

Среди спорадических групп только группа Янко J_1 представима квадратом любого своего класса сопряженных элементов. Приведен алгоритм проверки группы на строгую вещественность и с его помощью проверено, что среди спорадических групп только группы Янко J_1, J_2 являются строго вещественными. Кроме того, в группе Янко J_2, содержащей два класса сопряженных инволюций $2A, 2B$, указано, что $J_2 \neq (2A)^2, J_2 \neq (2B)^2$, но $J_2 = (2B)^2 + 2A2B$.

Использование традиционных методов и компьютерных вычислений позволило существенно увеличить число исследованных групп при изучении парных силовских пересечений. Во втором параграфе доказана

Теорема 2.2.1. *Значение параметра* $l_2(Aut(S_4(3)))$ *и* $l_2(Aut(U_3(3)))$ *равно единице. Если* G *одна из групп* $L_3(q)$, $q \leqslant 9$, $U_3(5)$, $U_3(9)$, $L_4(3)$, $U_4(3)$, $S_4(3)$, $S_6(3)$, $\Omega_7(3)$, $\Omega_8^-(3)$, $\Omega_8^+(3)$, *то* $l_2(Aut(G)) \geq 3$.

Указанная в теореме оценка параметра l_2 достаточна для дальнейшего исследования этих групп, хотя для каждой из них, за исключением ортогональных групп, найдено его точное значение. Результаты второй главы опубликованы в [M6,M7,M13-M15].

Приложение содержит тексты компьютерных программ на языке системы компьютерной алгебры *GAP* с комментариями для пользователя. Даны рекомендации по использованию программ.

В заключении приводятся некоторые замечания о вычислительных аспектах реализации алгоритмов и практическом использовании результатов диссертации.

Автор выражает искреннюю благодарность за всестороннюю помощь своему научному руководителю Алексею Викторовичу Тимофеенко. Автор благодарен Виктору Ивановичу Зенкову за инициированную совместную работу и предложенную задачу. Автор благодарен Владимиру Петровичу Шункову за постоянную поддержку. Автор также признателен Якову Нифантьевичу Нужину. Работа автора над диссертацией поддержана грантами РФФИ 09-01-00395, 09-01-00717 и 10-01-00509.

Список литературы

1. Di Martino L., Tamburini M. C. 2-generation of finite simple groups and some related topics // Generators and Relations in Groups and Geometries, Ed. by A. B. et al. Netherlands: Kluver Academic Publishers, 1991.

2. Нужин Я. Н. Порождающие тройки инволюций знакопеременных групп // Математические заметки. 1990. Т. 51, № 4. С. 91–95.

3. Нужин Я. Н. Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем характеристики 2 // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 2. С. 192–206.

4. Нужин Я. Н. Порождающие элементы простых групп и их приложения: Диссертация на соискание ученой степени доктора физико–математических наук / Красноярский государственный технический университет. Красноярск, 1996. — октябрь.

5. Нужин Я. Н. Порождающие тройки инволюций групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. I // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 77–96.

6. Нужин Я. Н. Порождающие тройки инволюций групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. II // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 4. С. 422–440.

7. Мазуров В. Д. О порождении спорадических простых групп тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Сиб. матем. журн. 2003. № 1. С. 193–198.

8. Нужин Я. Н., Тимофеенко А. В. Порождающие тройки инволюций некоторых спорадических групп. Красноярск: ИВМ СО РАН. 20 с. препринт №13-99.

9. Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Д. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.

10. The GAP Group. The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12*, 2008. URL: `http://www.gap-system.org`.

11. Wilson R., Parker R. A., Bray J. N. ATLAS of Group Representations. http://web.mat.bham.ac.uk/atlas/v2.0.

Работы автора по теме диссертации

M1. Макосий А. И., Тимофеенко А. В. О порождающих группы Харады-Нортона и Фишера Fi_{24} тройках инволюций // II Всесибирский конгресс женщин-математиков. (В день рождения Ковалевской Софьи Васильевны). Тез. докл., 15-17 янв. 2002 г. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2002. С. 133–134.

M2. Макосий А. И. К вопросу о нахождении мазуровских троек инволюций в спорадических группах // Распределённые и кластерные вычисления. Избранные материалы второй школы-семинара. Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2003. С. 167–172.

M3. Макосий А. И. Порождающие четверки инволюций группы $PSU_3(9)$ // Избр. докл. междунар. конф. по математике и механике. Томск: ТГУ, 2003. С. 28–30.

M4. Макосий А. И. Вычислительные аспекты вопроса о нахождении мазуровских троек инволюций в простых конечных группах // Распределённые и кластерные вычисления. Избранные материалы третьей школы-семинара. Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2004. С. 167–172.

M5. Макосий А. И. Мазуровские тройки инволюций знакопеременных групп // Проблемы архитектуры и строительства: Сб. материалов XXII региональной научно-технической конференции / КрасГАСА. Красноярск: Красноярская государственная архитектурно-строительная академия, 2004. С. 11–12.

M6. Макосий А. И. О представлении группы квадратом ее класса сопряженных элементов // Международная алгебраическая конференция: К 100-летию со дня рождения П. Г. Конторовича и 70-летию Л. Н. Шеврина, Екатеринбург, 29 августа - 3 сентября 2005 г. Тез. докл. Екатеринбург: Урал. ун-т, 2005. С. 59–60.

M7. Макосий А. И. О пересечениях силовских 2-подгрупп в группе автоморфизмов группы $U_4(3)$ // Международная конференция «Мальцевские чтения», посвященная 100-летию со дня рождения Анатолия Ивановича Мальцева 24–28 августа 2009 г. Тез. докл. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, 2009. С. 68.

M8. Листова О. В., Макосий А. И., Тимофеенко А. В. Параллельные вычисления в исследованиях групп с инволюциями // Труды Всероссийской научно-технической конференции «Параллельные вычисления в задачах математической физики» (21-25 июня 2004 г.). Современное моделирование и современные информационные технологии, вып. 3. Ростов: Издательство Ростовского университета, 2005. С. 95–100.

M9. Макосий А. И., Тимофеенко А. В. Мазуровские тройки группы Бэби Монстр // Материалы междунар. российско-китайского семинара «Алгебра и логика». Иркутск: Иркут. гос. пед. ун-та, 2007. С. 70–72.

M10. Макосий А. И., Тимофеенко А. В. О мазуровских тройках спорадической группы B и гамильтоновых циклах графа Кэли // Дискретная математика. 2008. Т. 20. С. 87–93.

M11. Makosii A. I., Timofeenko A. V. On Mazurov triples of the sporadic group B and Hamiltonian cycles of the Cayley graph // Discrete Mathematics and Applications. 2008. T. 18, № 2. С. 199–205.

M12. Макосий А. И. О порождающих мультиплетах некоторых простых групп лиева типа // Алгебра, логика и методика обучения математике: Материалы Всероссийской конференции, посвящённой 100-летию С. Л. Эдельмана. г. Красноярск, 5-6 ноября 2010 г. Красноярск: Краснояр. гос. пед. ун-т им. В. П. Астафьева, 2010. С. 50–53.

M13. Зенков В. И., Макосий А. И. О пересечениях силовских 2-подгрупп в конечных группах, I // Владикавказский математический журнал. 2009. Т. 11, № 4. С. 16–21.

M14. Зенков В. И., Макосий А. И. О пересечениях силовских 2-подгрупп в группе $Aut(L_4(9))$ // Алгебра, логика и приложения. Тез. докл., 19-25 июля 2010 г. Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2010. С. 41–42.

M15. Зенков В. И., Макосий А. И. О пересечениях силовских 2-подгрупп в группах автоморфизмов групп лиева типа над полем порядка 9 // Международная конференция «Мальцевские чтения», посвященная 70-летию со дня рождения Ю. Л. Ершова, 2–6 мая 2010 г. Тез. докл. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, 2010. С. 68.

Подписано в печать 25.01.2011

Формат 60 × 86/16. Уч.-изд. л. 0,93

Тираж 120 экз. Заказ № 1209

Отпечатано в типографии «Литера-принт»

г. Красноярск, ул. Гладкова,6, тел. 2950-340