На правах рукописи

Лыткина Дарья Викторовна

Вложения конечных групп в периодические группы

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Красноярск – 2012

Работа выполнена в ФГОБУ ВПО “Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики”.

Научный консультант:	доктор физико-математических наук профессор Шлёпкин Анатолий Константинович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор Журтов Арчил Хазешович,
	доктор физико-математических наук профессор Казарин Лев Сергеевич,
	доктор физико-математических наук профессор Созутов Анатолий Ильич.
Ведущая организация:	Институт математики и механики УрО РАН.

Защита состоится 27 апреля 2012 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском федеральном университете по адресу: г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79/10.

Автореферат разослан “   ” января 2012 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета   Бушуева Н. А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория абстрактных групп, т. е. групп, не наделённых изначально никакой дополнительной (геометрической, топологической, физической) структурой, зародившаяся на рубеже 19-го и 20-го веков, первое время развивалась как теория конечных групп. Усилиями нескольких математиков, среди которых, несомненно, нужно выделить В. Бернсайда и Г. Фробениуса, были получены основополагающие результаты теории конечных групп.

Вклад Бернсайда в развитие теории групп составляют не только его выдающиеся результаты, положившие начало локальному анализу конечных групп, и его замечательная книга [7], в которой подведён итог первоначального развития теории конечных групп, но и его знаменитые проблемы, во многом определившие развитие теории периодических групп. В одной из них речь шла о гипотезе, согласно которой порядок любой конечной простой неабелевой группы чётен или, другими словами, любая конечная группа нечётного порядка разрешима, в другой задавался вопрос о локальной конечности периодической группы G, порядки элементов которой ограничены некоторым числом. Для групп, период n которых не превосходит 3, положительный ответ был известен самому Бернсайду. В случае $n = 2$ группа G абелева. При $n = 3$ в 1928 году Б. Л. Ван-дер-Варден и Ф. Леви [15] показали, что G трёхступенно нильпотентна. В 1942 году появилась знаменитая работа И. Н. Санова [50], в которой доказывалась локальная конечность групп G в случае $n = 4$.

Глубокая работа Ф. Холла и Г. Хигмана [11] стимулировала появление доказательства локальной конечности групп периода 6 [10], но наибольшее влияние она оказала на решение другой проблемы Бернсайда: идеи этой работы наряду с глубокими теоретико-характерными методами, связанными с конечными группами, близкими к группам Фробениуса, привели У. Фейта и Дж. Томпсона [8] к доказательству разрешимости конечных групп нечётного порядка. Работа Томпсона и Фейта и последующие работы Томпсона о группах с разрешимыми локальными подгруппами дали старт бурному развитию теории конечных групп, которое привело к классификации конечных простых групп (см. [2–5, 9]).

Между тем надежда на положительность решения проблемы Бернсайда для любого конечного периода была развеяна сенсационной работой П. С. Новикова и С. И. Адяна [43–45], в которой содержалось доказательство бесконечности свободной бернсайдовой группы $B(r, n)$ периода n с r порождающими при $r \geqslant 2$ и достаточно большом n. Эта работа предопределила появление неожиданных примеров групп С. И. Адяна, А. Ю. Ольшанского, Р. И. Григорчука и их учеников (см. [21,23,24,29,30, 46–49]), показавших, что локально конечные группы составляют лишь малую часть класса периодических групп.

Все эти исследования ясно показали, что прогресс в «положительном» направлении изучения периодических групп возможен в первую очередь при условии существования в этих группах элементов небольших простых порядков, в частности, порядков 2 и 3 (отметим, что вопрос о локальной конечности групп периода 5 до сих пор открыт). Надежда на такой прогресс подкреплялась и мощными методами в исследовании конечных неразрешимых групп, связанными, как правило, с существованием в конечных простых группах подгрупп чётного порядка.

Некоторые приёмы техники работы с элементами порядка 2 (инволюциями) в конечных группах, в первую очередь, идеи работы Р. Брауэра и П. Фаулера [6], в которой доказывалась конечность числа конечных простых групп с заданным централизатором инволюции, были развиты и адаптированы к бесконечным группам с инволюциями в ряде работ В. П. Шункова и его учеников. Отметим прежде всего одну из первых работ Шункова в этом направлении [61] и его классическую теорему о локальной конечности периодической группы с конечным централизатором инволюции [62]. Позднее более короткое доказательство усиленного варианта этой теоремы получил В. В. Беляев [26], а совсем недавно А. И. Созутов доказал её широкое обобщение на основе понятия почти совершенной инволюции [53]. Современное состояние соответствующей теории изложено в серии монографий Шункова [63–65] (см. также библиографию в этих книгах). В последнее время ряд глубоких результатов в отмеченном направлении был получен также А. И. Созутовым, Н. М. Сучковым, А. К. Шлёпкиным и другими представителями красноярской алгебраической школы. К этому направлению относится и настоящая диссертация.

Цель диссертации. Одной из основных характеристик периодической группы является её спектр, т. е. множество порядков её элементов. Не менее важна информация о конечных подгруппах. Настоящая работа посвящена исследованию групп с заданным спектром или с заданным набором конечных подгрупп.

Методы исследования. Для целей исследования строения периодических групп приспосабливаются методы локального анализа конечных групп. Кроме того, используются машинные вычисления для установления конечности некоторых конечно определённых групп.

Научная новизна и практическая ценность. Все основные результаты диссертации являются новыми. Диссертация носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях периодических групп, при чтении спецкурсов.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались на конференции "Мальцевские чтения" (2008–2011), на международных алгебраических конференциях в Москве (2008), Нальчике (2009–2010), Санкт-Петербурге (2010), Малайзии (2011), Турции (2011), Екатеринбурге (2011) и Казани (2011), а также на семинарах "Теория групп" и "Алгебра и логика" Института математики СО РАН и Новосибирского государственного университета. Основные результаты опубликованы с полными доказательствами в работах [66–71, 89, 90], написанных без соавторов, и принадлежат лично диссертантке.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1) Доказано, что $\{2, 3\}$-группа, действующая свободно на абелевой группе, локально конечна, если в ней нет элементов порядка 27. Дано полное описание таких групп (теорема 2.0.1).

2) Доказано, что 2-группа двуступенно нильпотентна, если каждая её конечная подгруппа двуступенно нильпотентна (теорема 3.0.1).

3) Доказано, что тождество $[x, y]^2 = 1$ выполняется в 2-группе G тогда и только тогда, когда оно выполняется во всех её конечных подгруппах (теорема 3.0.3).

4) Дано полное описание 2-групп, в которых каждая конечная подгруппа изоморфна подгруппе прямого произведения группы диэдра и элементарной абелевой 2-группы (теорема 3.3.1).

5) Для каждого натурального числа m получено исчерпывающее описание периодических групп G, содержащих элемент порядка 4, в которых каждая подгруппа чётного порядка покрывается подгруппой, изоморфной прямому произведению элементарной абелевой 2-группы порядка, не превосходящего 2^m, и группы $L_2(q)$ для некоторого подходящего $q \geqslant 4$. В частности, все такие группы G локально конечны и счётны (теорема 4.0.1).

6) Доказано, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами, является локально конечной, если централизатор каждой её инволюции обладает нормальной силовской 2-подгруппой (теорема 5.0.3).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [66–109], из них 12 работ опубликованы в изданиях из перечня ВАК.

Структура и объём работы. Диссертации состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Нумерация определений, теорем, предложений и следствий соответствует разбиению на главы и параграфы. Например, теорема 3.3.1 — это первая теорема из третьего параграфа третьей главы. Текст диссертации представлен на 118 страницах. Список литературы включает 127 наименований.

Содержание работы

Во введении раскрывается актуальность темы диссертационного исследования, формулируются основные результаты, а также даётся краткое изложение содержания диссертации.

В первой главе собраны вспомогательные результаты, которые используются в других главах диссертации.

Первый параграф главы посвящён группам, насыщенным простыми группами $L_2(2^m)$ и $Sz(2^m)$. Группа G *насыщена* заданным множеством $\mathfrak{M}$ конечных групп, если каждая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной некоторой группе из множества $\mathfrak{M}$.

Следующие две теоремы обобщают некоторые результаты из [55] и [54]. Прежде чем их формулировать, напомним определение двух известных понятий.

Инволюция группы называется *конечной*, если она вместе с любой сопряжённой с ней инволюцией порождает конечную подгруппу. Собственная подгруппа H группы G называется *сильно вложенной* (в G) подгруппой, если H содержит инволюцию и $H \cap H^g$ не содержит инволюций для каждого $g \in G \setminus H$.

Теорема 1.1.1. *Пусть группа G содержит конечную инволюцию и инволюцию с периодическим централизатором. Если каждая конечная подгруппа чётного порядка из G содержится в простой подгруппе, изоморфной для некоторого m группе $L_2(2^m)$ или $Sz(2^m)$, то G изо-*

морфна $L_2(Q)$ или $Sz(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики два. В частности, G локально конечна.

Теорема 1.1.2. *Пусть группа G содержит конечную инволюцию и сильно вложенную подгруппу. Если централизатор некоторой инволюции в G является 2-группой и каждая конечная подгруппа чётного порядка из G содержится в конечной неабелевой простой подгруппе группы G, то G изоморфна $L_2(Q)$ или $Sz(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики два.*

Теорема 1.1.2, по существу, доказана в [54, теор. 1], теорема 1.1.1 обобщает часть теоремы 10 из [55], доказательство которой в [55] использует упомянутую теорему 1 из [54]. Мы, напротив, получаем теорему 1.1.2 как следствие теоремы 1.1.1. Это позволяет сократить и упростить доказательство теоремы 1 в [54].

Результаты этого параграфа опубликованы в [76] и используются в главе 5 при доказательстве основных результатов диссертации.

Второй параграф первой главы посвящён группам, действующим на абелевых группах.

Автоморфизм α аддитивной абелевой группы V называется *квадратичным*, если найдутся такие целые числа m и n, что $\alpha^2+m\alpha+n\cdot 1$ — нулевой эндоморфизм V, другими словами, $v\alpha^2+mv\alpha+nv=0$ для каждого $v \in V$. Автоморфизм α группы V называется *почти квадратичным*, если он квадратичен на V/U, где U — некоторая α-инвариантная конечно порождённая подгруппа из V. В нескольких работах А. Х. Журтова, В. Д. Мазурова и В. А. Чуркина [17, 31–36, 39–41] изучались группы, порождённые двумя квадратичными автоморфизмами, в частности, А. Х. Журтов [32] показал, что периодическая группа, порождённая парой квадратичных автоморфизмов, конечна. Мы обобщаем этот результат на случай почти квадратичных автоморфизмов.

Теорема 1.2.1. *Периодическая группа, порождённая парой почти квадратичных автоморфизмов абелевой группы, конечна.*

Следствие 1.2.1. *Пусть V — абелева группа, $g,h \in \operatorname{Aut} V$, $g^3=h^3=1$ и $G=\langle g,h\rangle$ периодическая. Если $C_V(g)$ и $C_V(h)$ конечно порождены, то $G=\langle g,h\rangle$ конечна.*

Поскольку любая конечная группа вкладывается в $GL(V)$ для некоторого конечного векторного пространства V, то любая конечная двупорождённая группа удовлетворяет условию теоремы 1.2.1.

Для групп, порождённых двумя квадратичными автоморфизмами, ситуация иная. В частности, Е. Н. Макаренко [42] показала, что любой некоммутативный композиционный фактор такой группы вкладывается в $GL(2,q)$ для некоторой степени q простого числа.

Мы уточняем этот результат Макаренко следующим образом.

Теорема 1.2.2. *Пусть G — периодическая группа, порождённая парой квадратичных автоморфмизмов абелевой группы. Тогда G изоморфна расширению конечной нильпотентной группы посредством подгруппы прямого произведения $L_1 \times \cdots \times L_s$, где $L_i \simeq GL(2,p_i^{m_i})$, $i = 1,\ldots,s$. Здесь p_i — простое, а m_i — натуральное число для каждого i.*

Результаты этого параграфа опубликованы в [77]. Они используются в главе 4.

По определению группа G действует *свободно* на группе V, если $vg \neq v$ для любых нетривиальных $v \in V$ и $g \in G$. Изучение групп, способных действовать свободно на нетривиальной группе, является важным предметом исследований в теории групп. Основополагающим результатом здесь служит классификация Цассенхауза конечных групп, действующих свободно на абелевой группе, дающая, в частности, описание дополнительных множителей конечных групп Фробениуса (см. [28]). Это описание было распространено А. И. Созутовым [51] на класс групп Шункова. В упомянутой выше серии работ А. Х. Журтова, В. Д. Мазурова и В. А. Чуркина изучены группы, порождённые циклическими группами небольших порядков, действующими свободно на абелевой группе. Одним из последних результатов на эту тему служит доказательство конечности группы периода $2^m \cdot 3^2$, действующей свободно на абелевой группе, которое было получено Э. Ябарой и П. Майром [13].

Теорема 2.0.1, точная формулировка которой приведена ниже, является обобщением этого результата. Метод её доказательства отличен от методов Ябары и Майра, существенно использующих конечность периода исследуемой группы.

Теорема 2.0.1. *Пусть G — $\{2,3\}$-группа, не содержащая элементов порядка 3^3. Если G действует свободно на нетривиальной абелевой группе, то G локально конечна и выполняется одно из следующих свойств:*

(1) *G конечна;*

(2) *G изоморфна прямому произведению локально циклической 2-группы C или локально кватернионной группы Q и циклической 3-группы;*

(3) *G является расширением прямого произведения 2-группы $H \simeq C$ и циклической 3-группы R посредством группы порядка 2. Более того, существует элемент x порядка 4 из G такой, что $\langle H, x\rangle \simeq Q$ и $r^x = r^{-1}$ для любого $r \in R$.*

Здесь локально циклическая 2-группа — это группа

$$C = \langle c_i, i = 1, 2, 3, \dots \mid c_1^2 = 1, c_{i+1}^2 = c_i \text{ при } i > 1\rangle,$$

а локально кватернионная группа — это группа

$$Q = \langle b, C \mid b^2 = c_1, c_i^b = c_i^{-1}, i = 2, 3, \dots\rangle.$$

Теорема 2.0.1 вытекает из следующего результата.

Теорема 2.0.2. *Пусть G — периодическая группа, все конечные 2-подгруппы которой циклические или диэдральные. Если никакой из нетривиальных элементов нечётного порядка группы G не сопряжён со своим обратным, то все 2-элементы из G образуют (разумеется, нормальную) 2-подгруппу, которая либо конечна, либо изоморфна локально циклической или локально диэдральной группе.*

Здесь локально диэдральная группа — это группа

$$D = \langle d, C \mid d^2 = 1, c_i^d = c_i^{-1}, i = 1, 2, \dots\rangle.$$

Доказательство этих результатов опубликовано в [67].

В третьей главе рассматриваются вложения конечных групп в 2-группы. Здесь доказываются следующие результаты.

Теорема 3.0.1. *Если каждая конечная подгруппа 2-группы G двуступенно нильпотентна, то сама группа G также двуступенно нильпотентна.*

Очевидным следствием этой теоремы является тот факт, что 2-группа абелева, если все её конечные подгруппы абелевы. Отметим, что аналог даже этого следствия неверен для p-групп при $p > 2$, поскольку, например, все конечные подгруппы групп Новикова-Адяна (не локально конечные свободные группы нечётного периода) являются циклическими [22]. С другой стороны, любая конечная подгруппа ненильпотентной свободной бернсайдовой группы периода 2^n для $n \geqslant 13$ может быть вложена в прямое произведение диэдральных групп порядка 2^{n+1} [38, теор. 2] и поэтому она нильпотентна ступени n. Поэтому теорема 3.0.1

не может быть обобщена на случай 2-группы с ограниченной ступенью нильпотентности её конечных подгрупп.

В качестве следствия из теоремы 3.0.1 выводится

Теорема 3.0.2. *Если для любой конечной подгруппы K 2-группы G порядок коммутанта K не превосходит двух, то $|[G, G]| \leqslant 2$.*

Следующая теорема обобщает результат работы [16].

Теорема 3.0.3. *Пусть в каждой конечной подгруппе 2-группы G выполняется тождество $[x, y]^2 = 1$. Тогда это тождество выполняется и в группе G. В частности, G локально конечна, период её коммутанта равен 4, а второй коммутант лежит в центре G.*

Кроме того, в главе 3 изучается строение 2-групп, каждая конечная подгруппа которых изоморфна подгруппе прямого произведения группы диэдра и элементарной абелевой группы.

Теорема 3.3.1. *Пусть каждая конечная подгруппа 2-группы T изоморфна подгруппе прямого произведения группы диэдра и элементарной абелевой группы. Тогда T изоморфна одной из следующих групп:*

(a) *элементарной абелевой 2-группе;*

(b) *прямому произведению элементарной абелевой 2-группы и циклической 2-группы;*

(c) *прямому произведению элементарной абелевой 2-группы и группы $C = \langle c_i, i = 1, 2, \dots \mid c_1^2 = 1, c_{i+1}^2 = c_i, i = 1, 2, \dots \rangle$;*

(d) *прямому произведению элементарной абелевой 2-группы и диэдральной 2-группы;*

(e) *прямому произведению элементарной абелевой 2-группы и группы $D = \langle C, d \mid d^2 = 1, c_i^d = c_i^{-1} \rangle$.*

В частности, T локально конечна и любая циклическая подгруппа порядка 4 из T нормальна в T.

Результаты этой главы опубликованы в [66, 70, 90].

В четвёртой главе доказывается локальная конечность периодической группы G, насыщенной прямыми произведениями элементарной абелевой 2-группы фиксированного порядка и простой группы $L_2(q)$ при условии, что G содержит элемент порядка 4 или подгруппу, изоморфную A_4.

Теорема 4.0.1. *Пусть m — натуральное число, G — периодическая группа, каждая конечная подгруппа чётного порядка которой содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению элементарной абелевой 2-группы порядка, не превосходящего 2^m, и группы $L_2(q)$ для некоторого $q \geqslant 4$. Если выполнено одно из следующих условий:*

(a) *G содержит элемент порядка 4;*

(b) *G содержит подгруппу, изоморфную знакопеременной группе A_4 степени 4,*

то $G = E \times L_2(Q)$, где E — элементарная абелева 2-группа, $|E| \leqslant 2^m$ и Q — локально конечное поле. В частности, G — локально конечная счётная группа.

Попытки отказаться от дополнительных условий (a), (b) в теореме 4.0.1 наталкиваются на трудности, связанные с нерешённым вопросом о существовании простых не локально конечных групп определённого вида.

Пусть P — локально конечное поле. Группой типа $\Lambda(P)$ назовём содержащую инволюцию простую периодическую группу, в которой все инволюции сопряжены и централизатор каждой из них изоморфен прямому произведению группы порядка 2 на группу, изоморфную $L_2(P)$.

Известными автору примерами групп типа $\Lambda(P)$ являются конечная спорадическая группа Янко J_1, для которой P — поле порядка 4, и локально конечные простые группы лиева типа ${}^2G_2(P)$, где P — поле характеристики 3, не содержащее подполей порядка 9.

Теорема 4.0.2. *Пусть G — периодическая группа, содержащая инволюцию. Если в G любая конечная подгруппа чётного порядка содержится в подгруппе вида $E \times R$, где $|E| \leqslant 2$, а $R \simeq L_2(q)$ для некоторого $q \geqslant 5$, то либо $G = Z \times L$, где $|Z| \leqslant 2$, а $L \simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q, либо $|Z| = 2$ и G — не локально конечная группа типа $\Lambda(P)$ для бесконечного локально конечного поля характеристики 2, не содержащего подполей порядка 4.*

Результаты этой главы опубликованы в [68, 69].

В пятой главе диссертации изучаются группы, насыщенные простыми C-группами.

М. Сузуки [19] показал, что любая конечная неабелева простая C-группа, т. е. группа, в которой централизатор каждой инволюции обладает нормальной силовской 2-подгруппой, содержится во множестве

$$\mathfrak{C} = \{L_2(r), r \geqslant 4; L_3(2^m), m \geqslant 1; U_3(2^m), m \geqslant 2; Sz(2^m), m \geqslant 3\}.$$

При этом все группы из $\mathfrak{C}$, за исключением некоторых из групп $L_2(r)$, являются C-группами. Группа $L_2(r)$ тогда и только тогда является C-группой, когда либо $r = 2^m$, $m \geqslant 2$, либо $r = 9$, либо $r = 2^m \pm 1$ — простое число.

Основной целью данного раздела является описание периодических групп, насыщенных группами из $\mathfrak{C}$. Это описание может быть получено и при более слабом, чем периодичность, предположении.

Теорема 5.0.1. *Пусть G — периодическая группа. Если любая конечная подгруппа чётного порядка из G содержится в подгруппе, изоморфной группе из $\mathfrak{C}$, то либо существует такое локально конечное поле P нечётной характеристики, что $G \simeq L_2(P)$, либо G изоморфна одной из групп $L_2(Q)$, $L_3(Q)$, $U_3(Q)$, $Sz(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2. В частности, G локально конечна.*

Теорема 5.0.1 является следствием более общего результата.

Теорема 5.0.2. *Пусть G — группа, содержащая конечную инволюцию и инволюцию с периодическим централизатором. Если любая конечная подгруппа чётного порядка из G содержится в подгруппе, изоморфной группе из $\mathfrak{C}$, то либо существует такое локально конечное поле P нечётной характеристики, что $G \simeq L_2(P)$, либо G изоморфна одной из групп $L_2(Q)$, $L_3(Q)$, $U_3(Q)$, $Sz(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2. В частности, G локально конечна.*

Из теоремы 5.0.2 без труда выводится описание периодических групп, насыщенных конечными простыми группами, в которых централизатор любой инволюции обладает нормальной силовской 2-подгруппой. Более точно, справедлива следующая

Теорема 5.0.3. *Пусть G — группа, содержащая конечную инволюцию и инволюцию с периодическим централизатором. Если любая конечная подгруппа чётного порядка из G содержится в некоторой конечной простой неабелевой подгруппе и централизатор каждой инволюции из G обладает нормальной силовской 2-подгруппой, то либо G является конечной простой C-группой, либо G изоморфна одной из групп $L_2(Q)$, $L_3(Q)$, $U_3(Q)$, $Sz(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q характеристики 2.*

Эта теорема даёт положительный ответ на упомянутый вопрос 14.101 Шлёпкина из Коуровской тетради в случае, когда в соответствующей группе G централизаторы инволюций 2-замкнуты.

Из теоремы 5.0.2 и работы [18] вытекает также следующий результат.

Теорема 5.0.4. *Пусть G — группа, содержащая конечную инволюцию, инволюцию с периодическим централизатором и сильно вложенную подгруппу, содержащую нетривиальную нормальную 2-подгруппу. Если каждая конечная подгруппа чётного порядка из G содержится в конечной простой неабелевой подгруппе, то G изоморфна $L_2(Q)$, $U_3(Q)$ или $Sz(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2.*

Эта теорема даёт возможность перенести на бесконечные группы ещё один результат Сузуки о группах с тривиальными пересеченями силовских 2-подгрупп.

Следствие 5.0.1. *Пусть G — группа, содержащая конечную инволюцию и инволюцию с периодическим централизатором. Если каждая конечная подгруппа чётного порядка из G содержится в конечной простой неабелевой подгруппе и любые две различные силовские 2-подгруппы из G пересекаются по тривиальной подгруппе, то G изоморфна $L_2(Q)$, $U_3(Q)$ или $Sz(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2.*

Результаты этой главы опубликованы в [66].

Результаты последних двух глав диссертации в той или иной мере обобщают результаты работ [52, 54, 56, 57, 59, 60, 73, 80].

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту Анатолию Константиновичу Шлёпкину за всестороннюю помощь.

Библиография

1. *B. Amberg, L. S. Kazarin*, On periodic groups saturated by dihedral subgroups, Proceedings Ischia Group Theory Conference 2010 (2011), 11—19.
2. *M. Aschbacher*, The status of the classification of the finite simple groups, Notices Amer. Math. Soc., **51**, No. 7 (2004), 736—740.
3. *M. Aschbacher, R. Lyons, S. D. Smith, R. Solomon*, The classification of finite simple groups. Groups of characteristic 2 type, Providence, RI, American Mathematical Society, 2011.
4. *M. Aschbacher, S. D. Smith*, The classification of quasithin groups. I. Structure of strongly quasithin $\mathcal{K}$-groups, Mathematical Surveys and Monographs, **111** (2004).
5. *M. Aschbacher, S. D. Smith*, The classification of quasithin groups. II. Main theorems: the classification of simple QTKE-groups, Mathematical Surveys adn Monographs, **112** (2004).
6. *R. Brauer, K. A. Fowler*, On groups of even order, Annals of Mathematics, **62**, No. 2 (1955), 565—583.
7. *W. Burnside*, Theory of groups of finite order, 2nd ed., New York, Dover Publications Inc., 1955.
8. *W. Feit, J. G. Thompson*, Solvability of groups of odd order, Pacific J. Math., **13**, No. 3 (1963), 775—1029.
9. *D. Gorenstein*, The classification of finite simple groups. Vol. 1. Groups of noncharacteristic 2 type, New York, Plenum Press, 1983.
10. *P. Hall*, Solution of the Burnside problem for exponent six, Illinois J. Math, **2** (1958), 764—786.
11. *P. Hall, G. Higman*, On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem, Proc. London Math. Soc., **6**, No. 3 (1956), 1—42.
12. *B. Hartley, G. Shute*, Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type, The Quaterly Journal of Mathematics Oxford, Ser. 2, **35**, No. 137 (1984), 49—71.

13. *E. Jabara, P. Mayr*, Frobenius complements of exponent dividing $2^m \cdot 9$, Forum Mathematicum, **21**, No. 1 (2009), 217—220.

14. *M. J. Larsen, R. Pink*, Finite subgroups of algebraic groups, J. Amer. Math. Soc., **24**, No. 4 (2011), 1105—1158.

15. *F. Levi, B. van der Waerden*, Über eine besondere Klassw von Gruppen, Abh. Math. Semin., Hamburg Univ., **9** (1932), 157—158.

16. *I. D. Macdonald*, On certain varieties of groups, Math. Z., **76**, No. 2 (1961), 270—282.

17. *V. Mazurov*, A new proof of Zassenhaus theorem on finite groups of fixed-point-free automorphisms, J. Algebra, **263**, No. 1 (2003), 1—7.

18. *M. Suzuki*, Finite groups of even order in which Sylow 2-groups are independent, Ann. Math. (2), **80**, No. 1 (1964), 58—77.

19. *M. Suzuki*, Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed, Ann. Math. (2), **82**, No. 1 (1965), 191—212.

20. *S. Thomas*, The classification of the simple periodic linear groups, Arch. Math, **41** (1983), 103—116.

21. *С. И. Адян*, О некоторых группах без кручения, Изв. АН СССР, Сер. матем., **35**, № 3 (1971), 459—468.

22. *С. И. Адян*, О подгруппах свободных периодических групп нечётного показателя, Тр. матем. ин-та АН СССР, **112** (1971), 64—72.

23. *С. И. Адян*, Проблема Бернсайда и тождества в группах, Москва, Наука, 1975.

24. *С. И. Адян*, Периодические произведения групп, Тр. матем. ин-та АН СССР, **142** (1976), 3—21.

25. *В. В. Беляев*, Локально конечные группы Шевалле, в кн.: Исследования по теории групп, Свердловск, УНЦ АН СССР, 1984, 39—50.

26. *В. В. Беляев*, Группы с почти регулярной инволюцией, Алгебра и логика, **26**, № 5 (1987), 531—536.

27. *А. В. Боровик*, Вложения конечных групп Шевалле и периодические линейные группы, Сиб. мат. журнал, **24**, № 6 (1983), 26—35.

28. *В. М. Бусаркин, Ю. М. Горчаков*, Конечные расщепляемые группы, Москва, Наука, 1968.

29. *Р. И. Григорчук*, К проблеме Бернсайда о периодических группах, Функцион. анализ и его приложения, **14**, № 1 (1980), 53—54.

30. *Р. И. Григорчук, П. Ф. Курчанов*, Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией, Итоги науки и техники. Современные проблемы матем. фундам. направления, **58** (1990), 191—256.

31. *А. Х. Журтов*, О группах Фробениуса, содержащих элемент порядка 3, Владикавк. мат. журнал, **2**, № 2 (2000), 19—25.

32. *А. Х. Журтов*, О квадратичных автоморфизмах абелевых групп, Алгебра и логика, **39**, № 3 (2000), 320—328.

33. *А. Х. Журтов*, О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса, Сиб. мат. журнал, **41**, № 2 (2000), 329—338.

34. *А. Х. Журтов*, Группы Фробениуса, порождённые двумя элементами порядка 3, Сиб. мат. журнал, **42**, № 3 (2001), 533—537.

35. *А. Х. Журтов*, О группе, действующей локально свободно на абелевой группе, Сиб. мат. журнал, **44**, № 2 (2003), 343—346.

36. *А. Х. Журтов, В. Д. Мазуров*, О группах Фробениуса, порождённых квадратичными элементами, Алгебра и логика, **42**, № 3 (2003), 271—292.

37. *А. А. Кузнецов, К. А. Филиппов*, Группы, насыщенные заданным множеством групп, Сиб. электрон. матем. изв., **8** (2011), 230—246.

38. *И. Г. Лысёнок*, Бесконечные бернсайдовы группы чётного периода, Изв. РАН, Сер. матем., **60**, № 3 (1996), 3—224.

39. *В. Д. Мазуров*, Обобщение теоремы Цассенхауза, Владикавк. мат. журнал, **10**, № 1 (2008), 40—52.

40. *В. Д. Мазуров, В. А. Чуркин*, О группе, свободно действующей на абелевой группе, Сиб. мат. журнал, **42**, № 4 (2001), 888—891.

41. *В. Д. Мазуров, В. А. Чуркин*, О свободном действии группы на абелевой группе, Сиб. мат. журнал, **43**, № 3 (2002), 600—608.

42. *Е. Н. Макаренко*, Группы автоморфизмов абелевых групп, порождённых двумя квадратичными автоморфизмами, Вестник Новосибирского гос. ун-та, сер. “Матем., мех., информ.”, **3**, № 1 (2003), 55—60.

43. *П. С. Новиков, С. И. Адян*, О бесконечных периодических группах. I, Изв. АН СССР, Сер. матем., **32**, № 1 (1968), 212—244.

44. *П. С. Новиков, С. И. Адян*, О бесконечных периодических группах. II, Изв. АН СССР, Сер. матем., **32**, № 2 (1968), 251—524.

45. *П. С. Новиков, С. И. Адян*, О бесконечных периодических группах. III, Изв. АН СССР, Сер. матем., **32**, № 3 (1968), 709—731.

46. *А. Ю. Ольшанский*, Бесконечные группы с циклическими подгруппами, ДАН СССР, **245**, № 4 (1979), 785—787.

47. *А. Ю. Ольшанский*, Бесконечная группа с подгруппами простых порядков, Изв. АН СССР, Сер. матем., **44**, № 2 (1980), 309—321.

48. *А. Ю. Ольшанский*, Группы ограниченного периода с подгруппами простых порядков, Алгебра и логика, **21**, № 5 (1982), 553—618.

49. *А. Ю. Ольшанский*, Геометрия определяющих соотношений в группах, Москва, Наука, 1989.

50. *И. Н. Санов*, Решение проблемы Бернсайда для показателя 4, Учёные записки Ленинградского гос. ун-та. Сер. матем., № 55 (1940), 166—170.

51. *А. И. Созутов*, О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса, Сиб. мат. журнал, **35**, № 4 (1994), 893—901.

52. *А. И. Созутов*, О некоторых группах, насыщенных конечными простыми подгруппами, Матем. сист., **3** (2004), 101—110.

53. *А. И. Созутов*, О группах с почти регулярной инволюцией, Алгебра и логика, **46**, № 3 (2007), 360—368.

54. *А. И. Созутов, А. К. Шлёпкин*, О некоторых группах с конечной инволюцией, насыщенных конечными простыми подгруппами, Матем. зам., **72**, № 3 (2002), 433—447.

55. *К. А. Филиппов*, Группы, насыщенные конечными неабелевыми простыми группами и их расширениями, дисс. канд. физ.-мат. наук, Красноярск, 2005.

56. *К. А. Филиппов*, О периодических группах, насыщенных $L_2(2^n) \times Z_2$, Матем. сист., **4** (2005), 80—81.

57. *А. К. Шлёпкин*, О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами, Матем. тр., **1**, № 1 (1998), 129—138.

58. *А. К. Шлёпкин, А. Г. Рубашкин*, О группах, насыщенных конечным множеством групп, Сиб. мат. журнал, **45**, № 6 (2004), 1397—1400.

59. *А. К. Шлёпкин, А. Г. Рубашкин*, О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами, Матем. сист., **2** (2004), 96—100.

60. *А. К. Шлёпкин, А. Г. Рубашкин*, Об одном классе периодических групп, Алгебра и логика, **44**, № 1 (2005), 114—125.

61. *В. П. Шунков*, О некотором обобщении теоремы Фробениуса на периодические группы, Алгебра и логика, **6**, № 3 (1967), 113—124.

62. *В. П. Шунков*, О периодической группе с почти регулярными инволюциями, Алгебра и логика, **7**, № 1 (1968), 113—121.

63. *В. П. Шунков*, M_p-группы, Москва, Наука, 1990.

64. *В. П. Шунков*, T_0-группы, Новосибирск, Наука, 1990.

65. *В. П. Шунков*, О вложении примарных элементов в группе, Новосибирск, Наука, 1992.

Работы автора по теме диссертации, опубликованные в изданиях из перечня ВАК

66. *Д. В. Лыткина*, О группах, насыщенных конечными простыми группами, Алгебра и логика, **48**, № 5 (2009), 628—653.

67. *Д. В. Лыткина*, О периодических группах, действующих свободно на абелевой группе, Алгебра и логика, **49**, № 3 (2010), 379—387.

68. *Д. В. Лыткина*, Периодические группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых групп, Сиб. мат. журнал, **52**, № 2 (2011), 340—349.

69. *Д. В. Лыткина*, Периодические группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых групп II, Сиб. мат. журнал, **52**, № 5 (2011), 1096—1112.

70. *Д. В. Лыткина*, О 2-группах, конечные подгруппы которых обладают заданными свойствами, Владикавк. мат. журнал, **13**, № 4 (2011), 36—40.

71. *Д. В. Лыткина*, Периодические группы с заданными свойствами конечных подгрупп, Доклады АН. Сер. Математика, **442**, № 3 (2012), 310—311.

72. *Д. В. Лыткина*, Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4, Сиб. мат. журнал, **48**, № 2 (2007), 353—358.

73. *Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров*, Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$, Алгебра и логика, **46**, № 5 (2007), 606—626.

74. *Д. В. Лыткина, Л. Р. Тухватуллина, К. А. Филиппов*, О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп, Сиб. мат. журнал, **49**, № 2 (2008), 395—400.

75. *Д. В. Лыткина, Л. Р. Тухватуллина, К. А. Филиппов*, Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами $U_3(2^m)$, Алгебра и логика, **47**, № 3 (2008), 288—306.

76. *Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров*, О группах, содержащих сильно вложенную подгруппу, Алгебра и логика, **48**, № 2 (2009), 190—202.

77. *Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров*, О периодических группах, порождённых парой почти квадратичных автоморфизмов абелевой группы, Сиб. мат. журнал, **51**, № 3 (2010), 599—603.

Прочие работы автора по теме диссертации

78. *Д. В. Лыткина*, Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4, Матем. сист., **4** (2005), 54—59.

79. *Д. В. Лыткина*, Периодические группы, насыщенные группой $U_3(9)$, Матем. сист., **5** (2006), 32—34.

80. *Д. В. Лыткина, К. А. Филиппов*, О периодических группах, насыщенных $L_2(q)$ и её центральными расширениями, Матем. сист., **5** (2006), 35—45.

81. *Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров*, Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$, Матем. сист., **6** (2007), 73—83.

82. *Д. В. Лыткина, Л. Р. Тухватуллина, К. А. Филиппов*, О периодических группах, насыщенных группой $L_3(11)$, Матем. сист., **6** (2007), 84—88.

83. *Д. В. Лыткина, Л. Р. Тухватуллина, К. А. Филиппов*, О периодических группах, насыщенных группой $L_3(27)$, Матем. сист., **6** (2007), 89—92.

84. *Д. В. Лыткина, Л. Р. Тухватуллина, К. А. Филиппов*, О периодических группах, насыщенных группами из конечного множества линейных групп размерности 3, Матем. сист., **6** (2007), 93—98.

85. *D. V. Lytkina, A. A. Kuznetsov*, Recognizability by spectrum of the group $L_2(7)$ in the class of all groups, Sib. Electr. Math. Reports, **4** (2007), 300—303, http://semr.math.nsc.ru.

86. *Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров*, О группах с сильно вложенной подгруппой, Матем. сист., **7** (2008), 10—20.

87. *А. А. Кузнецов, Д. А. Кузьмин, Д. В. Лыткина, Л. Р. Тухватуллина, К. А. Филиппов*, Компьютерные алгоритмы теоретико-множественного анализа сложных алгебраических систем. Монография, Красноярск, КрасГАУ, 2009.

88. *А. А. Кузнецов, Д. В. Лыткина, Л. Р. Тухватуллина, К. А. Филиппов*, Группы с условием насыщенности. Монография, Красноярск, КрасГАУ, 2009.

89. *D. V. Lytkina*, On 2-groups, all of whose finite subgroups are of nilpotency class 2, Sib. Electr. Math. Reports, **8** (2011), 1—3, http://semr.math.nsc.ru.

90. *Д. В. Лыткина*, О частичном обобщении одного результата Макдональда, Sib. Electr. Math. Reports, **8** (2011), 369—371, http://semr.math.nsc.ru.

91. *Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров*, Непростота бесконечной группы, содержащей конечную подгруппу, нетривиально пересекающуюся со своими сопряжёнными подгруппами, Матем. сист., **9** (2011), 156—157.

92. *К. А. Филиппов, Д. В. Лыткина*, О периодических группах, насыщенных её центральными расширениями. Тезисы международной конференции «Мальцевские чтения», Новосибирск, 2006.

93. *Д. В. Лыткина, К. А. Филиппов*, О периодических группах, насыщенных центральными расширениями линейных групп размерности 2. Материалы XLIV МСНК «Студент и научно-технический прогресс». Математика. Новосибирск: НГУ, 2006.

94. *Д. В. Лыткина*, Периодические группы, насыщенные группой $U_3(9)$. Международная конференция «Алгебра и её приложения», тезисы докладов, Красноярск, 2007.

95. *Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров*, Периодические группы, насыщенные группой $U_3(9)$. Международная конференция «Алгебра и её приложения», тезисы докладов, Красноярск, 2007.

96. *Д. В. Лыткина, А. А. Кузнецов*, Распознаваемость группы $L_2(7)$ по спектру в классе всех групп. Международная конференция «Алгебра и её приложения», тезисы докладов, Красноярск, 2007.

97. *Д. В. Лыткина*, Periodic groups saturated by the group $U_3(9)$. Алгебра и логика, материалы международного российско-китайского семинара, Иркутск, 2007.

98. *D. V. Lytkina, A. A. Kuznetsov*, Recognizability by spectrum of the group $L_2(7)$ in the class of all groups. Алгебра и логика, материалы международного российско-китайского семинара, Иркутск, 2007.

99. *D. V. Lytkina*, Recognizability by spectrum of the finite simple group $L_2(7)$. Международная алгебраическая конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения Д. К. Фаддеева, тезисы докладов, Санкт-Петербург, 2007.

100. *D. V. Lytkina*, On periodic groups, saturated by finite simple groups. Международная алгебраическая конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша, тезисы докладов, Москва, 2008.

101. *Д. В. Лыткина, Л. Р. Тухватуллина, К. А. Филиппов*, О периодических группах, насыщенных группами $L_4(2^n)$. Международная алгебраическая конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша, тезисы докладов, Москва, 2008.

102. *Д. В. Лыткина*, О группах, насыщенных конечными простыми группами. Седьмая международная школа-конференция по теории групп, тезисы докладов, Челябинск, 2008.

103. *Д. В. Лыткина*, О группах, насыщенных конечными простыми группами. Алгебра и её приложения, труды Международной алгебраической конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения А. И. Кострикина, Нальчик, 2009.

104. *D. V. Lytkina*, On periodic groups acting freely on Abelian groups. Международная алгебраическая конференция, посвящённая 70-летию А. В. Яковлева, 19–24 июня 2010, тезисы докладов, Санкт Петербург, 2010.

105. *D. V. Lytkina*, On periodic groups saturated by direct products of finite simple groups. Finite Groups and their Automorphisms, International workshop, Istanbul, 2011.

106. *D. V. Lytkina*, On periodic groups saturated by direct products of finite simple groups. The first biennial international Group Theory conference 2011, Johor Bahru, Malaysia, 2011.

107. *Д. В. Лыткина*, Периодические группы с заданными свойствами конечных подгрупп. Алгебра и геометрия, тезисы междунар. конф. по алгебре и геометрии, посвящённой 80-летию со дня рождения А. И. Старостина, Екатеринбург, 2011.

108. *Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров*, О периодических группах с разрешимыми конечными подгруппами. Алгебра и геометрия, тезисы междунар. конф. по алгебре и геометрии, посвящённой 80-летию со дня рождения А. И. Старостина, Екатеринбург, 2011.

109. *D. V. Lytkina*, Periodic groups with given properties of finite subgroups. Алгебра и математическая логика: материалы межд. конф., посвящённой 100-летию со дня рождения проф. В. В. Морозова, Казань, 2011.