

На правах рукописи

ЛИТВИНОВ

Павел Сергеевич

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХСЛОЙНЫХ
ПОТОКОВ В ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ,
СЕПАРАТОРАХ И ТЕЧЕНИЯХ ПО СХЕМЕ
М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА**

Специальность: 05.13.18 — Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск 2009

Работа выполнена в Федеральном государственном образовательном
учреждении высшего профессионального образования
"Сибирский федеральный университет"

Научный руководитель: к. ф.–м. н., доцент
Вайнштейн Исаак Иосифович

Официальные оппоненты: д.ф.–м.н., профессор
Белолипецкий Виктор Михайлович
д.т.н., профессор
Охорзин Владимир Афанасьевич

Ведущая организация: Алтайский государственный технический
университет имени И. И. Ползунова, г. Барнаул

Защита состоится 13 ноября 2009 г. в 16⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета ДМ 212.099.06 при Сибирском федеральном университете по адресу: ауд. Ж. 115, ул. академика Киренского, 26, г. Красноярск, 660074

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета по адресу г. Красноярск, ул. академика Киренского, 26, ауд. Г 274.

Автореферат разослан ____ октября 2009 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Р. Ю. Царев

Общая характеристика работы

Актуальность исследований. Математическое моделирование является основополагающим методом при решении задач в различных областях науки и техники. Имеется большое количество трудов выдающихся ученых по построению и исследованию таких моделей. Но и в этих моделях имеется большое количество нерешенных задач, представляющих значительный математический и практический интерес. В известной модели отрывных течений, предложенной академиком М. А. Лаврентьевым, нерешенными задачами являются: обоснование и качественные свойства модели для случая произвольной завихренности. Следует отметить, что модель М. А. Лаврентьева объясняет неприемлемость захоронения радиоактивных отходов на дне океана.

При изучении процессов, происходящих в смазочном пространстве жидкостных и газовых подшипников скольжения, а также в межтарелочном пространстве сепараторов и родственных ему аппаратах, имеются математические модели, приводящие к уравнениям Рейнольдса и системе уравнений Е. М. Гольдина. Как в первом, так и во втором случаях предполагается однородность потока, когда вязкость и плотность постоянны.

В Красноярском государственном техническом университете разработаны конструкции радиальных комбинированных подшипников, у которых рабочий зазор состоит из несущего газового слоя и слоев смазки (А.С.1042400 СССР, МКИ F 16 C 17 16, Комбинированный подшипник А. С. Тюриков, С.Н. Шатохин, В. М. Грук. — 2586690. — Заявл.3.09.78.). Они отличаются повышенной несущей способностью, пониженной вибрационной активностью, надежностью работы и долговечностью использования. Такие подшипники находят применение в системах связи и навигации для улучшения качества и условий эксплуатации оборудования, а также для вентиляции отсеков надводных и подводных кораблей, что позволяет значительно снизить шум и вибрацию.

При изучении процессов, происходящих в сепараторах, процесс осаждения частиц рассматривается в однородном потоке. В действительности, например, в аппаратах разделителях образуются две жидкости (в молочных—обрат и сливки). Поэтому целесообразно рассматривать модель, когда в ме-

жтарелочном пространстве происходит движение двух несмешивающихся жидкостей с различными плотностями и вязкостями.

Таким образом, приходим к актуальной задаче построения, обоснования и исследования новых математических моделей двухслойных сред с различными свойствами, позволяющих получать расчеты основополагающих числовых характеристик:

для комбинированного подшипника (несущий слой состоит из слоя газа и жидкости или из двух несмешивающихся жидкостей с различными вязкостями и плотностями)— определение скорости, давления, несущей способности, момента трения;

для сепараторов и родственных ему аппаратов— определение скорости, давления, критического диаметра осаждаемых частиц.

А также к задаче по обоснованию модели М. А. Лаврентьева в ограниченной области при произвольной завихренности и исследованию ее качественных свойств.

Цель работы

Разработка общего подхода к построению и исследованию математических моделей неоднородного потока жидкости. В рамках указанной цели были поставлены **следующие задачи:**

1. Построение и исследование математической модели комбинированного несущего слоя для подшипников бесконечной длины, когда несущий слой состоит из газа и жидкости или двух несмешивающихся жидкостей с различными плотностями и вязкостями.
2. Построение и исследование новой математической модели неоднородного потока в межтарелочном пространстве сепаратора, состоящего из двух несмешивающихся жидкостей с различными плотностями и вязкостями.
3. Обобщение формулы Бремера для критического диаметра осаждаемой частицы в случае равенства плотностей сред.
4. Исследование модели М. А. Лаврентьева в случае произвольной завихренности.
5. Создание численных методов и программ для расчета и оптимизации основных характеристик построенных моделей.

Основные результаты диссертации:

1. Разработана математическая модель комбинированного несущего слоя для подшипников бесконечной длины, когда несущий слой состоит из газа и жидкости или двух несмешивающихся жидкостей с различными плотностями и вязкостями.
2. Построена новая математическая модель неоднородного потока в межтарелочном пространстве сепаратора, состоящего из двух несмешивающихся жидкостей с различными плотностями и вязкостями.
3. Получено обобщение формулы Бремера для критического диаметра осаждаемой частицы в случае равенства плотностей сред.
4. Обоснована модель М. А. Лаврентьева в случае произвольной завихренности и на модельных примерах доказан эффект неединственности течения. В случае, когда завихренность экспоненциальная функция от функции тока получен явный вид двух решений с вихревыми зонами.
5. Создан комплекс программ по расчету и оптимизации основных характеристик модели газожидкостного подшипника. Составлена программа, позволяющая находить линию раздела жидких сред и компоненты скоростей в межтарелочном пространстве сепаратора. Созданы схемы, позволяющие строить различные численные методы нахождения приближенных решений задач модели.

Теоретическая значимость работы отражается в дальнейшем развитии теории математического моделирования, заключающейся в расширении классов моделей неоднородных потоков жидкости, а также в обобщении полученных ранее результатов в теории гидродинамических процессов тонкослойного сепарирования, гидродинамической теории смазки. Обоснована модель М. А. Лаврентьева отрывных течений в ограниченной области с произвольной завихренностью.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования полученных результатов для исследования широкого класса задач анализа и оптимизации работы комбинированного подшипника и сепаратора. Схема обоснования течения жидкости по модели М. А. Лаврентьева да-

ет возможность составления комплекса программ для нахождения численного решения конкретных прикладных задач отрывных течений. Проведенные численные эксперименты по сравнению полученных теоретических данных с экспериментальными показали хорошую согласованность модели с реально действующим подшипником, как в количественном, так и в качественном поведении.

Методы исследования. При построении математических моделей использовалась теория гидродинамических процессов тонкослойного сепарирования и гидродинамическая теория смазки, модели движения вязкой жидкости со свободными границами, теория уравнений математической физики и функциональный анализ.

Программы расчетов числовых характеристик моделей написана на языке программирования Delphi. Для вспомогательных расчетов и предоставления их результатов в графическом виде использовалась система Maple.

Достоверность и обоснованность обеспечена строгой математической постановкой, сравнением результатов расчетов с результатами полученными другими методами и авторами, а также путем сравнения полученных основных числовых характеристик газожидкостных подшипников с соответствующими экспериментальными данными, полученными на опытно-экспериментальной установке.

Апробация работы

Основные положения и результаты работы докладывались на научных конференциях и семинарах:

III Международный семинар–совещание "Кубатурные формулы и их приложения" Уфа–Красноярск, КГТУ, 1995,

Международная конференция "Математические модели и методы их исследования" Красноярск, КГУ, 1997,

V Международный семинар–совещание "Кубатурные формулы и их приложения" Красноярск, КГТУ, 1999,

Международная научная конференция "Современные проблемы математического моделирования и вычислительных технологий" Красноярск, СФУ, 2008,

Научные семинары кафедры "Высшая математика" Алтайского государственного технического университета имени И. И. Ползунова,

Научные семинары кафедр "Прикладная математика" "Технология машиностроения" КГТУ,

Семинары кафедры математического обеспечения дискретных устройств и систем (МОДУС) Сибирского федерального университета.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников и приложения. Основное содержание изложено на 142 страницах текста, содержит 36 рисунков, 1 таблицу. Список использованных источников включает 99 наименований.

Основное содержание работы

Во введении отмечается актуальность математического моделирования и исследования двухслойных потоков в подшипниках скольжения, в сепараторах и в отрывных течениях по схеме М. А. Лаврентьева.

Определены цели и задачи диссертационной работы. Раскрыта новизна полученных результатов, практическая значимость и апробированность представленных математических моделей.

В первой главе приводится обзор моделей и основных результатов при изучении однородных однослойных потоков в смазочном пространстве жидкостных и газовых подшипников бесконечной длины и в межтарелочном пространстве сепараторов, а также модели М. А. Лаврентьева отрывных течений.

В параграфе 1.1 рассмотрены математические модели отдельно газовых и жидкостных подшипников бесконечной длины. Выписаны соответствующие им уравнения Рейнольдса.

Газовые и жидкостные подшипники имеют свои преимущества и недостатки. Газовые подшипники позволяют достичь высокую скорость вращения, но по сравнению с жидкостными имеют малую несущую способность.

От подшипников, использующихся в современных механизмах, требуются особые характеристики: бесшумность, долговечность, пониженная вибрационная активность, надежность работы. Одной из конструкций таких подшипников является подшипник с комбинированным несущим слоем, состоящий из слоя газа и слоя жидкости. Такие подшипники приносят с собой положительные характеристики чисто газовых и чисто жидкостных подшипников. В связи с этим представляет интерес построение математических моделей комбинированных подшипников.

В параграфе 1.2 рассматривается математическая модель Е. М. Гольдина, которая является основополагающей при изучении однородных межтарелочных потоков и осаждения частиц в межтарелочном пространстве сепаратора.

Эффективность сепарирования определяется диаметром критической частицы, которая начинает осаждение в худших условиях— на максимальном расстоянии от поверхности тарелки. Она осаждается на тарелку в критическом положении— на выходе из межтарелочной щели, вблизи стока.

В случае осесимметрического потока диаметр критической частицы определяется по формуле Г. И. Бремера

$$d_{кр} = \sqrt{\frac{27Q\mu \operatorname{tg} \alpha}{\pi \rho_{эф}(r_2^2 - r_1^2)\omega^2}},$$

здесь Q — общий расход жидкости в межтарелочном пространстве, $\rho_{эф}$ — эффективная плотность частицы, r_1 и r_2 — радиусы входа и выхода жидкости из межтарелочного пространства, μ — динамическая вязкость, α — угол конусности тарелок, ω — угловая скорость вращения тарелки.

Для наиболее типичных видов разделения и очистки, производимых с помощью аппаратов, родственных жидкостному сепаратору (очистка топлива и масел от воды и загрязнений, обезжиривание или осветление молока и др.), в отличие от требования однородности всего потока можно принять, что в межтарелочном пространстве образуются два потока с различными постоянными вязкостями μ_j и плотностями ρ_j , ($j = 1, 2$). В связи с этим представляет интерес изучение таких потоков и осаждения в них частиц.

В параграфе 1.3 приводится модель М. А. Лаврентьева отрывных течений в ограниченной области, которая приводит к задаче.

В ограниченной плоской области D с границей Γ требуется найти непрерывно-дифференцируемое решение уравнения

$$\Delta\psi = \begin{cases} \omega, & \text{если } \psi < 0, \\ 0, & \text{если } \psi > 0, \end{cases} \quad (1)$$

при краевом условии

$$\psi|_{\Gamma} = \varphi(s) \geq 0, \quad (2)$$

где завихренность $\omega > 0$, $\psi(x, y)$ — функция тока, $V_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $V_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ — компоненты скорости.

Гармоническая функция $\psi_0(x, y)$, удовлетворяющая условию (2), в силу принципа максимума, положительна в области D и является решением уравнения (1). Это решение назовем тривиальным, оно соответствует потенциальному течению во всей области. Возможность течения по схеме М. А. Лаврентьева определяется существованием в области течения вихревой зоны, где функция тока $\psi(x, y)$ отрицательна.

В работах М. А. Гольдштика и И. И. Вайнштейна доказано существование нетривиального решения (течение с вихревой и потенциальной зоной) и получены явные оценки параметров задачи, при которых это решение существует.

Условие постоянства завихренности ω является точным для предельного стационарного движения вязкой жидкости в области, ограниченной замкнутой линией тока, когда вязкость стремится к нулю.

В общем случае идеальной жидкости завихренность является произвольной функцией от функции тока. В связи с этим представляет интерес изучение схемы М. А. Лаврентьева на общий случай завихренности.

Во второй главе построена математическая модель комбинированного подшипника с двухкомпонентным несущим слоем. Это комбинированный подшипник с двумя различными несмешивающимися жидкостными слоями (с различными постоянными вязкостями и плотностями) и комбинированный подшипник, состоящий из жидкостного и газового несущего слоя. Выводится система уравнений и дополнительные условия для давления, скоростей и линии раздела слоев в смазочном пространстве рассматриваемых комбинированных подшипников. Полученная модель обобщает модели отдельно жидкостного и отдельно газового подшипника, которые описываются соответствующими уравнениями Рейнольдса.

Рассмотрено приближенное решение полученной задачи, отдельно для комбинированного жидкостного и газожидкостного подшипника разложением в ряды по относительному эксцентриситету и по отношению вязкостей для комбинированного жидкостного подшипника. В явном виде получено решение линеаризованной задачи. В линейном приближении получены явные формулы основных числовых характеристик (несущая способность, моменты трения на шипе и втулке), и созданы программы по их расчету.

Приведены результаты численных экспериментов по сравнению полу-

ченных формул с известными экспериментальными данными газожидкостного подшипника.

В параграфе 2.1 построена математическая модель двухслойного несущего слоя цилиндрического подшипника бесконечной длины.

Рассмотрен бесконечный двухслойный ($i = 1, 2$) цилиндрический подшипник. Центр шипа радиуса R_1 в точке O_1 , центр втулки радиуса R_2 в O_2 . Шип и втулка вращаются с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 соответственно, первая среда ($i = 1$) примыкает к шипу, вторая ($i = 2$) к втулке. В случае газожидкостного подшипника, газ примыкает к шипу (рис. 1). Движение

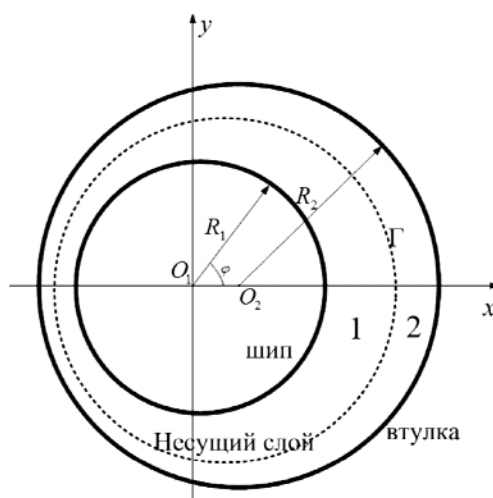


Рис. 1.

можно считать плоским между двумя эксцентрично расположенными окружностями. Рассматривается установившееся течение.

Двухслойный поток в смазочном слое представляет совместное движение двух несмешивающихся жидких сред (или жидкости и газа), контактирующих по некоторой линии (линии раздела).

Для каждого слоя записываются уравнения Навье–Стокса

$$\rho_i \frac{d\vec{V}^{(i)}}{dt} = -\text{grad}P^{(i)} + \mu_i \Delta \vec{V}^{(i)} + \left(\frac{\mu_i}{3} + \mu'_i \right) \text{grad} \text{div} \vec{V}^{(i)} \quad (3)$$

и неразрывности

$$\text{div}(\rho_i \vec{V}^{(i)}) = 0, \quad (4)$$

где $\vec{V}^{(i)}$ — вектор относительной скорости движения частицы жидкости, $P^{(i)}$ — давление, μ_i — коэффициент вязкости, ρ_i — плотность среды, μ'_i — второй коэффициент вязкости. Для газожидкостного подшипника выполнено условие

состояния

$$\frac{P^{(1)}}{\rho_1^\kappa} = \text{const},$$

где κ – показатель политропы.

Постановка граничных условий соответствует работе В. В. Пухначева "Движение вязкой жидкости со свободными границами которые для нашего случая формулируются следующим образом.

На поверхности шипа и втулки— условие прилипания:

$$\vec{V}^{(1)} = \vec{V}_{\text{шипа}}, \quad \vec{V}^{(2)} = \vec{V}_{\text{втулки}}. \quad (5)$$

Если $\Gamma : F(x, y) = 0$ линия раздела, то на линии раздела

$$\vec{V}^{(1)} = \vec{V}^{(2)}, \quad \vec{V}^{(i)} \vec{\nabla} F = 0. \quad (6)$$

Пусть $\mathbf{P}^{(i)}$ - тензор напряжений в i -м слое, тогда

$$\mathbf{P}^{(1)} \vec{n} - \mathbf{P}^{(2)} \vec{n} = 2\sigma H \vec{n} + \nabla_\Gamma \sigma, \quad (7)$$

здесь H — средняя кривизна поверхности раздела сред, $\nabla_\Gamma = \nabla - \vec{n}(\vec{n} \cdot \nabla)$ — векторный дифференциальный оператор (поверхностный градиент), σ — коэффициент поверхностного натяжения.

В параграфе 2.2 приводится вывод основных уравнений модели.

С учетом геометрии несущего слоя, переходим в полярную систему координат

$$r = R_1 + h\zeta, \quad 0 \leq \zeta \leq H_0(\varphi), \quad H_0(\varphi) = 1 + \varepsilon \cos \varphi, \quad \varepsilon = \frac{|O_1 O_2|}{h}, \quad h = R_2 - R_1$$

и к безразмерным величинам

$$V_\varphi^{(i)} = V_0 \tilde{V}_\varphi^{(i)}, \quad V_r^{(i)} = V_0 \frac{h}{R_1} \tilde{V}_r^{(i)}, \quad P^{(i)} = P_a \frac{R_1^2}{h^2} \tilde{P}^{(i)},$$

где $V_0 = \omega_0 R_1$, $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$, P_a — атмосферное давление.

Учитывая малость $\frac{h}{R_1}$, характерного параметра для подшипников, система уравнений (3), (4) и граничные условия (5) – (7) упрощаются.

Приходим к следующей задаче. Требуется найти функции $\tilde{V}_\varphi^{(i)}(\zeta, \varphi)$, $\tilde{V}_r^{(i)}(\zeta, \varphi)$, $\tilde{P}^{(i)}(\zeta, \varphi)$ и уравнение линии раздела $\zeta = \zeta_a(\varphi)$ из уравнений:

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}_\varphi^{(i)}}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{k_i} \frac{\partial \tilde{P}^{(i)}}{\partial \varphi}, \quad k_i = \frac{\mu_i V_0}{P_a R_1}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}^{(i)}}{\partial \zeta} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial(\rho_i \tilde{V}_r^{(i)})}{\partial \zeta} + \frac{\partial(\rho_i \tilde{V}_\varphi^{(i)})}{\partial \varphi} = 0. \quad (10)$$

При следующих граничных условиях:

$$\text{на шипе}(\zeta = 0) \quad \tilde{V}_\varphi^{(1)} = \Omega_1 = \frac{\omega_1 R_1}{V_0}, \quad \tilde{V}_r^{(1)} = 0, \quad (11)$$

$$\text{на втулке}(\zeta = H_0) \quad \tilde{V}_\varphi^{(2)} = \Omega_2 = \frac{\omega_2 R_2}{V_0}, \quad \tilde{V}_r^{(2)} = \frac{\omega_2 R_2}{V_0} \frac{\partial H_0}{\partial \varphi}, \quad (12)$$

на линии раздела ($\zeta = \delta(\varphi)H_0$)

$$\tilde{V}_\varphi^{(1)} = \tilde{V}_\varphi^{(2)} = V_a, \quad \tilde{V}_r^{(i)} = \tilde{V}_\varphi^{(i)} \frac{\partial \zeta_a}{\partial \varphi}, \quad \tilde{P}^{(1)} = \tilde{P}^{(2)} = P, \quad \mu_1 \frac{\partial \tilde{V}_\varphi^{(1)}}{\partial \zeta} = \mu_2 \frac{\partial \tilde{V}_\varphi^{(2)}}{\partial \zeta}. \quad (13)$$

Здесь $V_a(\varphi)$ — неизвестная скорость \tilde{V}_φ на линии раздела.

Задача (8)—(13) сводится к единой системе уравнений, описывающей двухслойные потоки комбинированных жидкостных и газожидкостных подшипников, которую можно назвать уравнениями Рейнольдса для комбинированных подшипников

$$\frac{dP}{d\varphi} = \frac{\gamma_1}{\delta^2 H_0^2} \left(V_a + \Omega_1 + \frac{C_1}{f(P)\delta H_0} \right), \quad (14)$$

$$\frac{dP}{d\varphi} = \frac{\gamma_2}{(1-\delta)^2 H_0^2} \left(V_a + \Omega_2 + \frac{C_2}{(1-\delta)H_0} \right), \quad (15)$$

$$3 \frac{dP}{d\varphi} = \frac{\gamma_1}{\delta H_0^2} \left(\Omega_1 - V_a \right) + \frac{\gamma_2}{(1-\delta)H_0^2} \left(\Omega_2 - V_a \right), \quad (16)$$

где

$$f(P) = \begin{cases} P^{\frac{1}{\kappa}} - & \text{для газожидкостного} \\ 1 - & \text{для жидкостного,} \end{cases} \quad \gamma_i = \frac{6\mu_i R_i V_0}{P_a h^2} - \text{число Гэррисона,}$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В параграфе 2.3 выписываются дополнительные условия: в случае комбинированного жидкостного смазочного слоя— два условия

$$P(\varphi + 2\pi) = P(\varphi), \quad \int_0^{2\pi} \delta H_0 d\varphi = 2\pi k, \quad (17)$$

в случае, когда смазочный слой состоит из газа и жидкости— три условия

$$P(\varphi + 2\pi) = P(\varphi), \quad \int_0^{2\pi} \delta H_0 d\varphi = 2\pi k, \quad \int_0^{2\pi} P^{\frac{1}{2}} \delta H_0 d\varphi = 2\pi k. \quad (18)$$

$k = S_1/S$ — относительная площадь слоя примыкающего к шпцу.

В параграфе 2.4 ищется решение задачи (14)—(16), (18) для газожидкостного подшипника разложением в степенные ряды по относительному эксцентриситету при $\kappa = 1$ (процесс происходящей в газовом слое можно считать изотермическим, и показатель κ близок к единице).

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \delta_n(\varphi), & P &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n P_n(\varphi), & V_a &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n V_{an}(\varphi), \\ C_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_{1n}, & C_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_{2n}. \end{aligned}$$

В явном виде получены формулы решения в линейном приближении по ε .

В параграфах 2.5.1, 2.5.2 ищется решение задачи (14)—(16), (17) для комбинированного жидкостного подшипника двумя методами— разложением в ряды по отношению вязкостей и разложением в ряды по относительному эксцентриситету, аналогично газожидкостному подшипнику. В линейном приближении получены явные формулы решения.

В параграфе 2.6 в линейном приближении получены интегральные характеристики рассматриваемых типов подшипников.

Удельная нагрузка комбинированного газожидкостного подшипника

$$S = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon R \pi}{\sqrt{Q^2 + 1}},$$

которая при $k = 1$ совпадает с известной формулой удельной нагрузки газового подшипника (выражения R и Q выписаны в явном виде).

Моменты трения на шпце и втулке, соответственно

$$S_{m1} = \frac{\mu_1 \pi R_1 (V_{a0} \omega_0 - \omega_1)}{P_a h k}, \quad S_{m2} = \frac{\mu_2 \pi R_1 (\omega_2 - V_{a0} \omega_0)}{P_a h (1 - k)}.$$

Для комбинированного жидкостного подшипника поддерживающая сила

$$F = \frac{12\pi \mu_2 (\omega_1 + \omega_2) R_1^3 \varepsilon}{h^2 ((1 - k)^2 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} (2(1 - k)^2 + \varepsilon^2)}, \quad F = R_1 P_a \varepsilon R \pi$$

при решении разложением по отношению вязкостей и относительному эксцентриситету соответственно, которые при $k = 0$ совпадают с известной формулой поддерживающей силы жидкостного подшипника с однородным несущим слоем (с вязкостью μ_2).

В параграфе 2.7 по созданной программе приведены расчетные примеры геометрии смазочного слоя с линией раздела сред газожидкостных подшипников. Приводится сравнение подъемных сил комбинированного газожидкостного и газового подшипника.

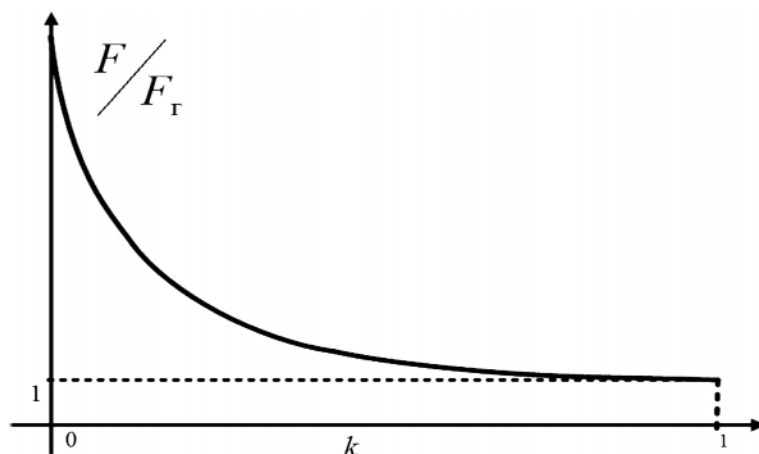


Рис. 2.

На рис. 2 показана зависимость отношения подъемной силы комбинированного подшипника F к подъемной силе газового подшипника F_r в зависимости от k при следующих значениях: $\omega_1 = 260 \text{ с}^{-1}$, втулка неподвижна $\omega_2 = 0 \text{ с}^{-1}$, $R_1 = 3,4926 \text{ см}$, $R_2 = 3,5028 \text{ см}$, $h = R_2 - R_1 = 102 \text{ мкм}$, $\mu_1 = 1,9 \cdot 10^{-10} \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}$, $\mu_2 = 1,02 \cdot 10^{-3} \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}$. При любом $0 < k < 1$ отношение больше единицы, причем при увеличении k отношение подъемных сил уменьшается и стремится к единице. Это связано с увеличением доли газа и уменьшением доли жидкой смазки в смазочном пространстве. При уменьшении k отношение возрастает. $k = 1$ соответствует чисто газовому подшипнику, $k = 0$ — жидкостному.

Также приведены результаты сравнения полученных численных характеристик рассматриваемой модели газожидкостного подшипника с экспериментальными данными действующего газожидкостного подшипника. Результаты показали достаточную их близость, как в количественном, так и в качественном поведении.

Для иллюстрации приведен рис. 3, на котором показана зависимость

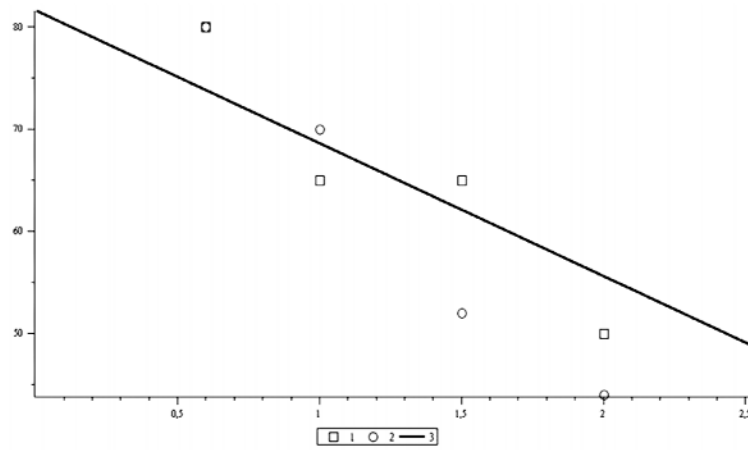


Рис. 3.

толщины несущего газового смазочного слоя газожидкостного подшипника от подъемной силы при данных рис. 2 и $k = 0,8$. Экспериментальные данные представлены точками, а теоретические — прямой.

Созданная программа позволяет строить линии уровня подъемной силы в зависимости от конструктивных параметров подшипников, что позволяет решать различные конструктивные и оптимизационные задачи при проектировании подшипников.

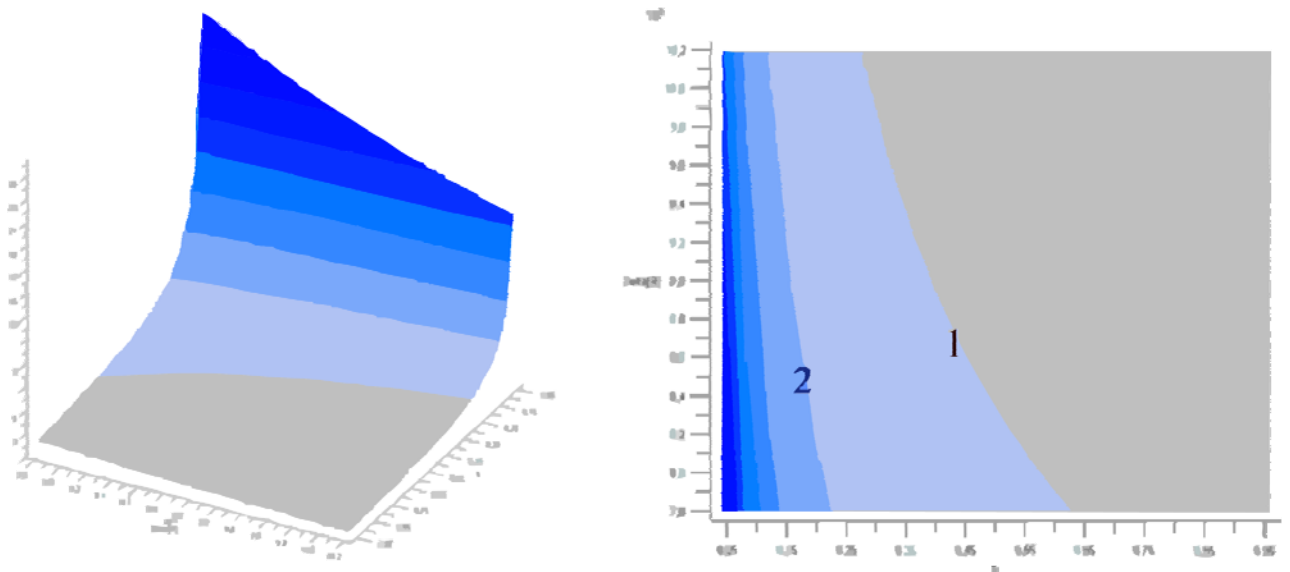


Рис. 4. Зависимость подъемной силы от k и h , линии уровня

Пример. Из рис.4, на которых показана зависимость подъемной силы от k и h , делаем вывод: подшипнику с подъемной силой равной трем единицам соответствует линия уровня 1, подъемной силе шесть единиц соответствует линия уровня 2, и т.д. Конкретные значения k и h , соответствующие выбранной линии уровня, определяются исходя из экономичности и технологичности. Например, для подшипника с подъемной силой равной трем единицам и

разностью радиуса втулки и шипа 90 микрон требуется значение $k = 0.405$ (жидкий слой должен занимать 0.595 площади смазочного пространства).

В третьей главе построена математическая модель двухслойного течения жидкостей с различными постоянными плотностями и вязкостями в межтарелочном пространстве сепаратора. Выводится система уравнений для давления и поверхности раздела слоев. Эта система обобщает известные уравнения Е. М. Гольдина для однородного потока. Доказано существование такого течения в осесимметрическом случае, получена формула критического диаметра осаждаемой частицы, которая обобщает формулу Бремера и совпадает с ней для однослойного однородного осесимметрического потока. Представлены графики линии раздела сред.

В параграфах 3.1 - 3.3 приводится математическая постановка задачи.

Для каждого слоя записывается система уравнений Е. М. Гольдина и краевые условия, аналогичные краевым условиям модели комбинированного подшипника. Слой с индексом $j = 1$ примыкает к верхней тарелке сепаратора

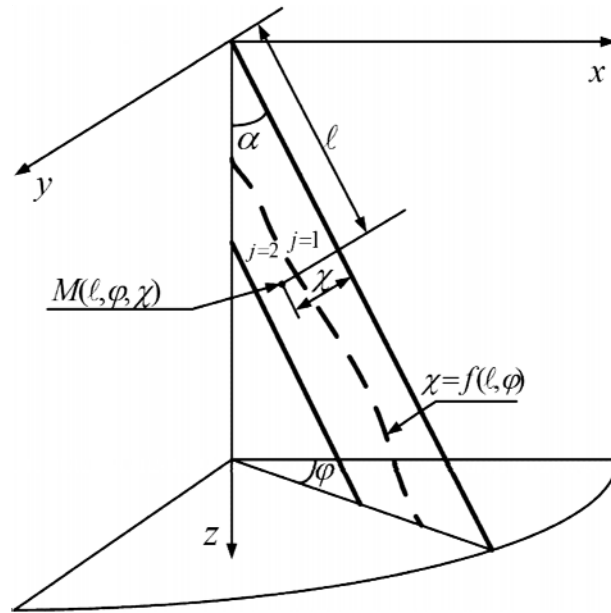


Рис. 5. Биконическая система координат

тора (рис. 5). После перехода к безразмерным величинам и линеаризации по малому параметру $\frac{h}{\delta_0}$, получена система уравнений (в биконической системе координат) для нахождения поверхности раздела $\chi = f(\ell, \varphi)$, давления P_j и скоростей U_j, V_j, W_j

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial \chi^2} + 2\lambda_j^2 V_j = 2\lambda_j^2 \frac{\partial P_j}{\partial \ell},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_j}{\partial \chi^2} - 2\lambda_j^2 U_j &= 2\lambda_j^2 \frac{1}{\ell \sin \alpha} \frac{\partial P_j}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial P_j}{\partial \chi} &= 0, \\ \frac{\partial(\ell U_j)}{\partial \ell} + \frac{1}{\ell \sin \alpha} \frac{\partial(\ell V_j)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\ell W_j)}{\partial \chi} &= 0\end{aligned}$$

с граничными условиями: на поверхности тарелок

$$U_1 = V_1 = W_1 = 0 \text{ при } \chi = 0 \text{ и } U_2 = V_2 = W_2 = 0 \text{ при } \chi = 1,$$

на поверхности раздела Γ ($\chi = f(\ell, \varphi)$)

$$\begin{aligned}V_1 = V_2, \quad U_1 = U_2, \quad W_1 = W_2, \quad -U_j \frac{\partial f}{\partial \ell} - \frac{1}{\ell \sin \alpha} V_j \frac{\partial f}{\partial \varphi} + W_j &= 0, \\ \mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial \chi} = \mu_2 \frac{\partial U_2}{\partial \chi}, \quad \mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial \chi} = \mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial \chi}, \quad \rho_1 \left(P_1 + \frac{\ell^2}{2\eta_0} \right) = \rho_2 \left(P_2 + \frac{\ell^2}{2\eta_0} \right),\end{aligned}$$

здесь $\lambda_j = h \sqrt{\frac{\omega \sin \alpha}{\nu_j}}$ — безразмерный параметр, U_j, V_j, W_j — безразмерные составляющие скорости движения жидкости в продольном, окружном и поперечном направлениях, P_j — безразмерное динамическое давление, (ℓ, χ, φ) — безразмерные биконические координаты, h — расстояние между двумя соседними тарелками, ω — угловая скорость вращения тарелок, ν_j — кинематическая вязкость, μ_j — динамическая вязкость, ρ_j — плотность, $\eta_0 = \frac{V_0}{r_0 \omega}$ — безразмерный параметр, $r_0 = \delta_0 \sin \alpha$, $V_0 = \frac{Q}{2\pi r_0 h}$ — характерная скорость, Q — общий расход жидкости в межтарелочном пространстве, α — угол конусности, δ_0 — длина образующей тарелки.

В параграфе 3.4 получено представление компонент скоростей V_j, U_j через давление и поверхность раздела

$$\begin{aligned}V_j &= \bar{M}_j \frac{\partial P_1}{\partial \ell} + \bar{N}_j \frac{1}{\ell \sin \alpha} \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} + \bar{m}_j \frac{k-1}{\eta_0} \ell, \\ U_j &= \bar{N}_j \frac{\partial P_1}{\partial \ell} - \bar{M}_j \frac{1}{\ell \sin \alpha} \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} + \bar{n}_j \frac{k-1}{\eta_0} \ell,\end{aligned}$$

($k = \rho_1/\rho_2$) и проведена редукция рассматриваемой задачи к системе дифференциально-функциональных уравнений

$$\bar{N}_1^0 L P_1 + \left(\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \bar{M}_j^0}{\partial \varphi} + \ell \frac{\partial \bar{N}_j^0}{\partial \ell} \right) \frac{\partial P_1}{\partial \ell} + \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{\ell \sin \alpha} \frac{\partial \bar{N}_j^0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \bar{M}_j^0}{\partial \ell} \right) \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} +$$

$$+\frac{k-1}{\eta_0} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \bar{m}_j^0}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\bar{n}_j^0 \ell^2)}{\partial \ell} \right) = 0, \quad (j = 1, 2)$$

относительно давления P_1 и поверхности раздела $\chi = f(\ell, \varphi)$, которая входит в коэффициенты системы дифференциальных уравнений.

$$LP_1 = \frac{\partial}{\partial \ell} \left(\ell \frac{\partial P_1}{\partial \ell} \right) + \frac{1}{\ell \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 P_1}{\partial \varphi^2}$$

— оператор Лапласа, записанный в биконической системе координат по переменным ℓ и φ , с учетом, что P_1 не зависит от χ . $\bar{N}_j^0, \bar{M}_j^0, \bar{n}_j^0, \bar{m}_j^0$ интегралы от $\bar{N}_j, \bar{M}_j, \bar{n}_j, \bar{m}_j$ по χ , для $j = 1$ от 0 до $f(\ell, \varphi)$, а для $j = 2$ от $f(\ell, \varphi)$ до 1.

$$\bar{M}_1 = M_1 + Am_1 - Bn_1, \quad \bar{N}_1 = N_1 + Bm_1 + An_1,$$

$$\bar{M}_2 = kM_2 + Am_2 - Bn_2, \quad \bar{N}_2 = kN_2 + Bm_2 + An_2, \quad \bar{m}_1 = Cm_1 - Dn_1,$$

$$\bar{m}_2 = M_2 + Cm_2 - Dn_2, \quad \bar{n}_2 = N_2 + Dm_2 + Cn_2, \quad \bar{n}_1 = Dm_1 + Cn_1,$$

$$A = \frac{(kM'_2 - \mu M'_1)(\mu m'_1 - m'_2) + (kN'_2 - \mu N'_1)(\mu n'_1 - n'_2)}{(\mu m'_1 - m'_2)^2 + (\mu n'_1 - n'_2)^2},$$

$$B = \frac{(kN'_2 - \mu N'_1)(\mu m'_1 - m'_2) - (kM'_2 - \mu M'_1)(\mu n'_1 - n'_2)}{(\mu m'_1 - m'_2)^2 + (\mu n'_1 - n'_2)^2}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$C = \frac{M'_2(\mu m'_1 - m'_2) + N'_2(\mu n'_1 - n'_2)}{(\mu m'_1 - m'_2)^2 + (\mu n'_1 - n'_2)^2}, \quad D = \frac{N'_2(\mu m'_1 - m'_2) - M'_2(\mu n'_1 - n'_2)}{(\mu m'_1 - m'_2)^2 + (\mu n'_1 - n'_2)^2}.$$

N'_j, M'_j, n'_j, m'_j производные N_j, M_j, n_j, m_j по χ , при $\chi = f(\ell, \varphi)$.

$$M_1 = 1 - \frac{\text{ch } \lambda_1(f - \chi) \cos \lambda_1 \chi + \text{ch } \lambda_1 \chi \cos \lambda_1(f - \chi)}{\text{ch } \lambda_1 f + \cos \lambda_1 f},$$

$$N_1 = -\frac{\text{sh } \lambda_1(f - \chi) \sin \lambda_1 \chi + \text{sh } \lambda_1 \chi \sin \lambda_1(f - \chi)}{\text{ch } \lambda_1 f + \cos \lambda_1 f},$$

$$m_1 = \frac{\text{ch } \lambda_1(f + \chi) \cos \lambda_1(f - \chi) - \text{ch } \lambda_1(f - \chi) \cos \lambda_1(f + \chi)}{\text{ch } 2\lambda_1 f - \cos 2\lambda_1 f},$$

$$n_1 = \frac{\text{sh } \lambda_1(f + \chi) \sin \lambda_1(f - \chi) - \text{sh } \lambda_1(f - \chi) \sin \lambda_1(f + \chi)}{\text{ch } 2\lambda_1 f - \cos 2\lambda_1 f},$$

$$M_2 = 1 - \frac{\text{ch } \lambda_2(1 - \chi) \cos \lambda_2(\chi - f) + \text{ch } \lambda_2(\chi - f) \cos \lambda_2(1 - \chi)}{\text{ch } \lambda_2(1 - f) + \cos \lambda_2(1 - f)},$$

$$N_2 = -\frac{\text{sh } \lambda_2(1 - \chi) \sin \lambda_2(\chi - f) + \text{sh } \lambda_2(\chi - f) \sin \lambda_2(1 - \chi)}{\text{ch } \lambda_2(1 - f) + \cos \lambda_2(1 - f)},$$

$$m_2 = \frac{\text{ch } \lambda_2(2 - f - \chi) \cos \lambda_2(\chi - f) - \text{ch } \lambda_2(\chi - f) \cos \lambda_2(2 - f - \chi)}{\text{ch } 2\lambda_2(1 - f) - \cos 2\lambda_2(1 - f)},$$

$$n_2 = \frac{\text{sh } \lambda_2(2 - f - \chi) \sin \lambda_2(\chi - f) - \text{sh } \lambda_2(\chi - f) \sin \lambda_2(2 - f - \chi)}{\text{ch } 2\lambda_2(1 - f) - \cos 2\lambda_2(1 - f)}.$$

В параграфе 3.5 рассмотрен осесимметрический случай задачи. Задача сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} \ell \frac{\partial P_1}{\partial \ell} \bar{N}_1^0 + \bar{n}_1^0 \frac{k-1}{\eta_0} \ell^2 = C_1, \\ \ell \frac{\partial P_1}{\partial \ell} \bar{N}_2^0 + \bar{n}_2^0 \frac{k-1}{\eta_0} \ell^2 = C_2, \end{cases}$$

где неизвестная поверхность раздела входит в \bar{N}_j^0 и \bar{n}_j^0 , C_1, C_2 — относительные расходы жидкости в первом и втором слоях соответственно. Доказано существование решения задачи.

Разработана программа, позволяющая находить линию раздела жидких сред и компоненты скоростей в межтарелочном пространстве сепаратора. Для иллюстрации приведены графики поверхностей раздела сред (рис. 6)

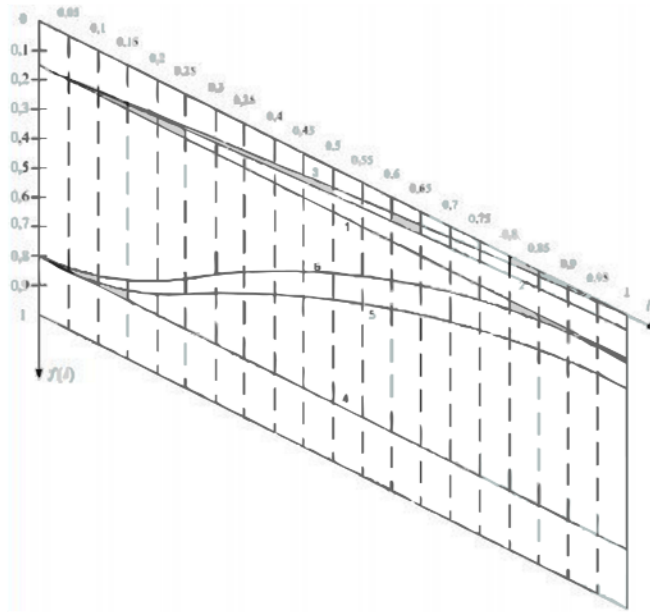


Рис. 6.

при $\mu_1 = 0,0085$ Па·с, $\mu_2 = 0,0058$ Па·с, $\omega = 120$ рад/с, $\alpha = 30^\circ$, $\eta_0 = 0,008$, $\rho_2 = 886$ кг/м³, $h = 0,0005$ м; для 1-3 $C_1 = 0,1$; для 4-6 $C_1 = 0,8$; для 1, 4 $\rho_1 = \rho_2 = 886$ кг/м³; для 2, 5 $\rho_1 = 1286$ кг/м³; для 3, 6 $\rho_1 = 1686$ кг/м³.

На рисунке вязкость слоя $j = 1$, примыкающего к верхней тарелке сепаратора μ_1 , больше вязкости слоя $j = 2$, примыкающего к нижней тарелке μ_2 . В реальности этот случай представляет собой процесс осветления.

В параграфе 3.6 рассмотрено осаждение частиц и получен аналог формулы Бремера— диаметра осаждаемой критической частицы (наименьший

диаметр частиц, которые могут быть выделены из сепарируемой жидкости) для осесимметрического случая в двухслойном потоке при равенстве плотностей.

$$d_{кр} = \sqrt{\frac{27\bar{\mu}Q \operatorname{tg} \alpha}{\pi (r_2^3 - r_1^3) \rho_{эф} \omega^2}}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2}{Q}, \quad \rho_{эф} = \rho_1 - \rho_ч,$$

где r_1 и r_2 — радиусы входа и выхода жидкости из межтарелочного пространства, Q_j — расход жидкости в j -ом слое, $\rho_ч$ — плотность осаждаемой частицы.

В четвертой главе для случая завихренности $\omega = F(\psi)$, где $F(\psi)$ — произвольная функция от функции тока $\psi(x, y)$ и $F(\psi) > 0$, обоснована модель М. А. Лаврентьева отрывных течений (существование течения с вихревой и потенциальной зоной). На модельных примерах установлена возможность двух различных течений.

В параграфе 4.1 рассмотрена модель М. А. Лаврентьева отрывных течений, которая, в случае течения в ограниченной области с произвольной завихренностью, приводит к следующей задаче.

В ограниченной области D требуется найти непрерывно—дифференцируемое решение уравнения

$$\Delta \psi = \begin{cases} F(\psi), & \text{если } \psi < 0, \quad F(\psi) > 0, \\ 0, & \text{если } \psi > 0 \end{cases} \quad (19)$$

при краевом условии

$$\psi|_{\Gamma} = \varphi(s) \geq 0, \quad (\Gamma - \text{граница области } D). \quad (20)$$

Гармоническая в области D функция $\psi(x, y)$, удовлетворяющая краевому условию (20), является тривиальным решением рассматриваемой задачи и соответствует потенциальному течению во всей области D .

Доказаны две теоремы существования нетривиального решения задачи (решение с вихревой и потенциальной зоной), которые обосновывают существование течений по схеме М. А. Лаврентьева.

Теорема 1. Пусть $F(\psi)$ невозрастающая, непрерывно—дифференцируемая ограниченная функция от ψ , и

$$0 < \omega_0 \leq F(\psi) \leq K,$$

C_R — круг максимального радиуса, который можно вписать в область D (без

ограничения общности можно считать, что его центр находится в начале координат) и $\max\varphi(s) = C$, тогда при условии

$$\omega_0 \geq \frac{4Ce}{R^2} \quad (21)$$

задача (19), (20) имеет нетривиальное решение.

Теорема 2. Пусть $F(\psi)$ непрерывно—дифференцируемая ограниченная функция от ψ , тогда в условиях теоремы 1, задача (19), (20) имеет нетривиальное решение. Условие невозрастания функции не требуется.

В параграфе 4.2 приведены модельные примеры с нелинейной завихренностью, подтверждающие эффект существования двух различных течений с вихревой и потенциальной зоной.

Теорема 3. Пусть D круг радиуса R и $\varphi(s) = C$. Функция $F(\psi)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда при выполнении неравенства

$$\omega_0 > \frac{4Ce}{R^2}$$

задача (19), (20) имеет два нетривиальных решения.

Рассмотрен модельный пример с неограниченной завихренностью $\omega = e^\psi$, если область D круг радиуса R и граничная функция $\varphi(s) = C$. Доказано, что при выполнении неравенства

$$C < \max_{a \in [0, R]} \left(2 \ln \frac{R}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{2}} - 1 \right) \right) \quad (22)$$

задача имеет два нетривиальных решения, которые выписаны в явном виде:

$$\psi(r) = \begin{cases} \ln \frac{4}{\left(\left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{2}} - 1 \right) \frac{r^2}{a^2} - \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{2}} + 1 \right) \right)^2}, & \text{если } 0 \leq r \leq a, \\ \frac{C}{\ln \frac{R}{a}} \ln \frac{r}{a}, & \text{если } a \leq r \leq R. \end{cases}$$

За a берется соответственно два корня уравнения

$$2 \ln \frac{R}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{2}} - 1 \right) - C = 0.$$

Показано, что условие (22) выполняется если

$$C < \frac{1}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{2}} - 1 \right).$$

В приложение вынесены решения систем линейных уравнений из параграфа 3.4.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Построена единая математическая модель комбинированных двухслойных жидкостных и газожидкостных подшипников, обобщающая модели отдельно жидкостного и отдельно газового подшипника. В линейном приближении по относительному эксцентриситету и по отношению вязкостей получены решения задачи и явные формулы основных числовых характеристик (формула линии раздела сред, несущая способность, моменты трения на шипе и втулке).
2. Построена новая математическая модель потока в межтарелочном пространстве сепаратора, обобщающая известную модель Е. М. Гольдина для однородного потока. Для осесимметрического случая доказано существование такого течения, получена формула критического диаметра осаждаемой частицы, которая обобщает формулу Бремера однородного потока.
3. Обоснована модель М. А. Лаврентьева отрывных течений в ограниченной области с произвольной завихренностью. На модельных примерах установлен эффект неединственности течения.
4. Разработан комплекс программ по исследованию математических моделей комбинированных подшипников и сепараторов. Проведенные численные эксперименты показали хорошую согласованность построенной математической модели с действующими газожидкостными подшипниками. Созданы схемы, позволяющие строить различные численные методы нахождения приближенных решений задач модели М. А. Лаврентьева.

Таким образом, создан общий подход к построению и исследованию математических моделей неоднородного потока жидкости, применительно к комбинированным двухслойным жидкостным и газожидкостным подшипникам и сепараторам, так же обоснована модель М. А. Лаврентьева отрывных течений в ограниченной области с произвольной завихренностью.

Публикации по теме диссертации в журналах из списка ВАК

1. *Литвинов П. С.* Течение двухслойных сред с кусочно-постоянными плотностями и вязкостями в межтарелочном пространстве сепаратора. /Литвинов П. С., Вайнштейн И. И.// Вестник Красноярского государственного университета. Красноярск. КГУ, 2006, с. 140–147.
2. *Литвинов П. С.* Модель М. А. Лаврентьева о склейке вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости./Литвинов П. С., Вайнштейн И. И.// Вестник Сиб ГАУ, №3(24), 2009 с. 7–9.

Публикации в других изданиях

3. *Литвинов П. С.* Линеаризованная задача о течении двухслойных жидкостей с кусочно–постоянными вязкостями в межтарелочном пространстве сепаратора. /Литвинов П. С., Вайнштейн И. И.//Вопросы математического анализа, Красноярск, КГТУ, 1997, с. 21–32.
4. *Литвинов П. С.* Гидродинамика 2-х слойных потоков с кусочно–постоянными вязкостями и плотностями в межтарелочном пространстве сепаратора и осаждение частиц./Литвинов П. С., Вайнштейн И. И.// Международная конф. Математические модели и методы их исследования, Красноярск, КГУ, 1997, с. 50–51.
5. *Литвинов П. С.* Краевая задача гидродинамической теории двухкомпонентной газодинамической смазки и ее решение разложением в ряды по относительному эксцентриситету. /Литвинов П. С., Вайнштейн И. И.// V Международный семинар–совещание "Кубатурные формулы и их приложения" КГТУ, Красноярск, 1999, с. 9–10.
6. *Литвинов П. С.* Краевая задача со свободной границей гидродинамической теории двухкомпонентной смазки. /Литвинов П. С.// Вопросы математического анализа, Красноярск. КГТУ, 1999, с. 86–99.
7. *Литвинов П. С.* Об одной задаче сопряжения жидких двухслойных сред с кусочно-постоянными вязкостями и плотностями в межтарелочном пространстве сепаратора. /Литвинов П. С., Вайнштейн И. И.// III Международный семинар–совещание "Кубатурные формулы и их приложения" КГТУ, Уфа–Красноярск, 1999, с. 8.

8. *Литвинов П. С.* Решение одной краевой задачи гидродинамической теории двухкомпонентной смазки разложением по относительному эксцентриситету. /Литвинов П. С.// V Международный семинар–совещание "Кубатурные формулы и их приложения" КГТУ, Красноярск, 1999. с. 22–23.
9. *Литвинов П. С.* Модель газожидкостного подшипника скольжения и решение разложением в ряды по относительному эксцентриситету. /Литвинов П. С., Вайнштейн И. И.// Вопросы математического анализа, Красноярск, КГТУ, 2006, с. 13–22.
10. *Литвинов П. С.* Течение двухслойных сред с кусочно-постоянными плотностями и вязкостями в межтарелочном пространстве сепаратора. /Литвинов П. С., Вайнштейн И. И.// Труды КГТУ, Красноярск, КГТУ, 2006, с. 214–223.
11. *Литвинов П. С.* Задача о склейке вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости. /Литвинов П. С., Вайнштейн И. И.// Вопросы математического анализа, Красноярск, КГТУ, 2007, с. 13–22.
12. *Литвинов П. С.* Модельная задача о склейке вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости с неограниченной завихренностью. /Литвинов П. С., Вайнштейн И. И.// Вопросы математического анализа, Красноярск, КГТУ, 2007, с. 22–25.
13. *Литвинов П. С.* Задача о склейке вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости. /Литвинов П. С., Вайнштейн И. И.// Международная научная конференция "Современные проблемы математического моделирования и вычислительных технологий" СФУ, 2008. с. 7.
14. *Литвинов П. С.* Течение двухслойных сред с кусочно-постоянными плотностями и вязкостями и осаждение частиц в межтарелочном пространстве сепаратора. /Литвинов П. С., Вайнштейн И. И.// ТОХТ 2008, том 42, № 6, с. 1–7.