На правах рукописи

Кытманов Алексей Александрович

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМОВ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

05.13.17 — теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Красноярск 2010

Работа выполнена в Сибирском федеральном университете

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор М.В. Носков

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор В.И. Быков

доктор физико-математических наук, профессор С.В. Знаменский

доктор физико-математических наук, доцент К.В. Сафонов

Ведущая организация: Вычислительный центр РАН, г. Москва

Защита состоится «25» июня 2010 г. в 14.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.11 при Сибирском федеральном университете по адресу 660074, г. Красноярск, ул. Киренского, 26, ауд. УЛК 115.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета по адресу 660074, г. Красноярск, ул. Киренского, 26, ауд. Г 2-74.

Автореферат разослан «24» мая 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат технических наук, доцент Л. И. Покидышева

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Компьютерная алгебра является относительно новым направлением, возникшим при взаимодействии ряда математических дисциплин (в первую очередь, алгебры) и информатики. В широком смысле под этим словосочетанием понимаются любые символьные (в отличие от численных) вычисления, выполняемые на компьютере.

В настоящее время компьютерная алгебра находит применение в таких областях науки, как математика, численные методы, гидромеханика, прикладная небесная механика, робототехника, и в других. Одним из ее применений в теории информации является использование ее методов в манипулировании многоуровневыми иерархическими структурами для оптимизации аналитических вычислений.

За три последних десятилетия было создано огромное число систем компьютерной алгебры, большинство из которых широко применяется в научных вычислениях, при решении прикладных проблем, в индустрии. В зависимости от набора стандартных задач, которые могут быть решены при помощи данных систем, последние подразделяются на универсальные (или, иначе, системы общего назначения, такие как `MAPLE`, `MATHEMATICA`, `MAXIMA` и др.) и специализированные.

Одним из наиболее значимых типов задач, решаемых при помощи универсальных систем является класс задач по вычислениям с полиномами от нескольких переменных над указанными полями и кольцами (нахождение наибольшего общего делителя, точного значения корней многочленов в радикалах, разложение на множители, вычисление дискриминантов и результантов, базисов Грёбнера и т.п.), а также решение систем алгебраических (полиномиальных) уравнений и других систем нелинейных уравнений, сводящихся к ним подстановками элементарных функций.

Однако в системах общего назначения на сегодняшний день отсутствует аппарат исследования систем неалгебраических уравнений.

Одним из наиболее эффективных инструментов для исследования таких систем является формула многомерного логарифмического вычета. Первые попытки в создании математического аппарата и алгоритмов компьютерной алгебры для исследования систем нелинейных уравнений с помощью многомерного логарифмического вычета были даны в работах В.И.Быкова, А.М.Кытманова, М.З.Лазмана (1991, 1998), Т.А.Осетровой (1996), З.Е.Потаповой (2005). В данных работах формула многомерного логарифмического вычета применялась для создания алгоритма исключения неизвестных из систем алгебраических уравнений. Этот модифицированный метод исключения неизвестных, предложенный Л.А.Айзенбергом (1977), был затем развит В.И.Быковым, А.М.Кытмановым, М.З.Лазманом (1991, 1998). Но для систем неалгебраических уравнений (содержащих, например, голоморфные функции) такие разработки отсутствовали.

Неалгебраические системы уравнений возникают в различных областях знания. В частности, в процессах, описываемых системами дифференциальных уравнений с правыми частями, разложимыми в ряд Тейлора, актуален вопрос об определении числа стационарных состояний в множествах определенного вида (и их локализации). Эта проблема приводит к задачам построения алгоритмов для определения числа корней заданной системы уравнений в разных множествах, определения самих корней, исключения части неизвестных из системы. В частности в монографиях В.И.Быкова, А.М.Кытманова, М.З.Лазмана (1991, 1998) приведены многочисленные примеры из химической кинетики, где работают алгоритмы исключения неизвестных.

Цель диссертации

Целью диссертационной работы является создание теоретической основы для разработки алгоритмов исключения неизвестных из систем неалгебраических уравнений и алгоритмов построения интегральных представлений и вычетов в многомерном комплексном пространстве.

Методика исследования

В основу исследования положены методы компьютерной алгебры, теории функций многих комплексных переменных, алгебраической геометрии.

Научная новизна

Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем.

1. Получены многомерные аналоги рекуррентных формул Ньютона для систем неалгебраических уравнений.

2. Создан аппарат для разработки алгоритмов вычисления степенных сумм для систем мероморфных функций с бесконечным множеством корней.

3. Процедура построения алгоритмов исключения неизвестных на основе многомерного логарифмического вычета, созданная и примененная ранее для алгебраических систем, распространена на широкий класс неалгебраических систем.

4. Создан аппарат для разработки алгоритмов построения интегральных представлений в полиэдрах многомерного комплексного пространства по веерам торических многообразий.

5. Получены аналоги многомерного логарифмического вычета и интегральная реализация локального вычета.

6. Выведены типовые алгоритмы компьютерной алгебры и дана их компьютерная реализация в системе компьютерной алгебры `MAPLE`.

Теоретическая и практическая ценность

Теоретическая ценность работы состоит в создании теоретической основы для разработки алгоритмов исключения неизвестных из систем неалгебраических уравнений и алгоритмов построения интегральных представлений в полиэдрах многомерного комплексного пространства по веерам торических многообразий. Все теоретические результаты снабжены подробными доказательствами.

Практическая ценность работы состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы для вычисления степенных сумм систем неалгебраических уравнений и сумм некоторых кратных рядов, исключения неизвестных из систем неалгебраических уравнений, получения новых интегральных представлений и многомерных вычетов, вычисления групп когомологий торических многообразий.

Апробация работы

Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на следующих международных и всероссийский конференциях: международной конференции «Симметрия и дифференциальные уравнения» (Красноярск, Россия, 2000); международной конференции «Математические модели и методы их исследования» (Красноярск, Россия, 2001); международной конференции «Многомерный комплексный анализ» (Красноярск, Россия, 2002); международной конференции-школе по геометрии и анализу (Новосибирск, Россия, 2002); международной конференции «Геометрический анализ и его приложения», (Волгоград, Россия, 2004); международной математической конференции «Теория функций. Дифференциальные уравнения. Вычислительная математика» (Уфа, Россия, 2007); международной конференции «Анализ и геометрия на комплексных многообразиях» (Красноярск, Россия, 2007); школе-конференции по алгебраической геометрии для молодых математиков (Ярославль, Россия, 2008); международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений» (Новосибирск, Россия, 2008).

Результаты работы докладывались на научном семинаре по компьютерной алгебре факультета вычислительной математики и кибернетики и НИИ ядерной физики имени Д.В.Скобельцына МГУ имени М.В.Ломоносова (г. Москва), научном семинаре института программных систем РАН (г. Переславль-Залесский), а также на научных семинарах института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета (г. Красноярск).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-23], из них 1 монография [19], 8 работ [8, 9, 13–15, 18, 20, 21] в ведущих отечественных и международных рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК, 12 публикаций [1–7, 10–12, 16, 17] в других научных изданиях. Кроме того, автором получены два свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [22, 23].

Личный вклад автора

Результаты диссертации получены автором самостоятельно. В соавторстве выполнена одна работа [20], в которой вклады авторов равнозначны.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения и списка литературы из 89 наименований, содержит 7 рисунков. Общее число страниц диссертационной работы — 228, в том числе 23 страницы — приложения.

Содержание работы

В первой главе приводятся математические сведения, теоремы и формулы, на которых основана диссертационная работа. Глава состоит из шести параграфов.

Первый параграф содержит теоретические сведения о многомерном логарифмическом вычете, а также формулы для вычисления логарифмического вычета для различных систем нелинейных уравнений.

Во втором параграфе приведены алгоритмы исключения неизвестных. Он содержит классическую схему исключения неизвестных. Также здесь приведен модифицированный метод исключения неизвестных, основанный на формуле многомерного логарифмического вычета.

В третьем параграфе приведены теоретические сведения о ядрах интегральных представлений Коши и Бохнера-Мартинелли и их связи между собой с помощью формул усреднения, а также о связи ядра Бохнера-Мартинелли с формой объема Фубини-Штуди на проективном пространстве.

Четвертый параграф посвящен определению и способу построения торического многообразия по комбинаторной структуре — вееру. Торические многообразия обобщают комплексные проективные пространства, и с их помощью во второй главе будет построено семейство интегральных представлений в многомерных комплексных пространствах.

В пятом параграфе дано определение групп когомологий Чеха пучков голоморфных функций и дифференциальных форм на многообразии.

В шестом параграфе приведен обзор литературы и дается подробное описание системы компьютерной алгебры `MAPLE`, использовавшейся для компьютерной реализации разработанных в диссертации алгоритмов.

Вторая глава состоит из шести параграфов и посвящена получению аналогов рекуррентных формул Ньютона для систем неалгебраических уравнений и построению алгоритма исключения неизвестных из таких систем.

Рассматривается система функций $f_1(z),\ f_2(z), \ldots, f_n(z)$, голоморфных в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, и имеющих вид

$$f_j(z) = z^{\beta^j} + Q_j(z), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\beta^j = (\beta_1^j, \beta_2^j, \ldots, \beta_n^j)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $z^{\beta^j} = z_1^{\beta_1^j} \cdot z_2^{\beta_2^j} \cdots z_n^{\beta_n^j}$ и $\|\beta^j\| = \beta_1^j + \beta_2^j + \ldots + \beta_n^j = k_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Функции Q_j разлагаются в окрестности нуля в ряд Тейлора, сходящийся абсолютно и равномерно, вида

$$Q_j(z) = \sum_{\|\alpha\| \geqslant 0} a_\alpha^j z^\alpha, \tag{2}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geqslant 0$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, а $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n}$. В дальнейшем будем считать, что степени всех мономов (по совокупности переменных), входящих в Q_j, строго больше, чем k_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ ($\|\alpha\| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > k_j$).

Рассмотрим циклы $\gamma(r) = \gamma(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, являющиеся остовами поликругов:

$$\gamma(r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_s| = r_s, s = 1, 2, \ldots, n\}, \quad r_1 > 0, \ldots, r_n > 0.$$

В некоторой достаточно малой окрестности нуля система

$$f_j(z) = 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{3}$$

может иметь корни только на координатных плоскостях $\{z : z_s = 0\}$, $s = 1, 2, \ldots, n$ (по принципу максимума для голоморфных функций).

Также при достаточно малых r_j определены интегралы вида

$$\sigma_\delta = \int\limits_{\gamma(r)} \frac{1}{z^\delta} \cdot \frac{df}{f} = \int\limits_{\gamma(r_1, r_2, \ldots, r_n)} \frac{1}{z_1^{\delta_1} \cdot z_2^{\delta_2} \cdots z_n^{\delta_n}} \cdot \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

где $\delta_j \in \mathbb{Z}$. По теореме Коши-Пуанкаре эти интегралы не зависят от $(r_1, \ldots, r_n)$.

Введем обозначения:

$$J_f = \det \left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k} \right) \text{ — якобиан системы (1)},$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} \beta_1^1 & \dots & \beta_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^n & \dots & \beta_n^n \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\alpha^1\dots\alpha^n} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix},$$

$\mathfrak{K}$ — линейный функционал, сопоставляющий многочлену Лорана его свободный член.

Теперь мы можем сформулировать основные утверждения первого параграфа.

Теорема 2.1. *Для системы уравнений (3), где функции $f_j(z)$ определены равенствами (1) и (2), справедливы следующие рекуррентные формулы Ньютона:*

$$\begin{gathered} \sigma_{\delta-\beta^1-\dots-\beta^j} + \sum_{k_1+\dots+k_j<\|\alpha^1+\dots+\alpha^j\|<\|\delta\|} a^1_{\alpha^1}\dots a^j_{\alpha^j}\sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j} + \\ + \sum_{\delta=\alpha^1+\dots+\alpha^j} a^1_{\alpha^1}\dots a^j_{\alpha^j}\Delta_\beta = \mathfrak{K}\Bigg[\sum_{\|\alpha^1\|\geqslant 0}\dots\sum_{\|\alpha^n\|\geqslant 0} a^1_{\alpha^1}\dots a^n_{\alpha^n}\Delta_{\alpha^1\dots\alpha^n}\times \\ \times \sum_{p_{j+1}+\dots+p_n\leqslant\|\delta\|+n-k_1-\dots-k_j} \frac{(-1)^{p_{j+1}+\dots+p_n} Q_{j+1}^{p_{j+1}}\dots Q_n^{p_n}}{z^{\delta+I+\beta^{j+1}(p_{j+1}+1)+\dots+\beta^n(p_n+1)-\alpha^1-\dots-\alpha^n}}\Bigg]. \end{gathered} \tag{4}$$

Вычисляя правую часть равенства (4), получим

Следствие 2.1. *Для системы уравнений (3), где функции $f_j(z)$ определены равенствами (1) и (2), справедливы следующие рекуррентные формулы Ньютона:*

$$\begin{gathered} \sigma_{\delta-\beta^1-\dots-\beta^n} + \sum_{k_1+\dots+k_n<\|\alpha^1+\dots+\alpha^n\|<\|\delta\|} a^1_{\alpha^1}\dots a^n_{\alpha^n}\sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^n} + \\ + \sum_{\delta=\alpha^1+\dots+\alpha^n} a^1_{\alpha^1}\dots a^n_{\alpha^n}(\Delta_\beta - \Delta_{\alpha^1\dots\alpha^n}) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

В частности, если функции $f_j(z)$ имеют вид $f_j(z) = 1 + Q_j(z)$, $j = 1, 2, \dots, n$, где $Q_j(z)$ определены равенствами (2), то для них формула (5) запишется в виде

$$\sigma_\delta + \sum_{0<\|\alpha^1+\dots+\alpha^n\|<\|\delta\|} a^1_{\alpha^1}\dots a^n_{\alpha^n}\sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^n} - \sum_{\delta=\alpha^1+\dots+\alpha^n} a^1_{\alpha^1}\dots a^n_{\alpha^n}\Delta_{\alpha^1\dots\alpha^n} = 0.$$

Далее показывается, что формулы (5) позволяют также решать обратную задачу: вычислять коэффициенты системы (1) через интегралы σ_δ.

Предложение 2.1. *Пусть даны все σ_δ системы (1), тогда коэффициенты этой системы определяются однозначно с помощью формулы (5).*

Далее, пусть

$$J_\delta^j = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma(r)} \frac{df}{z^\delta f_{j+1}\cdot\ldots\cdot f_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma(r)} \frac{f_1\cdot\ldots\cdot f_j df}{z^\delta f_1\cdot\ldots\cdot f_n}, \quad j=0,\ldots,n.$$

Теорема 2.2. *Для системы (1) справедливы формулы,* $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$J_\delta^j + \sum_{\|\alpha\|\geqslant 0} a_\alpha^{j+1} J^j_{\delta-\alpha+\beta^{j+1}} + \ldots + \sum_{\|\alpha\|\geqslant 0} a_\alpha^n J^{n-1}_{\delta-\alpha+\beta^{j+1}+\ldots+\beta^n} =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{\alpha^1+\ldots+\alpha^n=\delta+\beta^{j+1}+\ldots+\beta^n} a^1_{\alpha^1}\ldots a^n_{\alpha^n}\Delta_{\alpha^1\ldots\alpha^n}, & \text{\textit{при} } \alpha^1+\ldots+\alpha^n = \\ & = \delta+\beta^{j+1}+\ldots+\beta^n \\ 0, & \text{\textit{иначе.}} \end{cases}$$

В заключительном пункте параграфа описывается класс систем, для которых интегралы σ_δ совпадают со степенными суммами.

Пусть функции f_j имеют вид

$$f_j(z) = \frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)}, \quad j=1,2,\ldots,n, \tag{6}$$

где $f_j^{(1)}(z)$ и $f_j^{(2)}(z)$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$, разлагающиеся в бесконечные произведения (равномерно и абсолютно сходящиеся в $\mathbb{C}^n$)

$$f_j^{(1)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{js}^{(1)}(z), \quad f_j^{(2)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{js}^{(2)}(z),$$

причем каждый из сомножителей имеет форму $z^{\beta^j} + Q_j(z)$, а $Q_j(z)$ — многочлены вида

$$Q_j(z) = \sum_{\alpha\in M_j} a_\alpha^j z^\alpha, \tag{7}$$

где $\mathcal{M}_j$ — конечное множество мультииндексов такое, что при $\alpha \in \mathcal{M}_j$ координаты $\alpha_k \leqslant \beta_k^j,\ k=1,2,\ldots,n,\ k\neq j$. (Но по прежнему предполагается, что $\|\alpha\| > k_j$ для всех $\alpha \in \mathcal{M}_j$).

Для каждого набора индексов $j_1, \dots, j_n$, где $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$, и каждого набора чисел $i_1, \dots, i_n$, где $i_1, \dots, i_n$ равны 1 или 2, системы нелинейных алгебраических уравнений

$$f_{1j_1}^{(i_1)}(z) = 0, \quad f_{2j_2}^{(i_2)}(z) = 0, \; \dots, \; f_{nj_n}^{(i_n)}(z) = 0 \tag{8}$$

имеют конечное число корней, не лежащих на координатных плоскостях.

Корни всех таких систем (не лежащие на координатных плоскостях) составляют не более чем счетное множество. Перенумеруем их (с учетом кратностей): $z_{(1)}, \; z_{(2)}, \dots, z_{(l)}, \dots$. Будем предполагать, что ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{1(l)}| \cdot |z_{2(l)}| \cdots |z_{n(l)}|} \tag{9}$$

сходится.

Теорема 2.3. *Степенная сумма корней (или полюсов) вида*

$$\widehat{\sigma}_\delta = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{z_{1(l)}^{\delta_1} \cdot z_{2(l)}^{\delta_2} \cdots z_{n(l)}^{\delta_n}}, \tag{10}$$

умноженная на $(-1)^n$*, совпадает с интегралом* σ_δ*, если* $\delta_1, \dots, \delta_n$ *— положительные целые числа, а знак* ε_l *равен* $+1$*, если в систему вида (8), корень которой есть* $z_{(l)}$*, входит четное число функций* $f_{js}^{(2)}$*; и равен* -1*, если в систему вида (8) входит нечетное число функций* $f_{js}^{(2)}$.

Для системы (3), составленной из функций вида (6), точки $z_{(l)}$ являются корнями или особыми точками (полюсами).

Таким образом, если $\delta_j > 0$ для всех $j = 1, \dots, n$, то σ_δ — степенные суммы корней или полюсов системы, если же хотя бы одно из данных неравенств не выполняется, то назовем σ_δ псевдостепенными суммами.

Для каждого мультииндекса δ с фиксированной $\|\delta\|$ только конечное число псевдостепенных сумм отлично от нуля. Следовательно, формулы (5) действительно рекуррентные.

Во втором параграфе приводится алгоритм исключения неизвестных для систем неалгебраических уравнений, удовлетворяющих теореме 2.3. Для его формулировки напомним классические формулы Ньютона.

Пусть полином $P(z)$ имеет вид $P(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n$.

Обозначим через $z_1, z_2, \dots, z_n$ его нули (некоторые из них могут повторяться). Степенные суммы S_k определяются следующим образом: $S_k = z_1^k + \dots + z_n^k$.

Теорема (Рекуррентные формулы Ньютона). *Степенные суммы S_k и коэффициенты b_j связаны следующим образом:*

$$\begin{gathered} S_j + S_{j-1}b_1 + S_{j-2}b_2 + \dots + S_1 b_{j-1} + jb_j = 0, \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant n, \\ S_j + S_{j-1}b_1 + S_{j-2}b_2 + \dots + S_{j-n}b_n = 0, \text{ при } j > n. \end{gathered} \tag{11}$$

Теперь мы можем привести основной результат параграфа.

Теорема 2.4. *По теореме 2.3 для системы (3) с функциями вида (1) находятся степенные суммы $\widehat{\sigma}_\delta$. Затем по формулам (11) находятся коэффициенты Тейлора мероморфной функции*

$$F(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k.$$

Корнями и полюсами полученной мероморфной функции являются выражения корней системы (3) вида $z_{1(l)}^{\delta_1} \cdot z_{2(l)}^{\delta_2} \cdots z_{n(l)}^{\delta_n}$, тем самым произведено исключение неизвестных из системы (3).

В третьем параграфе приводится пример рекуррентного вычисления интегралов $\sigma_{(m,n)}$ с $m + n \leqslant 3$ для системы

$$\begin{cases} f_1(z) = \prod\limits_{j=1}^{\infty}(1 + a_1^j z_1 + a_2^j z_2) = 0, \\ f_2(z) = \prod\limits_{j=1}^{\infty}(1 + b_1^j z_1 + b_2^j z_2) = 0. \end{cases}$$

В четвертом параграфе рассматриваются примеры вычисления сумм кратных рядов, с помощью вычисления интегралов σ_δ и степенных сумм $\widehat{\sigma}_\delta$ для систем таких неалгебраических уравнений, для которых эти величины не совпадают, т.е. не выполняется теорема 2.3.

Так, вычисляя $\sigma_{(3,1)}$ и $\widehat{\sigma}_{(3,1)}$ для системы

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = \dfrac{\sin\sqrt{z_1}}{\sqrt{z_1}} = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z_1}{k^2\pi^2}\right) = 0, \\ f_2(z_1, z_2) = \dfrac{\sin\sqrt{z_2 - z_1}}{\sqrt{z_2 - z_1}} = \prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z_2 - z_1}{m^2\pi^2}\right) = 0, \end{cases}$$

получаем, что

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{1}{k^6(k^2 + m^2)} = \frac{131\pi^8}{113400}.$$

А для подобной системы из трех уравнений с

$$f_1 = \frac{\sin\sqrt{z_1}}{\sqrt{z_1}},\ f_2 = \frac{\sin\sqrt{z_2 - z_1}}{\sqrt{z_2 - z_1}},\ f_3 = \frac{\sin\sqrt{z_3 - z_2}}{\sqrt{z_3 - z_2}},$$

вычисляя $\sigma_{(1,1,1)}$ и $\widehat{\sigma}_{(1,1,1)}$, получим сумму тройного ряда

$$\sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k^2+m^2)(k^2+m^2+n^2)} = \frac{\pi^6}{1296}.$$

В пятом параграфе приводится алгоритм компьютерной алгебры, реализующий вычисление σ_δ по рекуррентным формулам (5). Входными данными основной процедуры являются набор функций $\{f_1, \dots, f_n\}$ и набор переменных $\{z_1, \dots, z_n\}$, от которых зависят заданные функции. Для вычисления σ_δ вплоть до некоторого порядка $\|\delta\| \leqslant q$, в качестве функций $\{f_1, \dots, f_n\}$ нужно задать тейлоровские разложения неалгебраических функций рассматриваемой системы вплоть до порядка, зависящего от q и от размерности n исходной системы.

Также в параграфе приводятся процедуры, необходимые для вычисления сумм кратных рядов.

В шестом параграфе для системы функций

$$\begin{aligned} f_i(z) = 1 &+ a^i_{(1,0,0)}z_1 + a^i_{(0,1,0)}z_2 + a^i_{(0,0,1)}z_3 + \\ &+ a^i_{(2,0,0)}z_1^2 + a^i_{(0,2,0)}z_2^2 + a^i_{(0,0,2)}z_3^2 + \\ &+ a^i_{(1,1,0)}z_1z_2 + a^i_{(1,0,1)}z_1z_3 + a^i_{(0,1,1)}z_2z_3 + h_i(z), \quad i = 1,2,3, \end{aligned}$$

где $h_i(z)$ — ряды из мономов вида $Cz_1^j z_2^k z_3^l$, где $j \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$, $j+k+l \geqslant 3$, с помощью алгоритма предыдущего параграфа вычисляются интегралы $\sigma_{(m,n,p)}$ с $m+n+p \leqslant 4$.

Третья глава состоит из семи параграфов и посвящена алгоритму построения семейства интегральных представлений в полиэдрах многомерного комплексного пространства и получению на их основе аналогов классической формулы многомерного логарифмического вычета. В основе исследования данной главы лежит теория торических многообразий.

В первом параграфе приводится построение эталонных форм в пространстве $\mathbb{C}^d$, являющихся ядрами интегральных представлений, и доказываются их основные свойства. Также здесь строятся формы объема на торических многообразиях и устанавливается их связь с эталонными формами.

Компактное торическое многообразие $\mathbb{X}$ определяется как фактор-пространство

$$\mathbb{X} := [\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)]/G,$$

где $Z(\Sigma)$ — набор координатных плоскостей (вообще говоря, разных размерностей), а $G \simeq \mathbb{C}_*^r$ — группа, изоморфная комплексному тору, причем $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$ гомотопически эквивалентно расслоению над $\mathbb{X}$ со слоем — вещественный тор

$$\mathbb{T}^r = \{\lambda \in \mathbb{C}_*^r : |\lambda_1| = 1, \ldots, |\lambda_r| = 1\}.$$

Набор плоскостей $Z(\Sigma)$ и группа G определяются по вееру Σ из $\mathbb{R}^n$, при этом G строится только по одномерным образующим

$$v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$$

веера Σ (при этом размерность G равна $r = d - n$), а в конструкции $Z(\Sigma)$ участвуют конусы других размерностей.

В случае общего веера Σ в $\mathbb{R}^n$ искомое ядро для набора $Z(\Sigma)$ в $\mathbb{C}^d$ имеет бистепень (d, n) и представляется в виде

$$\omega(\zeta) = \frac{\overline{h(\zeta)} \wedge d\zeta}{g(\zeta, \bar{\zeta})}, \tag{12}$$

где $h(\zeta)$ — $(n, 0)$-форма, а $g(\zeta, \bar{\zeta})$ — полином, имеющий подходящую полистепень однородности и обращающийся в нуль в точности на $Z(\Sigma)$. Форма $h(\zeta)$, как и группа G, определяется только по образующим $v_1, \ldots, v_d$ веера Σ, а полином g, как и $Z(\Sigma)$ — по всему вееру Σ. А именно, обозначим через V матрицу из вектор-строк $v_1, \ldots, v_d$, а через $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,r};\, j=\overline{1,d}}$ — левый аннулятор матрицы V (т.е. $A \cdot V = 0$), представляющий решетку соотношений между векторами v_i. Каждому упорядоченному набору $J = (j_1, \ldots, j_n)$, где $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant d$ поставим в соответствие минор A_J матрицы A, полученный вычеркиванием столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_n$. Тогда аналог формы Эйлера — это форма

$$h(\zeta) = \sum_J{}' (-1)^{|J|-1} A_J \zeta[J] d\zeta_J, \tag{13}$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным мультииндексам J, а через $\zeta[J]$ и $d\zeta_J$ обозначены произведения $\prod\limits_{i \notin J} \zeta_i$ и $\bigwedge\limits_{j \in J} d\zeta_j$.

Для определения полинома g (знаменателя ядра ω) предположим, что веер Σ симплициальный, примитивный и выпуклый. Пусть $\sigma_m,\ m=1,\ldots,M$ — набор всех конусов веера Σ размерности n. Для всякого конуса σ_m с образующими $v_{m_1},\ldots,v_{m_n}$ определим d целых чисел

$$\nu_l^{\sigma_m} := -\sum_{i=1}^{n} \det(v_{m_1},\ldots,v_{m_{i-1}},v_l,v_{m_{i+1}},\ldots,v_{m_n}),\ l=1,\ldots,d,$$

с помощью которых составим полином

$$g(\zeta,\bar{\zeta}) = \sum_{m=1}^{M}\left(\prod_{l=1}^{d}|\zeta_l|^{2(\nu_l^{\sigma_m}+1)}\right). \tag{14}$$

Выпуклость веера Σ обеспечивает полиномиальность g, т.е. что все мономы имеют положительные степени.

Наконец, укажем, что действие группы

$$G : (\mathbb{C}^d\setminus Z(\Sigma))\times\mathbb{C}_*^r \to \mathbb{C}^d\setminus Z(\Sigma)$$

определяется с помощью матрицы $A=(a_{ij})$ формулой

$$(\zeta,\lambda)\to(\lambda_1^{a_{11}}\cdot\ldots\cdot\lambda_1^{a_{r1}}\cdot\zeta_1,\ldots,\lambda_1^{a_{1d}}\cdot\ldots\cdot\lambda_1^{a_{rd}}\cdot\zeta_d). \tag{15}$$

Теперь мы можем сформулировать основные результаты **второй** главы. Напомним, что мы предполагаем Σ симплициальным, примитивным и выпуклым.

Теорема 3.1. *Дифференциальная (d,n)-форма*

$$\omega = \frac{\overline{h(\zeta)}\wedge d\zeta}{g(\zeta,\bar{\zeta})}$$

с формой Эйлера (13) в числителе и знаменателем (14) является ядром для набора $Z(\Sigma)$. При действии (15) ядро ω преобразуется к виду

$$\omega\to\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge\frac{d\lambda_r}{\lambda_r}\wedge\omega_0+\omega_1$$

с положительной формой (аналогом формы Фубини-Штуди)

$$\omega_0=\frac{\overline{h(\zeta)}\wedge h(\zeta)}{g(\zeta,\bar{\zeta})},$$

нулевой степени однородности по действию группы G, и формой ω_1, которая не содержит сопряженных дифференциалов $d\bar{\lambda}_i$ и в каждом из своих слагаемых имеет не более, чем $(r-1)$ дифференциалов $d\lambda_j$.

Для описания двойственного (по Де Раму) ядру ω цикла Γ определяющую роль сыграет моментное отображение и конус Кэлера для многообразия $\mathbb{X}$.

Моментное отображение $\mu : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^r$ для пространства $\mathbb{C}^d$ со стандартной симплектической структурой и действием группы G (по формуле (15)) определяется матрицей $A = (a_{ij})$ следующим образом:

$$\mu(\zeta_1, \ldots, \zeta_d) = (\rho_1, \ldots, \rho_r),$$

где

$$\begin{cases} a_{11}|\zeta_1|^2 + \ldots + a_{1d}|\zeta_d|^2 = \rho_1 \\ \vdots \\ a_{r1}|\zeta_1|^2 + \ldots + a_{rd}|\zeta_d|^2 = \rho_r. \end{cases} \tag{16}$$

При фиксированном $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_r) \in \mathbb{R}^r$ соотношения (16) определяют множество $\Gamma = \Gamma(\rho) = \mu^{-1}(\rho)$.

Цикл $\Gamma(\rho)$ обладает нужными для нас свойствами, когда ρ принадлежит конусу Кэлера многообразия $\mathbb{X}$.

Для описания конуса Кэлера напомним, что набор векторов $v_{k_1}, \ldots, v_{k_m}$ веера Σ называется примитивным, если он не определяет конуса в Σ, но любой его собственный поднабор определяет конус в Σ.

Для каждого примитивного набора векторов $v_{k_1}, \ldots, v_{k_m}$ представляем их сумму в виде

$$v_{k_1} + \ldots + v_{k_m} = c_{i_1} v_{i_1} + \ldots + c_{i_n} v_{i_n}, \quad c_{i_1}, \ldots, c_{i_n} \in \mathbb{Q}_+,$$

где $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ образуют конус, в который попадает эта сумма.

Конус Кэлера K представляет собой образ при моментном отображении (16) множества в $\mathbb{C}^d$, определенного системой неравенств

$$|\zeta_{k_1}|^2 + \ldots + |\zeta_{k_m}|^2 - c_{i_1}|\zeta_{i_1}|^2 - \ldots - c_{i_n}|\zeta_{i_n}|^2 > 0, \tag{17}$$

причем неравенств столько, сколько примитивных наборов. Неравенства (17) будем называть условиями кэлеровости.

Заметим, что для $\rho \in K$ цикл $\Gamma = \Gamma(\rho)$, определяющийся системой (16), лежит в $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$ и расслаивается над $\mathbb{X}$ со слоями, изоморфными действительным торам $\mathbb{T}^r$, а именно

$$\Gamma(\rho)/G_{\mathbb{R}} = \mathbb{X},$$

где

$$G_{\mathbb{R}} := \{(\lambda_1^{a_{11}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{r1}}, \ldots, \lambda_1^{a_{1d}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{rd}}) : |\lambda_j| = 1,\ j = 1, \ldots, r\}.$$

Отсюда, как следствие, получаем, что Γ не гомологичен нулю в $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$. Этот факт также подтверждает следующее утверждение, вытекающее из теоремы 3.1.

Следствие 3.1. $\int\limits_{\Gamma} \omega = C = (2\pi i)^r \mathrm{Vol}\,(\mathbb{X})$, *где C есть некоторая константа, отличная от нуля, а* $\mathrm{Vol}\,(\mathbb{X})$ *— положительная константа, выражающая объем торического многообразия $\mathbb{X}$ относительно формы ω_0.*

В во втором параграфе вначале доказывается интегральное представление в нуле, затем подобный результат доказывается путем усреднения ядер Коши по некоторым положительным мерам. В заключение доказывается интегральное представление в области многомерного комплексного пространства с эталонным ядром.

Предложение 3.3. (Воспроизводящее свойство ядра ω) *Пусть функция $f(\zeta)$ голоморфна в окрестности нуля U, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_r)$ принадлежит конусу Кэлера и настолько мало, что цикл $\Gamma(\rho) \subset U$. Тогда справедливо интегральное представление*

$$f(0) = \frac{1}{C} \int\limits_{\Gamma(\rho)} f(\zeta)\omega(\zeta), \tag{18}$$

где $C = \int\limits_{\mathbb{X}} \omega_0$ — константа нормировки.

В следующем пункте приводится построение положительной меры $d\sigma$ и доказывается теорема о реализации интегрального представления (18) в виде усреднения ядер Коши по мере $d\sigma$.

Введем необходимые обозначения. Прежде всего заметим, что знаменатель $g(\zeta, \bar{\zeta})$ зависит только от переменных $\varepsilon_i = \zeta_i \bar{\zeta}_i = |\zeta_i|^2,\ i = 1, \ldots, d$. Таким образом

$$g(\zeta, \bar{\zeta}) := g(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{M} \varepsilon^{\nu^{\sigma_m} + \bar{1}}, \quad \text{где} \quad \varepsilon^{\nu^{\sigma_m} + \bar{1}} = \prod_{1 \leqslant l \leqslant d} \varepsilon_l^{\nu_l^{\sigma_m} + 1}.$$

Также пусть $h(\varepsilon)$ — форма (13).

Рассмотрим n-форму

$$d\sigma(\varepsilon) = \frac{h(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = \frac{\sum\limits_J{}'(-1)^{|J|-1}A_J\varepsilon[J]d\varepsilon_J}{\sum\limits_{m=1}^{M}\varepsilon^{\nu^{\sigma_m}+\bar{1}}}.$$

Через Δ_ρ обозначим пересечение с положительным октантом $\mathbb{R}^d_+ = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d) : \varepsilon_j \geqslant 0\}$ плоскости

$$\begin{cases} a_{11}\varepsilon_1 + \ldots + a_{1d}\varepsilon_d = \rho_1 \\ \vdots \\ a_{r1}\varepsilon_1 + \ldots + a_{rd}\varepsilon_d = \rho_r. \end{cases} \tag{19}$$

Согласно предложению, доказанному в данном пункте, форма $d\sigma(\varepsilon)$ представляет собой положительную меру на Δ_ρ.

Через $\mathbb{T}^d(\varepsilon)$ обозначим вещественный тор $|z_1|^2 = \varepsilon_1, \ldots, |z_d|^2 = \varepsilon_d$.

Теорема 3.2. *Пусть $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_r)$ достаточно мало и принадлежит конусу Кэлера. Тогда справедливы равенства*

$$f(0) = \frac{1}{K(2\pi i)^d}\int\limits_{\Gamma(\rho)} f(\zeta)\omega(\zeta) = \frac{1}{K(2\pi i)^d}\int\limits_{\Delta_\rho} d\sigma(\varepsilon)\int\limits_{\mathbb{T}^d(\varepsilon)} f(\zeta)\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\wedge\ldots\wedge\frac{d\zeta_d}{\zeta_d},$$

где $K = \int_{\Delta_\rho} d\sigma(\varepsilon)$. Таким образом, интегральное представление (18) реализуется в виде усреднения формул Коши по положительной мере $d\sigma$ на Δ_ρ.

Далее рассматривается область $D = D_\rho$ в пространстве $\mathbb{C}^d$ переменных z, определенная системой неравенств

$$|z_{k_1}|^2 + \ldots + |z_{k_m}|^2 < R^{i_1,\ldots,i_n}_{k_1,\ldots,k_m}(\rho), \tag{20}$$

где каждое неравенство соответствует примитивному набору векторов $v_{k_1}, \ldots, v_{k_m}$ веера Σ, а $R^{i_1,\ldots,i_n}_{k_1,\ldots,k_m}(\rho)$ — образ выражения из левой части (17) при моментном отображении (16). И для функций, голоморфных в d-круговом полиэдре $W = W_\rho$, определенном системой неравенств

$$\begin{cases} a_{11}|\zeta_1|^2 + \ldots + a_{1d}|\zeta_d|^2 < \rho_1 \\ \vdots \\ a_{r1}|\zeta_1|^2 + \ldots + a_{rd}|\zeta_d|^2 < \rho_r, \end{cases} \tag{21}$$

доказывается

Теорема 3.3. *Пусть функция $f(\zeta)$ голоморфна в области W, определяющейся неравенствами (21), и непрерывна в замыкании W. Тогда в пересечении $D \cap W$, где область D, определяется неравенствами (20), справедливо интегральное представление*

$$f(z) = \frac{1}{C} \int\limits_{\Gamma} f(\zeta - z)\omega(\zeta), \tag{22}$$

где цикл $\Gamma = \Gamma(\rho)$ определяется равенствами (16).

В третьем параграфе рассмотрены примеры построения эталонных форм и форм объема на комплексно-двумерных торических многообразиях, заданных с помощью двумерных вееров.

Для торического многообразия, заданного полным двумерным веером с образующими $v_1{=}(1,0)$, $v_2{=}(0,1)$, $v_3{=}(-1,0)$, $v_4{=}(-1,-1)$, $v_5{=}(0,-1)$, получим, что торическое многообразие, соответствующее данному вееру есть фактор-пространство $\mathbb{C}^5 \setminus Z(\Sigma)/G$, где множество $Z(\Sigma)$ есть объединение плоскостей

$$\{\zeta_1 = \zeta_3 = 0\} \cup \{\zeta_1 = \zeta_4 = 0\} \cup \{\zeta_2 = \zeta_4 = 0\} \cup \{\zeta_2 = \zeta_5 = 0\} \cup \{\zeta_3 = \zeta_5 = 0\},$$

а группа G есть 3-параметрическая поверхность

$$\{(\lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) : \lambda_j \in \mathbb{C}_*\} \subset (\mathbb{C}_*)^5.$$

Моментное отображение $\mu : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \rho_1 = |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + |\zeta_4|^2 \\ \rho_2 = |\zeta_1|^2 + |\zeta_3|^2 \\ \rho_3 = |\zeta_2|^2 + |\zeta_5|^2 \end{cases} \tag{23}$$

при фиксированном $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in \mathbb{R}^2$ определяет цикл интегрирования $\Gamma(\rho) = \mu^{-1}(\rho)$.

Конус Кэлера для данного торического многообразия задается следующими неравенствами

$$\begin{cases} \rho_1 > \rho_2 > 0 \\ \rho_1 > \rho_3 > 0 \\ \rho_2 + \rho_3 > \rho_1. \end{cases} \tag{24}$$

При соотношениях (24) цикл Γ не пересекает $Z(\Sigma)$.

Эталонная форма в $\mathbb{C}^5 \setminus Z(\Sigma)$ (аналог формы Бохнера-Мартинелли) имеет бистепень $(5,2)$ и представляется в виде (12) с числителем

$$\begin{gathered}h(\zeta) = \\ -\zeta_3\zeta_4\zeta_5 d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 + \zeta_2\zeta_3\zeta_5 d\zeta_1 \wedge d\zeta_4 + \zeta_2\zeta_3\zeta_4 d\zeta_1 \wedge d\zeta_5 - \zeta_1\zeta_4\zeta_5 d\zeta_2 \wedge d\zeta_3 - \\ -\zeta_1\zeta_3\zeta_5 d\zeta_2 \wedge d\zeta_4 - \zeta_1\zeta_2\zeta_5 d\zeta_3 \wedge d\zeta_4 - \zeta_1\zeta_2\zeta_4 d\zeta_3 \wedge d\zeta_5 - \zeta_1\zeta_2\zeta_3 d\zeta_4 \wedge d\zeta_5.\end{gathered}$$

и знаменателем

$$\begin{gathered}g(\zeta, \bar{\zeta}) = \\ |\zeta_1|^2|\zeta_2|^4|\zeta_3|^2 + |\zeta_1|^4|\zeta_2|^2|\zeta_5|^2 + |\zeta_1|^4|\zeta_4|^2|\zeta_5|^4 + |\zeta_2|^4|\zeta_3|^4|\zeta_4|^2 + |\zeta_3|^4|\zeta_4|^6|\zeta_5|^4.\end{gathered}$$

Константу нормировки C, участвующую в интегральном представлении (18), можно выписать с помощью однократных интегралов:

$$C = (2\pi i)^3 \left[-16\pi^2 \int\limits_0^2 \frac{r}{\sqrt{(2r^2 - r^3)(r^3 + 2r^2 + 4)}} \operatorname{arctg}\left(2\sqrt{\frac{2r^2 - r^3}{r^3 + 2r^2 + 4}} \right) dr - \right.$$

$$\left. -2\pi^2 \int\limits_2^{+\infty} \frac{r}{\sqrt{(r^3 - 2r^2)(r^3 + 2r^2 + 4)}} \ln \left| \frac{\sqrt{r^3 - 2r^2} + \sqrt{r^3 + 2r^2 + 4}}{\sqrt{r^3 - 2r^2} - \sqrt{r^3 + 2r^2 + 4}} \right| dr \right].$$

В формулировке теоремы 3.3 для данного примера области D и W определяются следующими неравенствами:

$$D: \begin{cases} |z_1|^2 + |z_3|^2 < \rho_2 \\ |z_2|^2 + |z_5|^2 < \rho_3 \\ |z_1|^2 + |z_4|^2 < \rho_1 - \rho_3 \\ |z_2|^2 + |z_4|^2 < \rho_1 - \rho_2 \\ |z_3|^2 + |z_5|^2 < \rho_2 + \rho_3 - \rho_1, \end{cases} \qquad W: \begin{cases} |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + |\zeta_4|^2 < \rho_1 \\ |\zeta_1|^2 + |\zeta_3|^2 < \rho_2 \\ |\zeta_2|^2 + |\zeta_5|^2 < \rho_3. \end{cases}$$

Четвертый параграф посвящен получению формул логарифмического вычета и локального вычета на основе построенного семейства интегральных представлений.

Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ полный симплициальный веер Σ. Пусть в области G пространства $\mathbb{C}^d$ переменных ζ задано голоморфное отображение $f : G \to \mathbb{C}^d$, то есть система функций

$$w_j = f_j(\zeta_1, \ldots, \zeta_d),\ j = 1, \ldots, d. \tag{25}$$

Будем предполагать, что f имеет конечный тип над полиэдром W, определенном системой неравенств (21), то есть что полиэдр $W_f = f^{-1}(W)$ относительно компактен в G. Согласно (21) этот полиэдр задается системой неравенств

$$\begin{cases} a_{11}|f_1(\zeta)|^2 + \ldots + a_{1d}|f_d(\zeta)|^2 < \rho_1, \\ \vdots \\ a_{r1}|f_1(\zeta)|^2 + \ldots + a_{rd}|f_d(\zeta)|^2 < \rho_r, \end{cases}$$

причем мы предполагаем, что ρ взято из конуса Кэлера многообразия $\mathbb{X}$. Обозначим через $\Gamma_f = f^{-1}(\mu^{-1}(\rho))$ остов этого полиэдра.

Мы рассматриваем случай, когда множество общих нулей дискретно, поэтому каждому нулю мы можем сопоставить его кратность.

Пусть $\mu_a(f)$ — кратность нуля a системы (25), а ω — ядро интегрального представления (22).

Теорема 3.4. *Для любой функции $\varphi \in \mathcal{O}(W)$ имеет место формула логарифмического вычета*

$$\frac{1}{C} \int\limits_{\Gamma_f} \varphi(\zeta)\omega(f(\zeta)) = \sum_{a \in E} \mu_a(f)\varphi(a).$$

Понятие локального вычета, ассоциированного с регулярной последовательностью ростков голоморфных функций $f_1, \ldots, f_d$ в локальном кольце $\mathcal{O}_a$, $a \in \mathbb{C}^d$, обобщает понятие вычета Коши мероморфной функции комплексного переменного. Условие регулярности последовательности ростков равносильно тому, что росток голоморфного отображения

$$f = (f_1 \ldots, f_d) : \left(\mathbb{C}^d, a\right) \to \left(\mathbb{C}^d, 0\right),$$

имеет изолированный нуль в точке a.

Предложение 3.6. *Пусть $\omega(w)$ — ядро интегрального представления (12), а $\psi(w) = \omega(w)/dw$. Тогда локальный вычет ростка $h \in \mathcal{O}_a$, ассоциированного с регулярной последовательностью $f = (f_1, \ldots, f_d)$ в точке $a \in f^{-1}(0)$, задается формулой*

$$Res_f(h) = \frac{1}{C} \int\limits_{\Gamma_f} h(\zeta)\psi(f(\zeta)) \wedge d\zeta, \quad u \in \mathcal{O}_a,$$

где ρ лежит в соответствующем конусе Кэлера.

В пятом параграфе рассматривается задача вычисления первой группы когомологий Чеха $H^1(\mathbb{X},\mathcal{O}) = 0$ в пучке голоморфных функций на некомпактном торическом многообразии $\mathbb{X}$.

Теорема 3.5. *Гладкое некомпактное торическое многообразие $\mathbb{X}$ комплексной размерности 2 имеет $H^1(\mathbb{X},\mathcal{O}) = 0$ тогда и только тогда, когда его веер покрывает не больше полуплоскости.*

В шестом параграфе приводится алгоритм компьютерной алгебры, позволяющий построить интегральное представление (22) вееру Σ гладкого компактного торического многообразия $\mathbb{X}$. Входными данными алгоритма являются список координат векторов (одномерных образующих) веера и список множеств векторов, образующих конусы максимальной размерности веера.

В седьмом параграфе рассматриваются два примера вееров (двумерный и трехмерный), для которых соответствующие интегральные представления строятся с помощью алгоритма из предыдущего параграфа.

Наконец, в приложениях приведены программы, реализующие алгоритмы компьютерной алгебры из второй и третьей главы диссертации в пакете `MAPLE`.

Основные результаты

1. Получены многомерные аналоги рекуррентных формул Ньютона, позволяющие вычислять интегралы σ_δ, связанные со степенными суммами для систем неалгебраических уравнений.

2. Создан математический аппарат для разработки алгоритмов компьютерной алгебры для вычисления степенных сумм систем мероморфных функций с бесконечным множеством корней. Выведен типовой алгоритм вычисления степенных сумм и дана его компьютерная реализация в системе компьютерной алгебры `MAPLE`.

3. Процедура построения алгоритмов исключения неизвестных на основе многомерного логарифмического вычета, созданная и примененная ранее для алгебраических систем, распространена на широкий класс неалгебраических систем.

4. Получен класс интегральных представлений в полиэдрах многомерного комплексного пространства с эталонным ядром, ассоциированных с торическими многообразиями. Построены формы объема на торических многообра-

зиях, связанные с эталонными ядрами.

5. Создан математический аппарат для разработки алгоритмов компьютерной алгебры построения интегральных представлений по данным об одномерных образующих и конусах максимальной размерности веера торического многообразия. Выведен типовой алгоритм построения интегральных представлений и дана его компьютерная реализация в системе компьютерной алгебры `MAPLE`.

6. Для построенных интегральных представлений получены аналоги формулы многомерного логарифмического вычета и интегральные реализации локального вычета.

Значительная часть результатов диссертации получена при финансовой поддержке Министерства РФ (проект Е 00-1.0-151 в 2000–2001 гг.); РФФИ (проект 00-15-96140 в 2000–2002гг.); Красноярского краевого фонда науки (проекты 11F031M в 2003 г., 12F023M в 2004 г. и 16G091 в 2006 г.); Президента РФ (проекты НШ–1212.2003.1 в 2003-2005 гг. и НШ–2427.2008.1 в 2008-2009 гг. для ведущих научных школ, а также проект МК–914.2007.1 в 2007–2008 гг. для молодых ученых – кандидатов наук); программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/4620 в 2009–2010 гг.).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту проф. Михаилу Валериановичу Носкову за сотрудничество, внимание и поддержку на всех этапах выполнения данной работы. Автор также признателен доц. Виктору Васильевичу Работину за помощь в освоении системы компьютерной алгебры `MAPLE`.

Публикации по теме диссертации

[1] Кытманов А.А. Формы объема для некоторых торических многообразий / А.А.Кытманов // Тр. межд. конф. «Математические модели и методы их исследования». – Красноярск: ИВМ СО РАН. – 2001. – Т. 2. – С. 52-55.

[2] Кытманов А.А. Об аналоге ядра Бохнера-Мартинелли для одного торического многообразия / А.А.Кытманов // Сб. научн. тр. «Вопросы математического анализа». – Красноярск: КрасГТУ, – 2002. – Вып. 5. – С. 48-53.

[3] Кытманов А.А. Об одном интегральном представлении в $\mathbb{C}^5$ / А.А.Кытманов // Сб. научн. тр. «Многомерный комплексный анализ». – Красноярск: КрасГУ. – 2002. – С. 79-89.

[4] Кытманов А.А. Об одном классе интегральных представлений в областях пространства $\mathbb{C}^d$ / А.А.Кытманов // Материалы XL международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Математика. – Новосибирск: НГУ. – 2002. – С. 74-75.

[5] Кытманов А.А. Об интегральном представлении, связанном с торическим многообразием, которое определяется невыпуклым веером / А.А.Кытманов // Тез. межд. конф. «Многомерный комплексный анализ». – Красноярск: КрасГУ. – 2002. – С. 22-23.

[6] Кытманов А.А. Об одном классе интегральных представлений в полиэдрах пространства $\mathbb{C}^d$ / А.А.Кытманов // Тез. межд. конф.-школы по геометрии и анализу. – Новосибирск: Институт математики СО РАН. – 2002. – С. 54.

[7] Кытманов А.А. Об одном интегральном представлении, ассоциированном с торическим многообразием, заданным с помощью невыпуклого веера / А.А.Кытманов // Сб. научн. тр. «Вопросы математического анализа». – Красноярск: КрасГТУ. – 2003. – Вып. 6. – С. 124–133.

[8] Кытманов А.А. Об аналоге формы Фубини-Штуди для двумерных торических многообразий / А.А.Кытманов // Сиб. матем. журн. – 2003. – Т. 44. – № 2. – С. 358–371.

[9] Кытманов А.А. О ядрах интегральных представлений как усреднениях формул Коши / А.А.Кытманов // Вестник КрасГУ. Сер. физ.-мат. науки. – Красноярск, – 2003. – Вып. 2. – С. 3–9.

[10] Кытманов А.А. О построении формы объема для торических многообразий / А.А.Кытманов // Материалы XLI международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Математика. – Новосибирск: НГУ. – 2003. – С. 46-47.

[11] Кытманов А.А. Конструирование ядер интегральных представлений с помощью торических многообразий / А.А.Кытманов // Тезисы межд. школы-конф. «Геометрический анализ и его прил.» – Волгоград: ВолГУ – 2004. – С. 107–109.

[12] Кытманов А.А. Об одном аналоге формы Фубини-Штуди для торических многообразий / А.А.Кытманов // Сб. научн. тр. «Вопросы математического анализа». – Красноярск: КрасГТУ. – 2004. – Вып. 8. – С. 72–84.

[13] Кытманов А.А. Об аналоге представления Бохнера-Мартинелли в d-круговых полиэдрах пространства $\mathbb{C}^d$/ А.А.Кытманов // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 3. (514). – С. 52–58.

[14] Кытманов А.А. Вычисление групп когомологий гладких некомпактных двумерных торических многообразий / А.А.Кытманов // Вестник КрасГУ. Сер. физ.-мат. науки. – Красноярск, – 2005. – Вып. 1. – С. 103–105.

[15] Кытманов А.А. О некоторых обобщениях рекуррентных формул Ньютона / А.А.Кытманов // Вестник КрасГУ. Сер. физ.-мат. науки. – Красноярск, – 2006. – Вып. 9. – С. 85–91.

[16] Кытманов А.А. Об аналогах рекуррентных формул Ньютона для систем нелинейных уравнений / А.А.Кытманов // Уфимская межд. матем. конф. – Уфа: Институт математики с выч. центром УНЦ РАН. – 2007. – Т. 2. – С. 30–31.

[17] Kytmanov A.A. Integral representations and volume forms on Hirzebruch surfaces / A.A.Kytmanov // Журнал СФУ. Сер. мат. и физ. – Красноярск. – 2008. – Вып. 2. – С. 125–132.

[18] Кытманов А.А. Об аналогах рекуррентных формул Ньютона / А.А.Кытманов // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 10. – С. 40–50.

[19] Kytmanov A.A. Toric Varieties in Several Complex Variables / A.A.Kytmanov. – LAP Lambert Academic Publishing. 2009. – 100 p.

[20] Kytmanov A.A. Averaging of the Cauchy kernels and integral realization of the local residue / A.A.Kytmanov, A.Y. Semusheva // Mathematische Zeitschrift. – 2010. – V. 264. – № 1. – P. 87–98.

[21] Кытманов А.А. Алгоритм вычисления степенных сумм корней для класса систем нелинейных уравнений / А.А.Кытманов // Программирование. – 2010. – № 2. – С. 55–63.

[22] Кытманов А.А. Программа построения торического многообразия и интегрального представления по вееру торического многообразия / А.А.Кытманов. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009616471 РФ. – Заявл. 29.09.2009 (заявка № 2009615284). – Зарег. 23.11.2009 Роспатент.

[23] Кытманов А.А. Программа для вычисления степенных сумм корней систем нелинейных неалгебраических уравнений / А.А.Кытманов. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009616472 РФ. – Заявл. 29.09.2009 (заявка № 2009615285). – Зарег. 23.11.2009 Роспатент.