МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Куликов Владимир Русланович

РЕШЕНИЯ И ФОРМУЛЫ ВАРИНГА ДЛЯ СИСТЕМЫ n АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОТ n НЕИЗВЕСТНЫХ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
Цих А. К.

Красноярск – 2014

Оглавление

Введение **3**

1 Решения систем в виде гипергеометрических степенных рядов и формулы Варинга **14**

1. Формулировка теоремы о представлении решения гипергеометрическим рядом 14
2. Линеаризация системы 16
3. Доказательство теоремы 1 17
4. Формулы Варинга 23
5. Примеры 27

2 Решения систем в виде гипергеометрических интегралов Меллина-Барнса **31**

6. Преобразование Меллина мономиальной функции решения системы 32
7. Необходимое условие сходимости интеграла решения системы алгебраических уравнений 34
8. О достаточном условии сходимости интеграла 42
9. Пример 51

Литература **54**

Введение

В 1921 году Г. Меллин [1] получил формулу для решения общего приведенного алгебраического уравнения

$$y^m + x_1 y^{m_1} + \ldots + x_p y^{m_p} - 1 = 0. \tag{0.1}$$

Мы называем это уравнение *общим* по той причине, что все коэффициенты независимо друг от друга пробегают поле комплексных чисел.

Решение $y(x) = y(x_1, \ldots, x_p)$ уравнения (0.1) (которое называют *общей алгебраической функцией*) было представлено им в виде кратного интеграла (одного из представителей класса интегралов Меллина-Барнса [2]), а также в виде степенного ряда гипергеометрического типа. Ряды гипергеометрического типа представляются конечной суммой гипергеометрических рядов по Горну [3]: отношения соседних коэффициентов последних рядов являются рациональными функциями от переменных суммирования ряда.

Приведенное алгебраическое уравнение (0.1) получается фиксацией двух коэффициентов в общем алгебраическом уравнении степени m. Поскольку решение последнего уравнения биоднородно зависит от коэффициентов, такую фиксацию можно сделать при любой паре мономов, не теряя информации о решениях [4].

Краткая хронология событий, связанных с решением алгебраических уравнений, следующая. В 1757 г. Ламберт разложил корень трехчлена y^p+y+z в степенной ряд по параметру z. В дальнейшем, разложения в ряды отдельных алгебраических функций были получены Эйлером и Чебышёвым. Поскольку после работ Абеля и Галуа классическая алгебра утратила монополию на исследование алгебраических уравнений, математики обратились к аналитическим средствам, и началось изучение интегральных представлений общих алгебраических функций и их разложений в степенные ряды. При различных предположениях относительно вида исходного уравнения такие разложения были получены в работах Линдемана [5], Меллина [1] и Биркелана [6].

Подход Меллина основан на применении интегрального преобразования Меллина к решению исходного уравнения, в то время как Биркелан получил разложения решений в степенные ряды гипергеометрического типа на основе метода Лагранжа для вычисления неявной функции.

Третий (дифференциально-аналитический) подход к решению алгебраических уравнений был реализован в 1937 году К. Мэйром [7]. Он предъявил естественную систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет общая алгебраическая функция. Эта система явилась прототипом ставшей знаменитой гипергеометрической системы GKZ (Гельфанда-Капранова-Зелевинского) [8], 1989 г. Используя багаж сведений о решениях GKZ-системы, Б.Штурмфельс [9] в 2000-м году выписал все ветви общей алгебраической функции в виде так называемых гамма-рядов. Его идеи были существенно развиты М. Пассаре и А.К. Цихом в книге [4], посвященной 200-летию Н.Абеля. Также дифференциально-аналитический подход был развит в работах Т.М. Садыкова [10], [11]. Одновременно с третьим подходом развивался подход Меллина на основе теории многомерных вычетов [12]. Исследования алгебраических функций в тесной связи с теорией функций и с математической физикой проводились в статьях [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19].

С помощью таких инструментов, как гипергеометрические ряды и многомерные вычеты, был получен новый метод описания монодромии общей алгебраической функции $y(x)$, основанный на аналитических продолжениях друг в друга гипергеометрических рядов и интегралов Меллина-Барнса [20] (2012).

Переход от скалярного уравнения (0.1) к системе уравнений был начат в статье И.А. Антиповой [21], где она, следуя подходу Меллина, получила решение для нижнетреугольной системы алгебраических уравнений, когда первое уравнение зависит только от первой неизвестной y_1, второе от первых двух y_1, y_2 и т.д., последнее n-е зависит от всех n неизвестных $y_1, \ldots, y_n$. Отметим, что нижнетреугольные системы играют важню роль в задачах о суперпозиции алгебраических функций [22], поскольку n-я координата y_n решения такой системы есть последовательная суперпозиция всех предыдущих координат.

Подход Меллина состоит в следующем. Вначале с помощью линеаризации уравнения (0.1) вычисляется преобразование Меллина для решения, затем на основе формулы обращения для этого преобразования, получается интегральное представление (в виде кратного интеграла Меллина-Барнса) для решения. В свою очередь, применяя теорию вычетов, интегральное представление сводится к ряду гипергеометрического типа.

Следует заметить, что применение подхода Меллина к более широкому классу систем, чем нижнетреугольные, сопряжено с определенными трудностями. А именно, результаты исследований данной диссертации показали, что формальный интеграл Меллина-Барнса для более общих систем, как правило, имеет пустую область сходимости. Поэтому потребовалось обосновать справедливость предсказанной В.А. Степаненко [23] формулы для решений систем в виде степенного ряда и привести ее к более совершенной (регуляризованной) форме. При этом, несмотря на имеющийся алгоритм Нильсон-Пассаре-Циха [24] для нахождения области сходимости интеграла Меллина-Барнса, оставался открытым вопрос о нахождении критерия сходимости гипергеометрического интеграла, представляющего решение общей системы алгебраических уравнений.

Цель настоящей диссертации — получить более совершенную формулу в виде ряда гипергеометрического типа для решения системы общих алгебраических уравнений, найти критерий сходимости гипергеометрического интеграла для решения, и в качестве применения получить многомерный аналог формул Варинга для степенных сумм корней системы.

В диссертации рассматривается приведенная система n уравнений

$$y_j^{m_j} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} x_\lambda^{(j)} y^\lambda - 1 = 0, \; j = 1, \ldots, n, \tag{0.2}$$

от n неизвестных $y = (y_1, \ldots, y_n)$, где набор показателей $\Lambda^{(j)} \subset \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ фиксирован, а все коэффициенты $x_\lambda^{(j)}$ – переменные. Разумеется предполагается, что множество $\Lambda^{(j)}$ в j-м уравнении не содержит точек $\lambda = (0, \ldots, m_j, \ldots, 0)$ и $\lambda = 0$, являющихся показателями выделенных мономов $y_j^{m_j}$ и y^0 с фиксированными коэффициентами 1 и -1. Несложными алгебраическими процедурами к виду (0.2) сводится любая система n полиномиальных уравнений от n неизвестных [25].

Обозначим через Λ дизъюнктную сумму $\bigsqcup \Lambda^{(j)}$, и пусть N — число коэффициентов в системе (0.2) (то есть мощность множества Λ). Показатели λ мономов $y^\lambda = y_1^{\lambda_1} \dots y_n^{\lambda_n}$ в системе (0.2) можно представить как $(n \times N)$-матрицу

$$\Phi = (\lambda^1, \dots, \lambda^N),$$

где λ^k — Это вектор-столбцы из Λ. Предполагается, что в рамках каждого уравнения порядок столбцов λ произвольный, но фиксированный. Элементами $\lambda \in \Lambda$ индексируются координаты векторов $x = (x_\lambda)$ коэффициентов системы. Все пространство коэффициентов обозначим $\mathbb{C}^N$.

Через $\hat{y}(x)$ обозначим ветвь решения $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ системы (0.2) с условием $y(0) = (1, \dots, 1)$. Эту ветвь назовем *главным решением.*

Для формулировки основных результатов **первой главы** нам потребуются следующие обозначения. Для каждой строки φ_j матрицы показателей Φ и целых $\mu_j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ введем аффинную функцию

$$l_j(\alpha) = \frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j}\langle \varphi_j, \alpha \rangle, j = 1, \dots, n.$$

С помощью этих функций определим следующее множество индексов

$$P_\alpha = \{j \in \{1, ..., n\} : l_j(\alpha) \neq 0\}.$$

Заметим, что Φ естественным образом разбивается на блоки, соответствующие $\Lambda^{(j)}$:

$$\Phi = \left(\Lambda^{(1)}, ..., \Lambda^{(n)}\right),$$

поэтому каждую ее строку φ_i можно представить в виде последовательности векторов $\varphi_i^{(1)}, \ldots, \varphi_i^{(n)}$.

Для системы (0.2) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Моном* $\hat{y}^\mu = \hat{y}^\mu(x)$ *главного решения системы* (0.2) *представляется рядом гипергеометрического типа*

$$\hat{y}^\mu = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N_{\geqslant 0}} c_\alpha x^\alpha$$

с коэффициентами c_α, *вычисляемыми по формуле*

$$\frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(l_j(\alpha) + 1\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(l_j(\alpha) - \left|\alpha^{(j)}\right| + 1\right)} \det \left\| \delta_i^j - \frac{\langle \varphi_i^{(j)}, \alpha^{(j)} \rangle}{m_j l_j(\alpha)} \right\|_{(i,j) \in P_\alpha \times P_\alpha}. \tag{0.3}$$

Доказательство сформулированной теоремы основано на линеаризации системы уравнений и применении многомерной формулы логарифмического вычета методом А.П. Южакова [26].

Отметим, что для некоторого подкласса систем (0.2) "полуфабрикат" формулы (0.3) был получен в [23] на основе формального подхода Меллина, то есть игнорирования расходимости преобразования Меллина для функции $\hat{y}^\mu(x)$ и интеграла Меллина-Барнса.

Для получения многомерных формул Варинга нет необходимости фиксировать свободные члены в уравнениях (0.2), поэтому рассмотрим систему

$$y_j^{m_j} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(j)} \cup \{0\}} x_\lambda^{(j)} y^\lambda = 0,\ j = 1, \ldots, n. \tag{0.4}$$

Однако теперь потребуем условие на множество $\Lambda^{(j)}$, состоящее в том, что для $\lambda \in \Lambda^{(j)}$ выполняется неравенство

$$|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n < m_j, j = 1, \ldots, n. \tag{0.5}$$

В этом случае, по теореме Безу, система (0.4) имеет $M = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ решений $y^{(\nu)}(x)$. Отметим, что в (0.4) вектор $x = (x_\lambda^{(j)})$ имеет $N + n$ координат.

Степенной суммой степени $\mu \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ называется выражение

$$S_\mu = \sum_{\nu=1}^{M} \left(y^{(\nu)}(x)\right)^\mu.$$

Рассмотрим $(n \times N)$-матрицу χ, i-я строка которой представляет характеристическую функцию подмножества $\Lambda^{(i)} \subset \Lambda$, то есть элементы этой строки равны 1 на местах $\lambda \in \Lambda^{(i)}$ и 0 на всех остальных местах $\lambda \in \Lambda$.

Теорема 2. *При условии* (0.5) *для любого* $\mu \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ *степенная сумма*

$$S_\mu = \sum_{\nu=1}^{M} \left(y^{(\nu)}(x)\right)^\mu$$

корней системы (0.4) *представляется в виде многочлена от коэффициентов* $x = (x_\lambda)$ *системы по формуле*

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^{N+n}_{\geqslant}0\\(D_m\chi-\Phi)\alpha=\mu}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\prod_{j=1}^{n}\left|\alpha^{(j)}\right|!m_j\det\left\|\delta_i^{(j)}-\frac{\langle\varphi_j^{(i)},\alpha^{(i)}\rangle}{m_jl_j(\alpha)}\right\|_{(i,j)\in P_\alpha\times P_\alpha} x^{\alpha}, \tag{0.6}$$

где $P_\alpha = \{j \in \{1,...,n\} : l_j(\alpha) \neq 0\}$, *а* D_m *— диагональная* $n \times n$*-матрица с диагональными элементами* m_j *степеней системы.*

Ранее В.А. Болотовым [27, 227] была найдена многомерная версия формул Варинга только для степенных сумм вида

$$\sum_{\nu=1}^{M}\left(y_j^{(\nu)}\right)_j^{\mu}=S_{(0,...,\mu_j,...,0)},$$

то есть для отдельных координат решения.

Во **второй главе** диссертации мы будем искать решение системы (0.2) в виде интеграла Меллина-Барнса.

В работах И.А. Антиповой [21] и В.А. Степаненко [23] приводится интегральная формула для монома решения системы алгебраических уравнений вида (0.2). Однако, в работе [21] рассматривается лишь класс нижнетреугольных систем, а в работе [23] интегральная формула приводится без исследования вопроса сходимости интеграла и без обоснования существования обращения преобразования Меллина. Вначале выпишем преобразование Меллина:

$$M[F](z)=\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}F(x)x^z\frac{dx}{x},$$

где $x^z = x_1^{z_1}\dots x_N^{z_N}$, $\frac{dx}{x}=\frac{dx_1}{x_1}\wedge\dots\wedge\frac{dx_N}{x_N}$.

Схема применения преобразования Меллина важна ввиду следующей теоремы Антиповой [28]:

Если $F(x) \in M_\Theta^U$, *то ее преобразование Меллина существует, голоморфно в трубчатой области* $U + i\mathbb{R}^m$ *и справедлива формула обращения* $M^{-1}M[F] = I[F]$, *т.е.*

$$\frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_{a+i\mathbb{R}^m} x^{-z} dz \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} F(\xi) x^{z-I} d\xi = F(x), x \in S_{k\Theta},$$

где $a \in U$.

Определение пространства M_Θ^U см. в параграфе 6.

В случае $n = 1$ И.А. Антиповой удалось проверить принадлежность функции решения классу M_Θ^U, однако, принадлежность функции решения системы общих алгебраических уравнений классу M_Θ^U крайне трудно проверить. Поэтому мы возьмем формальную интегральную формулу, полученную применением формулы обращения преобразования Меллина (без обоснования существования этого обращения), а затем получим условия, при которых полученный интеграл будет иметь непустую область сходимости, и представлять решение системы уравнений (0.2).

Интегральная формула для монома y^μ, $\mu > 0$ ($\mu_1 > 0, \ldots, \mu_n > 0$) решения системы вида (0.2) приводилась, например, в работе [23]. После некоторых преобразований соответствующее y^μ выражение можно записать в виде

$$\frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^N}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}\Gamma\left(u_\lambda^{(j)}\right)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j,u\rangle\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j,u\rangle+\sum\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}u_\lambda^{(j)}+1\right)}Q(u)x^{-u}du, \tag{0.7}$$

где вектор γ выбирается из многогранника

$$\left\{u\in\mathbb{R}^N_{>0},\langle\varphi_j,u\rangle<\mu_j,j=1,...,n\right\},$$

а $Q(u)$ — многочлен, выражаемый определителем

$$Q(u)=\frac{1}{m_1\dots m_n}\det\left\|\delta_i^j\left(\mu_j-\langle\varphi_j,u\rangle\right)+\langle\varphi_j^{(i)},u^{(i)}\rangle\right\|_{i,j=1}^{n}.$$

Теорема 4. *Если интеграл* (0.7) *сходится, то все матрицы вида*

$$\begin{pmatrix}\lambda_1^{(1)} & \cdots & \lambda_1^{(n)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n^{(n)}\end{pmatrix},$$

где каждый вектор-столбец $\lambda^{(j)}=\left(\lambda_1^{(j)}\dots\lambda_n^{(j)}\right)^T$ *пробегает соответсвующее множество* $\Lambda^{(j)}$, *положительно определены.*

В параграфе 8 мы покажем, что для $n=2$ приведенное условие является также и достаточным. А именно, рассмотрим систему из двух алгебраических уравнений от двух неизвестных $y_1,\ y_2$:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1^{m_1} + \sum\limits_{i=1}^{p_1} x_i^{(1)} y_1^{\alpha_i^{(1)}} y_2^{\beta_i^{(1)}} - 1 = 0, \\ y_2^{m_2} + \sum\limits_{j=1}^{p_2} x_j^{(2)} y_1^{\alpha_j^{(2)}} y_2^{\beta_j^{(2)}} - 1 = 0. \end{array}\right. \tag{0.8}$$

Теорема 6 *Если $n = 2$, то интеграл* (0.7) *для системы* (0.8) *имеет непустую область сходимости тогда и только тогда, когда положительны все показатели $\alpha_j^{(1)}$, $\beta_i^{(2)}$ и все определители $\Delta_{ij} = \alpha_i^{(1)}\beta_j^{(2)} - \alpha_j^{(2)}\beta_i^{(1)}$.*

В основе доказательства теорем 4 и 6 лежит алгоритм Нильсон-Пассаре-Циха [24] для вычисления области сходимости кратного интеграла Меллина-Барнса, а также теорема о многомерных вычетах, основанная на принципе разделяющих циклов [29], [30].

Глава 1

Решения систем в виде гипергеометрических степенных рядов и формулы Варинга

1. Формулировка теоремы о представлении решения гипергеометрическим рядом

Через $\hat{y}(x)$ обозначим ветвь решения $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ системы (0.2) с условием $y(0) = (1, \dots, 1)$. Эту ветвь назовем *главным решением.*

Для формулировки основных результатов нам потребуются следующие обозначения. Для каждой строки φ_j матрицы показателей Φ и целых $\mu_j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ введем аффинную функцию

$$l_j(\alpha) = \frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j}\langle \varphi_j, \alpha \rangle, j = 1, \ldots, n.$$

С помощью этих функций определим следующее множество индексов

$$P_\alpha = \{ j \in \{1, ..., n\} : l_j(\alpha) \neq 0 \}.$$

Заметим, что Φ естественным образом разбивается на блоки, соответствующие $\Lambda^{(j)}$, поэтому каждую ее строку φ_i можно представить в виде последовательности векторов $\varphi_i^{(1)}, \ldots, \varphi_i^{(n)}$.

Для системы (0.2) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Моном $\hat{y}^\mu = \hat{y}^\mu(x)$ главного решения системы* (0.2) *представляется рядом гипергеометрического типа*

$$\hat{y}^\mu = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N_{\geqslant 0}} c_\alpha x^\alpha$$

с коэффициентами c_α, вычисляемыми по формуле

$$\frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(l_j(\alpha) + 1\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(l_j(\alpha) - \left|\alpha^{(j)}\right| + 1\right)} \det \left\| \delta_i^j - \frac{\langle \varphi_i^{(j)}, \alpha^{(j)} \rangle}{m_j l_j(\alpha)} \right\|_{(i,j) \in P_\alpha \times P_\alpha}. \tag{1.9}$$

Отметим, что для некоторого подкласса систем (0.2) "полуфабрикат" формулы (1.9) был получен в [23] на основе формального подхода Меллина, то есть игнорирования расходимости преобразования Меллина для функции $y^\mu(x)$ и интеграла Меллина-Барнса.

2. Линеаризация системы

Следуя работе И.А. Антиповой и А.К. Циха [25], произведем линеаризацию системы (0.2). Для этого рассмотрим систему (0.2) как систему уравнений в пространстве $\mathbb{C}^N_x \times \mathbb{C}^n_y$ с координатами $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ и введем в $\mathbb{C}^N_x \times \mathbb{C}^n_y$ замену переменных $(\xi, W) \to (x, y)$:

$$\begin{aligned} x^{(j)}_\lambda =& \xi^{(j)}_\lambda \prod_{k=1}^{n} W_k^{\frac{\lambda_k}{m_k}-\delta^j_k}, \\ y_j =& W_j^{-\frac{1}{m_j}}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Отметим, что при замене (1.10) для каждого $\lambda \in \Lambda^{(j)}$ моном $x^{(j)}_\lambda y^\lambda$ в (0.2) перейдет в $\xi^{(j)}_\lambda W_j^{-1}$, а каждый $y_j^{m_j}$ перейдет в W_j^{-1}, поэтому (0.2) запишется в виде системы линейных уравнений

$$W_j = 1 + \left|\xi^{(j)}\right|, \ j = 1, \dots, n,$$

где $\left|\xi^{(j)}\right| = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} \xi^{(j)}_\lambda$. Из этого следует, что при замене переменных $\xi \to x$ в пространстве коэффициентов $\mathbb{C}^N$, определенной формулой

$$x^{(j)}_\lambda = \xi^{(j)}_\lambda \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \left|\xi^{(k)}\right|\right)^{\frac{\lambda_k}{m_k}-\delta^j_k}, \ \lambda \in \Lambda^{(j)}, j = 1, \dots, n, \tag{1.11}$$

решение $y(x)$ примет вид

$$y_j(x(\xi)) = \left(1 + \left|\xi^{(j)}\right|\right)^{-\frac{1}{m_j}}, j = 1, \ldots, n. \qquad (1.12)$$

Заметим, что решение $y(x(\xi))$ аналитично в области

$$G = \left\{\xi \in \mathbb{C}^N : \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \left|\xi^{(j)}\right|\right) \neq 0\right\}.$$

В итоге, для вычисления решения $y(x)$ системы (0.2), достаточно обратить замену (1.11), которую назовём *линеаризацией системы* (0.2), и подставить обращение в (1.12). Такая процедура делается с помощью обобщенной формулы логарифмического вычета, которую мы реализуем в следующем разделе.

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство. Представим обращение $\xi(x)$ линеаризации (1.11) в виде неявной функции (неявного отображения), заданного семейством уравнений

$$F_\lambda^{(j)}(x, \xi) = \xi_\lambda^{(j)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \left|\xi^{(k)}\right|\right)^{\frac{\lambda_k}{m_k} - \delta_k^j} - x_\lambda^{(j)} = 0, \qquad (1.13)$$

где $\lambda \in \Lambda^{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$. Отметим, что (1.11) И (1.13) являются многозначными отображениями, аналитическими в окрестности $\xi = 0$. Нас интересует ветвь, определенная условием, чтобы радикалы $\left(1 + \left|\xi^{(k)}\right|\right)^{\frac{1}{m_k}}$ равнялись 1 при $\xi^{(k)} = 0$. В этом случае решение (1.12) будет обладать свойством $y_j(x(0)) = y_j(0) = 1$, то есть оно будет соответствовать главному решению $\hat{y}^{\mu}(x)$ системы (0.2).

Для вычисления монома $\hat{y}^{\mu}(x)$ главного решения системы (0.2) надо моном $\hat{y}^{\mu}(x)$ для вектора (1.12) вычислить в значении неявного отображения $\xi(x)$, определенного отображением (1.13). Это можно сделать с помощью формулы логарифмического вычета А.П.Южакова [26] (см. также [27], Теоремы 20.1 и 20.2). По этой формуле

$$\hat{y}^{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi i)^{N-n}} \int\limits_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{y^{\mu}(\xi)\Delta(\xi)d\xi}{\prod\limits_{j=1}^{n} \prod\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} F_{\lambda}^{(j)}(x,\xi)},$$

где $\Gamma_{\varepsilon} = \left\{\xi \in \mathbb{C}^N : \left|\xi_{\lambda}^{(j)}\right| = \varepsilon,\ \lambda \in \Lambda^{(j)},\ j = 1,\ldots,n\right\}$, а $\Delta = \frac{\partial F}{\partial \xi}$ — якобиан системы уравнений $F_{\lambda}^{(j)}(x,\xi) = 0$ по переменным ξ. Радиус ε в определении остова интегрирования Γ_{ε} выбирается достаточно малым (например, так, чтобы поликруг радиуса ε лежал вне множества нулей якобиана Δ).

Отметим, что якобиан Δ, в силу особенностей задания функций $f_{\lambda}^{(j)}$, совпадает с якобианом $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ линеаризации $x(\xi)$, задаваемой формулой (1.10).

Лемма 1. *Якобиан линеаризации* (1.11) *равен*

$$\Delta = \prod_{k=1}^{n} \prod_{\lambda\in\Lambda^{(k)}} \frac{y_k^{m_k}(\xi)}{y^{\lambda}(\xi)} \det \left\| \frac{\delta_j^i + \frac{1}{m_j}\langle \varphi_i^{(j)}, \xi^{(j)}\rangle}{1 + |\xi^{(j)}|} \right\|_{i,j=1}^{n}. \tag{1.14}$$

Доказательство. Якобиан Δ имеет блочную структуру с n^2 блоками. В i-м диагональном блоке диагональные элементы имеют следующий вид:

$$\frac{\partial F_\lambda^{(j)}}{\partial \xi_\lambda^{(j)}} = \frac{y_j^{m_j}}{y^\lambda}\left(1 - \frac{m_j - \lambda_j}{m_j}\frac{\xi_\lambda^{(j)}}{1 + |\xi^{(j)}|}\right).$$

Недиагональные элементы этого диагонального блока равны

$$\frac{\partial F_\lambda^{(j)}}{\partial \xi_\tau^{(j)}} = -\frac{y_j^{m_j}}{y^\lambda}\frac{m_j - \lambda_j}{m_j}\frac{\xi_\lambda^{(j)}}{1 + |\xi^{(j)}|}.$$

Недиагональные блоки состоят из элементов

$$\frac{\partial F_\lambda^{(j)}}{\partial \xi_\tau^{(k)}} = -\frac{y_j^{m_j}}{y^\lambda}\frac{-\lambda_k}{m_k}\frac{\xi_\lambda^{(j)}}{1 + |\xi^{(k)}|}.$$

Суммирование строк и столбцов полученного определителя в рамках одного блока позволяет уменьшить размер определителя до размера $n \times n$. Полученный таким образом определитель имеет вид (1.14). $\square$

Запишем каждый $F_\lambda^{(j)}$ в виде

$$F_\lambda^{(j)} = \frac{\xi_\lambda^{(j)} y_j^{m_j}(\xi)}{y^\lambda(\xi)}\left(1 - \frac{x_\lambda^{(j)} y^\lambda(\xi)}{\xi_\lambda^{(j)} y_j^{m_j}(\xi)}\right).$$

Существует такое число δ, что для $\forall \xi \in \Gamma_\varepsilon$ и $\|x\| < \delta$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{x_\lambda^{(j)} y^\lambda(\xi)}{\xi_\lambda^{(j)} y_j^{m_j}(\xi)}\right| < 1.$$

Таким образом, мы можем представить подынтегральное выражение в виде ряда кратной геометрической прогрессии, и с учетом вычисленного Δ получаем:

$$\hat{y}^{\mu} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^N_{\geqslant 0}} \frac{x^{\alpha}}{(2\pi i)^N} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} y_k^{\left(l_k(\alpha)-|\alpha^{(k)}|\right)\cdot m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} (\xi_\lambda^{(j)})^{\alpha_\lambda^{(j)}+1}} \det \left\| \frac{\delta_j^i + \frac{1}{m_j}\langle \varphi_i^{(j)}, \xi^{(j)}\rangle}{1+|\xi^{(j)}|} \right\| d\xi.$$

Внесем мономиальные множители по y под знак определителя:

$$\hat{y}^{\mu} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^N_{\geqslant 0}} \frac{x^{\alpha}}{(2\pi i)^{N-n}} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\det \left\| y_j^{\left(l_j(\alpha)-|\alpha^{(j)}|\right)\cdot m_j} \left(\frac{\delta_j^i+\frac{1}{m_j}\langle\varphi_i^{(j)},\xi^{(j)}\rangle}{1+|\xi_\lambda^{(j)}|}\right)\right\|}{\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} (\xi_\lambda^{(j)})^{\alpha_\lambda^{(j)}+1}} d\xi.$$

В соответствии с формулой Коши, стоящие под знаком суммы интегралы выражают коэффициенты ряда Тейлора функции-определителя, стоящей в числителе, тем самым $\hat{y}^{\mu}(x)$ будет равен

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^N_{\geqslant 0}} \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \left[D_{(\xi)}^{(\alpha)} \det \left\| y_j^{m_j\left(l_j(\alpha)-|\alpha^{(j)}|\right)} \left(\frac{\delta_j^i + \frac{1}{m_j}\langle\varphi_i^{(j)}, \xi^{(j)}\rangle}{1+|\xi^{(j)}|} \right) \right\| \right]_{\xi=0},$$

где $D_{(\xi)}^{(\alpha)}$ — производная порядка α по переменным ξ.

Ввиду того, что в определителе каждая строка зависит только от своего набора переменных, воспользовавшись свойством полилинейности, получаем следующее выражение для $y^{\mu}(x)$:

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^N_{\geqslant 0}} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \det \left\| D^{(\alpha^{(j)})}_{(\xi^{(j)})} \left[y_j^{m_j\left(l_j(\alpha)-|\alpha^{(j)}|\right)} \left(\frac{\delta^i_j + \frac{1}{m_j}\langle \varphi^{(j)}_i, \xi^{(j)}\rangle}{1+|\xi^{(j)}|} \right) \right]_{\xi=0} \right\|.$$

Раскрыв скобки для первого слагаемого имеем:

$$\begin{aligned} D^{\alpha^{(j)}}_{\xi^{(j)}} & \left[\delta^j_i \left(1+\left|\xi^{(j)}\right|\right)^{-l_j(\alpha)+\left|\alpha^{(j)}\right|-1} \right]_{\xi=0} = \\ &= \delta^j_i \left(-l_j(\alpha)+\left|\alpha^{(j)}\right|-1\right)\cdot \ldots \cdot (-l_j(\alpha) = \\ &\qquad = \delta^j_i \frac{(-1)^{\alpha^{(j)}}\Gamma\left(l_j(\alpha)+1\right)}{\Gamma\left(l_j(\alpha)-\left|\alpha^{(j)}\right|+1\right)} \end{aligned}$$

Во втором слагаемом, так как второй множитель имеет ненулевые производные только первого порядка имеем

$$\begin{aligned} D^{\left|\alpha^{(j)}\right|}_{\xi^{(j)}} & \left[\left(1+\left|\xi^{(j)}\right|\right)^{-l_j(\alpha)+\left|\alpha^{(j)}\right|-1} \frac{1}{m_j}\langle \varphi^{(j)}_i, \xi^{(j)}\rangle \right]_{\xi=0} = \\ &= \frac{(-1)^{\alpha^{(j)}}\Gamma\left(l_j(\alpha)+1\right)}{m_j\Gamma\left(l_j(\alpha)-\left|\alpha^{(j)}\right|+1\right)} \langle \varphi^{(j)}_i, \xi^{(j)}\rangle\Big|_{\xi=0} - \\ &\qquad - \frac{(-1)^{\left|\alpha^{(j)}\right|}\Gamma\left(l_j(\alpha)\right)}{m_j\Gamma\left(l_j(\alpha)-\left|\alpha^{(j)}\right|+1\right)} \langle \varphi^{(j)}_i, \alpha^{(j)}\rangle = \\ &= \frac{(-1)^{\left|\alpha^{(j)}\right|}\Gamma\left(l_j(\alpha)+1\right)}{\Gamma\left(l_j(\alpha)-\left|\alpha^{(j)}\right|+1\right)} \left(-\frac{\langle \varphi^{(j)}_i, \alpha^{(j)}\rangle}{m_j l_j(\alpha)} \right) = \\ &= \frac{(-1)^{\left|\alpha^{(j)}\right|}\Gamma\left(l_j(\alpha)+1\right)}{\Gamma\left(l_j(\alpha)-\left|\alpha^{(j)}\right|+1\right)} \left(-\frac{\langle \varphi^{(j)}_i, \alpha^{(j)}\rangle}{\mu_j - \langle \varphi_j, \alpha\rangle} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем утверждение теоремы

$$\hat{y}^{\mu} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N_{\geqslant 0}} \frac{x^{\alpha}(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(l_j(\alpha)+1\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(l_j(\alpha) - |\alpha^{(j)}| + 1\right)} \times$$
$$\times \det \left\| \delta_i^j - \frac{\langle \varphi_i^{(j)}, \alpha^{(j)} \rangle}{m_j l_j(\alpha)} \right\|_{(i,j)\in P\times P}. \tag{1.15}$$

□

Обозначим через $\hat{x}$ точку в пространстве коэффициентов системы (0.4), у которой все координаты $x_{\lambda}^{(j)} = 0$, $\lambda \neq 0$, а $x_0^{(j)} = -1$. Как и в случае системы (0.2), определим главную ветвь решения системы (0.4) с помощью условия $y(\hat{x}) = (1, \ldots, 1)$.

Предложение 1. *Моном $\hat{y}^{\mu} = \hat{y}^{\mu}(x)$ главного решения системы* (0.4) *представляется в виде ряда гипергеометрического типа*

$$\hat{y}^{\mu} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N_{\geqslant 0}} \frac{x^{\alpha}(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} (-x_0^{(j)})^{l_j(\alpha) - |\alpha^{(j)}|} \Gamma\left(l_j(\alpha)+1\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(l_j(\alpha) - |\alpha^{(j)}| + 1\right)} \times$$
$$\times \det \left\| \delta_i^j - \frac{\langle \varphi_i^{(j)}, \alpha^{(j)} \rangle}{m_j \cdot l_j(\alpha)} \right\|_{(i,j)\in P\times P}. \tag{1.16}$$

Доказательство. Разделим каждое уравнение в (0.4) на его свободный член, взятый со знаком “минус”. Затем в полученной системе отношения $\frac{y_j}{(-x_0^{(j)})^{\frac{1}{m_j}}}$ примем за новые неизвестные. Переходя от первоначальных коэффициентов $\left((x_\lambda^{(i)}), x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}\right)$ к

$$\bar{x}_\lambda^{(j)} = x_\lambda^{(j)} \frac{(x_0^{(1)})^{\frac{\lambda_1}{m_1}} \dots (x_0^{(n)})^{\frac{\lambda_n}{m_n}}}{(-x_0^{(j)})},$$

получим систему вида (0.2). Применив к ней результат Теоремы 1, и выполнив обратную замену, получим выражение (1.16). □

4. Формулы Варинга

Между коэффициентами и степенными суммами корней полинома существует зависимость, которая задается рекуррентными формулами Ньютона или формулами Варинга. Для систем алгебраических уравнений также найдено обобщение рекуррентных формул Ньютона [31]. Приведем обобщение формул Варинга для системы алгебраических уравнений. Напомним, что при условии (0.5) система (0.4) имеет $M = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$ корней

$$y^{(\nu)}(x) = \left(y_1^{(\nu)}(x), \dots, y_n^{(\nu)}(x)\right).$$

Теорема 2. *При условии* (0.5) *для любого* $\mu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ *степенная сумма*

$$S_\mu = \sum_{\nu=1}^{M} (y^{(\nu)}(x))^\mu$$

корней системы (0.4) *представляется в виде многочлена от ко-*

эффициентов $x = (x_\lambda)$ *системы по формуле:*

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^{N+n}_{\geqslant 0}\\ (D_m\chi-\Phi)\alpha=\mu}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\prod_{j=1}^{n} m_j|\alpha^{(j)}|!\det\left\|\delta^i_j-\frac{\langle\varphi^{(i)}_j,\alpha^{(i)}\rangle}{m_j l_j(\alpha)}\right\|_{(i,j)\in P\times P} x^\alpha, \tag{1.17}$$

где $P = \{j\in\{1,\ldots,n\} : l_j(\alpha)\neq 0\}$.

Доказательство. Напомним, что через $\hat{x}$ мы обозначили точку в пространстве коэффициентов системы (0.4), у которой все координаты $x^{(j)}_\lambda = 0$, $\lambda\neq 0$, а $x^{(j)}_0 = -1$. Для $x = \hat{x}$ система принимает вид: $y_1^{m_1} = 1,\ldots,y_n^{m_n} = 1$ и совокупность решений имеет решетчатый вид, а именно j-я координата решения, независимо от других координат, пробегает m_j значений. В соответствии с этим пронумеруем все решения (при $x=\hat{x}$) $y_J = \varepsilon_J = (\varepsilon_{j_1},\ldots,\varepsilon_{j_n})$, $\varepsilon_{j_s} = e^{\frac{2\pi i}{m_s}j_s}$ мультииндексом $J = (j_1,\ldots,j_n)$, пробегающим параллелепипед

$$\Pi_m = \{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{Z}^n : 0\le j_s\le m_s-1, s=1,\ldots,n\}.$$

В силу непрерывной зависимости решения $y(x)$ от коэффициентов x и простоты корней $y_J = \varepsilon_J$, все ветви $y(x)$ в количестве $M = m_1\cdot\cdots\cdot m_n$ штук концентрируются вблизи ε_J, когда x меняется в малой окрестности точки $\hat{x}$. Таким образом, вблизи $\hat{x}$ мы можем нумеровать ветви для $y(x)$ в виде $y_J(x)$, $J\in\Pi_m$.

Отметим, что все решения системы (0.4) можно выразить через главное решение в виде $y_J = \varepsilon_J\hat{y}\left(\varepsilon_J^\lambda x_\lambda\right)$. Это утверждение подтверждается тем, что все $y_J(\hat{x}) = \varepsilon_J$ различны, а то что $y_J(x)$ занулит все уравнения системы (0.4) несложно проверить подстановкой.

С помощью формулы (1.9) для главного решения $\hat{y}$, напишем формулу для монома y_J^μ решения $y_J(x)$:

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^N_{\geqslant 0}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(l_j(\alpha)+1\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(l_j(\alpha)-|\alpha^{(j)}|+1\right)} \det\left\|\delta_j^i - \frac{\langle\varphi_j^{(i)},\alpha^{(i)}\rangle}{m_j l_j(\alpha)}\right\|_{(i,j)\in P\times P} \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{n} \varepsilon_{j_s}^{m_j l_j(\alpha)} \prod_{j=1}^{n} e^{i\pi l_j(\alpha)} \left(x_0^{(j)}\right)^{l_j(\alpha)} \prod_{\lambda\in\Lambda^{(i)}} \left(x_\lambda^{(i)}\right)^{\alpha_\lambda^{(i)}}.$$

Поскольку в принятой нами нумерации ветвей решения $y(x)$ степенная сумма S_μ записывается в виде

$$S_\mu = \sum_{J\in\Pi_m} y_J^\mu(x),$$

получаем следующее выражение для S_μ:

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^N_{\geqslant 0}} \frac{(-1)^{|\alpha|} \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(l_j(\alpha)+1\right)}{\alpha! \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(l_j(\alpha)-|\alpha^{(j)}|+1\right)} \det\left\|\delta_j^i - \frac{\langle\varphi_j^{(i)},\alpha^{(i)}\rangle}{m_j l_j(\alpha)}\right\|_{(i,j)\in P\times P} \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{n} e^{i\pi(l_j(\alpha))} \prod_{j=1}^{n} \left(x_0^{(j)}\right)^{\left(l_j(\alpha)-|\alpha^{(j)}|\right)} \prod_{\lambda\in\Lambda^{(i)}} \left(x_\lambda^{(i)}\right)^{\alpha_\lambda^{(i)}} \sum_{J\in\Pi_m} \prod_{s=1}^{n} \varepsilon_{j_s}^{m_j l_j(\alpha)}. \tag{1.18}$$

Рассмотрим отдельно степенную сумму первообразных корней

ε_{j_s} из единицы степеней m_s:

$$\sum_{J\in\Pi_m}\prod_{s=1}^{n}\varepsilon_{j_s}^{m_j l_j(\alpha)}.$$

Данная сумма равна $m_1\cdot\ldots\cdot m_n$ в случае, когда все слагаемые равны 1, то есть в том случае, если все $m_j l_j(\alpha)$ делятся на m_j, и 0 в любом другом случае.

Из этого следует, что во всех ненулевых слагаемых ряда (1.18) $l_j(\alpha)\in\mathbb{Z}$, то есть Г-функции имеют только целые аргументы.

Обозначим $\beta_j = l_j(\alpha) - |\alpha^{(j)}|$ ($\beta_j\in\mathbb{Z}$). Так как в знаменателях слагаемых ряда (1.18) находится Г-функция от β_j+1, то для того, чтобы слагаемое не обращалось в нуль, необходимо, чтобы $\beta_j\geqslant 0$ для всех $j=1,\ldots,n$.

С другой стороны, для $\langle\beta,m\rangle=\beta_1m_1+\ldots+\beta_nm_n$, имеем:

$$\langle\beta,m\rangle=\sum_{j=1}^{n}\Big(\mu_j+\langle\varphi_j,\alpha\rangle-m_j|\alpha^{(j)}|\Big)=$$
$$=|\mu|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\lambda\in\Lambda^{(i)}}(m_i-|\lambda|)\,\alpha_\lambda\leqslant|\mu|.$$

Таким образом, ненулевые слагаемые ряда образуют конечную сумму:

$$S_\mu = \sum_{\substack{\beta \geqslant 0: \\ \langle \beta, m \rangle \leqslant |\mu|}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^N_{\geqslant 0} \\ \langle \varphi_j, \alpha \rangle - |\alpha^{(j)}| = \mu_j - \beta_j m_j \\ j=1,\ldots,n}} \frac{(-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\beta!} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(\beta_j + |\alpha^{(j)}|\right) \times$$

$$\times M \det \left\| \delta^i_j - \frac{\langle \varphi^{(i)}_j, \alpha^{(i)} \rangle}{m_j l_j(\alpha)} \right\|_{(i,j)\in P\times P} \prod_{j=1}^{n} \left(x^{(j)}_0\right)^{\beta_j} \prod_{j=1}^{n} \prod_{\lambda \in \Lambda^{(j)} \setminus \{0\}} \left(x^{(j)}_\lambda\right)^{\alpha_\lambda}.$$

Дополняя вектор $\alpha \in \mathbb{Z}^N_{\geqslant 0}$ координатами $\alpha^{(j)}_0 = \beta_j$, $j = 1, \ldots, n$, до вектора из $\mathbb{Z}^{N+n}_{\geq 0}$, и сохраняя для дополненного вектора обозначение α, получаем формулу (1.17). $\square$

5. Примеры

Рассмотрим несколько примеров демонстрирующих применение полученных формул.

Пример 1. Система трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_1 + a y_2 = 1; \\ y_2 + b y_3 = 1; \\ y_3 + c y_1 = 1. \end{cases}$$

Матрица Φ в этом случае имеет вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Координата y_1 решения с помощью формулы (1.3) записывается рядом

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{|k|}\Gamma(1+k_c+1)\Gamma(k_a+1)\Gamma(k_b+1)}{k_a!k_b!k_c!\Gamma(1+k_c-k_a+1)\Gamma(k_a-k_b+1)\Gamma(k_b-k_c+1)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & -\frac{k_a}{1+k_c} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{k_b}{k_a} \\ -\frac{k_c}{k_b} & 0 & 1 \end{vmatrix} a^{k_a} b^{k_b} c^{k_c} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{|k|} a^{k_a} b^{k_b} c^{k_c}}{\Gamma(2+k_c-k_a)\Gamma(1+k_a-k_b)\Gamma(1+k_b-k_c)}.$$

Коэффициенты полученного ряда не равны 0 только в следующих случаях:

$$k_a = k_b = k_c;$$
$$k_a = k_b = k_c + 1;$$
$$k_a = k_b + 1 = k_c + 1.$$

Поэтому получаем:

$$y_1 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3t}}{\Gamma(2)\Gamma(1)\Gamma(1)} (abc)^t + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3t+2}ab}{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(2)} (abc)^t +$$

$$+ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3t+1}a}{\Gamma(1)\Gamma(2)\Gamma(1)} (abc)^t = (1 - a + ab) \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t (abc)^t =$$

$$= \frac{1 - a + ab}{1 + abc},$$

что согласуется с правилом Крамера.

Пример 2. Система квадратных уравнений:

$$\begin{cases} y_1^2 + ay_2 - 1 = 0; \\ y_2^2 + by_1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Матрица Φ в этом случае имеет вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мономиальная функция решения $y^\mu = y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2}$ записанная с помощью формулы (1.3) представляется рядом

$$\sum_{s,t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+t}\Gamma(\frac{\mu_1}{2}+\frac{t}{2}+1)\Gamma(\frac{\mu_2}{2}+\frac{s}{2}+1)}{s!t!\Gamma(\frac{\mu_1}{2}+\frac{t}{2}-s+1)\Gamma(\frac{\mu_2}{2}+\frac{s}{2}-t+1)} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{s}{\mu_1+t} \\ -\frac{t}{\mu_2+s} & 1 \end{vmatrix} a^s b^t.$$

Получаемое с помощью системы компьютерной алгебры решение в радикалах указанной системы квадратных уравнений имеет весьма громоздкий вид. Вычисленные с помощью системы компьютерной алгебры первые 15 коэффициентов Тейлора решения совпадают с соответствующими коэффициентами приведенного ряда.

Пример 3.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y_1^2 + a_1y_1 + b_1y_1 + c_1 = 0; \\ y_2^2 + a_2y_1 + b_2y_2 + c_2 = 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

В качестве примера для приведенной системы найдем степенную сумму $S_{2,1}$ в виде многочлена с мономами вида

$$a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} a_2^{\alpha_2} b_2^{\beta_2} c_2^{\gamma_2}$$

Для того,чтобы определить, какие мономы войдут в такое представление для $S_{2,1}$, необходимо найти все целые неотрицательные решения системы

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 - \alpha_2 = 2, \\ -\beta_1 + 2\alpha_2 + \beta_2 + 2\gamma_2 = 1. \end{cases} \tag{1.20}$$

Решениями системы будут следующие векторы

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) :$$

$$(0, 0, 1, 0, 1, 0),$$

$$(0, 1, 0, 0, 0, 1),$$

$$(0, 1, 0, 0, 2, 0),$$

$$(1, 1, 0, 1, 0, 0),$$

$$(2, 0, 0, 0, 1, 0),$$

Для найденных наборов $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ вычислим коэффициенты по формуле (1.17) и получим следующее выражения для $S_{2,1}$:

$$S_{2,1} = 2c_1b_2 + 4b_1c_2 - 2b_1b_2^2 - 5a_1b_1a_2 - 2a_1^2b_2.$$

Глава 2

Решения систем в виде гипергеометрических интегралов Меллина-Барнса

В работах И.А. Антиповой [21] и В.А. Степаненко [23] приводится интегральная формула для монома решения системы алгебраических уравнений вида (0.2). Однако, в работе [21] рассматривается достаточно узкий класс систем, а именно нижнетреугольные системы, а в работе [23] интегральная формула приводится без описания области сходимости интегралов и обоснования существования обращения преобразования Меллина.

6. Преобразование Меллина мономиальной функции решения системы

Для вычисления интегральной формулы для решения одного алгебраического уравнения возможно применение результата И.А. Антиповой [28]; об условиях сходимости формулы обращения для многомерного преобразования Меллина

$$M[F](z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} F(x) x^{z-I} dx,$$

где мультииндексная запись x^{z-I} означает $x_1^{z_1-1} \dots x_n^{z_n-1}$.

Введем класс голоморфных функций от n переменных, сопоставленный паре выпуклых областей. Рассмотрим два экземпляра Пространства $\mathbb{R}^n$ переменных u и θ. Выберем в них выпуклые области $U \subset \mathbb{R}^n$, $\Theta \subset \mathbb{R}^n$, причем Θ ограничена и содержит начало координат: $0 \in \theta$. Область U порождает в комплексном пространстве трубчатую область $U + i\mathbb{R}^n$ (трубу над U), а Θ — секториальную область (сектор S_Θ над Θ). Более точно, секториальные области будем брать в множестве $\mathfrak{S} = \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$, которое представляет собой область наложения над комплексным тором $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C} \setminus 0)^n$. Точки $x = (r, \theta) \in \mathfrak{S}$ ($r \in \mathbb{R}^n_+, \theta \in \mathbb{R}^n$) проектируются в векторы

$$re^{i\theta} = \left(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n}\right) \in \mathbb{T}^n.$$

Тогда сектор над Θ — это множество $S_\Theta = \{x \in \mathfrak{S} : \theta \in \Theta\}$.

Введем векторное пространство M_Θ^U функций $F(x)$, голоморфных в какой-либо области

$$S_{k\Theta} = \{x \in \mathfrak{S} : \theta \in k\Theta\},\ k > 1,$$

(k зависит от F, а $k\Theta$ означает гомотетию Θ с коэффициентом k) и удовлетворяющих условию

$$|F(x)| \leqslant C(a) \left|x^{-a}\right| \text{ для всех } x \in S_{k\Theta}, a \in U,$$

где $C(a)$ не зависит от x;

Теорема 3 (Антипова [21])**.** *Если $F(x) \in M_\Theta^U$, то ее преобразование Меллина существует, голоморфно в трубчатой области $U + i\mathbb{R}^n$ и справедлива формула обращения $M^{-1}M[F] = I[F]$, т.е.*

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{a+i\mathbb{R}^n} x^{-z} dz \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} F(\zeta)\zeta^{z-I} d\zeta = F(x), x \in S_{f\Theta},$$

где $a \in U$.

Однако условия приведенной теоремы крайне трудно проверить для системы общих алгебраических уравнений. Поэтому, мы возьмем формальную интегральную формулу, полученную применением формулы обращения преобразования Меллина (без обоснования существования этого обращения), а затем найдем условия при которых полученный интеграл будет иметь непустую область сходимости и представлять решение системы уравнений (0.2).

Интегральная формула для монома y^μ, $\mu > 0$ ($\mu_1 > 0,\ldots, \mu_n > 0$) решения системы вида (0.2) приводилась, например, в работе [23]. После некоторых преобразований ее можно записать в виде

$$\frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^N}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}\Gamma\left(u_\lambda^{(j)}\right)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j,u\rangle\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j,u\rangle+\sum\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}u_\lambda^{(j)}+1\right)}Q(u)x^{-u}du,$$

где вектор γ выбирается из многогранника

$$\{u\in\mathbb{R}^N_{>0},\langle\varphi_j,u\rangle<\mu_j,j=1,...,n\},$$

а $Q(u)$ — многочлен, выражаемый определителем

$$Q(u)=\frac{1}{m_1\dots m_n}\det\left\|\delta_i^j\left(\mu_j-\langle\varphi_j,u\rangle\right)+\langle\varphi_j^{(i)},u^{(i)}\rangle\right\|_{i,j=1}^n.$$

7. Необходимое условие сходимости интеграла решения системы алгебраических уравнений

Дана система алгебраических уравнений вида

$$y_j^{m_j}+\sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}x_\lambda^{(j)}y^\lambda-1=0,\ j=1,\dots,n, \tag{2.21}$$

где $\Lambda^{(j)}\subset\mathbb{Z}^n$. Также введем обозначение $\Lambda:=\bigsqcup\limits_{j=1}^{n}\Lambda^{(j)}$ для дизъюнктной суммы множеств $\Lambda^{(j)}$. Мощность множества Λ для удобства обозначим N. Множество Λ можно трактовать как $n\times N$-матрицу, строки которой мы обозначим $\varphi_j,\ j=1,...,n$.

Моному $y^\mu = y_1^{\mu_1} \dots y_n^{\mu_n}$ решения $y = (y_1 \dots, y_n)$ данной системы поставим в соответствие интеграл Меллина-Барнса:

$$\frac{1}{(2\pi i)^N} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^N} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \prod\limits_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} \Gamma\left(u_\lambda^{(j)}\right) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j}\langle \varphi_j, u\rangle\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j}\langle \varphi_j, u\rangle + \sum\limits_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} u_\lambda^{(j)} + 1\right)} Q(u) x^{-u} du, \tag{2.22}$$

где вектор γ выбирается из многогранника

$$\{u \in \mathbb{R}^N_{>0}, \langle \varphi_j, u\rangle < \mu_j, j = 1, ..., n\},$$

а $Q(u)$ — многочлен выражаемый определителем

$$Q(u) = \frac{1}{m_1 \dots m_n} \det \left\| \delta_i^j \left(\mu_j - \langle \varphi_j, u\rangle\right) + \langle \varphi_j^{(i)}, u^{(i)}\rangle \right\|_{i,j=1}^{n}. \tag{2.23}$$

Интеграл (2.22) получается формальным вычислением преобразования Меллина для $y^\mu(x)$ с помощью замены (линеаризации) (1.10).

Теорема 4. *Если интеграл* (2.22) *сходится, то все матрицы*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \cdots & \lambda_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

где каждый вектор-столбец $\lambda^{(j)} = \left(\lambda_1^{(j)} \dots \lambda_n^{(j)}\right)^T$ *пробегает соответствующее множество* $\Lambda^{(j)}$, *положительно определены.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой Л. Нильсон, М. Пассаре и А.К. Циха [24] о множестве сходимости интеграла Меллина-Барнса.

Напомним, что под кратным интегралом Меллина-Барнса понимается интеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^m} \frac{\prod\limits_{j=1}^{p} \Gamma\left(\langle A_j, s\rangle + c_j\right)}{\prod\limits_{k=1}^{q} \Gamma\left(\langle B_k, s\rangle + d_k\right)} z_1^{-s_1} \dots z_m^{-s_m} ds \tag{2.25}$$

где $A_j, B_k \in \mathbb{R}^m$, $c_j, d_k \in \mathbb{C}$ и $ds = ds_1 \dots ds_m$. Вектор $\gamma \in \mathbb{R}^m$ должен выбираться таким образом, чтобы множество интегрирования $\gamma + i\mathbb{R}^m$ не содержало полюсов Г-функций в числителе.

Мы будем предполагать, что переменное изменяется в римановой области наложения над комплексным тором $\mathbb{T}^m = (\mathbb{C} \setminus 0)^m$, а значит,

$$z_j^{-s_j} = e^{-s_j \log z_j}, \;\; \arg z_j \in \mathbb{R}.$$

Также введем обозначения

$$u_j = \mathrm{Re} s_j, \;\; v_j = \mathrm{Im} s_j, \;\; j = 1, ..., m.$$

Через u и v мы будем обозначать векторы в пространстве $\mathbb{R}^m$ с координатами u_j и v_j соответственно. Обозначим $\theta = \mathrm{Arg} z = (\arg z_1, ..., \arg z_m)$ и

$$g(v) := \sum_{j=1}^{p} |\langle A_j, v\rangle| - \sum_{k=1}^{q} |\langle B_k, v\rangle| \tag{2.26}$$

Следующая теорема дает описание области сходимости кратного интеграла Меллина-Барнса.

Теорема 5 (Нильсон, Пассаре, Цих [24])**.** *Для любого множества интегрирования* $\gamma + i\mathbb{R}^m$, *не содержащего особенности подынтегрального выражения, область сходимости интеграла Меллина-Барнса* (2.22) *имеет вид* $\mathrm{Arg}^{-1}(U)$, *где*

$$U = \bigcap_{\|v\|=1} \{\theta \in \mathbb{R}^m : |\langle v, \theta\rangle| \leqslant \frac{\pi}{2} g(v)\}.$$

В случае, когда множество U *непусто, оно совпадает с внутренностью* Θ^0 *многогранника*

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^m : |\langle v_\nu, \theta\rangle| \, \frac{\pi}{2} g(v_\nu), \nu = 1, ...d\},$$

где $\pm v_1, ..., \pm v_d$ *— множество всех единичных векторов, порождающих веер* K, *определяемый разбиением пространства* $\mathbb{R}^m$ *гиперплоскостями* $\{A_j, v\} = 0$, $j = 1, ..., p$ *и* $\langle B_k, v\rangle = 0$, $k = 1, ..., q$.

В отличии от (2.25) интеграл (2.22) содержит полиномиальный множитель $Q(u)$, поэтому сформулируем и докажем следующее утверждение.

Предложение 2. *Область сходимости интеграла* (2.22) *не зависит от полиномиального множителя* $Q(u)$.

Доказательство. Пользуясь свойством полилинейности определителя запишем определитель $Q(u)$ в виде

$$Q(u) = \frac{1}{m_1 \dots , m_n} \det \left\| \delta_j^i \left(\mu_j - \langle \varphi_j, u \rangle\right) + \langle \varphi_j^{(i)}, u^{(i)} \rangle \right\| =$$

$$= \sum_{q=1}^{n} \sum_{|I|=q} \prod_{j \notin I} \left(\mu_j - \langle \varphi_j, u \rangle\right) \det \left\| \langle \varphi_r^{(t)}, u^{(t)} \rangle \right\|_{r,t \in I}.$$

Заметим, что определители в последнем выражении содержат каждый $u_\lambda^{(j)}$ не более, чем в первой степени, поэтому можем записать $Q(u)$ в виде суммы выражений вида

$$const \prod_{k \notin I} \left(\mu_k - \langle \varphi_k, u \rangle\right) u_{\lambda^{(i_1)}}^{(i_1)} \dots u_{\lambda^{(i_q)}}^{(i_q)}.$$

Тогда интеграл (2.22) можем записать как сумму интегралов вида

$$\frac{const}{(2\pi i)^N} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^N} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \prod\limits_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} \Gamma\left(u_\lambda^{(j)}\right) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j}\langle \varphi_j, u \rangle\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{m_j}\langle \varphi_j, u \rangle + \sum\limits_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} u_\lambda^{(j)} + 1\right)} \times$$

$$\times \prod_{k \notin I} \left(\mu_k - \langle \varphi_k, u \rangle\right) u_{\lambda^{(i_1)}}^{(i_1)} \dots u_{\lambda^{(i_q)}}^{(i_q)} x^{-u} du. \qquad (2.27)$$

В полученных интегралах воспользуемся равенством $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$. С помощью этого равенства получим

$$\Gamma\left(\frac{\mu_k}{m_k} = \frac{1}{m_k}\langle \varphi_k, u \rangle\right)\left(\mu_k - \langle \varphi_k, u \rangle\right) =$$

$$= m_k \Gamma\left(\frac{\mu_k}{m_k} = \frac{1}{m_k}\langle \varphi_k, u\rangle + 1\right).$$

В результате интегралы (2.27) запишутся в виде (2.25), причем векторы A_j и B_k у всех этих интегралов будут совпадать с соответствующими векторами A_j и B_k в (2.22). Таким образом, получаем, что полином $Q(u)$ не влияет на область сходимости интеграла (2.22). $\square$

Для интеграла (2.22) функция $g(v)$ такая:

$$\begin{gathered} g(v) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} \left|v_\lambda^{(j)}\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j, v\rangle\right| - \\ - \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j, v\rangle - \sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} v_\lambda^{(j)}\right|. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Веер K порождается N координатными гиперплоскостями

$$v_\lambda^{(j)} = 0, \lambda \in \Lambda^{(j)}, j = 1, ..., n$$

и $2n$ гиперплоскостями

$$\langle\varphi_j, v\rangle = 0, j = 1, ..., n,$$

$$-\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j, v\rangle + \sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} v_\lambda^{(j)} = 0, j = 1, ..., n.$$

Отметим, что множество векторов $\{\pm v_1, ..., \pm v_d\}$, порождающих веер K, получаются как направляющие векторы прямых, получаемых при пересечении всевозможных независимых поднаборов из $N-1$ гиперплоскостей из указанного перечня. Конструктивно такие векторы можно получать как векторные произведения нормальных векторов для этих $N-1$ гиперплоскостей. Тогда скалярное произведение $\langle\varphi_j, v\rangle$ есть ни что иное, как определитель, составленный из $N-1$ векторов, ортогональных вектору v, и вектора φ_j.

Доказательство положительности всех главных миноров проведем методом математической индукции по порядку k этих миноров.

Заметим, что в состав векторов $\{\pm v_1, ..., \pm v_d\}$, входят все базисные векторы $e_\lambda^{(i)}, \lambda \in \Lambda^{(i)}, i = 1, ..., n$. По своему определению вектор φ_j имеет на месте с индексом $\lambda^{(i)}$ координату $\lambda^(i)_j$, поэтому

$$g\left(e_\lambda^{(i)}\right) = 1 + \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\lambda_j^{(i)}}{m_j}\right| - \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\lambda_j^{(i)}}{m_j} - \delta_j^i\right| = 1 + \left|\frac{\lambda_i^{(i)}}{m_i}\right| - \left|\frac{\lambda_i^{(i)}}{m_i} - 1\right|.$$

При условии теоремы о невырожденности многогранника Θ имеем неравенство $g\left(e_\lambda^{(i)}\right) > 0$, из которого получаем, что $\frac{\lambda_i^{(i)}}{m_i}$ и 1 должны быть одного знака. Отсюда $\lambda_i^{(i)} > 0$ для любого $\lambda \in \Lambda^{(i)}$, что и доказывает положительность всех главных миноров порядка 1 матрицы (2.24), т.е. базу индукции.

Пусть теперь все главные миноры до k-го порядка матрицы (2.24) положительны. Рассмотрим направляющий вектор v для прямой, полученной пересечением $N-(k+1)$ координатных гиперплоскостей и гиперплоскостей

$$\langle\varphi_{j_1}, u\rangle = 0, ..., \langle\varphi_{j_k}, u\rangle = 0,$$

причем в набор координатных гиперплоскостей мы не включаем гиперплоскости с нормалями $e^{(j_1)}_{\lambda^{(j_1)}}, \ldots, e^{(j_k)}_{\lambda^{(j_k)}}$ и некоторую гиперплоскость с нормалью вида $e^{(s)}_{\lambda^{(s)}}$, $s \neq j_1, ..., s \neq j_k$.

Вычислим значение функции g в точке v. Координаты $v^{(j)}_{\lambda} = \langle v, e^{(j)}_{\lambda} \rangle$ вектора v равны 0 для всех $e^{(j)}_{\lambda}$ кроме $e^{(j_1)}_{\lambda^{(j_1)}}, \ldots, e^{(j_k)}_{\lambda^{(j_k)}}$ и $e^{(s)}_{\lambda^{(s)}}$.

Скалярные произведения $\langle \varphi_j, v \rangle$ равны 0 для всех $j = j_1, ..., j_k$.

Обозначим $J = \{j_1, ..., j_k\}$, и $\bar{J} = \{1, ..., n\} \setminus (J \cup \{s\})$, тогда

$$
\begin{aligned}
g(v) = \sum_{p \in J} \left| v^{(p)}_{\lambda^{(p)}} \right| + \left| v^{(s)}_{\lambda^{(s)}} \right| + \sum_{q \in \bar{J}} \left| \frac{1}{m_q} \langle \varphi_q, v \rangle \right| + \left| \frac{1}{m_s} \langle \varphi_s, v \rangle \right| - \\
- \sum_{p \in J} \left| v^{(p)}_{\lambda^{(p)}} \right| - \left| v^{(s)}_{\lambda^{(s)}} - \frac{1}{m_s} \langle \varphi_s, v \rangle \right| - \sum_{q \in \bar{J}} \left| \frac{1}{m_q} \langle \varphi_q, v \rangle \right|.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Приводя подобные слагаемые, получим

$$
g(v) = \left| v^{(s)}_{\lambda^{(s)}} \right| + \left| \frac{1}{m_s} \langle \varphi_s, v \rangle \right| - \left| v^{(s)}_{\lambda^{(s)}} - \frac{1}{m_s} \langle \varphi_s, v \rangle \right|. \tag{2.30}
$$

С учетом того, что вектор v есть обобщенное векторное произведение $N-1$ векторов, его координаты представляют собой миноры $(N-1)$-го порядка матрицы, составленной из нормальных векторов для гиперплоскостей. А скалярное произведение $\langle \varphi_j, v \rangle$ можно записать как определитель N-го порядка. Таким образом, с учетом единиц на главной диагонали, получаем следующее выражение для $g(v)$

$$\left|\det\begin{pmatrix}\lambda_{j_1}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_1}^{(j_k)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{j_k}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_k}^{(j_k)}\end{pmatrix}\right| + \left|\det\begin{pmatrix}\lambda_{j_1}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_1}^{(j_k)} & \lambda_{j_1}^{(s)}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \lambda_{j_k}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_k}^{(j_k)} & \lambda_{j_k}^{(s)}\\ \lambda_{s}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{s}^{(j_k)} & \lambda_{s}^{(s)}\end{pmatrix}\right|$$
$$- \left|\det\begin{pmatrix}\lambda_{j_1}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_1}^{(j_k)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{j_k}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_k}^{(j_k)}\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}\lambda_{j_1}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_1}^{(j_k)} & \lambda_{j_1}^{(s)}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \lambda_{j_k}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{j_k}^{(j_k)} & \lambda_{j_k}^{(s)}\\ \lambda_{s}^{(j_1)} & \dots & \lambda_{s}^{(j_k)} & \lambda_{s}^{(s)}\end{pmatrix}\right|. \tag{2.31}$$

Отсюда получаем, что для положительности $g(v)$ главный минор $(k+1)$-го порядка должен быть того же знака, что и главный минор k-го порядка. А главный минор k-го порядка положителен по предположению индукции. $\square$

8. О достаточном условии сходимости интеграла

Здесь мы докажем, что для системы из двух алгебраических уравнений полученное в предыдущем параграфе необходимое условие является и достаточным для сходимости интеграла Меллина-Барнса.

Рассмотрим систему из двух алгебраических уравнений от двух неизвестных $y_1,\ y_2$

$$\begin{cases} y_1^{m_1} + \sum\limits_{i=1}^{p_1} x_i^{(1)} y_1^{\alpha_i^{(1)}} y_2^{\beta_i^{(1)}} - 1 = 0, \\ y_2^{m_2} + \sum\limits_{j=1}^{p_2} x_j^{(2)} y_1^{\alpha_j^{(2)}} y_2^{\beta_j^{(2)}} - 1 = 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

Интеграл Меллина-Барнса, соответсвующий моному решения y^μ, представляет собой интеграл по мнимому подпространству $\gamma + i\mathbb{R}^{p_1+p_2}$ следующего выражения

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{2}\prod\limits_{j=1}^{p_i}\Gamma\left(u_j^{(i)}\right)\Gamma\left(\frac{\mu_1}{m_1}-\frac{1}{m_1}\langle\alpha,u\rangle\right)\Gamma\left(\frac{\mu_2}{m_2}-\frac{1}{m_2}\langle\beta,u\rangle\right)Q(u)x^{-u}}{\Gamma\left(\frac{\mu_1}{m_1}-\frac{1}{m_1}\langle\alpha,u\rangle+|u^{(1)}|+1\right)\Gamma\left(\frac{\mu_2}{m_2}-\frac{1}{m_2}\langle\beta,u\rangle+|u^{(2)}|+1\right)}. \tag{2.33}$$

Теорема 6. *Интеграл* (2.33) *имеет непустую область сходимости тогда и только тогда, когда положительны все показатели* $\alpha_j^{(1)}, \beta_i^{(2)}$ *и все определители* $\Delta_{ij} = \alpha_i^{(1)}\beta_j^{(2)} - \alpha_j^{(2)}\beta_i^{(1)}$.

Доказательство. Согласно теореме 4 нам надо доказать лишь, что положительность указанных в формулировке миноров обеспечивает сходимость интеграла.

Применительно к нашему интегралу функция $g(v)$, определенная в (2.26), имеет вид

$$g(v) = \sum_{j=1}^{p_1}|v_j^{(1)}| + \frac{1}{m_1}|\langle\alpha,v\rangle| - \left|\sum_{j=1}^{p_1} v_j^{(1)} - \frac{1}{m_1}\langle\alpha,v\rangle\right| + \\ + \sum_{j=1}^{p_2}|v_j^{(2)}| + \frac{1}{m_2}|\langle\beta,v\rangle| - \left|\sum_{j=1}^{p_2} v_j^{(2)} - \frac{1}{m_2}\langle\beta,v\rangle\right|.$$

В приведенной нами записи нетрудно заметить, что $g(v)$ является суммой двух выражений, каждое из которых представляет собой разность между суммой модулей и модулем суммы, следовательно функция $g(v)$ не может принимать отрицательных значений. Более того, $g(v) = 0$ тогда и только тогда, когда слагаемые внутри каждой из двух групп:

a) $\{v_i^{(1)}, i = 1, \ldots, p_1\}, -\dfrac{1}{m_1}\langle \alpha, v\rangle;$

b) $\{v_j^{(2)}, j = 1, \ldots, p_2\}, -\dfrac{1}{m_2}\langle \beta, v\rangle,$

имеют один и тот же знак.

Для построенной функции g возможны 4 случая:

1) все слагаемые неотрицательны.

2) все слагаемые неположительны.

3) первая группа слагаемых неотрицательна, а вторая неположительна.

4) первая группа слагаемых неположительна, а вторая неотрицательна.

Мы рассмотрим ситуации 1 и 3, ситуации 2 и 4 легко сводятся к ним.

Рассмотрим ситуацию 1). Пусть все слагаемые неотрицательны.

Тогда имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} v_j^{(1)} \geqslant 0, & j = 1, \ldots, p_1, \\ v_j^{(2)} \geqslant 0, & j = 1, \ldots, p_2, \\ -\langle \alpha, v \rangle \geqslant 0, \\ -\langle \beta, v \rangle \geqslant 0. \end{cases}$$

Прибавляя к неравенству $-\langle \alpha, v \rangle \geqslant 0$ неравенства $v_j^{(1)} \geqslant 0$, умноженные на соответствующие $\alpha_j^{(1)}$, $j = 1, \ldots, [k], \ldots, p_1$, и неравенства $v_j^{(2)} \geqslant 0$, умноженные на соответствующие $\alpha_j^{(2)}$, $j = \overline{1, p_2}$. получим неравенство

$$-\alpha_k^{(1)} v_k^{(1)} \geqslant 0,$$

в совокупности с неравенством $v_k^{(1)} \geqslant 0$ в силу положительности α получаем, что $v_k^{(1)} = 0$ для произвольного $k = 1, \ldots, p_1$.

Аналогично, прибавляя к неравенству $-\langle \beta, v \rangle \geqslant 0$ неравенства $v_j^{(1)} \geqslant 0$, умноженные на соответствующие $\beta_j^{(1)}$, $j = \overline{1, p_1}$, и неравенства $v_j^{(2)} \geqslant 0$, умноженные на соответствующие $\beta_j^{(2)}$, $j = 1, \ldots, [k], \ldots, p_2$, получим неравенство

$$-\beta_k^{(2)} v_k^{(2)} \geqslant 0.$$

Из него с учетом неравенства $v_k^{(2)} \geqslant 0$ в силу положительности $\beta_k^{(2)}$ получим, что $v_k^{(2)} = 0$ для произвольного $k = 1, \ldots, p_2$.

Рассмотрим ситуацию 3). Пусть первая группа слагаемых неотрицательна, а вторая неположительна. Тогда имеем систему вида

$$\begin{cases} v_j^{(1)} \geqslant 0, & j = 1, \ldots, p_1 \\ -v_j^{(2)} \geqslant 0, & j = 1, \ldots, p_2 \\ -\langle \alpha, v \rangle \geqslant 0, \\ \langle \beta, v \rangle \geqslant 0. \end{cases}$$

Покажем, что эта система имеет только нулевое решение. Подсистема из первых $p_1 + p_2$ неравенств определяет ортант в пространстве $\mathbb{R}^{|p|}$

$$U := \{v_j^{(1)} \geqslant 0, j = 1, \ldots, p_1, -v_j^{(2)} \geqslant 0, j = 1, \ldots, p_2\}.$$

Пусть векторы $\tau^{(j)} = \left(\tau_1^{(j)}, \ldots \tau_{p_j}^{(j)}\right) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}^{p_j}$ такие, что

$$|\tau^{(j)}| = \sum_{i=1}^{p_j} \tau_i^{(j)} = 1, \ j = 1, 2.$$

Тогда ортант U можно представить как объединение двумерных множеств

$$U = \bigcup_{\tau} L_\tau,$$

где

$$\begin{aligned} L_\tau = \big\{ v \in \mathbb{R}^{|p|} : v_j^{(1)} = t_1 \tau_j^{(1)}, j = 1, \ldots, p_1, \\ v_j^{(2)} = -t_2 \tau_j^{(2)}, j = 1, \ldots, p_2, t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}^2 \big\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сужение неравенств $-\langle \alpha, v \rangle \geqslant 0$ и $\langle \beta, v \rangle \geqslant 0$. на L_τ. Получим систему неравенств

$$\begin{cases} t_1 \geqslant 0, \\ t_2 \geqslant 0, \\ -t_1\langle \alpha^{(1)}, \tau^{(1)}\rangle + t_2\langle \alpha^{(2)}, \tau^{(2)}\rangle \geqslant 0, \\ t_1\langle \beta^{(1)}, \tau^{(1)}\rangle - t_2\langle \beta^{(2)}, \tau^{(2)}\rangle \geqslant 0. \end{cases}$$

Перейдем от системы неравенств к системе вида

$$\begin{cases} t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, \\ s_1 \geqslant 0, s_2 \geqslant 0, \\ -t_1\langle \alpha^{(1)}, \tau^{(1)}\rangle + t_2\langle \alpha^{(2)}, \tau^{(2)}\rangle = s_1, \\ t_1\langle \beta^{(1)}, \tau^{(1)}\rangle - t_2\langle \beta^{(2)}, \tau^{(2)}\rangle = s_2. \end{cases}$$

Решая систему из двух последних равенств методом Крамера, получаем следующие значения для t_1 и t_2:

$$t_1 = \frac{-s_1\langle \beta^{(2)}, \tau^{(2)}\rangle - s_2\langle \alpha^{(2)}, \tau^{(2)}\rangle}{\langle \alpha^{(1)}, \tau^{(1)}\rangle\langle \beta^{(2)}, \tau^{(2)}\rangle - \langle \alpha^{(2)}, \tau^{(2)}\rangle\langle \beta^{(1)}, \tau^{(1)}\rangle},$$

$$t_2 = \frac{-s_2\langle \alpha^{(1)}, \tau^{(1)}\rangle - s_1\langle \beta^{(1)}, \tau^{(1)}\rangle}{\langle \alpha^{(1)}, \tau^{(1)}\rangle\langle \beta^{(2)}, \tau^{(2)}\rangle - \langle \alpha^{(2)}, \tau^{(2)}\rangle\langle \beta^{(1)}, \tau^{(1)}\rangle}.$$

Так как

$$\begin{vmatrix} \langle \alpha^{(1)}, \tau^{(1)}\rangle & \langle \alpha^{(2)}, \tau^{(2)}\rangle \\ \langle \beta^{(1)}, \tau^{(1)}\rangle & \langle \beta^{(2)}, \tau^{(2)}\rangle \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{p_1}\sum_{k=1}^{p_2} \tau_j^{(1)}\tau_k^{(2)} \begin{vmatrix} \alpha_j^{(1)} & \alpha_k^{(2)} \\ \beta_j^{(1)} & \beta_k^{(2)} \end{vmatrix} > 0,$$

и $t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, s_1 \geqslant 0, s_2 \geqslant 0$, то единственным решением приведенной системы неравенств и уравнений является $t_1 = t_2 = 0$, откуда получаем, что $v = 0$.

Таким образом получаем, что в неравенстве

$$|\langle\theta, v\rangle| \leqslant \frac{\pi}{2}g(v),$$

определяющем область сходимости интеграла, правая часть всегда неотрицательна, и равна нулю лишь в случае $v = 0$. Следовательно интеграл всегда будет иметь непустую область сходимости. $\square$

Далее покажем, что интеграл от выражения (2.33) представляет решение системы (2.32). Для этого вычислим иго с помощью методов многомерной теории вычетов.

С учетом (2.23) в выражении (2.33) $Q(u)$ будет равен

$$Q(u) = \frac{1}{m_1 m_2}\begin{vmatrix} \mu_1 - \langle\alpha^{(2)}, u^{(2)}\rangle & \langle\beta^{(1)}, u^{(1)}\rangle \\ \langle\alpha^{(2)}, u^{(2)}\rangle & \mu_2 - \langle\beta^{(1)}, u^{(1)}\rangle \end{vmatrix}. \tag{2.34}$$

Вычислим полученный интеграл методом, с помощью которого вычисляются общие многомерные интегралы Меллина-Барнса

$$\Phi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^m}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^m} \frac{\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma\left(\langle A_j, s\rangle + c_j\right)}{\prod\limits_{k=1}^{q}\Gamma\left(\langle B_k, s\rangle + d_k\right)} z_1^{-s_1}\ldots z_m^{-s_m}ds \tag{2.35}$$

где все параметры вещественные: $A_j, B_k \in \mathbb{R}^m, c_j, d_k \in \mathbb{R}$, а точка $\gamma \in \mathbb{R}^m$ выбрана так, что вертикальное подпространство интегрирования $\gamma + i\mathbb{R}^m$ не пересекает полюсы подынтегральной функции, состоящие из семейства гиперплоскостей

$$\langle A_j, z\rangle = -\nu, \quad v = 0, 1, 2, ..., j = 1, ..., p.$$

Основой метода является принцип разделяющих циклов, сформулированный А.К. Цихом [29] (см. также [32], [30]). В формулировке этого принципа речь идет о вычислении интегралов

$$\frac{1}{(2\pi i)^s}\int\limits_{\Delta_g}\frac{h(z)dz}{f_1(z)\dots f_s(z)} \tag{2.36}$$

типа Гротендика, где полюсы подынтегральной мероморфной формы ассоциированы с голоморфным собственным отображением $f = (f_1, ..., f_s)$: $\mathbb{C}^s \to \mathbb{C}^s$, а множество интегрирования Δ_g есть остов полиэдра Π_g, ассоциированного с другим голоморфным собственным отображением $g = (g_1, ..., g_s) : \mathbb{C}^s \to \mathbb{C}^s$. В случае, когда отображения f и g совпадают, интеграл (2.36) равен сумме вычетов Гротендика подынтегральной формы по всем нулям отображения f в полиэдре Π_g. На самом деле в этом случае остов Δ_g гомологичен сумме локальных циклов, разделяющих локальные дивизоры $D_j = f_j = 0, j = 1, ..., s$, то есть таких циклов, которые участвуют в определении локального вычета Гротендика [29]. В вопросе о представлении интеграла (2.36) суммой вычетов Гротендика важную роль играет следующее понятие.

Определение. Полиэдр Π_g Называется *согласованным* с семейством гиперповерхностей (дивизоров) $\{D_j\}$, если j-я грань полиэдра Π_g не пересекает D_j для всех j от 1 до s.

Теорема 7 (Принцип разделяющих циклов)**.** *Если полиэдр* Π_g *ограничен и согласован с семейством полярных дивизоров* $\{D_j\}$, *то интеграл* (2.36) *равен сумме вычетов Гротендика в области* Π_g

В случае неограниченных полиэдров кроме условия согласованности полиэдра и семейства полярных дивизоров надо требовать достаточно быстрого убывания подынтегральной формы в Π_g, подобно тому как это делается в классической Лемме Жордана, где в качестве Π_g выступает полуплоскость. Эти условия описаны в статьях [2], [32].

Первоначально заданный интеграл (2.35) можно привести к каноническому виду (2.36) следующим образом. Вертикальное подпространство интегрирование $\gamma+i\mathbb{R}^s$ можно интерпретировать как остов некоторого полиэдра, причем в случае $s=1$ оно может быть остовом лишь двух полиэдров — левой и правой полуплоскостей с разделяющей линией $\gamma+i\mathbb{R}$. Однако в случае $s>1$ это подпространство может служить остовом бесконечного числа полиэдров и наша задача состоит в том, чтобы разбить всё множество полярных гиперплоскостей в (2.35) на s дивизоров и одновременно подклеить к $\gamma+i\mathbb{R}^s$ полиэдр, согласованный с этим семейством дивизоров. В качестве полиэдров мы будем брать следующие:

$$\Pi_g = \{z \in \mathbb{C}^s : \mathrm{Re} g_j(z) < r_j, j = 1, ..., s\},$$

где $g_j(z)$ — линейные функции с вещественными коэффициентами.

Ясно, что $\Pi_g = \pi + i\mathbb{R}^s$, где π- — ортант (симплициальный s-мерный конус) в вещественном пространстве $\mathbb{R}^s \subset \mathbb{C}^s$.

Применим рассмотренный метод к интегралу (2.35). Полярное множество в нем состоит из p_1+p_2+2 семейств гиперплоскостей

$$D_i^{(j)} = \{z_i^{(j)} = -\nu,\ \nu \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}, i = 1, ...p_j,\ j = 1, 2,$$

$$D_j = \{l_j(z) = -\nu, \nu \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}, j = 1, 2.$$

Рассмотрим полиэдр Π_0 согласованный с набором дивизоров $D_i^{(j)}$, $i = 1, ...p_j$, $j = 1, 2$. Поэтому согласно принципу разделяющих циклов вычетная формула в полиэдре Π_0 дает сумму вычетов по точкам $z_i^{(j)} = -k_i^{(j)}$, $i = 1, ...p_j$, $j = 1, 2$, которая приводит к ряду Тейлора

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^{|p|}_{\geqslant 0}} \frac{(-1)^{|p|}\Gamma\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{1}{m_1}\langle\alpha,k\rangle\right)\Gamma\left(\frac{\mu_2}{m_2}+\frac{1}{m_2}\langle\beta,k\rangle\right)Q(-k)x^k}{k!\Gamma\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{1}{m_1}\langle\alpha,k\rangle-\left|k^{(1)}\right|+1\right)\Gamma\left(\frac{\mu_2}{m_2}+\frac{1}{m_2}\langle\beta,k\rangle-\left|k^{(2)}\right|+1\right)}.$$

Полученный ряд совпадает с рядом для решения системы (2.32) полученным с помощью формулы (1.9) для $\mu > 0$. Таким образом можем сделать вывод, что интеграл (2.33) при условии теоремы 6 и многочлене $Q(u)$ вида (2.34) есть представление монома решения системы (2.32) Для $\mu > 0$.

9. Пример

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y_1^3 + x_1 y_1^2 y_2 - 1 = 0 \\ y_2^3 + x_2 y_1 y_2^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{2.37}$$

По результатам параграфа 8 моном решения $y^\mu = y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2}$ этой системы может быть записан в виде интеграла Меллина-Барнса

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^2} \frac{\Gamma\left(u_1\right)\Gamma\left(u_2\right)\Gamma\left(\frac{\mu_1}{3}-\frac{2u_1+u_2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu_2}{3}-\frac{u_1+2u_2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu_1}{3}+\frac{u_1-u_2}{3}+1\right)\Gamma\left(\frac{\mu_2}{3}+\frac{-u_1+u_2}{3}+1\right)} Q(u)x^{-u}du, \tag{2.38}$$

где вектор γ выбирается из многогранника (Рисунок 1)

$$\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2_{>0}, 2u_1 + u_2 < \mu_1, u_1 + 2u_2 < \mu_2\}. \tag{2.39}$$

Функция $g(v)$ имеет вид

$$g(v) = |v_1| + |v_2| + \frac{1}{3}\left|2v_1 + v_2\right| + \frac{1}{3}\left|v_1 + 2v_2\right| - \frac{1}{3}\left|v_1 - v_2\right| - \frac{1}{3}\left|v_2 - v_1\right|.$$

Область сходимости интеграла непуста и определяется неравенствами (Рисунок 2).

$$|\theta_1| < \frac{2\pi}{3},\ |\theta_2| < \frac{2\pi}{3},\ |2\theta_2 - \theta_1| < \pi,\ |2\theta_1 - \theta_2| < \pi.$$

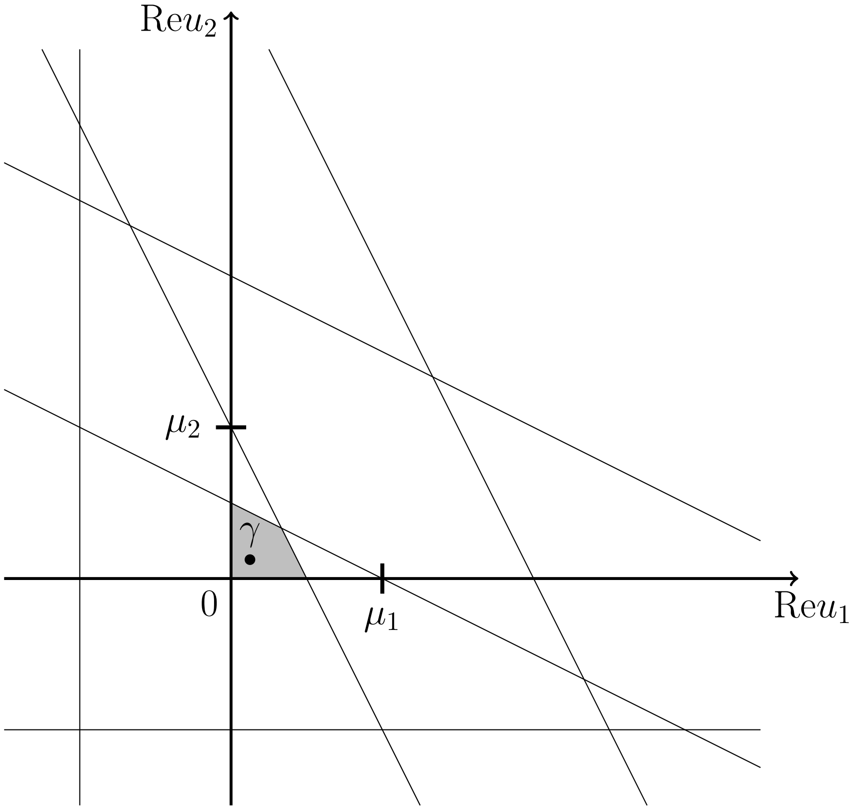

Рис. 1: Множество (2.39) и вектор γ.

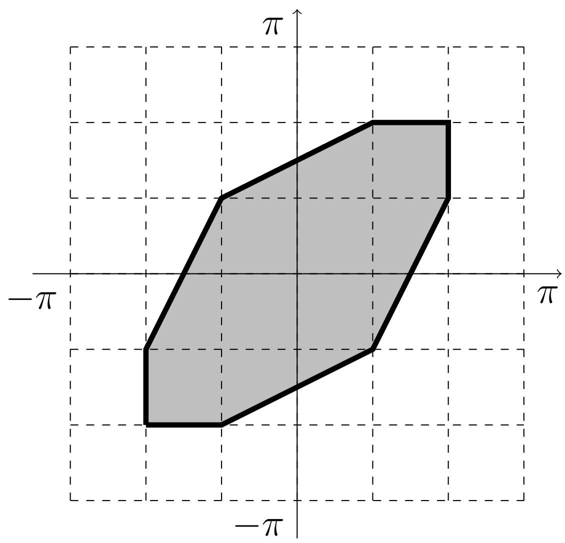

Рис. 2: Arg-образ области сходимости интеграла (2.38)

Литература

[1] Mellin H.J., *Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma*, C.R.Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **172** (1921), 658–661.

[2] Жданов О.Н., Цих А.К., *Исследование кратных интегралов Меллина-Барнса с помощью многомерных вычетов*, Сиб. матем. журн. **39:2** (1998), 282–298.

[3] Horn J., *Über hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen,* Math. Ann. **117** (1940), 384–414.

[4] M. Passare, A. Tsikh, *Algebraic equations and hypergeometric series*, The legacy of Niels Henrik Abel (Oslo, Norway, 2002), Springer-Verlag, Berlin, 2004, 653–672.

[5] Von Lindemann F. Über die Auflösung der algebraischen Gleichungen durch transcendente Functionen, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen, **7**, (1884) 245–248.

[6] Birkeland R., *Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen,* Math. Z. **26**(1927), 565–578.

[7] Mayr K., *Über die Auflösung algebraischer Gleichungssysteme durch hypergeometrische Funktionen,* Monatshefte fur Mathematik und Physik **45** (1937),280–313.

[8] Гельфанд И.М., Зелевинский А.В., Капранов М.М., *Гипергеометрические функции и торические многообразия*, Функц. анализ и его прил., **23:2**(1989), 12–26.

[9] Sturmfels B. *Solving algebraic equations in terms of A-hypergeometric series*, Discrete Math. **210:1–3**(2000), 171–181.

[10] Садыков Т.М., *О многомерной системе дифференциальных гипергеометрических уравнений,* Сиб. матем. журн., **39:5** (1998), 1141–1153.

[11] Sadykov T., *On the Horn system of partial differential equations and series of hypergeometric type*, Mathematica Scandinavica, **91:1**(2002), 127–149.

[12] Семушева А.Ю., Цих А.К., *Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений*, Комплексный анализ и дифференциальные операторы: Сб. научн. тр. - Красноярск: КрасГУ, 2000 134–146.

[13] Переломов А. М., *Гипергеометрические решения некоторых алгебраических уравнений*, ТМФ, **140:1** (2004), 3–13.

[14] Beukers F., *Algebraic A-hypergeometric functions,* Inventiones mathematicae, **180:3** (2010), 589–610.

[15] Beukers F., *Irreducibility of A-hypergeometric systems,* Idagationes Mathematicae **21:1** (2011), 30–39.

[16] V. Bârsan, G.A. Nemnes: *Physical relevance of the Passare-Tsikh solution of the principal quintic equation*, J.Adv.Res.Phys. **2:1** (2011) 1–6.

[17] Bod E., *Algebraicity of the Appell-Lauricella and Horn hypergeometric functions,* Differ. Equations **252:1** (2012), 541–566.

[18] Passare M., Sadykov T. and Tsikh A., *Nonconfluent hypergeometric functions in several variables and their singularities,* Compositio Mathematica, **141:3** (2005), 787–810.

[19] Михалкин Е.Н., *О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций,* Сиб. матем. журн.,

[20] Антипова И.А., Михалкин Е.Н., *Аналитические продолжения общей алгебраической функции с помощью рядов Пюизо*, - Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа, Сборник статей, Тр. МИАН, 279, МАИК, М., 2012, 9–19.

[21] Антипова И.А., *Выражение суперпозиции общих алгебраических функций через гипергеометрические ряды*, Сиб.матем.журн., **44:5** (2003), 972–980.

[22] Васильев В.А., *Топология дополнений к дискриминантам,* М.: Фазис, 1997.

[23] Степаненко В.А. *О решении системы n алгебраических уравнений от n неизвестных с помощью гипергеометрических функций*, Вестник КрасГУ, **1** (2003), 35–48.

[24] Nilsson L., *Amoebas, Discriminants, and Hypergeometric Functions,* Doctoral Thesis, Department of Mathematics, Stockholm University, Sweden, 2009.

[25] Антипова И.А., Цих А.К., *Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n переменных*, Изв. РАН. Сер. матем., **76:5** (2012), 29–56.

[26] А. П. Южаков, *О применении кратного логарифмического вычета для разложения неявных функций в степенные ряды*, Матем. сб., **97(139):2(6)** (1975), 177—192.

[27] Айзенберг Л.А., Южаков А.П., *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе,* - Новосибирск: Наука, 1979.

[28] Антипова И.А., *Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений*, Матем. сб., **198:4**(2007), 3–20.

[29] Tsikh A.K., *Multidimentional residuses and their applications,* Amer. MAth. Soc. — Providence. – 1992.

[30] Кытманов А.М., Цих А.К., *Интегральные представления и вычеты (по работам красноярской школы)* Коплексный анализ в современной математике: К 80-летию со дня родения Б.В. Шабата. М.: Фазис, 2001. С. 198–216.

[31] Быков В.И., Кытманов А.М., Лазман М. З., *Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов*, Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1991.

[32] Passare M., Tsikh A., Zhdanov O., *A multidimentional Jordan residue lemma with an application to Mellin–Barnes integrals,* Contributions to complex analysis and analytic geometry. Braunschweig: Vieweg, 1994. P. 233–241. (Aspects Math. E; V.26).

47:2 (2006), 365–371.

Работы автора по теме диссертации

- В.Р. Куликов, Вычисление мономиальной функции для решения общей системы алгебраических уравнений, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., т.5, №3, 2012, С. 409–416.

- V.R. Kulikov, Conditions for Convergence of the Mellin–Barnes Integral for Solution to System of Algebraic Equations, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., т.7, №3, 2014, С. 339–346.

- В.Р. Куликов, В.А. Степаненко, О решениях и формулах Варинга для систем n алгебраических уравнений от n неизвестных, Алгебра и анализ, т. 26, №5, 2014.