На правах рукописи

КОГУТ Алексей Тарасович

МЕТОД ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ, ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ТРАЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (информатика, вычислительная техника и управление)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Красноярск 2010

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Омский государственный университет путей сообщения».

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор АЛЕКСЕЕВ Виктор Михайлович;

доктор технических наук, профессор ВОЕВОДА Александр Александрович;

доктор технических наук, профессор ИВАНЧУРА Владимир Иванович.

Ведущая организация: Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный политехнический университет».

Защита состоится 19 мая 2010 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета ДМ 212.099.06 при Сибирском федеральном университете по адресу: 660074, г. Красноярск, ул. академика Киренского, 26, корпус УЛК, каб. 115.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета по адресу: г. Красноярск, ул. академика Киренского, 26, каб. Г 274.

Автореферат разослан 19 апреля 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Р. Ю. Царев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Для большинства реальных объектов, физико-химических явлений, производственных и технологических процессов математические модели являются нелинейными. При решении задач анализа и синтеза систем хорошо обоснованны только методы классической линейной теории, поэтому применяют различные методы линеаризации, когда нелинейные зависимости заменяются эквивалентными линейными моделями.

Колебательные процессы, близкие по форме к синусоидальным в системах с существенно нелинейными характеристиками, исследуются с помощью метода гармонической линеаризации, использующего в линейной модели только первую гармонику. Для систем, работающих в условиях помех, разработан метод статистической линеаризации, применяется также метод обобщенной линеаризации при непрерывных сигналах произвольной формы.

Во многих практических приложениях для описания объектов и систем применяют модели на основе линейного приближения ряда Тейлора. Одним из направлений использования дифференциальной линеаризации, в том числе и диссертационного исследования, являются численные методы решения ряда оптимизационных задач, которые существуют в теории систем управления и обработки информации, как правило, при их синтезе, а также в идентификации.

Предлагается в качестве оптимизационных применять итерационные процедуры определения решений нелинейных уравнений, тогда алгоритм Ньютона, использующий значения только первых производных, будет градиентным методом безусловной оптимизации. Такой подход позволяет воспользоваться известными в прикладной математике итерационными методами и методиками их исследования, приведенными, например, в работах Дж. Трауба, Дж. Ортеги, В. Рейнболдта, Н. С. Бахвалова, Ш. Е. Микеладзе, Э. Полака, Ф. Гилла, У. Мюррея, М. Райта, А. Фиакко, Г. Мак-Кормика, Д. Химмельблау и др.

Итерационные методы оптимизации используются в системах обработки информации и параметрической идентификации. Основы теории идентификации заложены в трудах таких отечественных ученых, как Я. З. Цыпкин, А. А. Красовский, В. А. Каминскас, А. М. Дейч, Н. С. Райбман, А. Г. Ивахненко, А. И. Рубан, Л. А. Растригин, Н. Е. Маджаров, Б. Н. Петров, П. Д. Крутько, И. Н. Перельман, Ш. Е. Штейнберг, В. В. Налимов, Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов, Г. К. Круг, В. П. Бородюк, Э. К. Лецкий, и зарубежных: Р. Беллман, Р. Калаба, П. Эйкхофф, Дж. Саридис, Э. Сейдж, Д. Мелса, К. Спиди, Р. Браун, Дж. Гудвин, Л. Льюинг, Д. Гроп, И. Бард, Г. Д. Баде и др.

Рассматривается параметрическая идентификации в виде обобщенного оценивания параметров и состояний динамических объектов методами квазилинеаризации и последовательной линеаризации. В соответствующих итерационных процедурах применяется линейная аппроксимация по формуле Тейлора.

В классе нелинейных систем нашли применение численные методы решения задач оптимального управления таких авторов, как А. А. Абрамов, Р. П. Федоренко, Л. И. Шатровский, Н. А. Крылов, Ф. Л. Черноусько, А. И. Пропой, Д. Табак, Б. С. Куо и других, описания которых приведены, например, в работах Н. Н. Моисеева, В. Н. Афанасьева. К методам линеаризации, использующим только первую вариацию, относится метод Шатровского или последовательного улучшения управлений.

Одним из современных направлений в ТАУ является формирование таких управлений, чтобы в каждый момент времени движение синтезируемой системы совпадало с требуемой траекторией. Аналитическое решение для управляющих воздействий известно для линейных и аффинных объектов и приведено, например, в работах В. Н. Фомина, А. Л. Фрадкова, В. А. Якубовича, Л. Н. Волгина, Р. Изермана, Я. З. Цыпкина, А. А. Красовского и др. В классе нелинейных систем требуется определение обратных вектор-функций и существует два подхода. Первый является аналитическим и основан на точной линеаризации, преобразовании и замене координат и в настоящее время активно развивается благодаря работам А. Исидори, К. С. Нарендры, Р. Марино, Р. Томея, П. Кокотовича, С. Састри, Н. К. Халила.

Второй подход, не требующий обращений и проведения достаточно сложных аналитических преобразований, предложен А. И. Рубаном для класса дискретных систем и основан также на замене нелинейных моделей линейным отрезком ряда Тейлора. Получаемый рекуррентный алгоритм управления аналогичен итерационной процедуре Ньютона, область и скорость сходимости которой ограничены.

Итерационные методы, построенные на аппроксимациях линейным полиномом Тейлора, хорошо алгоритмизируются, просты в реализации, но имеют узкую область сходимости. Следовательно, разработка новых и модернизация существующих методов линеаризации являются актуальными задачами.

Цель диссертационной работы состоит в разработке и исследовании метода полиномиальной аппроксимации гладких нелинейных вектор-функций, позволяющего в линейных моделях, построенных на основе многомерного ряда Тейлора, учитывать высшие производные; в формировании вычислительных алгоритмов, модернизации классических методов линеаризации, а также в решении прикладных задач оптимизации, параметрической идентификации и синтеза систем управления нелинейными объектами.

Для достижения поставленной цели были решены следующие основные задачи.

1. Определены основные аналитические выражения полиномиальной аппроксимации и способы построения вычислительных алгоритмов.

2. Построены на основе полиномиальной аппроксимации итерационные процедуры численных методов оптимизации. Определены аналитические выражения и проведен анализ основных показателей сходимости.

3. Получены методы идентификации при оценивании параметров и состояний нелинейных динамических объектов. Определены условия сходимости, а также алгоритмические и вычислительные затраты.

4. Разработаны приближенные алгоритмы траекторного управления нелинейными дискретными объектами. Предложена методика анализа устойчивости и точности процессов управления в замкнутых системах.

5. Проведены экспериментальные исследования разработанных методов и алгоритмов с помощью программных средств Matlab и для типовых примеров сравнивались результаты моделирования и теоретических исследований.

6. Применены методы полиномиальной аппроксимации при синтезе систем обработки информации и управления, в том числе и при техническом диагностировании средств и устройств подвижного состава.

Объект исследования. Объектом исследования являются технические системы, описываемые разными видами моделей. При параметрической идентификации исследуются нелинейные дифференциальные уравнения в форме переменных состояния, которые используются в качестве расширенной модели динамических объектов при проектировании компьютерного тренажера операторов атомных электростанций.

В задачах траекторного управления нелинейные динамические объекты описываются разностными уравнениями и применяются при синтезе локальных систем управления, входящих в состав робототехнического комплекса для деревообрабатывающей промышленности и автоматизированных комплексов технического диагностирования тяговых двигателей и отдельных узлов подвижного состава. В системах обработки информации моделями являются также разностные уравнения, которые используются при определении коэффициентов цифровых фильтров с заданной частотной характеристикой.

Предмет исследования – методы оптимизации, параметрической идентификации и управления нелинейными объектами, построенные на линейных приближениях, учитывающих и высшие производные.

Методы исследования. Теоретический анализ проводился на основе методов прикладной математики при безусловной минимизации и численном решении нелинейных уравнений, теории матриц, дифференциальных уравнений и идентификации, теории автоматического управления и численных методов оптимального управления.

Основные научные результаты работы:

1. Метод линеаризации на основе ряда Тейлора, его основные формы, вычислительные процедуры и оценки точности линейных приближений.

2. Численные методы безусловной оптимизации, нахождения решений уравнений и аналитические выражения показателей сходимости.

3. Методы параметрической идентификации и условия сходимости.

4. Алгоритмы траекторного управления, в том числе процедуры с переключением, методика анализа точности и устойчивости замкнутых систем.

5. Приближенные методы синтеза цифровых фильтров, параметрической идентификации и алгоритмы траекторного управления в робототехнических и диагностических комплексах промышленности и железнодорожного транспорта.

Достоверность полученных результатов диссертационной работы подтверждается точностью совпадения (ошибка в пределах пяти процентов) теоретических результатов и экспериментальных данных при проведении лабораторных и натурных испытаний для оценок параметров идентифицируемой модели компьютерного тренажера и коэффициентов цифровых фильтров, а также выходных сигналов и заданной траектории движения в системах управления деревообрабатывающего и диагностических комплексов.

Новизна научных результатов работы состоит в следующем:

впервые получен метод дифференциальной линеаризации с учетом высших производных, основные формы, вычислительные схемы и формулы точности;

численные методы являются новыми и по сравнению с классическим имеют кубическую скорость и более широкую область сходимости;

аналитические выражения модифицированных методов квазилинеаризации, последовательной линеаризации и условия сходимости получены впервые; они обеспечивают более эффективное оценивание по сравнению с классическими;

алгоритмы формирования траекторного управления нелинейными динамическими объектами являются новыми; методика исследования точности и анализа абсолютной устойчивости применяется впервые и разработанные методы обеспечивают более высокие показатели точности и устойчивости;

впервые были разработаны приближенные методы полиномиальной аппроксимации при синтезе цифровых фильтров, идентификации и управления объектами промышленности и железнодорожного транспорта.

Значение полученных результатов для теории заключается в разработке нового варианта метода линеаризации, позволяющего синтезировать более эффективные численные алгоритмы решения оптимизационных задач, оценивания параметров и состояний, траекторного управления нелинейными многомерными динамическими объектами.

Значение полученных результатов для практики. Разработанные методы, алгоритмы и соответствующее программное обеспечение входят в состав автоматизированного комплекса проектирования систем обработки информации и управления и являются универсальными, поэтому имеют важное значение в различных областях науки и производства.

В системах обработки информации при синтезе цифровых фильтров алгоритмы позволили вычислять коэффициенты при любых реальных начальных приближениях. Модифицированные методы параметрической идентификации для компьютерных тренажеров повысили качество обучения обслуживающего персонала, уровень подготовки которого является одним из основных факторов обеспечения безопасности атомных электростанций.

В деревообрабатывающей промышленности важное значение имеет снижение металлоемкости станков, что и обеспечено в роботизированном комплексе «Мастер».

На железнодорожном транспорте широко используются тяговые электродвигатели и повышение уровня автоматизации при их диагностировании улучшает качество проведения ремонтных работ. Вибродиагностические стенды являются универсальными при испытаниях отдельных узлов, применение пневмоподвески и создание максимально возможной амплитуды колебаний снижают мощность электромеханического привода и общие энергозатраты.

Реализация результатов диссертации. Результаты работы использованы в ФГУП «Омский НИИ приборостроения» при проектировании цифровых рекурсивных фильтров произвольной формы, в НПО «Автоматика» при разработке методов идентификации в компьютерном тренажере операторов атомных электростанций, в ООО «СибЭлектро» при синтезе адаптивной системы управления деревообрабатывающим робототехническим комплексом «Мастер» и в НИИ технологии, контроля и диагностики железнодорожного транспорта (НИИТКД) при разработке алгоритмов цифрового управления приводом постоянного тока при испытаниях тяговых двигателей, а также вынужденными механическими колебаниями в вибродиагностическом стенде. Внедрение результатов работы подтверждается соответствующими актами.

Апробация работы. Основной материал диссертации обсуждался на 38 конференциях, в том числе на 10-й международной научно-технической конференции «Планирование и автоматизация эксперимента в научных исследованиях» (Москва, 1992); научно-технической конференции «Системные методы теории чувствительности, надежности и математического моделирования» (Москва, Сочи, 1996); научно-технической конференции «Пятьдесят лет развития кибернетики» (Санкт-Петербург, 1999); международной конференции «Информационные и телекоммуникационные системы и технологии» (Санкт-Петербург, 2007); научной школе-семинаре «Моделирование и исследование устойчивости физических процессов» (Киев, 1991); научно-технической конференции «Dynamical system modeling and stability investigation» (Киев, 2007); всесоюзной конференции «Ученые и специалисты в решении социально-экономических проблем страны» (Ташкент, 1990); всероссийском семинаре «Актуальные проблемы математического моделирования и автоматизированного проектирования в машиностроении» (Казань, 1996); II-й всесоюзной научно-технической конференции «Микропроцессорные системы автоматики» (Новосибирск, 1990); Сибирской конференции по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, 1994); VII международной конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (Новосибирск, 2004); международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления. Опыт инновационного развития» (Томск, 2007); всероссийской научно-практической конференции «Научно-техническое и экономическое сотрудничество стран АТР в XXI веке» (Хабаровск, 2009); всероссийской научно-практической конференции «Проблемы и перспективы развития Транссибирской магистрали в XXI веке» (Чита, 2006); научно-технической конференции «Европейская наука XXI столетия: Стратегия и перспективы развития – 2006» (Днепропетровск, 2006); VII международной научно-технической конференции «Микропроцессорные, аналоговые и цифровые системы: Проектирование и схемотехника, теория и вопросы применения» (Новочеркасск, 2007).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 75 научных работ, в том числе две монографии, 10 статей в изданиях по списку ВАКа, в библиографическом списке приведено 35 основных публикаций.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, шести основных разделов и заключения, выполнена на 339 страницах машинного текста, содержит 136 иллюстраций, 46 таблиц, список использованной литературы из 263 наименований и 33 страницы приложений с результатами дополнительных исследований, текстами программ и актами о внедрении результатов работы. Общий объем диссертации – 372 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и основные задачи работы, характеризуется новизна и практическая ценность результатов исследований.

В **первом разделе** описываются основные подходы, используемые в теории и практике управления для линеаризации моделей статических и динамических нелинейных систем. Предложен метод полиномиальной аппроксимации гладких нелинейных вектор-функций на основе многомерного ряда Тейлора, учитывающий кроме первой и высшие производные, приведены две формы линейных моделей и получены соответствующие аналитические выражения для оценки точности предлагаемых линейных приближений.

Рассматривается класс аналитических нелинейных вектор-функций $f(x)$, осуществляющих отображение $f:\mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^l$ и представляемых многомерным рядом Тейлора вида:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)\,\Delta x^{[i]} + R_n(\Delta x)\,. \qquad (1)$$

Здесь $x_0 \in \mathbf{R}^q$ – вектор рабочей точки; $\Delta x \in \mathbf{R}^q$ – достаточно малое отклонение от x_0; $f^{(i)}(x) \in \mathbf{R}^{l \times q^i}$ – $(l \times q^i)$-мерная матрица i-й производной; $f^{(i)}(x_0)$

при $i=\overline{0,n}$ – значения элементов вектор-функции и матриц производных в точке $x = x_0$; $R_n(\Delta x)$ – остаточный член ряда Тейлора, для которого справедливо, что $\|R_n(\Delta x)\| = O(\|\Delta x\|^{n+1})$.

В многомерном представлении (1) введены обозначения $(\Delta x)^{[i]} \in \mathbf{R}^{q^i}$, которые рекуррентно определяются выражениями:

$$(\Delta x)^{[2]} = (\Delta x)\otimes(\Delta x),\ \ (\Delta x)^{[3]} = (\Delta x)^{[2]}\otimes(\Delta x),\ \ \ldots,\ \ (\Delta x)^{[n]} = (\Delta x)^{[n-1]}\otimes(\Delta x), \quad (2)$$

где $\otimes$ – операция прямого или кронекеровского произведения матриц.

Заменим в сомножителях $(\Delta x)^{[i]}$ формул (2) вектор Δx на некоторый $\delta x \in \Delta x \subset \mathbf{R}^q$ и допустим, что все элементы δx известны и постоянны, т.е. $\delta x = \delta$, поэтому должны выполняться соотношения:

$$(\Delta x)^{[i]} = (\delta x)^{[i-1]}\otimes\Delta x = \delta^{[i-1]}\otimes\Delta x = \left[\delta^{[i-1]}\otimes I\right]\Delta x, \quad (3)$$

где $I = I_q$ – единичная матрица.

Проведем в формуле (1) замену для $i = 2,\ldots,n$ всех матричных произведений $(\Delta x)^{[i]}$ в соответствии с выраженем (3) и отбросим остаточный член ряда $R(\Delta x)$, что допустимо при $\Delta x \to 0$. В этом случае будет построено приближение вида:

$$f_{21}(\Delta x) = f(x_0) + \left\{ f'(x_0) + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)\left[\delta^{[i-1]}\otimes I\right]\right\}\Delta x. \quad (4)$$

Значения $f^{(i)}(x_0)$ при $i=\overline{0,n}$ и δ являются постоянными, поэтому функция $f_{21}(\Delta x)$ линейна относительно аргумента Δx.

Можно построить и вторую форму линейного приближения, используя $(\Delta x)^{[i]}$ в виде $(\Delta x)^{[i]} = (\delta x)^{[i]}$ при $i=\overline{2,n}$. Тогда по аналогии с выражением (4) запишется следующая линейная относительно Δx формула:

$$f_{22}(\Delta x) = \left\{ f(x_0) + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)\ \delta^{[i]}\right\} + f'(x_0)\Delta x. \quad (5)$$

Для разработанного метода линеаризации предлагается использовать термин «полиномиальная аппроксимация» (ПА), так как в формулах (4) и (5) коэффициенты линеаризации являются полиномами вектора δ.

Оценка точности линейных приближений $f_{21}(\Delta x)$ и $f_{22}(\Delta x)$ к функции $f(x)$ проводилась по величине остаточного члена, когда вектор δx принимался равным $\eta\Delta x$, где $\eta \in \mathbf{R}^+$ лежит в пределах $\eta \in [0, 1]$. В работе были получены следующие формулы:

$$R_{21}(\eta, \Delta x) = (1-\eta)\sum_{i=1}^{n-1}\eta^{i-1}R_i(\Delta x) + \eta^{n-1}R_n(\Delta x); \tag{6}$$

$$R_{22}(\eta, \Delta x) = \left(1-\eta^2\right)R_1(\Delta x) + (1-\eta)\sum_{i=2}^{n-1}\eta^{i}R_i(\Delta x) + \eta^{n}R_n(\Delta x). \tag{7}$$

Полиномиальная аппроксимация как метод линеаризации, построенный на основе ряда Тейлора, с увеличением числа учитываемых в аналитических выражениях производных повышает, но только в предельном случае (при $\eta \to 1$ или $\delta x \to \Delta x$) точность линеаризации до величины остаточного члена R_n. В простейшем случае, при квадратичном приближении и вычислении только первых и вторых производных, формулы ПА1 и ПА2 будут иметь вид:

$$f_{21}(\Delta x) = f(x_0) + \left[f'(x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(\delta x \otimes I)\right]\Delta x; \tag{8}$$

$$f_{22}(\Delta x) = \left[f(x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(\delta x \otimes \delta x)\right] + f'(x_0)\Delta x, \tag{9}$$

и следует оценить целесообразность введения более высоких производных, так так это связано с получением аналитических выражений $f^{(n)}(x)$ и необходимостью хранения и обработки матриц больших размеров $l \times q^n$.

Формулы полиномиальной аппроксимации становятся вычислительными алгоритмами, если известны элементы вектора δ, поэтому в работе предлагается применять для определения δ методы прикладной математики и в частности численные или итерационные.

Во **втором разделе** рассматриваются численные методы нахождения корней нелинейных уравнений и безусловной оптимизации, с помощью которых получены две основные вычислительные схемы полиномиальной аппроксимации – двухступенчатая и многошаговая. Теоретически определены условия сходимости полиномиальных аппроксимаций первой и второй форм, получены соответствующие алгоритмы и проведены численные эксперименты на тестовых функциях, применяемых при исследовании задач безусловной оптимизации.

Допустим, что на интервале $[a, b]$ существует единственный корень уравнения $F(x) = 0$ и на некотором k-м шаге известно приближение $x_k \in \mathbf{R}^n$ к решению. Тогда для определения $(k+1)$-го значения вводится вектор $\Delta x \in \mathbf{R}^n$ как разность $\Delta x = x_{k+1} - x_k$ и функция $F(x) \in \mathbf{C}^3$ заменяется рядом Тейлора:

$$F(x) = F_k + \nabla F_k^T \Delta x + 0{,}5\Delta x^T \nabla^2 F_k \Delta x + R\left(\Delta x\right), \tag{10}$$

где $\nabla F(x) \in \mathbf{R}^n$ – вектор первых производных (вектор Якоби); $\nabla^2 F(x) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ – квадратная матрица Гессе; $R(\Delta x)$ – остаточный член ряда Тейлора; $F_k \in \mathbf{R}$, $\nabla F_k \in \mathbf{R}^n$, $\nabla^2 F_k \in \mathbf{R}^{n\times n}$ – значения функции $F(x)$, первой $\nabla F(x)$ и второй $\nabla^2 F(x)$ производных при $x = x_k$.

При линейной аппроксимации и выполнении в уравнении (10) условия $F(x) = 0$ получается метод Ньютона, который можно записать в виде:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla F_k, \tag{11}$$

т.е. алгоритм Ньютона является градиентным методом решения безусловной оптимизационной задачи $\nabla F(x) = 0$, когда величина шага вычисляется:

$$\gamma_k = \left\|\nabla F_k\right\|^{-2} F_k. \tag{12}$$

Метод Ньютона-Рафсона, определяющий численное решение $\nabla F(x) = 0$, также можно рассматривать как частный случай градиентного (11), но на каждом его шаге определяется и обращается матрица Гессе, т. е. $\gamma_k = \Gamma_k = \left|\nabla^2 F_k\right|^{-1}$, а в алгоритме Ньютона в соответствии с формулой (12) в формировании длины шага участвуют только первые производные вектора Якоби.

Используя методику полиномиальной аппроксимации на основе ряда (10), можно записать две линейные относительно вектора Δx формы и получить следующие рекуррентные алгоритмы:

$$x_{k+1} = x_k - \left(\nabla F_k^T\right)^+ \left[F_k + 0{,}5\delta_{k+1}^T \nabla^2 F_k \delta_{k+1}\right]; \tag{13}$$

$$x_{k+1} = x_k - \left[\nabla F_k^T + 0{,}5\delta_{k+1}^T \nabla^2 F_k\right]^+ F_k. \tag{14}$$

Достаточно просто можно показать, что итерационная процедура (13) является частным случаем градиентного метода, когда величина шага

$$\gamma_k = \left\|\nabla F_k\right\|^{-2} \left[F_k + 0{,}5\delta_{k+1}^T \nabla^2 F_k \delta_{k+1}\right]$$

и из сравнения с выражением (12) следует, что элементы матрицы Гессе $\nabla^2 F_k$ оказывают влияние только на длину шага.

Алгоритм полиномиальной аппроксимации (14) запишется в виде:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla \Phi_k .$$

Здесь $\nabla\Phi_k = \nabla F_k + 0,5\nabla^2 F_k \delta_{k+1}$ и $\gamma_k = \left\| \nabla F_k + 0,5\nabla^2 F_k \delta_{k+1} \right\|^{-2} F_k$, т.е. за счет вторых производных изменяется как величина шага γ_k, так и направление спуска, и метод аналогичен псевдоградиентным.

Алгоритмы (13) и (14) могут применяться, если известны значения элементов вектора δ_{k+1}. В работе предлагается два подхода к определению δ_{k+1}, которые приводят к разным вычислительным схемам.

Первый способ. В двухступенчатой вычислительной процедуре разность δ_{k+1} задается в виде:

$$\delta_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} - x_k , \qquad (15)$$

где $\tilde{x}_{k+1}$ вообще можно определить по любой известной вычислительной схеме.

При сохранении общности алгоритмов значение $\tilde{x}_{k+1}$ вычисляется методом Ньютона, тогда для k-го шага на первой ступени определяются

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k - (\nabla F_k^T)^+ F_k ; \quad \delta_{k+1} = -(\nabla F_k^T)^+ F_k , \qquad (16)$$

а затем на второй ступени x_{k+1} уточняется одним из алгоритмов полиномиальной аппроксимации первой формы (14) или второй – (13).

Второй способ. Многошаговая вычислительная процедура получается при $\delta_{k+1} = x_k - x_{k-1}$. В этом случае при заданном x_0 методом первого порядка определяется только x_1, а все остальные вычисления при $k > 1$ производятся уже по формулам (13) и (14) алгоритмов второго порядка.

В работе получены оценки показателей сходимости рассматриваемых численных методов решения уравнения $F(x^*) = 0$ в виде:

$$\left\| x_{k+1} - x^* \right\| \le C \left\| x_k - x^* \right\|^p , \qquad (17)$$

где p – порядок сходимости; C – параметр (константа) сходимости.

Для метода Ньютона подтвержден второй порядок сходимости $(p = 2)$, а константа $C_1 = 0,5 M_2 / m_1$, если для матричных норм выполняются условия:

$$\left\| \nabla^2 F(y) \right\| \le M_2 ; \quad \left\| \nabla F(y) \right\| \ge m_1 \quad \text{при} \quad y \in [a, b].$$

Многошаговые процедуры имеют порядок $p = 0,5(1+\sqrt{5}) \approx 1,62$, т.е. они по скорости сходимости соизмеримы с классическим алгоритмом Ньютона. Полученные теоретические результаты подтверждены экспериментальными исследованиями на тестовой функции.

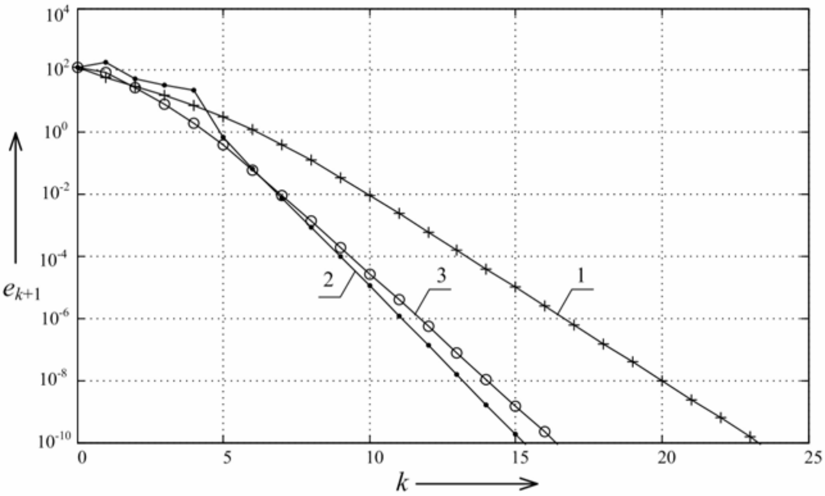
Для двухступенчатых вычислительных схем получено значение $p = 3$ и они имеют более высокий порядок сходимости, чем метод Ньютона. При выполении условия $\left\| \nabla^3 F(y) \right\| \le M_3$ для $y \in [a,\, b]$ определены следующие выражения для констант сходимости ПА первой и второй форм:

$$C_{21} = 0,5\left[2M_3/m_1 + (M_2/m_1)^2\right]; \quad C_{22} = 0,5\left[M_3/m_1 + 0,5(M_2/m_1)^2\right].$$

Были проведены теоретические и экспериментальные исследования сходимости итерационных процедур при учете в линейном приближении третьей производной $\nabla^3 F(x)$, описываемой матрицей размером $(n \times n^2)$, которые показали, что параметры C_{21}, C_{22} изменяются за счет увеличения доли нормы M_3 в 1,33 раза, но скорость сходимости не изменяется и остается кубической.

Таким образом, основными алгоритмами полиномиальной аппроксимации являются формулы (8) и (9), когда в линейных приближениях присутствует первая и вторая производные нелинейной функции.

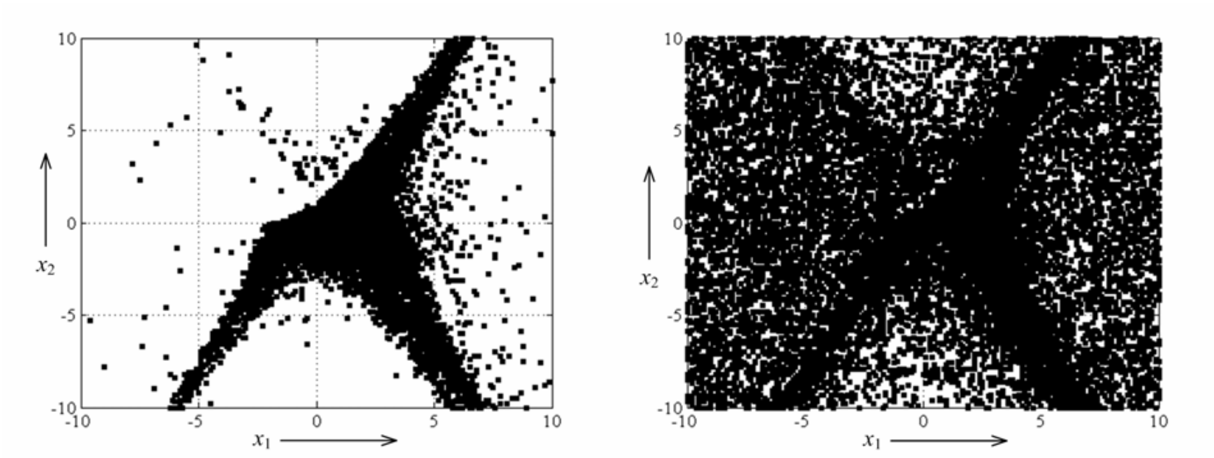
Двухступенчатые алгоритмы (13), (14) и (16) исследовались на пяти тестовых функциях безусловной оптимизации и результаты подтвердили теоретические показатели сходимости, как это видно из приведенных на рис. 1 зависимостей погрешностей вычислений от шага итерации для методов Ньютона, ПА1 и ПА2.



1 – метод Ньютона;
2 – двухступенчатый ПА1;
3 – двухступенчатый ПА2

Рис. 1. Зависимость погрешности e_{k+1} от шага итерации k

Методы полиномиальной аппроксимации первой или второй форм для разных тестовых функций имеют более широкую область сходимости, результаты моделирования показаны на рис. 2.



а *б*

Рис. 2. Результаты моделирования для методов Ньютона (*а*) и ПА2 (*б*)

Таким образом, проведенные исследования итерационных процедур по методикам численных методов показали, что, во-первых, в линейных приближениях первой ПА1 и второй ПА2 форм необходимо учитывать только вторую производную и применять двухступенчатую вычислительную схему, а, во-вторых, алгоритмы полиномиальной аппроксимации обспечивают более высокую скорость и области сходимости по сравнению с классическими.

В **третьем разделе** приводятся модифицированные методы квазилинеаризации и последовательной линеаризации, построенные на основе полиномиальной аппроксимации и позволяющие совместно с классическими методами решать задачу одновременного оценивания параметров и состояний непрерывных нелинейных динамических объектов.

Рассматривается расширенная модель в форме переменных состояния:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \varphi(\hat{x}(t), u(t)); \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0, \tag{18}$$

$$\hat{y}(t) = C\,\hat{x}(t), \tag{19}$$

где $\hat{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ – расширенный вектор состояния и параметров модели объекта; $u(t) \in \mathbf{R}^q$ и $\hat{y}(t) \in \mathbf{R}^m$ – векторы управления и выходных переменных; $\varphi(\hat{x}(t), u(t)) \in \mathbf{C}^2$ – расширенная нелинейная функция размером $n\times 1$; $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$ – матрица связи с выходом; $\hat{x}(t_0) \in \mathbf{R}^n$ – неизвестный вектор начальных условий.

Идентификация проводится на основании экспериментальных данных в виде выборки N значений переменных $u(t_i)$ и $y(t_i)$ и сводится к определению оценок вектора $\hat{x}(t_0)$ из условия минимума квадратичного функционала:

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} (y(t_i) - \hat{y}(t_i))^T Q(t_i)\, (y(t_i) - \hat{y}(t_i)), \tag{20}$$

где $Q(t) \in \mathbf{R}^{m\times m}$ – положительно определенная весовая матрица.

В этом случае идентификация представляет собой нелинейную многоточечную краевую задачу, и в рекуррентных методах ее решения – последовательной линеаризации и квазилинеаризации – общая нелинейная задача заменяется последовательностью линеаризованных, полученных путем применения к выражениям (19) или (18) (в зависимости от метода) линейного отрезка ряда Тейлора. Применим методику ПА и приведем формулы только первой формы.

В *методе последовательной линеаризации* рассматривается вектор разности $\Delta\hat{x}_{k+1}(t_0) = \hat{x}_{k+1}(t_0) - \hat{x}_k(t_0)$ относительно известного начального условия $\hat{x}_k(t_0)$ и уравнение наблюдений (19) аппроксимируется выражением:

$$\hat{y}_{k+1}(t) = C\,\hat{x}_k(t) + C\,p^{(1)}_{k+1}(t)\,\Delta\hat{x}_{k+1}(t_0) + C\frac{1}{2}\,p^{(2)}_{k+1}(t)\left[\delta_{k+1}(t_0) \otimes \Delta\hat{x}_{k+1}(t_0)\right], \tag{21}$$

где $p^{(1)}_{k+1}(t)$, $p^{(2)}_{k+1}(t)$ – функции чувствительности первого и второго порядка размером $n\times n$ и $n\times n^2$ соответственно.

Функции чувствительности первого $p^{(1)}_{k+1}(t) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ и второго $p^{(2)}_{k+1}(t) \in \mathbf{R}^{n\times n^2}$ порядков определяются дифференциальными уравнениями:

$$\dot{p}^{(1)}_{k+1}(t) = \frac{\partial\varphi_k}{\partial\hat{x}}\, p^{(1)}_{k+1}(t); \quad p^{(1)}_{k+1}(t_0) = I;$$

$$\dot{p}^{(2)}_{k+1}(t) = \frac{\partial\varphi_k}{\partial\hat{x}}\, p^{(2)}_{k+1}(t) + \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial\hat{x}^2}\left[p^{(1)}_{k+1}(t) \otimes p^{(1)}_{k+1}(t)\right]^{[2]}; \quad p^{(2)}_{k+1}(t_0) = 0,$$

где $\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial\hat{x}} = \dfrac{\partial\varphi(\hat{x}_k(t),\, u(t))}{\partial\hat{x}}$; $\dfrac{\partial^2\varphi_k}{\partial\hat{x}^2} = \dfrac{\partial^2\varphi(\hat{x}_k(t),\, u(t))}{\partial\hat{x}^2}$ – матрицы первой и второй производных размерности $n\times n$ и $n\times n^2$ соответственно при $\hat{x}(t) = \hat{x}_k(t)$.

Подстановка приближения (21) в уравнение наблюдения (19) и функционал (20) и последующая минимизация функционала по $\Delta\hat{x}_{k+1}(t_0)$ позволяют получить выражение для оценки вектора начальных условий:

$$\hat{x}_{k+1}(t_0) = \hat{x}_k(t_0) + \gamma_{k+1}\left[M_{k+1}\right]^{-1} N_{k+1}, \qquad (22)$$

где
$$M_{k+1} = \sum_{i=0}^{N-1}\left[p_{k+1}(t_i)\right]^T C^T Q(t_i)\, C\, p_{k+1}(t_i);$$

$$N_{k+1} = \sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left[p_{k+1}(t_i)\right]^T C^T Q(t_i)\left(y(t_i) - C\,\hat{x}_k(t_i)\right),$$

$$p_{k+1}(t) = p_{k+1}^{(1)}(t) + \frac{1}{2}\,p_{k+1}^{(2)}(t)\left[\delta_{k+1}(t_0)\otimes I\right].$$

Выбором величины шага γ_{k+1} внутри каждой итерации можно добиться улучшения сходимости рекуррентных процедур.

В двухступенчатой схеме $\delta_{k+1}(t_0) = \Delta\hat{x}_{k+1}^*(t_0)$ и на первой ступени $\Delta\hat{x}_{k+1}^*(t_0)$ вычисляется методом последовательной линеаризации, при многошаговой $\delta_{k+1}(t_0) = \hat{x}_{k+1}(t_0) - \hat{x}_k(t_0)$ и классический метод применяется только на первом шаге. Во всех схемах итерационный процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность оценивания $\hat{x}(t_0)$.

В *методе квазилинеаризации* функция $\varphi(\hat{x}(t), u(t))$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности известной траектории $\hat{x}_k(t)$ и полиномиальная аппроксимация уравнения (18) на (k+1)-й итерации имеет вид:

$$\dot{\hat{x}}_{k+1}(t) = \varphi_k + \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial\hat{x}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial\hat{x}^2}\left[\delta_{k+1}(t)\otimes I\right]\right)\left(\hat{x}_{k+1}(t) - \hat{x}_k(t)\right). \qquad (23)$$

Если в формуле (23) векторы $\delta_{k+1}(t) = \hat{x}_{k+1}^*(t) - \hat{x}_k(t)$ и $\hat{x}_{k+1}^*(t)$ вычислены по методу квазилинеаризации, то реализуется двухступенчатая схема, если $\delta_{k+1}(t) = \hat{x}_{k+1}(t) - \hat{x}_k(t)$, то – многошаговая.

Неоднородное дифференциальное уравнение (23) является линейным относительно траектории $\hat{x}_{k+1}(t)$ и для него записывают переходную матрицу $p_{k+1}(t)\in\mathbf{R}^{n\times n}$ и вектор $q_{k+1}(t)\in\mathbf{R}^n$ частного решения:

$$\dot{p}_{k+1}(t) = \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial\hat{x}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial\hat{x}^2}\left[\delta_{k+1}(t)\otimes I\right]\right)p_{k+1}(t), \quad p_{k+1}(t_0) = I;$$

$$\dot{q}_{k+1}(t) = \varphi_k + \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial\hat{x}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial\hat{x}^2}\left[\delta_{k+1}(t)\otimes I\right]\right)\left(q_{k+1}(t) - \hat{x}_k(t)\right), \quad q_{k+1}(t_0) = 0.$$

Оценка начальных условий вычисляется по формуле:

$$\widehat{x}_{k+1}(t_0) = \left[\sum_{i=0}^{N-1} \left[p_{k+1}(t_i) \right]^T C^T Q(t_i) C\, p_{k+1}(t_i) \right]^{-1} N_{k+1}, \tag{24}$$

где $$N_{k+1} = \sum_{i=0}^{N-1} \left[p_{k+1}(t_i) \right]^T C^T Q(t_i) \big(y(t_i) - C\, q_{k+1}(t_i) \big).$$

В работе был проведен анализ сходимости разработанных алгоритмов и получены соотношения для функционала (20) при подстановке в него соответствующих оценок начальных условий.

Сходимость первой формы метода последовательной линеаризации определяется уравнением

$$J(\widehat{x}_{k+1}(t_0)) = J(\Delta\widehat{x}_k(t_0)) - N_{k+1}^T \left[M_{k+1} \right]^{-1} N_{k+1} \tag{25}$$

и соблюдается, если матрица M_{k+1} является невырожденной.

При второй форме полиномиальной аппроксимации получено, что

$$J(\widehat{x}_{k+1}(t_0)) = J(\widehat{x}_k(t_0)) - N_{k+1}^T \left[M_{k+1} \right]^{-1} N_{k+1} + M_{k+1}^{(2)} - N_{k+1}^{(2)}, \tag{26}$$

поэтому для сходимости требуется выполнение дополнительных условий между величинами $M_{k+1}^{(2)}$ и $N_{k+1}^{(2)}$, которые вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} M_{k+1}^{(2)} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[p_{k+1}^{(2)}(t_i) \right]^T C^T Q(t_i)\, C \frac{1}{2} p_{k+1}^{(2)}(t_i); \\ N_{k+1}^{(2)} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[p_{k+1}^{(2)}(t_i) \right]^T C^T Q(t_i) \big(y(t_i) - C\, \widehat{x}_k(t_i) \big). \end{cases} \tag{27}$$

Метод квазилинеаризации имеет общее для всех форм полиномиальной аппроксимации соотношение

$$J(\widehat{x}_{k+1}(t_0)) = J(\widehat{x}_k(t_0)) - \left[\Delta\widehat{x}_{k+1}(t_0) \right]^T \left[M_{k+1} \right]^{-1} \Delta\widehat{x}_{k+1}(t_0), \tag{28}$$

из которого следует, что если M_{k+1} невырождена, то, учитывая ее положительную определенность и симметричность, с увеличением номера итерации функционал (28) будет монотонно уменьшаться.

Проведены экспериментальные исследования разработанных алгоритмов на примере идентификации модельных объектов различных порядков. В численных экспериментах решалась задача обобщенного оценивания и идентификации отдельно параметров и состояний при наличии и отсутствии помех в наблюдениях. На большинстве примеров выявлено преимущество процедур, построенных на основе первой формы.

В **четвертом разделе** методы полиномиальной аппроксимации применяются при формировании приближенных алгоритмов управления. Для анализа точности получены оценки динамических ошибок в форме методических погрешностей и с помощью методов абсолютной устойчивости показано, что они являются достаточными условиями устойчивости замкнутых систем.

В работе показана принципиальная возможность применения полиномиальной аппроксимации при построении приближенных алгоритмов оптимального управления в нелинейных непрерывных системах на примере модификации метода Шатровского или последовательного улучшения управления. В силу аналитической и вычислительной сложности полученных выражений более перспективным и рациональным представляется применение ПА в задачах и методах прямого оптимального управления многомерными неаффинными дискретными объектами.

Рассматривается классическая в теории управления структура объекта, состоящего из нелинейного элемента (НЭ) и линейной части (ЛЧ). Для дискретных процессов управления $u \in \mathbf{R}^m$ и полностью наблюдаемого вектора состояния $x \in \mathbf{R}^n$ объект описывается уравнением:

$$x_{k+1} = A x_k + f(u_k); \quad x_0 = x^0, \tag{29}$$

где $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ – системная матрица линейной части; $f(\cdot) \in \mathbf{C}^3$ – нелинейная вектор-функция размерности n; $x^0 \in \mathbf{R}^n$ – вектор начальных значений.

Полагается, что линейная часть устойчивая, поэтому корни характеристического уравнения $\det\left(z I_n - A\right) = 0$ лежат внутри единичной окружности.

При траекторном управлении объектом (29) целью является изменение состояния x_{k+1} по заданной дискретной функции или траектории движения $g_{k+1} \in \mathbf{R}^n$, поэтому должно выполняться равенство $x_{k+1} = g_{k+1}$, подстановка которого в уравнение объекта (29) приведет к определению управления в виде:

$$u_k = f^{-1}(g_{k+1} - A x_k), \tag{30}$$

где $f^{-1}(\cdot)$ – обратная функция по аргументу u.

Непосредственное применение формулы (30) при синтезе прямого оптимального управления возможно только в тех случаях, когда существует аналитическое выражение для обратной функции и нелинейная характеристика имеет свойство диффеоморфизма. Аналитическое решение обратной задачи динамики известно для линейных и аффинных объектов.

Одним из приближенных подходов можно считать метод, разработанный А. И. Рубаном, где применяется аппроксимация линейным полиномом Тейлора, что позволяет записать рекуррентный алгоритм формирования управляющих воздействий. В работе для модернизации алгоритмов синтеза предлагается применять метод полиномиальной аппроксимации.

Запишем формулу для разложения вектор-функции $f(u)$ в ряд Тейлора относительно рабочей точки $u_{k-1} \in \mathbf{R}^m$ в виде:

$$f(u_k) = f_{k-1} + f'_{k-1} \cdot (u_k - u_{k-1}) + \tfrac{1}{2} f''_{k-1} \cdot \left[(u_k - u_{k-1}) \otimes (u_k - u_{k-1})\right] + O\left[(u_k - u_{k-1})^{[3]}\right], \quad (31)$$

где f_{k-1}, f'_{k-1}, f''_{k-1} – значения нелинейной функции $f(u) \in \mathbf{R}^n$, ее матриц первой $f'(u) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ и второй $f''(u) \in \mathbf{R}^{n \times m^2}$ производных, элементы которых вычислены в точке $u = u_{k-1}$.

В случае линейного приближения подстановка (31) в уравнение (29) при выполнении $x_{k+1} = g_{k+1}$ позволяет записать алгоритм первого порядка:

$$u_k = u_{k-1} + \left[f'_{k-1}\right]^{+} \cdot \left[g_{k+1} - Ax_k - f_{k-1}\right]. \quad (32)$$

В соответствии с методом полиномиальной аппроксимации для первой формы можно записать:

$$f(u_k) = f_{k-1} + \left[f'_{k-1} + \tfrac{1}{2} f''_{k-1} \cdot \left(\delta_k \otimes I_m\right)\right](u_k - u_{k-1}),$$

тогда по аналогии с методом первого порядка получим формулу для управляющего воздействия в виде:

$$u_k = u_{k-1} + \left[f'_{k-1} + \tfrac{1}{2} f''_{k-1} \cdot \left(\delta_k \otimes I_m\right)\right]^{+} \cdot \left[g_{k+1} - Ax_k - f_{k-1}\right]. \quad (33)$$

Для второй формы ПА2 справедливо выражение:

$$u_k = u_{k-1} + \left[f'_{k-1}\right]^{+} \cdot \left[g_{k+1} - Ax_k - f_{k-1} - \tfrac{1}{2} f''_{k-1} \delta_k^{[2]}\right]. \quad (34)$$

В алгоритмах (33) и (34) величина $\delta_k \in \mathbf{R}^m$ определяется как разность $\delta_k = u_k - u_{k-1}$, где u_k вычисляется по формуле (32).

В замкнутой системе с приближенными алгоритмами управления возникает динамическая ошибка, которая не только ухудшает точность, но может привести и к потере устойчивости системы. Вектор ошибки $e_{k+1} \in \mathbf{R}^n$ является разностью

$$e_{k+1} = x_{k+1} - g_{k+1} \tag{35}$$

и рассматривается как методическая погрешность, возникающая из-за учета в линейных приближениях $f(u)$ только первой $f'(u)$ и второй $f''(u)$ производных и для ее определения применяются методики численных методов.

Получены следующие оценки погрешностей методов первого $\tilde{e}^{(1)} \in \mathbf{R}^n$, второго $\tilde{e}^{(21)} \in \mathbf{R}^n$ для ПА1 и $\tilde{e}^{(22)} \in \mathbf{R}^n$ для ПА2 порядков:

$$e_{k+1}^{(1)} \approx \tilde{e}_{k+1}^{(1)} = \tfrac{1}{2} f_{k-1}'' \, \delta_k^{[2]}; \tag{36}$$

$$e_{k+1}^{(21)} \approx \tilde{e}_{k+1}^{(21)} = \left[\tfrac{1}{6} f_{k-1}''' - \tfrac{1}{4} C_k^{(1)}\right] \delta_k^{[3]}; \tag{37}$$

$$e_{k+1}^{(22)} \approx \tilde{e}_{k+1}^{(22)} = \left[\tfrac{1}{6} f_{k-1}''' - \tfrac{1}{4} C_k^{(1)} - \tfrac{1}{4} C_k^{(2)}\right] \delta_k^{[3]}, \tag{38}$$

где $f_{k-1}''' \in \mathbf{R}^{n \times m^3}$ – матрица третьих производных, а $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$ – матрицы, зависящие от $f'(u)$ и $f''(u)$, элементы которых определены при $u = u_{k-1}$.

При одних и тех же достаточно малых отклонениях $\|\delta_k\| \to 0$ ошибка у методов ПА на порядок меньше, т.е. в системах, где управление формируется алгоритмами полиномиальной аппроксимации, точность отслеживания заданной траектории g_{k+1} выше.

Было проведено имитационное моделирование систем при реализации в регуляторах приближенных алгоритмов. При исследованиях определялись экспериментальные нормированные интегральные оценки $\bar{e}$ и методические $\bar{\bar{e}}$, вычисленные по формулам (36) – (38), которые приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Экспериментальные и методические оценки

Параметры	Метод		
	П1	ПА1	ПА2
оценки $\bar{e}$	0,0172	0,0072	0,0121
оценки $\bar{\bar{e}}$	0,0170	0,0067	0,0093
процент расхождения	1,5	6,8	23,4

Результаты их анализа показывают, что вторая форма ПА2 имеет значительное расхождение (23,4 %) между экспериментальными и теоретическими значениями ошибок и обеспечивает лучшую точность только в 1,5 раза, в то время как алгоритмы первой формы ПА1 в 2,5 раза лучше отрабатывают траекторию g_{k+1}, чем системы с методами первого порядка.

В работе показано, что полученные аналитические выражения для методических погрешностей $e_{k+1}^{(1)}$ и $e_{k+1}^{(21)}$ можно применять при анализе устойчивости динамических процессов в замкнутых системах с приближенными алгоритмами траекторного управления.

Для этого введена эталонная (идеальная) система, обеспечивающая выполнение равенства $x_{k+1} = g_{k+1}$. Исходная и эталонная системы были преобразованы к типовому виду задачи абсолютной устойчивости с нелинейным элементом $\Psi(\cdot) \in \mathbf{R}^n$ и линейной частью с передаточной функцией $W(z)$.

На основе частотного критерия абсолютной устойчивости В. А. Якубовича показано, что для устойчивости системы достаточно выполнения неравенств:

$$-\tilde{M}_\Psi \le \frac{e_{i,k+1}}{e_{i,k+1}^{вх}} \le \tilde{M}_\Psi; \quad i = \overline{1,n}, \qquad (39)$$

где $e_i^{вх}$ – элемент вектора $e^{вх} = \left[I_n - W(z)\right]g$; $W(z) = \left(I_n + A\right)z^{-1} - Az^{-2}$.

Величина $\tilde{M}_\Psi$ в выражении (39) равна максимальному значению M_Ψ, удовлетворяющему условию

$$\mathrm{Re}\left\{I_n - M_\Psi^2\, W^{\mathrm{T}}(e^{j\omega})\, W(e^{j\omega})\right\} > 0 \quad \text{при} \quad -\infty < \omega < +\infty. \qquad (40)$$

Вектор ошибки e_{k+1} в неравенстве (39), как показано в работе, является методической погрешностью, определяемой по формулам (37) или (38) в соответствии с реализуемым в системе приближенным алгоритмом.

Аналитические выражения достаточно сложны, поэтому были получены условия устойчивости для матричных норм. Тогда при реализации алгоритмов первого и второго порядков должны соответственно выполняться неравенства:

$$\left\|e_{k+1}^{вх}\right\| \le \tilde{M}_\Psi m_1 \quad \text{или} \quad \left\|e_{k+1}^{вх}\right\| \le \tilde{M}_\Psi^{1/2} m_{12},$$

где константы m_1 и m_{12} зависят от поведения первых, вторых и третьих производных вектор-функции $f(u)$.

Имитационное моделирование подтвердило достоверность полученных теоретических результатов для определения областей устойчивости и показало, что алгоритмы полиномиальной аппроксимации обеспечивают более широкую область для систем траекторного управления.

В работе получены более простые аналитические выражения достаточных условий абсолютной устойчивости, если нелинейный объект описывается или может быть приведен к моделям вида:

$$x_{k+1} = A\,x_k + B\,f(u_k)\,; \quad x_0 = x(0)\,, \tag{41}$$

где матрица B является диагональной с ненулевыми элементами b_i $(i = \overline{1, n})$, а элементы $f_i(u_{i,\,k})$ удовлетворяют условиям:

$$f_i(0) = 0\,, \quad u_i f_i(u_i) > 0 \quad \text{при} \quad u_i \neq 0 \quad \text{и} \quad f_i(u_i) \in \mathbf{C}^3\,, \quad i = \overline{1, n}\,. \tag{42}$$

На основе дискретных функций Ляпунова были получены неравенства, обеспечивающие абсолютную устойчивость для систем с алгоритмами управления первого и второго порядков соответственно:

$$f'_{i,\,k} > 0 \quad \text{или} \quad \varphi_{i,\,k}\, f''_{i,\,k} + 2\left(f'_{i,\,k}\right)^2 > 0\,, \quad i = \overline{1, n}\,, \tag{43}$$

где $\varphi(\cdot)$ зависит от задающего воздействия и модели объекта.

Экспериментальные результаты имитационного моделирования подтвердили достоверность проведенных аналитических исследований.

В двухступенчатых схемах ПА на каждом k-м шаге на первой ступени управление $u_k^{(1)}$ определяется методом первого порядка, а на второй – $u_k^{(2)}$ уточняется алгоритмом второго порядка, т. е. всегда вычисляются вторые производные. Естественно, что эффективность приближенных алгоритмов будет выше только в случае перехода (переключения) на вторую ступень, если это приведет к уменьшению ошибки, в противном случае необходимо подавать на вход объекта управление $u_k^{(1)}$. Для этих целей был введен вектор $v_k \in \mathbf{R}^m$ как разность $v_k = u_k^{(1)} - u_k^{(2)}$ и получены аналитические выражения оценок вида:

$$\overline{v}_k = \tfrac{1}{2}\left[f'_{k-1}\right]^+ f''_{k-1}\,\delta u_k^{[2]} \quad \text{и} \quad \tilde{v}_k = \left[f'_{k-1}\right]^+ e_{k+1}^{(1)}\,. \tag{44}$$

Оценка $\tilde{v}_k$ содержит только информацию, известную на первом шаге, поэтому переключение на вторую ступень происходило при выполнении неравенства $\left\|\tilde{v}_k\right\| > \alpha\left\|u_k^{(1)}\right\|$, где $\alpha \in \mathbf{R}$ – величина допустимой ошибки. При имитационном моделировании проверялись достоверность аналитических формул и работоспособность разработанного алгоритма.

Таким образом, показана рациональность применения полиномиальной аппроксимации при модификации приближенных алгоритмов траекторного управления и предложены методы анализа устойчивости и точности процессов управления в системах с реализованными алгоритмами.

Пятый раздел включает в себя результаты применения метода полиномиальной аппроксимации для решения практических задач безусловной оптимизации, параметрической идентификации и управления.

Предложена методика проектирования устойчивых и минимальнофазовых цифровых рекурсивных фильтров с требуемой частотной характеристикой $H_z(e^{j\omega_k})$ на основе минимизации L_{2p}-ошибки.

Проведенные исследования показали, что целевая функция

$$F(X) = \sum_{k=1}^{L}\left(\left|H(X, e^{j\omega_k})\right| - \left|H_z(e^{j\omega_k})\right|\right)^{2p} \qquad (45)$$

в зависимости от коэффициентов $X \in \mathbf{R}^n$ и порядка n фильтра имеет неунимодальный характер и равна нулю в точке экстремума, поэтому были выбраны численные методы решения $F(X) = 0$. Сравнение проводилось с методом Давидона-Флетчера-Пауэлла при проектировании типовых идеальных фильтров нижних, верхних частот, полосового фильтра и цифрового дифференциатора. Показано, что область сходимости разработанного метода значительно шире и его преимущество особенно сказывается при значительном удалении начальных приближений от положения экстремума.

Разработано и передано в эксплуатацию программное обеспечение подсистем идентификации компьютерного тренажера операторов АЭС. При описании ядерного реактора и исполнительного механизма в виде одностержневой сервоприводной системы регулирования получена модель объекта 8-го порядка. Идентифицируемыми характеристиками, уточнение значений которых необходимо для решения поставленных тренировочных задач для оператора, являются параметры $\rho_{\text{зап}}$, $\rho_{\text{эф}}$ исполнительного механизма и начальные условия модели $z_1(t_0)$. Зависимости обобщенного параметра $p = \left(\sum_{i=1}^{3} e_i^2\right)^{0,5}$, где $e_i = x_i - \widehat{x}_i$; $x = [z_1(t_0) \;\; \rho_{\text{зап}} \;\; \rho_{\text{эф}}]^T$ для методов квазилинеаризации и ПА1, ПА2 приведены на рис. 3. Полученные путем моделирования

Рис. 3. Результаты идентификации

результаты согласуются с теоретическими предположениями и в большинстве экспериментов выявлено преимущество алгоритмов второго порядка.

Осуществлен синтез адаптивного регулятора системы управления деревообрабатывающего робототехнического комплекса «Мастер», показанного на рис. 4. Разработанные алгоритмы и соответствующее программное обеспечение

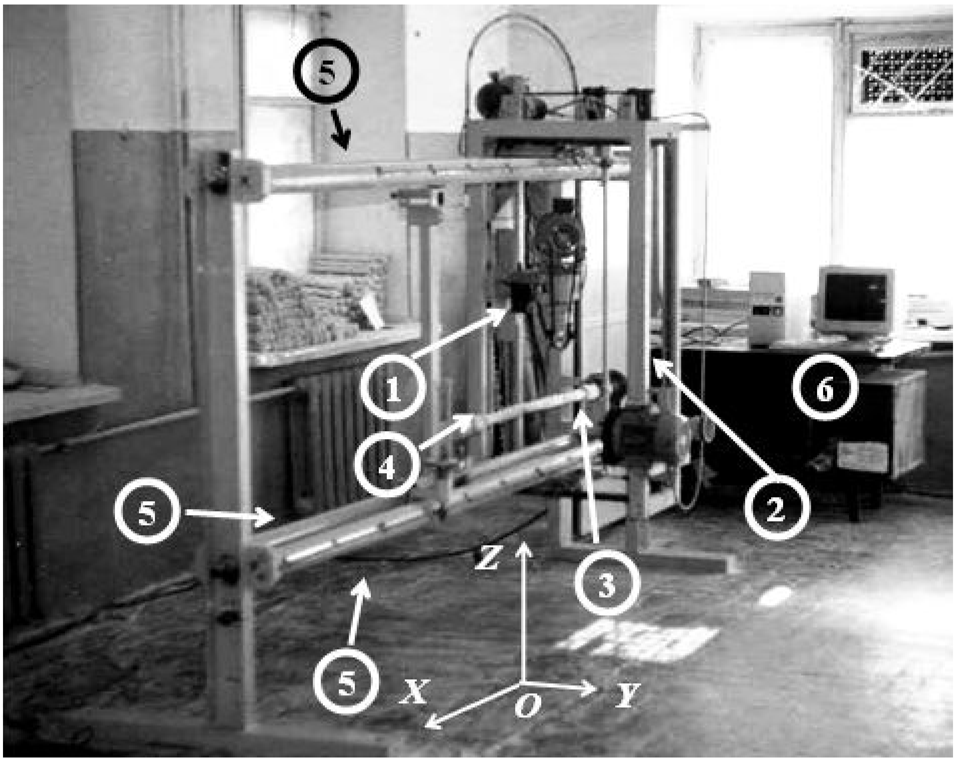


Рис. 4. Общий вид робототехнического комплекса «Мастер»

ПЭВМ 6 (см. рис. 4) позволяют осуществлять автономное управление пятью каналами, которые реализуют желаемую траекторию g_{k+1} как заданное движение рабочего органа 1 (фрезы) манипулятора 2 при обработке заготовки 3. Каждый канал состоит из исполнительного двигателя с управляющим напряжением u_k, датчика угла поворота x_k, редуктора и описывается моделью:

$$x_{k+1} = c_1 x_k + c_2 x_{k-1} + c_3 \operatorname{sat}(u_k) + c_4 u_{k-1}, \tag{46}$$

где c_i $(i = \overline{1,4})$ – коэффициенты, зависящие от параметров устройств канала.

При реализации приближенных алгоритмов кусочно-линейная характеристика $\operatorname{sat}(u_k)$ аппроксимировалась гладкой функцией $\operatorname{th}\beta u$ при $\beta < 1$. Зависимость оценок математического ожидания ME ошибки $e = g - x$ от массы манипулятора M для метода второго порядка ПА и модального МР приведены на рис. 5. Опытные испытания по изготовлению изделий различных форм на деревообрабатывающем роботизированном комплексе «Мастер» с использованием процедур полиномиальной аппроксимации показали, что качество изготавливаемой продукции соответствует всем требованиям технического задания, что доказывает работоспособность алгоритмов второго порядка и возможность их практического применения.

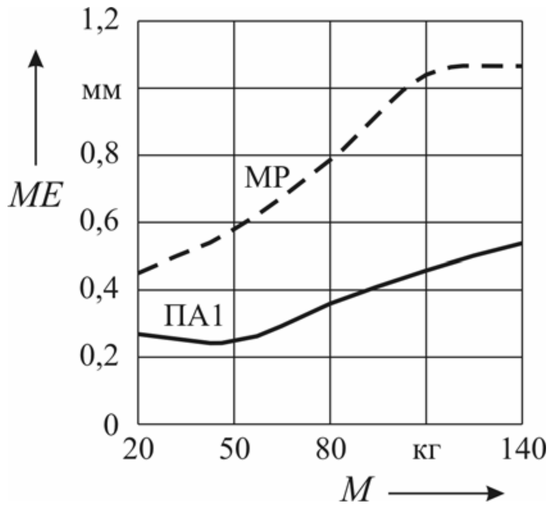


Рис. 5. Зависимости ошибок для модального и разработанного алгоритмов

В **шестом разделе** рассматривается применение приближенных алгоритмов для управления двигателями постоянного тока на лабораторном стенде и в автоматизированном диагностическом комплексе испытаний тяговых двигателей, а также в системе управления вынужденными колебаниями подвижной части вибродиагностического стенда.

Широкое применение тяговые двигатели постоянного тока (ТЭД) находят на железнодорожном транспорте. Одной из актуальных задач при эксплуатации электровозов постоянного тока является поддержание ТЭД в работоспособном состоянии. В депо диагностирование ТЭД проводится методом взаимной нагрузки согласно технологической карте испытаний с помощью разработанной в ОмГУПСе автоматизированной испытательной станции. Модель объекта для скорости вращения вала ТЭД использовалась в виде:

$$x_{k+1} = x_k + a_1 u_1^2 + a_2 u_1 u_2 + a_3, \tag{47}$$

где u_1, u_2 – напряжения линейного и вольтодобавочного преобразователей; a_1, a_2, a_3 – коэффициенты, зависящие от параметров испытуемых двигателей.

Временные диаграммы отработки требуемой скорости $x = 790$ об/мин и соответствующие управляющие напряжения u_1, u_2 изображены на рис. 6 и 7, которые подтверждают возможность автоматической стабилизации скорости.

Одним из основных видов испытаний объектов подвижного состава является вибрационный контроль, поскольку в условиях воздействия вибрационных нагрузок причиной отказа этих объектов являются различные дефекты, прежде всего в механических узлах. Для проверки изделий предназначены вибродиагностические стенды. Предлагается применение пневматической подвески для обеспечения требуемой формы колебаний $x(t)$ подвижной части вибродиагностического стенда. Воздействия на объект F_k и u_k, т. е. подвижную часть и пневмоподвеску, вычисляются по алгоритмам и соответствующим программам микропроцессорного комплекса, подаются в порты и через цифроаналоговые преобразователи и усилители поступают в исполнительные элементы.

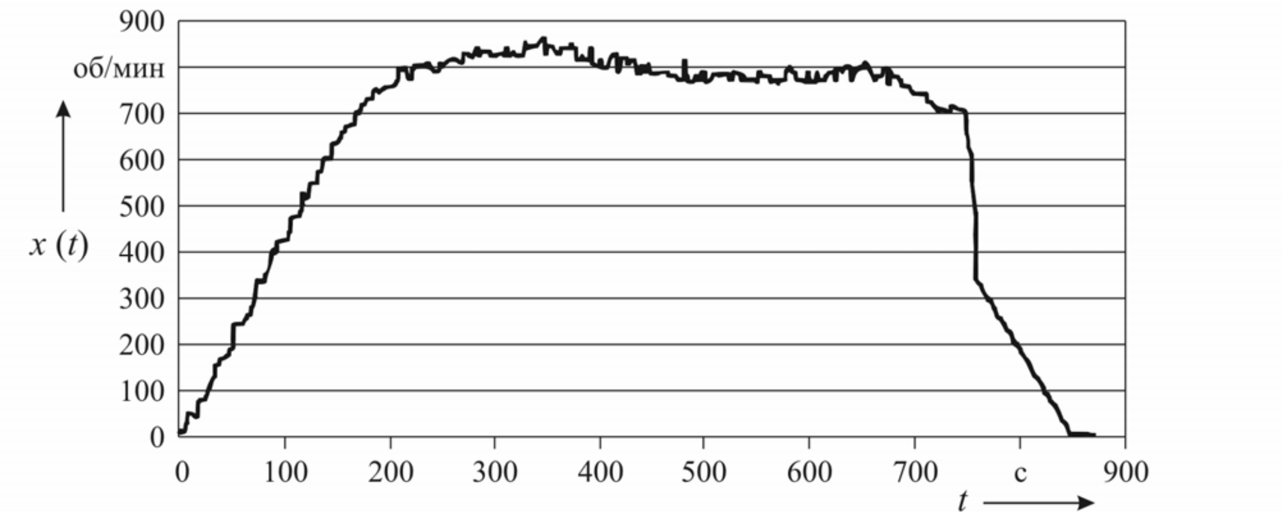


Рис. 6. Временная диаграмма скорости вращения вала x

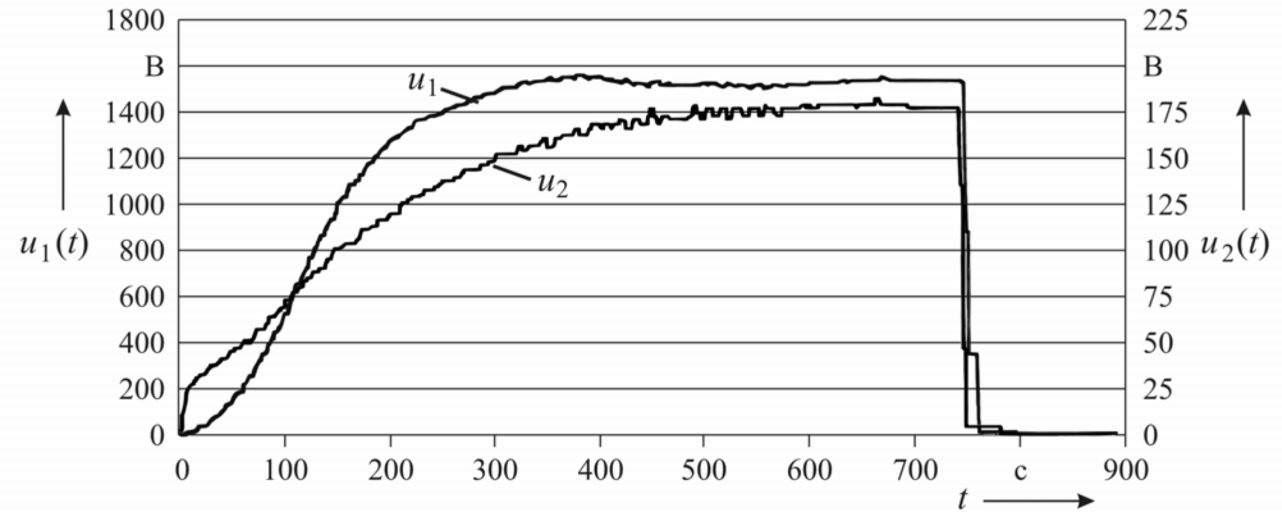


Рис. 7. Временная диаграмма управляющих напряжений u_1, u_2

Моделью для x при синусоидальных колебаниях с частотой ω_B является

$$x_{k+1} = b_1 x_k + b_2 x_{k-1} + c_П(\operatorname{sign} u_k) + F_k, \tag{48}$$

где b_1, b_2 – параметры; $F_k = F_m \sin \omega_B k$; $c_П$ – жесткость пневмоподвески.

При реализации алгоритмов функция $\mathrm{sign}\, u$ аппроксимировалась $\mathrm{th}\,\beta u$ при $\beta > 10$. Примеры областей устойчивости при различных начальных отклонениях приведены на рис. 8.

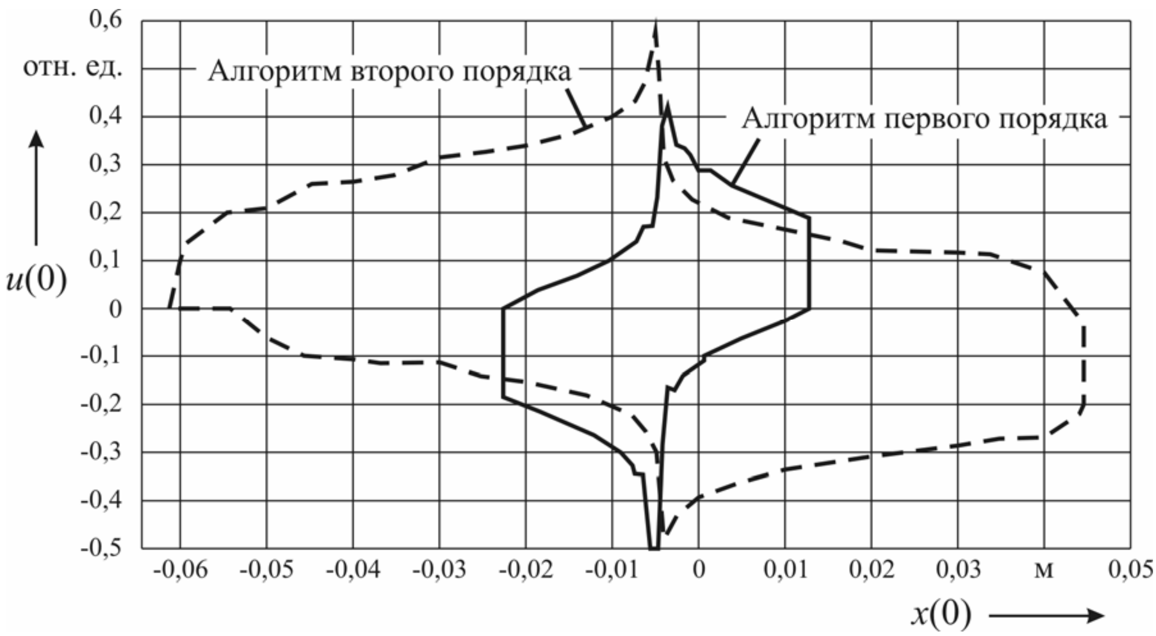


Рис. 8. Области устойчивости систем с приближенными алгоритмами

Проведены экспериментальные исследования устойчивости, точности вынужденных режимов в замкнутых системах с приближенными алгоритмами и качества протекания в них переходных процессов и подтверждено, что системы с алгоритмами второго порядка имеют более широкую область устойчивости и лучшую точность процессов управления.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Содержанием работы является разработка, исследование метода полиномиальной аппроксимации для линеаризации гладких нелинейных функций и его применение для решения частных задач безусловной оптимизации, параметрической идентификации и траекторного управления нелинейными динамическими объектами.

1. Разработан метод полиномиальной аппроксимации, основанный на разложении аналитических нелинейных вектор-функций в многомерный ряд Тейлора и учитывающий кроме первой и вторую производную. Предложено две формы линейных моделей и получены оценки для погрешностей, из которых следует, что предельная точность приближения совпадает с порядком

учитываемой производной. При построении вычислительных алгоритмов предложены двухступенчатая и многошаговая схемы.

2. Применены методы полиномиальной аппроксимации для получения численных алгоритмов нахождения решений нелинейных уравнений и безусловной оптимизации. Доказана сходимость двухступенчатых и многошаговых схем и показано, что двухступенчатые имеют на порядок лучшую скорость, а у многошаговых она соизмерима с методом Ньютона, а при учете в формулах линеаризации высших производных скорость сходимости не изменяется. Исследованы на тестовых функциях свойства методов и показано их преимущество перед классическими по областям и скорости сходимости.

3. Предложены вычислительные процедуры, реализующие двухступенчатые и многошаговые схемы оценивания параметров и состояний при решении многоточечной нелинейной краевой задачи методами квазилинеаризации и последовательной линеаризации. Определены условия сходимости алгоритмов полиномиальной аппроксимации, которые подтверждены экспериментальными исследованиями, и показано их более эффективное оценивание по сравнению с классическими методами идентификации.

4. Разработаны приближенные методы траекторного управления нелинейными объектами и получены рекуррентные алгоритмы двух форм полиномиальной аппроксимации и двухступенчатая процедура с переключениями управляющих воздействий, позволяющая более эффективно применять методы первого и второго порядков.

5. Получены для оценки точности процессов управления аналитические выражения методических погрешностей рекуррентных алгоритмов как итерационных процедур численных методов.

6. Определены с применением методов абсолютной устойчивости для многомерных объектов общего вида достаточные условия устойчивости замкнутых систем в матричной форме, совпадающие с методическими погрешностями. Для класса моделей типа Луенбергера получены скалярные аналитические выражения достаточных условий устойчивости.

7. Проведено имитационное моделирование систем с алгоритмами управления первого и второго порядков, выполнена проверка соответствия между результатами теоретических и экспериментальных исследований и подтверждено, что алгоритмы второго порядка обеспечивают лучшие показатели устойчивости и точности процессов управления.

8. Предложены приближенные методы полиномиальной аппроксимации для систем обработки информации, идентификации и управления. При проектировании цифровых фильтров проведено сравнение с результатами классического метода и показано, что область сходимости предложенного значительно шире. Разработаны алгоритмы идентификации для компьютерного тренажера операторов АЭС и полученные оценки соответствуют расчетным значениям параметров объекта.

9. Построена система управления для деревообрабатывающего робототехнического комплекса «Мастер». Разработанные алгоритмы и соответствующее программное обеспечение позволяют осуществлять автономное управление пятью каналами, которые реализуют заданное оператором движение рабочего органа манипулятора. Опытные испытания показали, что качество продукции соответствует требованиям технического задания.

10. Получены алгоритмы траекторного управления скоростью вращения вала тягового двигателя, включенного на испытательном стенде по методу взаимной нагрузки, и реализована автоматическая стабилизация скорости в существующих диагностических комплексах.

11. Разработана система управления жесткостью пневмоподвески и вынужденными механическими колебаниями подвижной части вибростенда при диагностике отдельных узлов и изделий.

СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях, рекомендуемых перечнем ВАК РФ:

1. Когут А. Т. Проектирование и исследование устойчивости систем траекторного управления нелинейными объектами / А. Т. Когут // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2009. № 7. С. 7–11.

2. Когут А. Т. Формирование алгоритмов управляющих воздействий на основе численных методов / А. Т. Когут, Н. Ю. Панфилова // Вестник Сиб. гос. аэрокосмического ун-та. 2009. Выпуск 1 (22). Ч. 1. С. 27–31.

3. Когут А. Т. Двухступенчатый алгоритм траекторного управления нелинейным многомерным объектом / А. Т. Когут, А. А. Лаврухин // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники / Томск, 2009. № 1 (19). Ч. 1. С. 96–101.

4. Когут А. Т. Комплексная система диагностирования технического состояния радиотехнических и управляющих устройств подвижного состава / А. Т. Когут, А. В. Красулин, Д. В. Литовкин // Омский научный вестник / Омск, 2006. № 9 (46). С. 186–189.

5. Когут А. Т. Численные алгоритмы решения нелинейных уравнений с использованием высших производных / А. Т. Когут // Омский научный вестник / Омск, 2006. № 9 (46). С. 5–8.

6. Когут А. Т. Параметрическая идентификация и оценивание адекватности динамических моделей обрабатывающего станка / А. Т. Когут // Омский научный вестник / Омск, 2006. № 2. С. 103–106.

7. Когут А. Т. Исследование скорости сходимости оптимизационных процедур полиномиальной аппроксимации / А. Т. Когут, И. В. Скосырских, И. А. Щегольский // Омский научный вестник / Омск, 2006. № 1. С. 47–51.

8. Когут А. Т. Модификация метода Шатровского решения нелинейных задач оптимального управления / А. А. Лаврухин, А. Т. Когут // Омский научный вестник / Омск, 2005. № 3. С. 81–85.

9. Когут А. Т. Оценивание параметров объекта с существенно нелинейными динамическими характеристиками / А. Т. Когут, Н. А. Тихонова, А. В. Новокшонова // Омский научный вестник / Омск, 2005. № 4. С. 97–100.

10. Когут А. Т. Оценка точности методов прямого оптимального управления нелинейными многомерными объектами / А. Т. Когут, А. А. Лаврухин // Омский научный вестник / Омск, 2006. № 7. С. 119–123.

Прочие публикации:

11. Когут А. Т. Полиномиальная аппроксимация в некоторых задачах оптимизации и управления: монография / А. Т. Когут / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2003. 243 с.

12. Когут А. Т. Применение алгоритмов линеаризации для идентификации и адаптивного управления в нелинейных динамических системах: монография / А. Т. Когут, Н. А. Тихонова / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2008. 126 с.

13. Когут А. Т. Построение математической модели кинематики и динамики обрабатывающего станка / С. А. Когут, А. А. Симаков, А. Т. Когут // Омский научный вестник / Омск, 2005. № 2. С. 64–67.

14. Когут А. Т. Расширение класса методов квазилинеаризации при решении задач параметрической идентификации / А. Т. Когут // Информатика и

процессы управления: Межвуз. темат. сб. научн. тр. / Красноярский гос. техн. ун-т. Красноярск, 1995. С. 41–45.

15. Когут А. Т. Численный алгоритм решения нелинейных уравнений с использованием вторых производных / А. Т. Когут // Математические структуры и моделирование / Омский гос. ун-т. Омск, 2003. С. 10–14.

16. Когут А. Т. Исследование областей сходимости численных методов второго порядка / А. Т. Когут, Н. Ю. Безбородова // Математика и информатика. Наука и образование: Межвуз. сб. научн. тр. / Омский гос. пед. ун-т. Омск, 2006. Вып. 5. С. 26–31.

17. Когут А. Т. Применение квадратичной аппроксимации в задачах параметрической идентификации и оптимизации / А.Т. Когут, А. Г. Малютин, И. А. Щегольский // Информатика и процессы управления: Межвуз. сб. научн. статей / Красноярский гос. техн. ун-т. Красноярск, 1997. С. 44–48.

18. Когут А.Т. Один метод адаптивного оптимального управления нелинейными дискретными объектами / А. Т. Когут, А. А. Симаков, А. Г. Малютин // Вестник Воронежского института МВД России / Воронежский институт МВД России. Воронеж, 2002. С. 129–133.

19. Когут А. Т. Сравнение двух методов идентификации при оценивании параметров нелинейного динамического маятника / А. Т. Когут, Н. А. Тихонова, А. В. Новокшонова // Омский научный вестник / Омск, 2005. № 1. С. 92–96.

20. Когут А. Т. Анализ структурной схемы одной многомерной дискретной системы в задаче абсолютной устойчивости / А. Т. Когут, А. А. Лаврухин // Современные проблемы совершенствования работы железнодорожного предприятия. Межвуз. сб. научн. тр. М.: РГОТУПС, 2007. Т. 1. С. 33–37.

21. Когут А. Т. Применение методов цифрового управления объектами локальных систем автоматики / А.Т. Когут, Н. Ю. Безбородова, А. А. Лаврухин // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии / Сибирская гос. автомобильно-дорожная акад. / Омск, 2007. Вып. 5. С. 206–209.

22. Когут А. Т. Исследование областей сходимости численных методов второго порядка / А. Т. Когут, Н. Ю. Безбородова // Математика и информатика. Наука и образование: Межвуз. сб. научн. тр. / Омский гос. пед. ун-т. Омск, 2006. С. 26–31.

23. Когут А.Т. Улучшение сходимости метода квазилинеаризации в задачах параметрической идентификации / А. Т. Когут // Расчет и оптимизация

параметров электромагнитных устройств и систем управления элктроприводом: Межвуз. темат. сб. научн. тр. / Омский политехнический ин-т. Омск, 1985. С. 41–44.

24. Когут А.Т. Экспериментальное восстановление математических моделей нелинейных объектов / А. Т. Когут // Материалы X-й научно-технической конференции «Планирование и автоматизация эксперимента в научных исследованиях». М., 1992. С. 27.

25. Когут А.Т. Моделирование и исследование свойств динамических объектов с малой нелинейностью / А. Т. Когут, Н. А. Тихонова // Тезисы докладов научной школы-семинара «Моделирование и исследование устойчивости физических процессов». Киев, 1991. С. 41–42.

26. Когут А.Т. Параметрическая идентификация динамических моделей в задачах автоматизированного управления / А. Т. Когут, Н. А. Тихонова // Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции «Ученые и специалисты в решении социально-экономических проблем страны». Ташкент, 1990. С. 75–76.

27. Когут А.Т. Микропроцессорная система идентификации и управления колебаниями виброисточника / А. Т. Когут, Н. А. Тихонова // Тезисы докладов 2-й Всесоюзной научно-технической конференции «Микропроцессорные системы автоматики». Новосибирск, 1990. С. 77.

28. Когут А.Т. Синтез оптимального следящего привода с двумя параметрами управления / А. Т. Когут, А. В. Красулин // Материалы VII Междунар. конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения». Новосибирск, 2004. Т. 6. С. 195–198.

29. Когут А.Т. Исследования нелинейных систем управления с помощью одного класса линеаризованных моделей / А. Т. Когут // Труды конференции «Пятьдесят лет развития кибернетики» / Санкт-Петербургский гос. техн. ун-т. СПб, 1999. С. 155–157.

30. Когут А.Т. Алгоритмы идентификации и управления вынужденными колебаниями механической системы / А.Т. Когут, Н.А. Тихонова, А.А. Лаврухин // Материалы конф. «Европейская наука XXI столетия: Стратегия и перспективы развития – 2006». Днепропетровск: Наука и просвещение, 2006. Т. 22. С. 49–51.

31. Когут А.Т. Применение итерационных процедур для синтеза алгоритмов управления нелинейным динамическим объектом / В. А. Нехаев, А.Т. Когут // Тезисы конференции «Dynamical system modeling and stability investigation» / Киевский национальный ун-т им. Т. Шевченко. Киев, 2007. С. 384.

32. Когут А.Т. Исследование устойчивости динамических систем управления технологическими процессами / А.Т. Когут, Н. Ю. Безбородова, А. А. Лаврухин // Труды Междунар. конф. «Информационные и телекоммуникационные системы и технологии» / С-Петерб. политехн. ун-т. СПб, 2007. С. 201–206.

33. Когут А.Т. Дискретные алгоритмы нелинейного управления для обеспечения требуемых технических режимов в автоматизированных системах / А. Т. Когут, Е. И. Раб, Н. Ю. Безбородова, А. А. Лаврухин // Доклады Междунар. научно-практ. конф. «Электронные средства и системы управления. Опыт инновационного развития» / Томский гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники. Томск: Изд-во «В-Спектр», 2007. Ч. 2. С. 40–43.

34. Когут А.Т. Синтез алгоритма управления в исследовательском микропроцессорном комплексе / А. Т. Когут, А. А. Лаврухин, А. Г. Афанасьев // Материалы VII Междунар. науч.-техн. конф. «Микропроцессорные, аналоговые и цифровые системы: Проектирование и схемотехника, теория и вопросы применения» / Южно-Рос. гос. техн. ун-т. Новочеркасск, 2007. С. 27–30.

35. Когут А.Т. Приближенное решение одной нелинейной задачи оптимального управления с использованием линейных моделей / А. Т. Когут, А. А. Лаврухин // Материалы конф. «Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике» / Южно-Рос. гос. ун-т. Новочеркасск, 2006. Ч. 1. С. 13–15.

Типография ОмГУПСа

Заказ Тираж 100 экз.

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35