На правах рукописи

УДК 512.54

Кисляков Валерий Евгеньевич

ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ЭЛЕМЕНТ, ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЙ ЛИШЬ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОПРЯЖЁННЫХ С НИМ ЭЛЕМЕНТОВ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Красноярск-2010

Работа выполнена в Институте фундаментальной подготовки Сибирского федерального университета.

Научный руководитель: доктор физико - математических наук,
профессор Созутов Анатолий Ильич

Официальные оппоненты: доктор физико - математических наук,
доцент Попов Алексей Михайлович

доктор физико - математических наук,
доцент Тимофеенко Алексей Викторович

Ведущая организация: Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург

Защита состоится 19 ноября 2010 г. в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке СФУ (г. Красноярск, пр. Свободный, 79).

Автореферат разослан 15 октября 2010 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Н.А. Бушуева

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию бесконечных групп, содержащих элемент, перестановочный лишь с конечным числом сопряжённых с ним элементов. Это одно из условий конечности для бесконечных групп. Оно выполняется в группах, которые удовлетворяют давно и успешно применяемым условиям конечности, таким, как конечность централизатора элемента. Для этих групп получены известные результаты[1, 2], которые мы используем в диссертации. Наше условие выполняется также в группах, содержащих FC-элементы. Более близкое условие конечности ввёл В.П. Шунков[3]. Это группы с конечно вложенной инволюцией. Инволюция a является конечно вложенной в группе G, если множество $gC_G(a) \cap a^G a^G$ конечно для всех $g \in G$. Нетрудно увидеть, если a есть конечно вложенная инволюция в группе G, то $|C_G(a) \cap a^G| < \infty$.

Группы, содержащие инволюцию, перестановочную лишь с конечным числом сопряжённых с ней инволюций рассматривались в работе Стрункова С.П.[4] В ней был доказан аналог известной теоремы Брауэра-Фаулера о конечности числа конечных простых групп с заданным централизатором инволюции в классе бесконечных периодических групп. Позже Струнков С.П.[5] поставил вопрос:

11.95 Верно ли, что p-группа G, содержащая элемент a порядка p, для которого подгруппа $\langle a, a^g \rangle$ конечна при любом g и множество $C_G(a) \cap a^G$

[1]Шунков В.П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией//Алгебра и логика. 1972. Т. 26, №4. С.470-494

[2]Беляев В.В. Группы с почти регулярной инволюцией//Алгебра и логика. 1987. Т. 26, №5. С.531-535.

[3]Шунков В.П. M_p - группы. М.: Наука. 1990 г.

[4]Струнков С.П. Об одном аналоге теоремы Брауэра–Фаулера, Успехи математических наук, 1985. Т. 40, №6(246). С.155–156

[5]Коуровская тетрадь. Издание 16-е. Новосибирск. 2006 г.

конечно, имеет нетривиальный центр?

Этот вопрос не решён и является одной из задач для наших дальнейших исследований.

Обратимся теперь к вопросу, решению которого посвящена наша работа. Пусть группа G содержит элемент a такой, что множество $C_G(a) \cap a^G$ конечно. Определим граф *перестановочности* $C(G, X)$ со множеством вершин $X = a^G$. Две вершины $x,\ y \in X,\ x \neq y$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $xy = yx$. Определённый таким образом граф $C(G, X)$ является локально конечным неориентированным графом без петель и кратных рёбер, а группа G — вершинно-транзитивной группой автоморфизмов графа $C(G, X)$. Граф называется *локально конечным*, если из каждой его вершины выходит конечное число рёбер. Понятие графа перестановочности привлекает внимание многих современных исследователей в теории конечных групп. Интерес этот объясняется тем, что в случае конечных групп строение группы G тесно связано с геометрией графа $C(G, X)$. В теории бесконечных групп граф перестановочности пока не получил такого признания.

Понятие связности есть важнейшее геометрическое свойство графа. Граф называется *связным*, если любые две его вершины связывает путь. Если граф несвязен, то его максимальный связный подграф называется *связной компонентой* графа. Логично начать изучение локально конечного графа перестановочности $C(G, X)$ с вопроса о его связности.

Вопрос поставлен Беляевым В.В. :

будут ли конечны связные компоненты локально конечного графа перестановочности $C(G, X)$?

Именно исследованию этого вопроса посвящена диссертация. Изучение связных компонент опирается на известные свойства групп автоморфизмов связных локально конечных графов (см., например, Трофимов В.И.[6]). Стабилизатор вершины такого графа является инертной подгруппой в группе автоморфизмов. Подгруппа H группы G называется *инертной*, если для всех $g \in G$ индекс $|H : H \cap H^g|$ конечен. Можно сказать, что понятие инертной подгруппы на теоретико-групповом языке приблизительно описывает геометрические свойства связности и локальной конечности графа и играет важную роль в нашем исследовании связных компонент графа перестановочности.

В такой общей постановке вопрос о конечности связных компонент имеет отрицательное решение. Идею контрпримера автору предложил Трофимов В.И. В этом контрпримере множеством вершин графа перестановочности служит класс сопряжённых инволюций в группе автоморфизмов бесконечного дерева валентности 3. Представляет интерес продолжение исследования поставленного вопроса в различных классах групп: бесконечные p -группы, разрешимые группы, почти нильпотентные группы, бесконечные группы с дополнительными условиями конечности.

Целью работы является исследование:

а) связных компонент локально конечного графа перестановочности,

б) подгрупп, порождённых множеством вершин связной компоненты локально конечного графа перестановочности,

в) абелевых и нильпотентных подгрупп в группах, содержащих элемент, перестановочный лишь с конечным числом сопряжённых с ним элементов.

Методы исследования. Основным методом исследования является

[6]Трофимов В.И. Действие группы на графе. Известия Академии Наук СССР, Серия Математика. 1986. Том 50, №5. С.429-447

применение понятия инертной подгруппы при изучении связных компонент локально конечного графа перестановочности. А также метод построения нильпотентных групп автоморфизмов периодических абелевых групп. Используются методы теории групп и теории графов.

Научная новизна. Результаты, полученные в работе, являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в абстрактной и комбинаторной теории групп при изучении локально конечных групп, групп без кручения, локально нильпотентных групп, групп с инволюциями, бесконечных групп с условиями конечности и локально конечных графов перестановочности.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинаре «Теория групп» в Новосибирском государственном университете, 1994 г., на семинаре «Алгебра и логика», г. Новосибирск, 1997 г., на всеукраинской научной конференции «Разработка и применение математических методов в научно - технических исследованиях», 1995 г., на Международной алгебраической конференции в Санкт - Петербурге, 1997 г., на «Мальцевских чтениях 2010», г. Новосибирск, на Международной конференции «Алгебра, логика и приложения» в Сибирском федеральном университете, г. Красноярск, 2010 г., на Алгебраическом семинаре в Институте математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, 2010 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1−6].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, содержащего формулировки основных результатов, трех глав и одиннадцати параграфов, списка литературы из 19 наименований. Общий объём диссертации составляет 70 страниц.

Содержание работы

В первой главе диссертации содержатся предварительные результаты.

Вторая глава посвящена доказательству основных результатов о строении связных компонент локально конечного графа перестановочности в различных классах групп. Вопрос о конечности связных компонент положительно решён в следующих случаях

Теорема 2. *Пусть G — группа, $X \subseteq G$ — класс сопряжённых элементов, $C(G, X)$ — локально конечный граф и имеет место одно из утверждений:*

1. *G — локально конечная группа;*
2. *G — группа без кручения;*
3. *G — метабелева группа;*
4. *G — локально нильпотентная группа.*

Тогда связные компоненты графа $C(G, X)$ конечны.

Доказательство теоремы приводится в параграфе 2.1 диссертации.

Для групп, содержащих инволюции, доказана

Теорема 3. *Пусть G — группа, $X \subseteq G$ — класс сопряжённых инволюций, $C(G, X)$ — локально конечный граф, Γ — некоторая его связная компонента и $a \in X$. Если любые две вершины Γ порождают конечную подгруппу, то подгруппа порождённая множеством всех вершин Γ локально конечна.*

С помощью теоремы 3 установлена конечность связных компонент для локально конечного графа $C(G, X)$ без треугольников, а также в случае, когда $C_G(a)$ содержит конечное число инволюций.

Результаты для групп с инволюциями доказываются в параграфе 2.2.

Одним из основных результатов диссертации является

Теорема 6. *Пусть G — группа, $X \subseteq G$ — класс сопряжённых элементов, $C(G, X)$ — локально конечный граф и Γ — его некоторая связная компонента. Если любые две вершины Γ порождают нильпотентную группу, то подгруппа порождённая множеством всех вершин Γ локально нильпотентна.*

С помощью теоремы 6 установлена конечность связных компонент локально конечного графа перестановочности, когда подгруппа порождённая вершинами связной компоненты не имеет кручения или конечно порождена.

Доказательство теоремы 6 приводится в параграфе 2.3.

Третья глава диссертации посвящена исследованию локально нильпотентных групп, содержащих элемент, перестановочный лишь с конечным числом сопряжённых с ним элементов. В параграфе 3.1 доказывается следующий основной результат.

Теорема 11. *Локально нильпотентная группа G, содержащая неединичный элемент a перестановочный лишь с конечным числом сопряжённых с ним элементов, имеет неединичную абелеву нормальную подгруппу.*

В общем случае неизвестно содержит ли локально нильпотентная группа абелеву нормальную подгруппу. С другой стороны, теорема 11 позволяет построить изучение строения группы G по известной схеме: через исследование связей с абелевыми подгруппами. Поэтому исследование действия элемента, перестановочного лишь с конечным числом сопряжённых с ним элементов на периодической абелевой нормальной подгруппе занимает в диссертации важное место. В параграфе 1.4 вводится понятие *черниковского* автоморфизма. Автоморфизм α группы G называется *черниковским*, если подгруппа $[G, \alpha] = \left\langle \left\{ [g, \alpha] = g^{-1}g^{\alpha} | g \in G \right\} \right\rangle$ черниковская. В параграфе 3.2 строится нильпотентная группа автоморфизмов, действующих на периодической абелевой группе и доказывается

Теорема 14. *Пусть элемент a локально нильпотентной группы G имеет конечный порядок, перестановочен лишь с конечным числом сопряжённых с ним элементов и порядки всех коммутаторов вида $a^{-1}g^{-1}ag$ ограничены в совокупности. Тогда нормальное замыкание $\left\langle a^G \right\rangle$ — нильпотентная группа.*

В параграфе 3.3 исследуется ситуация, когда любые два элемента связной компоненты локально конечного графа порождают конечную p-группу. Тогда, из теоремы 6 следует, что подгруппа H, порождённая множеством всех вершин связной компоненты, будет локально конечной p-группой. По теореме 11, H обладает абелевой нормальной подгруппой и в параграфе 3.3 доказывается, что фактор-группа H по централизатору этой абелевой подгруппы есть фиттингова группа.

Основные результаты

Диссертационная работа посвящена изучению связных компонент локально конечного графа перестановочности $C(G, X)$, когда X есть класс сопряжённых элементов в бесконечной группе G. Получены следующие основные результаты:

1) Доказана конечность связных компонент $C(G, X)$, если группа G принадлежит одному из следующих классов: локально конечные группы, группы без кручения, метабелевы группы, локально нильпотентные группы.

2) Исследована подгруппа, порождённая множеством всех вершин связной компоненты Γ графа $C(G, X)$, когда X есть сопряжённый класс инволюций и любые две вершины Γ порождают конечную группу. Доказано, что эта подгруппа является локально конечной.

3) Исследована подгруппа, порождённая множеством всех вершин связной компоненты Γ графа $C(G, X)$, когда любые две вершины Γ порождают нильпотентную группу. Доказано, что эта подгруппа является локально нильпотентной.

4) В локально нильпотентной группе G, содержащей элемент, перестановочный лишь с конечным числом сопряжённых с ним элементов доказано существование абелевой нормальной подгруппы.

5) Исследована локально нильпотентная группа G, содержащая элемент a конечного порядка, перестановочный лишь с конечным числом сопряжённых с ним элементов. Если порядки всех коммутаторов вида $a^{-1}g^{-1}ag$ ограничены в совокупности, то группа G обладает нормальной нильпотентной подгруппой.

Диссертация была поддержана РФФИ, грант № 10-01-00509.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В.В. Беляеву и научному руководителю, профессору А.И. Созутову за помощь в подготовке диссертации.

Работы автора по теме диссертации

[1] Кисляков В.Е. Группы, содержащие элемент, перестановочный с конечным числом сопряжённых с ним элементов// Алгебра и логика. 1996. Т. 35, №5. С.543-551.

[2] Кисляков В.Е. Группы, содержащие элемент, перестановочный с конечным числом сопряжённых с ним элементов// Алгебра и логика. 1998. Т.37, №6. С.637-650.

[3] Кисляков В.Е. Локально нильпотентные группы, содержащие элемент, перестановочный лишь с конечным числом сопряжённых с ним элементов// Сибирский математический журнал. 2010. №6. (в печати).

[4] Кисляков В.Е. Группы,содержащие элемент, перестановочный с конечным числом сопряжённых с ним элементов// Международная алгебраическая конференция посвящённая памяти Д. К. Фаддеева. Тезисы докладов. Санкт-Петербург. 1997. С.211.

[5] Кисляков В.Е. Пример бесконечного коммутирующего связного локально конечного графа// Международная конференция «Алгебра, логика и приложения». Тезисы докладов. Красноярск. 2010. С.46.

[6] Кисляков В.Е. О коммутирующем локально конечном графе в бесконечной группе// Международная конференция «Алгебра, логика и приложения». Тезисы докладов. Красноярск. 2010. С.47.