На правах рукописи

Кириллов Кирилл Анатольевич

МИНИМАЛЬНЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, ТОЧНЫЕ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХААРА

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Красноярск — 2011

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика и компьютерная безопасность» Сибирского федерального университета (г. Красноярск).

Научный консультант — доктор физико–математических наук,
профессор Носков Михаил Валерианович.

Официальные оппоненты:

доктор физико–математических наук,
профессор Войтишек Антон Вацлавович;

доктор физико–математических наук,
профессор Рамазанов Марат Давидович;

доктор физико–математических наук,
профессор Рябов Виктор Михайлович.

Ведущая организация: Научно–исследовательский вычислительный центр Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

Защита состоится 14 декабря 2011 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета ДМ 212.099.18 при Сибирском федеральном университете по адресу: 660074, г. Красноярск, ул. академика Киренского, 26 б, корпус «Ж» Сибирского федерального университета, ауд. УЛК–115.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан «   »   2011 г.

И. о. ученого секретаря
диссертационного совета   Осипов Н. Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Построение и исследование формул приближенного интегрирования вида

$$\int\limits_{\Omega} g(x_1,\ldots,x_n)f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x_1^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}) \qquad (1)$$

ведется со времен И. Ньютона. В данной формуле через Ω обозначена область интегрирования из $\mathbb{R}^n$, $g(x_1,\ldots,x_n)$ — весовая функция, $(x_1^{(i)},\ldots,x_n^{(i)})$ — точки из Ω, называемые узлами формулы, C_i — коэффициенты при узлах $(x_1^{(i)},\ldots,x_n^{(i)})$ (некоторые действительные числа), $i=1,\ldots,N$. При $n=1$ эти формулы носят называние квадратурных, а при $n>1$ — кубатурных. Особый интерес в теории приближенного интегрирования вызывает задача построения таких формул вида (1), которые точно интегрируют некоторый заданный набор функций, используя наименьшее возможное число узлов. Эти формулы называются минимальными кубатурными (квадратурными) формулами, точными для функций из указанного набора. Минимизация числа узлов приводит к сокращению объема вычислений и, следовательно, к уменьшению машинной погрешности округлений. Следует отметить, что задача сокращения объема вычислений была и остается одной из самых актуальных в вычислительной математике.

При $n=1$ для набора функций $\{f(x)\}$, являющихся алгебраическими многочленами степеней не выше заданного числа d, задача построения минимальных квадратурных формул решена полностью, причем в частном случае весовой функции $g(x)\equiv 1$ ее решил К. Ф. Гаусс. При $n>1$ большая часть минимальных формул вида (1), точных для алгебраических многочленов степеней, не превосходящих заданного d, получена для узкого класса областей интегрирования. Почти все эти формулы построены в случае $g(x)\equiv 1$ и при небольших значениях d.

Так, например, в случае двумерной симметричной области интегрирования И. Радоном была получена кубатурная формула с 7 узлами, точная на всех многочленах степени не выше 5, и доказана минимальность этой формулы. В монографии В. И. Крылова «Приближенное вычисление интегралов» (М.: "Наука" , 1967) приведено другое доказательство ее минимальности, автором которого является И. П. Мысовских.

Существенный интерес представляют квадратурные формулы, точно интегрирующие алгебраические многочлены на сфере. Такие формулы исследовались В. И. Лебедевым, Г. Н. Салиховым, С. И. Коняевым и другими авторами.

Минимальные квадратурные формулы, точные для тригонометрических полиномов степени не выше фиксированного d, изучены Н. П. Кеда, И. П. Мысовских, и другими авторами. Полученные ими результаты изложены в упомянутой выше книге В. И. Крылова. Минимальные кубатурные формулы, точно интегрирующие тригонометрические многочлены, исследовались в основном в работах М. В. Носкова, И. П. Мысовских, M. Beckers, R. Cools и Н. Н. Осипова. Следует отметить, что внимание многих авторов привлекают исследования кубатурных формул с решетчатой структурой узлов. Построение серий решетчатых кубатурных формул, точных на тригонометрических многочленах, было начато в работах М. В. Носкова и продолжено А. Р. Семеновой, Н. Н. Осиповым, А. В. Петровым. В частности, Н. Н. Осиповым были описаны все минимальные решетчатые формулы для приближенного вычисления двойного интеграла, точные на тригонометрических многочленах степени не выше заданного числа d.

В диссертации ставится вопрос о построении минимальных формул для функций системы $\{\chi_k(x)\}$, называемых обычно функциями Хаара. Эта система является ортогональной и обладает следующим замечательным свойством: любая непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям системы. Благодаря указанному свойству функций $\{\chi_k(x)\}$, формулы вида (1), точные для полиномов Хаара степеней, не превосходящих достаточно большого числа d, имеют сравнительно малую погрешность. Формулы приближенного вычисления интегралов, точные для полиномов по системе функций Хаара, можно найти в работах И. М. Соболя и K. Entacher. В их трудах точность квадратурных и кубатурных формул на конечных суммах Хаара использовалась при выводе оценок погрешности этих формул, однако вопрос минимизации числа узлов, которому уделено основное внимание в настоящей работе, не рассматривался.

Цель работы. Цель данной диссертации заключается в установлении нижних оценок числа узлов квадратурных и кубатурных (в двумерном случае) формул, точных для полиномов по системе Хаара, построении указанных формул с минимальным возможным числом узлов, а также в нахождении оценок погрешности формул приближенного интегрирования, точных для полиномов Хаара.

Методы исследования. При проведении исследований использовались методы теории функций, функционального анализа, а также вычислительной математики, в частности, теории кубатурных формул.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Вопросы о наименьшем возможном числе узлов и построении минимальных формул, точных для полиномов Хаара, ранее не исследовались. В настоящей работе описаны все минимальные квадратурные формулы с произвольной суммируемой весовой функцией, точные для функций Хаара первых d групп, где d — некоторое фиксированное число. В двумерном случае получены нижние оценки числа узлов кубатурных формул, точных для полиномов Хаара степеней не выше d, построены минимальные кубатурные формулы, обладающие указанным свойством при $d = 1, 2, 3, 5, 6, 7$, а также кубатурная формула, точная для полиномов Хаара степеней не выше 4, число узлов которой на 1 больше нижней границы, фигурирующей в одной из установленных оценок. Разработан алгоритм, позволяющий на основе минимальных кубатурных формул, обладающих d_0–свойством Хаара для $d_0 = 6 \quad (d_0 = 7)$, строить минимальные кубатурные формулы, обладающие d–свойством Хаара для любого наперед заданного четного (нечетного) числа d. Найдены оценки погрешности на пространствах S_p квадратурных формул с весовой функцией $g \in L_\infty[0,1]$ и $g \in L_q[0,1] \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1)$, обладающих d–свойством Хаара, а также оценки погрешности на пространствах S_p и H_α квадратурных и кубатурных формул с весовой функцией $g(x) \equiv 1$, обладающих d–свойством Хаара соответственно в одномерном и двумерном случае.

Практическая и теоретическая значимость. Результаты диссертационной работы могут быть использованы для приближенного вычисления интегралов, при построении алгоритмов дискретного преобразования Хаара и для дальнейшего теоретического исследования кубатурных формул, точных на полиномах Хаара.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на VI международном семинаре–совещании "Кубатурные формулы и их приложения" (Уфа, 3 – 7 июля 2001 г.), III международной конференции "Теория симметрии и дифференциальные уравнения"(Красноярск, 25 – 29 августа 2002 г.), Уфимской международной математической конференции "Теория функций, дифференциальные уравнения, вычислительная математика" , посвященной памяти А. Ф. Леонтьева (Уфа, 28 мая – 1 июня 2007 г.), международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений" , посвященной 100–летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 5 – 12 октября 2008 г.), международной конференции "Кубатурные формулы, методы Монте–Карло и их приложения" (Красноярск, 4 – 7 июля 2011 г.), на семинарах Сибирского федерального университета и Института вычислительного моделирования СО РАН.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 18 работ, в том числе 8 статей — в изданиях из перечня ВАК РФ.

Личное участие автора в получении представленных научных результатов. Все результаты, выносимые на защиту, получены лично автором диссертации. В совместных работах вклад соавторов равнозначен.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 128 наименований, включая работы автора. Объем диссертации — 188 страниц.

Положения, выносимые на защиту

1. Описание всех минимальных весовых квадратурных формул, обладающих d–свойством Хаара.

2. Нижние оценки числа узлов кубатурных формул, обладающих d–свойством Хаара в двумерном случае.

3. Алгоритм построения для любого наперед заданного целого $d \geqslant 8$ минимальных кубатурных формул, обладающих d–свойством Хаара в двумерном случае.

4. Оценки погрешности на пространствах S_p $(p > 1)$ и H_α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ формул приближенного интегрирования, обладающих d–свойством Хаара.

Диссертационная работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 03–01–00703–а "Кубатурные формулы с узлами на решетках" (2003 – 2005гг.), 04–01–00823–а "Кубатурные формулы, точные на системах функций" (2004 – 2006гг.), 07–01–00326–а "Кубатурные формулы, точные на системах функций, и их приложения" (2007 – 2009гг.).

Краткое содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, дается обзор современного состояния проблемы построения кубатурных формул, точных на заданном наборе функций, приводится краткое описание диссертационной работы, а также основные обозначения, используемые в диссертации.

В **главе 1** сформулированы определения некоторых классов функций, изложены доказанные в работах А. Хаара, С. Качмажа, Г. Штейнгауза и И. М. Соболя свойства функций Хаара $\{\chi_k(x)\}$, рядов Хаара, Фурье – Хаара, Π_τ–сеток, используемые в теории кубатурных формул.

В **разделе 1.1** формулируется определение функций $\{\chi_k(x)\}$ и двоичных промежутков. Отмечено, что в литературе можно встретить различные определения функций $\{\chi_k(x)\}$, отличающиеся значениями этих функций в точках разрыва. Перечислены основные свойства функций Хаара. Приведено известное определение коэффициентов Фурье – Хаара $c_k = \int\limits_0^1 f(x)\chi_k(x)\,dx$ произвольной интегрируемой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0,1]$, и ряда Фурье – Хаара $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\chi_k(x)$ этой функции. Приведены утверждения теорем о свойствах сумм рядов Хаара и Фурье – Хаара, о связи между указанными рядами. Сформулированы свойства системы Хаара, касающиеся сходимости рядов Хаара и Фурье – Хаара в пространстве $L_p[0,1]$.

В **разделе 1.2** приводятся определения классов функций S_p и H_α в одномерном и двумерном случаях, которые используются в главе 3, посвященной оценкам погрешности кубатурных формул, точных для полиномов Хаара.

В **разделе 1.3** формулируются определения двоичного параллелепипеда и Π_τ–сеток. Приведено утверждение о точности кубатурных формул вида (1) с узлами, образующими Π_τ–сетку, и равными коэффициентами при этих узлах, для конечных сумм Хаара, а также теорема об оценках нормы функционала погрешности кубатурных формул на пространствах S_p и H_α, исследованных И. М. Соболем.

В **главе 2** описаны все минимальные квадратурные формулы с произвольной весовой функцией, точные для функций Хаара, выявлена зависимость числа узлов от свойств весовой функции, указаны правила выбора узлов и значений коэффициентов при узлах таких формул, приведены примеры минимальных квадратурных формул для некоторых весовых функций. В этой главе исследованы также кубатурные формулы, точные для полинимов Хаара в двумерном случае: получены нижние оценки числа узлов кубатурных формул, обладающих d–свойством Хаара ($d \geqslant 2$), приведены примеры минимальных формул, обладающих d–свойством Хаара для $d = 1, 2, 3, 5, 6, 7$, пример кубатурной формулы, точной для всех полиномов Хаара степеней, не превосходящих 4, число узлов которой на 1 больше нижней границы, фигурирующей в одной из полученных оценок, доказаны рекуррентные соотношения для нахождения координат узлов минимальной кубатурной формулы, обладающей $(d+2)$–свойством Хаара, с помощью минимальной кубатурной формулы, обладающей d–свойством ($d > 7$), на основе этих рекуррентных соотношений разработан алгоритм, позволяющий строить минимальные кубатурные формулы, обладающие d–свойством Хаара для любого наперед заданного четного (нечетного) числа d, исходя из минимальных кубатурных формул, обладающих d_0–свойством Хаара для $d_0 = 6$ $(d_0 = 7)$.

В **разделе 2.1** для одномерного и двумерного случаев приведены определения полиномов Хаара, кубатурных (квадратурных) формул, обладающих d–свойством Хаара, введены специальные функции и рассмотрены некоторые их свойства.

В **подразделе 2.1.1** введено понятие полиномов Хаара. Полиномами Хаара степени d названы функции

$$P_d(x) = a_0\chi_1(x) + \sum_{m=1}^{d}\sum_{j=1}^{2^{m-1}} a_m^{(j)}\chi_{m,j}(x),$$

где $d \geqslant 1$ — целое число, $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_m^{(j)} \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \ldots, d$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, при этом $\sum\limits_{j=1}^{2^{d-1}} \left(a_d^{(j)}\right)^2 \neq 0$. Под полиномами Хаара нулевой степени понимаются константы $P_0(x) \equiv a_0$, где $a_0 \in \mathbb{R}$.

Рассматриваются квадратурные формулы

$$I[f] = \int\limits_0^1 g(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x^{(i)}) = Q[f], \qquad (2)$$

где $x^{(i)} \in [0,1]$ — узлы формулы, $C_i \in \mathbb{R}$ — коэффициенты при ее узлах, $i = 1, \ldots, N$, $\quad g(x), f(x)$ — определенные на отрезке $[0,1]$ функции, такие, что функция $g(x)f(x)$ суммируема на $[0,1]$.

Считается, что такая формула обладает d–свойством Хаара, или просто — d–свойством, если она точна для любого полинома Хаара $P(x)$ степени, не превосходящей d, т. е. $Q[P] = I[P]$. Минимальной квадратурной формулой, обладающей d–свойством, названа формула (2) с наименьшим возможным числом узлов, точная для всех полинимов Хаара степеней не выше d.

Квадратурная формула (2) названа формулой степени точности d Хаара, или d–точной, если она обладает d–свойством, но $(d+1)$–свойством не обладает.

Решаемая задача формулируется следующим образом: на множестве квадратурных формул вида (2), точно интегрирующих полиномы Хаара степеней, не превосходящих d, найти формулы, число узлов которых близко к наименьшему возможному.

Моментами порядка m названы числа $\mu_{m,j} = I[\chi_{m,j}]$, $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$, моментом нулевого порядка — число $\mu_1 = I[\chi_1]$.

Приведена лемма, которая следует из линейности функционалов $I[f]$ и $Q[f]$:

Лемма 2.1. *Формула вида (2) обладает d–свойством, тогда и только тогда, когда $Q[\chi_1] = \mu_1$, $Q[\chi_{m,j}] = \mu_{m,j}$ для всех $m = 1, 2, \ldots, d$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$.*

Введено определение κ–функции $\kappa_{d,j}(x)$ группы номер d:

$$\kappa_{d,j}(x) = \chi_1(x) + \sum_{m=1}^{d} 2^{\frac{m-1}{2}} \delta_m \chi_{m,j_m}(x),$$

где d и j — некоторые натуральные числа, $1 \leqslant j \leqslant 2^d$, $\quad j_1 = 1$, индексы $j_2, \ldots, j_d$ таковы, что $\quad l_{d+1,j} \subset l_{d,j_d} \subset \ldots \subset l_{2,j_2} \subset l_{1,1} = [0,1]$,

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & \text{если } l_{m+1,j_{m+1}} = l^-_{m,j_m}, \\ -1, & \text{если } l_{m+1,j_{m+1}} = l^+_{m,j_m}, \end{cases}$$

$m = 1, 2, \ldots, d$, $\quad j_{d+1} = j$.

Доказана

Лемма 2.2. *Каждая функция Хаара из первых d групп и функция $\chi_1(x)$ представимы в виде линейной комбинации κ–функций группы номер d, и притом единственным образом.*

Приведены два очевидных следствия этой леммы.

Следствие 1 леммы 2.2. *Формула вида (2) обладает d–свойством, тогда и только тогда, когда она точна для всех κ–функций группы номер d.*

Следствие 2 леммы 2.2. *Множество κ–функций группы номер d образует базис в пространстве полиномов Хаара степеней, не превосходящих d.*

Установлена справедливость лемм 2.3, 2.4.

Лемма 2.3. *Для κ–функций группы номер d имеет место равенство*

$$\kappa_{d,j}(x) = \begin{cases} 2^d & \text{при } x \in l_{d+1,j}, \\ 2^{d-1} & \text{при } x \in \overline{l_{d+1,j}} \setminus l_{d+1,j}, \\ 0 & \text{при } x \in [0,1] \setminus \overline{l_{d+1,j}}, \end{cases}$$

$j = 1, 2, \ldots, 2^d$.

Лемма 2.4. *В точках непрерывности функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ имеет место равенство:*

$$\chi^2_{m,j}(x) = \kappa_{m-1,j}(x),$$

$m = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. *Всюду, за исключением точек, в которых функции $\chi_{k,i}(x)$ и $\chi_{m,j}(x)$ одновременно терпят разрыв (если такие точки существуют), произведение этих функций*

$$\chi_{k,i}(x)\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k-1}{2}}\chi_{m,j}(x), & \text{если}, l_{m,j} \subseteq l^-_{k,i}, \\ -2^{\frac{k-1}{2}}\chi_{m,j}(x), & \text{если}, l_{m,j} \subseteq l^+_{k,i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $m \geqslant k, \quad 2^{k-1} + i \neq 2^{m-1} + j$.

В **подразделе 2.1.2** введено определение полиномов Хаара степени d в двумерном случае:

$$P_d(x_1, x_2) = a_0 + \sum_{l=1}^{d} \sum_{i=1}^{2^{l-1}} a_l^{(i)} \chi_{l,i}(x_1) + \sum_{m=1}^{d} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} b_m^{(j)} \chi_{m,j}(x_2) +$$
$$+ \sum_{2 \leqslant l+m \leqslant d} \sum_{i=1}^{2^{l-1}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_{l,m}^{(i,j)} \chi_{l,i}(x_1)\chi_{m,j}(x_2),$$

где $d \geqslant 2$ — целое число, a_0, $a_l^{(i)}$, $b_m^{(j)} \in \mathbb{R}$, $l, m = 1, 2, \ldots, d$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{l-1}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$, $c_{l,m}^{(i,j)} \in \mathbb{R}$, $l + m = 2, \ldots, d$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{l-1}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$, причем $\sum\limits_{i=1}^{2^{d-1}} \left[\left(a_d^{(i)} \right)^2 + \left(b_d^{(i)} \right)^2 \right] +$ $+ \sum\limits_{l+m=d} \sum\limits_{i=1}^{2^{l-1}} \sum\limits_{j=1}^{2^{m-1}} \left(c_{l,m}^{(i,j)} \right)^2 \neq 0$. Полиномом Хаара первой степени названа функция $P_1(x_1, x_2) = a_0 + a_1 \chi_{1,1}(x_1) + b_1 \chi_{1,1}(x_2)$, где $a_0, a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$. Под полиномом Хаара степени, равной нулю, понимается некоторая константа: $P_0(x_1, x_2) \equiv a_0$, $a_0 \in \mathbb{R}$.

Рассматриваются кубатурные формулы

$$I[f] = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = Q[f], \tag{3}$$

где $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in [0, 1]^2$ — узлы формулы, $C_i \in \mathbb{R}$ — ее коэффициенты, $i = 1, 2, \ldots, N$, $f(x_1, x_2)$ — функция, определенная и суммируемая на $[0, 1]^2$.

Как и в главе 2, считается, что формула (3) обладает d–свойством Хаара, или просто — d–свойством, если она точна для любого полинома Хаара $P(x_1, x_2)$ степени, не превосходящей d, т. е. $Q[P] = I[P]$. Минимальной кубатурной формулой, обладающей d–свойством, названа формула (3) с наименьшим возможным числом узлов, точная для всех полинимов Хаара степеней не выше d.

Кубатурная формула (3) называна формулой степени точности d Хаара, или d–точной, если она обладает d–свойством, но $(d+1)$–свойством не обладает.

Постановка решаемой задачи выглядит так: на множестве кубатурных формул вида (3), точно интегрирующих полиномы Хаара степеней, не превосходящих d, найти формулы, число узлов которых близко к наименьшему возможному.

Мономами Хаара степени d названы функции $\chi_{d,k}(x_1)$, $\chi_{d,k}(x_2)$, $\chi_{l,i}(x_1)\chi_{m,j}(x_2)$, где $k = 1, 2, \ldots, 2^{d-1}$, $l + m = d$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{l-1}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$, а κ–мономами степени d — функции $\kappa_{d,k}(x_1)$, $\kappa_{d,k}(x_2)$, $\kappa_{l,i}(x_1)\kappa_{m,j}(x_2)$, $k = 1, 2, \ldots, 2^d$, $l + m = d$, $i = 1, 2, \ldots, 2^l$, $j = 1, 2, \ldots, 2^m$.

Приведена лемма, утверждение которой следует из линейности функционалов $I[f]$ и $Q[f]$:

Лемма 2.5. *Формула (3) обладает d–свойством, тогда и только тогда, когда она точна для всех мономов Хаара степеней, не превосходящих d.*

Функции $\kappa_{d,k}(x_1)$, $\kappa_{d,k}(x_2)$, $\kappa_{l,i}(x_1)\kappa_{m,j}(x_2)$ названы κ–мономами степени d, где $k = 1, 2, \ldots, 2^d$, $l + m = d$, $i = 1, 2, \ldots, 2^l$, $j = 1, 2, \ldots, 2^m$.

Приведено очевидное утверждение:

Следствие лемм 2.2 и 2.5. *Формула (3) обладает d–свойством, тогда и только тогда, когда она точна для всех κ–мономов степени d.*

Установлена справедливость следующих утверждений.

Следствие леммы 2.3. *Для κ–мономов степени d справедливо равенство:*

$$\kappa_{m,i}(x_1)\kappa_{n,j}(x_2) = \begin{cases} 2^d, & \text{если } (x_1, x_2) \in l_{m+1,i} \times l_{n+1,j}, \\ 2^{d-1}, & \text{если } (x_1, x_2) \in \{\{\overline{l_{m+1,i}} \setminus l_{m+1,i}\} \times l_{n+1,j}\} \bigcup \\ & \bigcup \{l_{m+1,i} \times \{\overline{l_{n+1,j}} \setminus l_{n+1,j}\}\}, \\ 2^{d-2}, & \text{если } (x_1, x_2) \in \{\overline{l_{m+1,i}} \setminus l_{m+1,i}\} \times \{\overline{l_{n+1,j}} \setminus l_{n+1,j}\}, \\ 0, & \text{если } (x_1, x_2) \in [0,1]^2 \setminus \{\overline{l_{m+1,i}} \times \overline{l_{n+1,j}}\}, \end{cases}$$

$m + n = d$, $i = 1, 2, \ldots, 2^m$, $j = 1, 2, \ldots, 2^n$.

Приведена лемма, которая следует из этого утверждения

Лемма 2.6. *Если $K_d(x_1, x_2)$ – произвольный κ–моном степени d, то*

$$I[K_d] = \int_0^1\!\!\int_0^1 K_d(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1.$$

В **разделе 2.2** проведено описание всех минимальных весовых квадратурных формул, обладающих d–свойством Хаара, рассмотрены некоторые примеры минимальных формул.

В **подразделе 2.2.1** введено обозначение $\eta_{m,j} = \int\limits_{l_{m+1,j}} g(x)dx = $
$= \int\limits_{(j-1)/2^m}^{j/2^m} g(x)\, dx$, $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, 2^m$ и определение d–тривиального отрезка: двоичный отрезок $\overline{l_{d+1,r}}$ длины 2^{-d} назван d–тривиальным, если $\eta_{d,r} = 0$, $1 \leqslant r \leqslant 2^d$.

Доказаны следующие леммы.

Лемма 2.7. *Если формула (2) обладает d–свойством, то выполняется условие (А): "каждый из двоичных отрезков* $\overline{l_{d+1,j}} = [\frac{j-1}{2^d}, \frac{j}{2^d}]$ *длины* 2^{-d}*, не являющихся d–тривиальными, содержит хотя бы один узел формулы (2)".*

Лемма 2.8. *Минимальная формула (2), обладающая d–свойством, удовлетворяет условию (Б): "каждый из двоичных промежутков* $l_{d+1,1}, \ldots, l_{d+1,2^d}$ *содержит не более одного узла формулы".*

Из лемм 2.7 и 2.8 следует, что искать минимальную формулу (2), обладающую d–свойством, имеет смысл среди формул, удовлетворяющих условиям (А) и (Б). В этой связи введены следующие обозначения:

$t_j = \frac{j}{2^d}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^d - 1$,

$$y_j = \begin{cases} 0, & \text{если на промежутке } l_{d+1,j} \text{ нет узла,} \\ C_{i_j}, & \text{если существует узел } x^{(i_j)} \in l_{d+1,j}, \end{cases}$$

$j = 1, 2, \ldots, 2^d$,

$$y'_j = \begin{cases} 0, & \text{если в точке } t_j \text{ нет узла,} \\ C_{i_j}, & \text{если существует узел } x^{(i_j)} = t_j, \end{cases}$$

$j = 1, 2, \ldots, 2^{d-1}$, $\quad S_{p,k} = \bigcup\limits_{j=p}^{p+k} \overline{l_{d+1,j}}$, p — натуральное, k — целое неотрицательное число, $p + k \leqslant 2^d$, двоичные отрезки $\overline{l_{d+1,p}}, \ldots, \overline{l_{d+1,p+k}}$ длины 2^{-d} названы отрезками, образующими множество $S_{p,k}$.

Введено определение группы d–обособленных узлов: узлы, расположенные в точках $t_p, t_{p+1}, \ldots, t_{p+k-1}$, $\quad k \geqslant 1$, образуют группу d–обособленных узлов ранга k, если на множестве $S_{p,k} \setminus \{t_p, t_{p+1}, \ldots, t_{p+k-1}\}$ нет ни одного узла формулы. Простейшей группой d–обособленных узлов является группа, состоящая из одного узла — группа 1–го ранга.

Устанавливается, что формула (2) точна для всех полиномов Хаара степеней, не превосходящих d, тогда и только тогда, когда имеет место система равенств

$$\left\{ \begin{array}{r} y_1 + \frac{1}{2}y'_1 = \eta_{d,1} \\ \frac{1}{2}y'_1 + y_2 + \frac{1}{2}y'_2 = \eta_{d,2} \\ \frac{1}{2}y'_2 + y_3 + \frac{1}{2}y'_3 = \eta_{d,3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}y'_{2^d-2} + y_{2^d-1} + \frac{1}{2}y'_{2^d-1} = \eta_{d,2^d-1} \\ \frac{1}{2}y'_{2^d-1} + y_{2^d} = \eta_{d,2^d}. \end{array} \right. \tag{4}$$

Доказаны леммы 2.9, 2.10, в которых сформулированы достаточные условия существования на множествах типа $S_{p,k}$ групп d–обособленных узлов и леммы, устанавливающие достаточные (лемма 2.12), а также необходимые и достаточные (лемма 2.11) условия разрешимости относительно коэффициентов формулы систем уравнений, образованных некоторыми равенствами системы (4).

В **подразделе 2.2.2** введены следующие определения. Объединение двоичных отрезков $S_{p,k} = \bigcup\limits_{j=0}^{k} \overline{l_{d+1,p+j}}$ длины 2^{-d} названо:
— d–тривиальным множеством, если $\eta_{d,p+j} = 0$, где $j = 0, 1, \ldots, k$, k — целое неотрицательное число,
— d–особым множеством 1–го рода, если $\sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^j \eta_{d,p+j} = 0$, причем $\eta_{d,p+j} \neq 0$, $j = 0, 1, \ldots, k$, k — натуральное число,
— d–особым множеством 2–го рода, если $\sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^j \eta_{d,p+j} = 0$, $\eta_{d,p+r} = 0$, а при $j \in [0, k] \setminus \{r\}$ $\eta_{d,p+j} \neq 0$, где k, r — натуральные числа, такие, что $1 \leqslant r \leqslant k - 1$.
Отмечено, что простейшим d–тривиальным множеством является d–тривиальный отрезок. Из приведенных определений следует, что любое d–особое множество 1–го рода образовано не менее, чем двумя, а d–особое множество 2–го рода — не менее, чем тремя двоичными отрезками длины 2^{-d}, причем d–тривиальный отрезок, являющийся подмножеством d–особого множества 2–го рода, не может быть ни крайним слева, ни крайним справа из двоичных отрезков длины 2^{-d}, образующих это множество.

В дальнейшем рассматриваются совокупности d–особых множеств 1–го рода

$$S_{p_1,k_1}, S_{p_2,k_2}, \ldots, S_{p_M,k_M}, \tag{5}$$

которые не имеют общих внутренних точек. При этом d–особое множество 1–го рода считается частным случаем совокупности множеств вида (5).

Полагается, что ровно q двоичных отрезков длины 2^{-d} отличны от d–тривиальных, $1 \leqslant q \leqslant 2^d$.

Установлена справедливость следующих утверждений.

Теорема 2.1. *Пусть* m *— некоторое фиксированное натуральное* *число, $m \leqslant 2^{d-1}$. Если весовая функция $g(x)$ такова, что существует совокупность множеств вида (5) с $M = m$*

$$S_{p_1,k_1}, S_{p_2,k_2}, \ldots, S_{p_m,k_m} \tag{6}$$

и не существует ни одной совокупности множеств вида (6), для которых $M > m$, то число узлов формулы (2), обладающей d–свойством, удовлетворяет неравенству $N \geqslant q - m$.

Теорема 2.2. *Если не существует ни одного d–особого множества 1–го рода, то число узлов формулы (2), обладающей d–свойством, удовлетворяет неравенству $N \geqslant q$.*

В **подразделе 2.2.3** с помощью утверждений, уже доказанных в главе 2, устанавливаются необходимые и достаточные условия минимальности кубатурной формулы (2), обладающей d–свойством. Доказываются теоремы 2.3 — 2.6, утверждения которых приводятся в конце подраздела в более компактном виде (теоремы 2.7, 2.8).

Теорема 2.7. *Пусть весовая функция $g(x)$ такова, что существует хотя бы одна совокупность множеств вида (6) и не существует ни одной совокупности множеств вида (5), для которых $M > m$. Формула (2) является минимальной формулой, обладающая d–свойством, и при этом имеет $q - m$ узлов тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) существует совокупность множеств вида (6)

$$S_{p'_1,k'_1}, S_{p'_2,k'_2}, \ldots, S_{p'_m,k'_m},$$

такая, что узлы, расположенные на каждом из множеств $S_{p'_i,k'_i}$, находятся в точках $t_{p'_i}, t_{p'_i+1}, \ldots, t_{p'_i+k'_i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, т. е. являются d–обособленными и составляют m групп,

2) если d–тривиальный отрезок не является подмножеством ни одного из d–особых множеств 2–го рода, которые попарно не пересекаются с множествами $S_{p'_i,k'_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то он не содержит ни одного узла формулы,

3) если d–тривиальный отрезок является подмножеством некоторого d–особого множества 2–го рода $S_{\widetilde{p},\widetilde{k}}$, не пересекающегося ни с одним из множеств $S_{p'_i,k'_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то он либо не содержит ни одного узла формулы, либо содержит ровно два узла, которые расположены на его концах и входят в группу d–обособленных узлов, находящихся в точках $t_{\widetilde{p}}, t_{\widetilde{p}+1}, \ldots, t_{\widetilde{p}+\widetilde{k}-1}$,

4) на каждом множестве $S_{\overline{p},\overline{k}}$, таком, что на $S_{\overline{p},\overline{k}}$ нет ни одного d–обособленного узла и ни один из d–тривиальных отрезков не является его подмножеством, а каждый из двоичных отрезков $\overline{l_{d+1,\overline{p}-1}}$ (если $\overline{p} > 1$) и $\overline{l_{d+1,\overline{p}+\overline{k}+1}}$ (если $\overline{p}+\overline{k} < 2^d$) либо является d–тривиальным, либо содержит d–обособленный узел, находятся ровно $\overline{k}+1$ узлов, причем эти узлы расположены в соответствии с условиями (А) и (Б).
Коэффициенты при узлах формулы однозначно определяются из системы (4).

Теорема 2.8. *Пусть весовая функция $g(x)$ такова, что не существует ни одного d–особого множества 1–го рода. Формула (2) является минимальной формулой, обладающей d–свойством, и при этом имеет q узлов тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) если d–тривиальный отрезок не является подмножеством ни одного из d–особых множеств 2–го рода, то он не содержит ни одного узла формулы,

2) если d–тривиальный отрезок является подмножеством некоторого d–особого множества 2–го рода $S_{\widetilde{p},\widetilde{k}}$, то он либо не содержит ни одного узла формулы, либо содержит ровно два узла, которые расположены на его концах и входят в группу d–обособленных узлов, находящихся в точках $t_{\widetilde{p}}, t_{\widetilde{p}+1}, \ldots, t_{\widetilde{p}+\widetilde{k}-1}$,

3) на каждом множестве $S_{\overline{p},\overline{k}}$, таком, что на $S_{\overline{p},\overline{k}}$ нет ни одного d–обособленного узла и ни один из d–тривиальных отрезков не является его подмножеством, а каждый из двоичных отрезков $\overline{l_{d+1,\overline{p}-1}}$ (если $\overline{p} > 1$) и $\overline{l_{d+1,\overline{p}+\overline{k}+1}}$ (если $\overline{p}+\overline{k} < 2^d$) либо является d–тривиальным, либо содержит d–обособленный узел, находятся ровно $\overline{k}+1$ узлов, причем эти узлы расположены в соответствии с условиями (А) и (Б).
Коэффициенты при узлах формулы однозначно определяются из системы (4).

В **подразделе 2.2.4** приведены примеры минимальных квадратурных формул с различными весовыми функциями, обладающих d–свойством (примеры 2.1 — 2.5). В частности, рассмотрена минимальная квадратурная формула (2), обладающая указанным свойством, с весовой функцией $g(x) \equiv 1$ (пример 2.1). Число узлов такой формулы — 2^{d-1}. Отмечено, что число узлов квадратурной формулы, рассмотренной в указанном примере, вдвое меньше числа узлов Π_0–сетки квадратурной формулы, обладающей d–свойством, которая была построена И. М. Соболем.

Разделы 2.3 и 2.4 посвящены построению минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае.

В **разделе 2.3** рассмотрены минимальные кубатурные формулы, обладающие d–свойством Хаара для $d = 1, 2, 3$.

В **подразделе 2.3.1** доказана

Лемма 2.13. *Если формула (3) обладает d–свойством, то носитель каждого к– монома степени d содержит хотя бы один узел этой формулы.*

С помощью сформулированных выше утверждений получены оценки числа узлов кубатурной формулы, обладающей d–свойством, где $d \geqslant 2$. Эти оценки приведены в следующих теоремах.

Теорема 2.9. *Если координаты узлов формулы (3), обладающей d–свойством, не являются точками разрыва ни одной из функций Хаара $(d-1)$–й группы, то число узлов такой формулы удовлетворяет неравенству: $N \geqslant 2^d$.*

Теорема 2.10. *Если одна из координат хотя бы одного узла формулы (3), обладающей d– свойством, является точкой разрыва некоторой функции Хаара $(d-1)$–й группы, то число узлов такой формулы*

$$N \geqslant 2^{d-1} + 1. \tag{7}$$

Отмечено, что из указанных теорем вытекает следующее утверждение.

Следствие теорем 2.9, 2.10. *Для числа узлов формулы (3), обладающей d–свойством, справедлива оценка (7).*

В **подразделе 2.3.2** приведены примеры минимальных кубатурных формул, обладающих d–свойством Хаара для $d = 1, 2, 3$ (примеры 2.6 — 2.8).

В **разделе 2.4** рассмотрены минимальные кубатурные формулы, обладающие d–свойством Хаара для $d > 3$. Коэффициенты при узлах формул считаются положительными.

В **подразделе 2.4.1** доказана лемма 2.14, устанавливающая достаточные условия существования не менее двух узлов формулы (3) на каждом из множеств вида

$$\left[\frac{2m_1-1}{2^{M_1}}-\frac{1}{2^d},\frac{2m_1-1}{2^{M_1}}\right]\times[0,1],\quad \left[\frac{2m_1-1}{2^{M_1}},\frac{2m_1-1}{2^{M_1}}+\frac{1}{2^d}\right]\times[0,1]$$

и $[0,1]\times\left[\frac{2m_2-1}{2^{M_2}}-\frac{1}{2^d},\frac{2m_2-1}{2^{M_2}}\right],\quad [0,1]\times\left[\frac{2m_2-1}{2^{M_2}},\frac{2m_2-1}{2^{M_2}}+\frac{1}{2^d}\right].$

Установлена справедливость лемм 2.15, 2.16, формулирующих достаточные условия существования не менее $t+1$ узлов формулы (3) на прямоугольниках вида $\left[\frac{i-1}{2^d},\frac{i+t}{2^d}\right]\times[0,1]$ и $[0,1]\times\left[\frac{j-1}{2^d},\frac{j+t}{2^d}\right]$, при этом в некоторых случаях рассматриваются прямоугольники, не являющиеся замкнутыми множествами.

В **подразделе 2.4.2** введены следующие обозначения: через L обозначено множество некоторых прямых вида $x_1=\frac{i}{2^d}$, $x_2=\frac{j}{2^d}$ $(i=1,2,\ldots,2^d-1,\ j=1,2,\ldots,2^d-1)$, объединение которых включает множество

$$\bigcup_{M=1}^{d}\bigcup_{m=1}^{2^{M-1}}\bigcup_{k=1}^{2^{d-M+1}-1}\left\{\left(\frac{2m-1}{2^M},\frac{k}{2^{d-M+1}}\right)\right\}.$$

С помощью указанных выше лемм доказана

Теорема 2.11. *Число узлов формулы (3), обладающей d–свойством, удовлетворяет неравенству:* $N\geqslant 2^d-|L|$.

Установлено, что из теоремы 2.11 следует

Теорема 2.12. *Если формула (3) обладает d–свойством, то для числа ее узлов справедливо неравенство:* $N\geqslant 2^d-\lambda(d)$, *где*

$$\lambda(d)=\begin{cases}2^{\frac{d}{2}+1}-2 & \textit{при } d=2k,\\ 3\times 2^{\frac{d-1}{2}}-2 & \textit{при } d=2k+1,\end{cases}\tag{8}$$

$k=2,3,\ldots$

В **подразделе 2.4.3** приведены примеры минимальных кубатурных формул, обладающих d–свойством Хаара для $d=5,6,7$ (примеры 2.10 — 2.12), и пример кубатурной формулы, точной для всех полиномов Хаара степеней, не превосходящих 4, число узлов которой на 1 больше нижней границы, фигурирующей в оценке из теоремы 2.12 (пример 2.9).

В **подразделе 2.4.4** доказана

Лемма 2.17. *Пусть кубатурная формула (2) удовлетворяет следующим условиям:*

1) число узлов этой формулы $N(d) = 2^d - \lambda(d)$,

2) числа $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_1^{(\lambda(d))}, x_2^{(\lambda(d))}$ *кратны* 2^{-d} *и отличны от 0 и 1, а* $x_1^{(\lambda(d)+1)}, x_2^{(\lambda(d)+1)}, x_1^{(\lambda(d)+2)}, x_2^{(\lambda(d)+2)}, \ldots, x_1^{(2^d-\lambda(d))}, x_2^{(2^d-\lambda(d))}$ *кратны* 2^{-d-1}, *но не кратны* 2^{-d}, *коэффициенты формулы* $C_1 = C_2 = \ldots =$ $= C_{\lambda(d)} = 2^{-d+1}$, $C_{\lambda(d)+1} = C_{\lambda(d)+2} = \ldots = C_{2^d-\lambda(d)} = 2^{-d}$,

3) носитель каждого к–монома степени d *содержит ровно один узел формулы,*

4) для любого к–монома K_d *степени* d, *такого, что* $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in \operatorname{supp}\{K_d\}$,

$$K_d(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = \begin{cases} 2^d & \textit{при} \;\; i = 1, \ldots, \lambda(d), \\ 2^{d-1} & \textit{при} \;\; i = \lambda(d)+1, \ldots, 2^d - \lambda(d), \end{cases}$$

5) $x_1^{(2^d-\lambda(d))} = x_2^{(2^d-\lambda(d)-1)} = 1 - 2^{-d-1}$,

где $\operatorname{supp}\{K_d\}$ *— носитель функции* K_d, *а параметр* $\lambda(d)$ *определяется формулой (8).*

Указанная формула является минимальной кубатурной формулой, обладающей d*–свойством.*

Установлена справедливость следующей теоремы, в которой приведены рекуррентные соотношения для нахождения координат узлов минимальной кубатурной формулы, обладающей $(d+2)$–свойством Хаара, с помощью минимальной кубатурной формулы, обладающей d–свойством $(d > 7)$.

Теорема 2.13. *Если* $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ *— узлы кубатурной формулы (2), удовлетворяющей условиям 1) — 5) леммы 2.17 (* $i = 1, 2, \ldots, 2^d - \lambda(d)$ *), то кубатурная формула*

$$\begin{gathered} \int_0^1\!\!\int_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \approx \sum_{i=1}^{2^d-\lambda(d)} \Big(C_{i,1} f(x_1^{(i,1)}, x_2^{(i,1)}) + \\ + C_{i,3} f(x_1^{(i,3)}, x_2^{(i,3)}) \Big) + \sum_{i=1}^{\lambda(d)} \Big(C_{i,-2} f(x_1^{(i,-2)}, x_2^{(i,-2)}) + \\ + C_{i,-4} f(x_1^{(i,-4)}, x_2^{(i,-4)}) \Big) + \sum_{i=1}^{2^d-\lambda(d)-2} \Big(C_{i,2} f(x_1^{(i,2)}, x_2^{(i,2)}) + \\ + C_{i,4} f(x_1^{(i,4)}, x_2^{(i,4)}) \Big) + C_{2^d-\lambda(d)-1,2} f(x_1^{(2^d-\lambda(d)-1,2)}, x_2^{(2^d-\lambda(d)-1,2)}) + \\ + C_{2^d-\lambda(d),2} f(x_1^{(2^d-\lambda(d),4)}, x_2^{(2^d-\lambda(d),4)}) \end{gathered} \tag{9}$$

с узлами

$$\begin{array}{l}(x_1^{(i,1)},x_2^{(i,1)})=(\frac{1}{2}x_1^{(i)},\frac{1}{2}x_2^{(i)}),\ i=1,\ldots,\lambda(d),\\ (x_1^{(i,1)},x_2^{(i,1)})=(\frac{1}{2}x_1^{(i)}+\frac{1}{2^{d+3}},\frac{1}{2}x_2^{(i)}+\frac{1}{2^{d+3}}),\\ i=\lambda(d)+1,\ldots,2^d-\lambda(d)-2,\\ (x_1^{(2^d-\lambda(d)-1,1)},x_2^{(2^d-\lambda(d)-1,1)})=(\frac{1}{2}x_1^{(2^d-\lambda(d)-1)},\frac{1}{2}),\\ (x_1^{(2^d-\lambda(d),1)},x_2^{(2^d-\lambda(d),1)})=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}x_2^{(2^d-\lambda(d))}),\end{array}\tag{10}$$

$$\begin{array}{l}(x_1^{(i,\pm2)},x_2^{(i,\pm2)})=(1-\frac{1}{2}x_1^{(i)}\pm\frac{3}{2^{d+3}},\frac{1}{2}x_2^{(i)}\pm\frac{3}{2^{d+3}}),\ i=1,\ldots,\lambda(d),\\ (x_1^{(i,2)},x_2^{(i,2)})=(1-\frac{1}{2}x_1^{(i)}-\frac{1}{2^{d+3}},\frac{1}{2}x_2^{(i)}-\frac{1}{2^{d+3}}),\\ i=\lambda(d)+1,\ldots,2^d-\lambda(d)-1,\end{array}\tag{11}$$

$$\begin{array}{l}(x_1^{(i,3)},x_2^{(i,3)})=(1-\frac{1}{2}x_1^{(i)},1-\frac{1}{2}x_2^{(i)}),\ i=1,\ldots,\lambda(d),\\ (x_1^{(i,3)},x_2^{(i,3)})=(1-\frac{1}{2}x_1^{(i)}+\frac{1}{2^{d+3}},1-\frac{1}{2}x_2^{(i)}+\frac{1}{2^{d+3}}),\\ i=\lambda(d)+1,\ldots,2^d-\lambda(d)\end{array}\tag{12}$$

$$\begin{array}{l}(x_1^{(i,\pm4)},x_2^{(i,\pm4)})=(\frac{1}{2}x_1^{(i)}\pm\frac{3}{2^{d+3}},1-\frac{1}{2}x_2^{(i)}\pm\frac{3}{2^{d+3}}),\ i=1,\ldots,\lambda(d),\\ (x_1^{(i,4)},x_2^{(i,4)})=(\frac{1}{2}x_1^{(i)}-\frac{1}{2^{d+3}},1-\frac{1}{2}x_2^{(i)}-\frac{1}{2^{d+3}}),\\ i=\lambda(d)+1,\ldots,2^d-\lambda(d)-2,\ i=2^d-\lambda(d)\end{array}\tag{13}$$

и коэффициентами при узлах

$$\begin{array}{l}C_{2^d-\lambda(d)-1,1}=C_{2^d-\lambda(d),1}=C_{i,1}=C_{i,3}=2^{-d-1},\ i=1,\ldots,\lambda(d),\\ C_{i,1}=2^{-d-2},\ i=\lambda(d)+1,\lambda(d)+2,\ldots,2^d-\lambda(d)-2,\\ C_{i,-2}=C_{i,-4}=2^{-d-2},\ i=1,2,\ldots,\lambda(d),\\ C_{i,2}=2^{-d-2},\ i=1,2,\ldots,2^d-\lambda(d)-1,\\ C_{i,3}=2^{-d-2},\ i=\lambda(d)+1,\lambda(d)+2,\ldots,2^d-\lambda(d),\\ C_{i,4}=2^{-d-2},\ i=1,2,\ldots,2^d-\lambda(d)-2,\ i=2^d-\lambda(d),\end{array}$$

является минимальной формулой, обладающей $(d+2)$*–свойством.*

В **подразделе 2.4.5** разработан алгоритм, позволяющий строить минимальные кубатурные формулы, обладающие d–свойством Хаара при $d=n$, где $n\geqslant 8$ — фиксированное целое число. Используется следующее представление числа n:

$$n=d_0+2m,\quad m\in\mathbb{N},\quad d_0=\begin{cases}6 & \text{при четном } d,\\ 7 & \text{при нечетном } d,\end{cases}$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Для кубатурных формул, обладающих d–свойством при $d\geqslant d_0$, рассматриваются следующие условия:

(a) число узлов $N(d)=2^d-\lambda(d)$*, где* $\lambda(d)$ *определяется согласно (8),*

(б) каждый замкнутый двоичный прямоугольник $\overline{l_{m+1,j}} \times \overline{l_{n+1,i}}$ *площади* 2^{-d} $(m+n=d,\ j=1,\dots,2^m,\ i=1,\dots,2^n)$ *содержит ровно один узел формулы, причем этот узел отличен от вершин прямоугольника — точек* $(\frac{j-1}{2^m}, \frac{i-1}{2^n})$, $(\frac{j}{2^m}, \frac{i-1}{2^n})$, $(\frac{j-1}{2^m}, \frac{i}{2^n})$, $(\frac{j}{2^m}, \frac{i}{2^n})$,

(в) обе координаты $\lambda(d)$ *узлов кратны* 2^{-d} *и отличны от 0 и 1, коэффициенты формулы при этих узлах равны* 2^{-d+1}, *а обе координаты каждого из остальных* $N(d)-\lambda(d)$ *узлов кратны* 2^{-d-1}, *но не кратны* 2^{-d}, *и коэффициенты при них равны* 2^{-d},

(г) существует узел, абсцисса которого равна $1-2^{-d-1}$, *и узел, ордината которого равна* $1-2^{-d-1}$, *причем эти узлы различны,*

(д) существует узел, абсцисса которого равна 2^{-d-1}, *и узел, ордината которого равна* 2^{-d-1}, *причем эти узлы различны.*

Для определенности считается, что в случае кубатурной формулы (3)

$$x_1^{(N(d)-3)} = 2^{-d-1},\ x_2^{(N(d)-2)} = 2^{-d-1}.$$

Отмечено, что условия (а) — (г) выполняются для любой кубатурной формулы, удовлетворяющей условиям 1) — 5) леммы 2.17. Условию (д), а также условиям (а) — (г) удовлетворяют кубатурные формулы, приведенные в примерах 2.11, 2.12.

В данном подразделе на основе рекуррентных соотношений (10) – (13) разработан алгоритм, позволяющий строить минимальные кубатурные формулы, обладающие d–свойством Хаара для любого наперед заданного четного (нечетного) числа d, исходя из минимальных кубатурных формул, обладающих d_0–свойством Хаара для $d_0 = 6$ $(d_0 = 7)$ и удовлетворяющих условиям (а) — (д), в которых полагается $d = d_0$.

Отмечено, что кубатурные формулы, рассмотренные в примерах 2.6 — 2.12 и лемме 2.17, имеют существенно меньше узлов, чем Π_0–сетки кубатурных формул, обладающих d–свойством, которые были построены И. М. Соболем.

В **разделе 2.5** рассмотрены методы двумерного дискретного преобразования Хаара.

В **подразделе 2.5.1** приведен классический метод дискретного преобразования Хаара.

В **подразделе 2.5.2** предложен вариант дискретного преобразования Хаара, основанный на Π_0–сетках с 2^d узлами, которые являются сетками кубатурных формул, обладающих d–свойством Хаара; проведено сравнение этого варианта с классическим методом.

Глава 3 посвящена оценкам погрешности формул приближенного интегрирования, точных для полиномов Хаара.

В **разделе 3.1** эти оценки получены в одномерном случае.

В **подразделе 3.1.1** рассматриваются квадратурные формулы (2) с весовой функцией $g(x) \equiv 1$, т. е. формулы вида

$$I[f] = \int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x^{(i)}) = Q[f], \tag{14}$$

где $f(x)$ — функция, определенная и суммируемая на $[0,1]$, $x^{(i)} \in [0,1]$ — узлы формулы, C_i — коэффициенты формулы при узлах (вещественные числа), $i = 1, 2, \ldots, N$.

Функционал погрешности квадратурной формулы (14) обозначается через $\delta_N[f]$:

$$\delta_N[f] = I[f] - Q[f] = \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{N} C_i f(x^{(i)}).$$

Доказаны вспомогательные утверждения (леммы 3.1 — 3.6 и теорема 3.1), из которых следует

Теорема 3.2. *Для нормы функционала погрешности квадратурной формулы (14), точной на константах, имеет место следующая нижняя оценка:*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \geqslant 2^{-\frac{1}{p}} N^{-\frac{1}{p}}.$$

Если квадратурная формула (14) обладает d–свойством, то

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant \left(2^d\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Здесь $p > 1$ — фиксированное действительное число.

Показано, что минимальная квадратурная формула (14), обладающая d–свойством, является наилучшей формулой на пространствах S_p — норма ее функционала погрешности на указанных пространствах удовлетворяет равенству

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} = 2^{-\frac{1}{p}} N^{-\frac{1}{p}}.$$

Эта квадратурная формула есть минимальная формула (2) с весовой функцией $g(x) \equiv 1$, рассмотренная в примере 2.1. Такая формула единственна; число ее узлов $N = 2^{d-1}$, узлы этой формулы определяются равенствами $x^{(i)} = \frac{2i-1}{2^d}$, коэффициенты C_i при узлах равны 2^{-d+1}, $i = 1, 2, \ldots, 2^{d-1}$.

В **подразделе 3.1.2** с помощью лемм 3.7 — 3.10 доказана

Теорема 3.3. *Для нормы функционала погрешности квадратурной формулы (14), обладающей d–свойством, имеет место следующая оценка:*

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} \leqslant \frac{2^{-\alpha d-1}}{2^\alpha - 1}.$$

Здесь $\alpha \in (0,1]$ — фиксированное действительное число.

Отмечено, что для нормы функционала погрешности рассмотренных И. М. Соболем кубатурных формул с 2^d узлами, образующими Π_τ–сетки $(0 \leqslant \tau < d)$, на пространствах H_α имеет место соотношение

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} = O(N^{-\alpha}) \text{ при } N \to \infty.$$

В случае минимальной квадратурной формулы (14), обладающей d–свойством, выполняется такое же асимптотическое равенство. В то же время указанная формула, будучи минимальной формулой приближенного интегрирования, обеспечивает наилучшую поточечную сходимость $\delta_N[f]$ к нулю при $N \to \infty$.

В **подразделе 3.1.3** рассматриваются весовые квадратурные формулы (2), коэффициенты при узлах этих формул считаются положительными:

$$C_i > 0, \ i = 1, 2, \ldots, N. \tag{15}$$

Выражение для функционала погрешности таких формул принимает следующий вид:

$$\delta_N[f] = \sum_{i=1}^{N} C_i f(x^{(i)}) - \int\limits_0^1 g(x) f(x)\, dx.$$

Вводятся следующие обозначения:

$$G = \int\limits_0^1 g(x)\, dx, \tag{16}$$

$$G_0 = \int\limits_0^1 |g(x)|\, dx. \tag{17}$$

Фиксируется действительное число $p > 1$, через q обозначается сопряженное ему значение:

$$p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Доказаны вспомогательные утверждения (леммы 3.11 — 3.13), на основании которых установлена справедливость следующих теорем.

Теорема 3.4. *Если $g \in L_1[0,1]$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы (2), удовлетворяющей условию (15) и точной на константах, имеет место нижняя оценка*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \geqslant 2^{-\frac{1}{p}} G N^{-\frac{1}{p}},$$

где константа G определяется согласно (16).

Теорема 3.5. *Если $g \in L_\infty[0,1]$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы (2), удовлетворяющей условию (15) и обладающей d–свойством, имеет место оценка*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant 2\left(2^{-d}\right)^{\frac{1}{p}} G_0{}^{\frac{1}{q}} \|g\|^{\frac{1}{p}}_{L_\infty[0,1]},$$

где константа G_0 определяется согласно (17).

Теорема 3.6. *Если $g \in L_q[0,1]$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы (2), удовлетворяющей условию (15) и обладающей d–свойством, имеет место следующая оценка:*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant 2\left(2^{-d}\right)^{\frac{1}{p}} \|g\|^{\frac{1}{q}}_{L_q[0,1]}.$$

Теорема 3.7. *Если $g \in L_\infty[0,1]$ и $g(x) > 0$ почти всюду на $[0,1]$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы (2) с $N = 2^d$ узлами, удовлетворяющими условиям*

$$x^{(i)} \in l_{d+1,i},$$

и коэффициентами при узлах, определяющимися равенствами

$$C_i = \int\limits_{l_{d+1,i}} g(x)\, dx,$$

$i = 1, 2, \ldots, 2^d$, имеет место неравенство

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant \|g\|^{\frac{1}{p}}_{L_\infty[0,1]} (2G)^{\frac{1}{q}} N^{-\frac{1}{p}},$$

где константа G определяется согласно (16).

Отмечено, что для квадратурных формул, рассматриваемых в подразделе 3.1.3, и для формул, исследованных И. М. Соболем, величина $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ имеет один и тот же порядок — $N^{-\frac{1}{p}}$.

В **разделе 3.2** найдены оценки нормы функционала погрешности кубатурных формул (3), обладающих d–свойством Хаара в двумерном случае. Указанные формулы для удобства записываются в следующем виде:

$$I[f] = \int\limits_0^1\!\!\int\limits_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = Q[f], \tag{18}$$

$C_i \in \mathbb{R}$, $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in [0,1]^2$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Погрешность кубатурной формулы (18) обозначается через $\delta_N[f]$:

$$\delta_N[f] = I[f] - Q[f] = \int\limits_0^1\!\!\int\limits_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 - \sum_{i=1}^{N} C_i f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}).$$

В **подразделе 3.2.1** коэффициенты при узлах кубатурной формулы (18) считаются положительными:

$$C_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, N.$$

Установлена справедливость вспомогательных утверждений (лемм 3.14 — 3.21 и теоремы 3.8), из которых вытекает

Теорема 3.9. *Для нормы функционала погрешности кубатурной формулы (18), точной на константах, имеет место следующая нижняя оценка:*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \geqslant 2^{-\frac{1}{p}} N^{-\frac{1}{p}}.$$

Если кубатурная формула (18) обладает d–свойством, то

$$|\delta_N[f]| \leqslant 2^{\frac{1}{p}} \left(2^d\right)^{-\frac{1}{p}} ||f||_{S_p},\ f \in S_p,$$

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant 2^{\frac{1}{p}} (2^d)^{-\frac{1}{p}}.$$

Здесь $p > 1$ — фиксированное действительное число.

Доказаны вспомогательные утверждения (леммы 3.22, 3.23 и теорема 3.10), на основании которых получена

Теорема 3.11. *Если кубатурная формула (18), число узлов которой $N \sim 2^d$ при $d \to \infty$, обладает d–свойством, то норма ее функционала погрешности*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \sim 2^{\frac{1}{p}} N^{-\frac{1}{p}} \text{ при } N \to \infty.$$

Показано, что в случае $N \sim 2^d$ при $d \to \infty$ исследованные в диссертации кубатурные формулы имеют наилучший порядок сходимости δ_N по норме, равный $N^{-\frac{1}{p}}$. В частности, указанным свойством обладают формулы, рассмотренные в подразделе 2.4.5, в то же время они, будучи минимальными формулами приближенного интегрирования, обеспечивают наилучшую поточечную сходимость $\delta_N[f]$ к нулю при $N \to \infty$.

В **подразделе 3.2.2** с помощью лемм 3.24 — 3.28 доказана

Теорема 3.12. *Для нормы функционала погрешности кубатурной формулы (18), обладающей d–свойством, имеет место следующая оценка:*

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} \leqslant 2^{-\alpha d-2} \left[\frac{d}{2^\alpha - 1} + \frac{2^{\alpha+2} - 3}{(2^\alpha - 1)^2}\right].$$

Здесь $\alpha \in (0, 1]$ — фиксированное действительное число.

Из теоремы 3.12 следует

Теорема 3.13. *Если кубатурная формула (18), число узлов которой $N \sim 2^d$ при $d \to \infty$, обладает d–свойством, то норма ее функционала погрешности удовлетворяет неравенству*

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} \leqslant \Theta_2(N), \text{ где } \Theta_2(N) \sim \frac{N^{-\alpha}\log_2 N}{4(2^\alpha - 1)} \text{ при } N \to \infty.$$

Например, указанному в теореме 3.13 условию $N \sim 2^d$, $d \to \infty$, удовлетворяют минимальные кубатурные формулы, обладающие d–свойством, рассмотренные в подразделе 2.4.5 — число узлов каждой такой формулы $N = 2^d - \lambda(d) \quad (d \geqslant 5)$, где $\lambda(d)$ определяется равенством (8).

Отмечено, что для нормы функционала погрешности рассмотренных И. М. Соболем кубатурных формул с 2^d узлами, образующими Π_τ–сетки $(0 \leqslant \tau < d)$, на пространствах H_α в двумерном случае имеет место соотношение

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} = O\left(N^{-\alpha}\ln N\right), \ N \to \infty.$$

В случае минимальной кубатурной формулы (18), обладающей d–свойством, выполняется такое же асимптотическое равенство. В то же время указанная формула, будучи минимальной формулой приближенного интегрирования, обеспечивает наилучшую поточечную сходимость $\delta_N[f]$ к нулю при $N \to \infty$.

В **заключении** приведены основные научные результаты, изложенные в диссертации.

Основные научные результаты

1. Описаны все минимальные весовые квадратурные формулы, обладающие d–свойством Хаара.

2. В двумерном случае получены нижние оценки числа узлов кубатурных формул, обладающих d–свойством Хаара.

3. В двумерном случае разработан алгоритм построения для любого наперед заданного целого $d \geqslant 8$ минимальных кубатурных формул, обладающих d–свойством Хаара.

4. На пространствах S_p $(p > 1)$ и H_α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ получены оценки погрешности формул приближенного интегрирования, обладающих d–свойством Хаара.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для опубликования материалов докторских диссертаций

[1] *Кириллов К. А.* Нижние оценки числа узлов кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9. С. 62 – 71.

[2] *Кириллов К. А.* Построение минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара высших степеней в двумерном случае // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10. С. 29 – 47.

[3] *Кириллов К. А.* Об оценке погрешности минимальных весовых квадратурных формул, точных для функций Хаара // Вычислительные технологии. Т. 11. 2006. С. 44 – 50.

[4] *Кириллов К. А.* Алгоритм построения минимальных кубатурных формул, обладающих d–свойством Хаара в двумерном случае //

Журнал Сибирского федерального ун–та. Серия "Математика и физика". 2010. Т. 3. № 2. С. 205 – 215.

[5] *Кириллов К. А.* Об оценках погрешности квадратурных формул, точных для полиномов Хаара // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. Раздел 1. С. 330 – 337 (http://num-meth.srcc.msu.ru/).

[6] *Кириллов К. А., Носков М. В.* Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. № 6. С. 791 – 799.

[7] *Кириллов К. А., Носков М. В.* Оценки погрешности на пространствах S_p кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 1. С. 3 – 13.

[8] *Noskov M. V., Kirillov K. A.* Minimal cubature formulas exact for Haar polynomials // Journal of Approximation Theory. Volume 162. Issue 3. March 2010. P. 615 – 627.

Прочие публикации

[9] *Кириллов К. А.* Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара // Кубатурные формулы и их приложения: Материалы VI международного семинара–совещания. Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН. 2001. С. 66 – 72.

[10] *Кириллов К. А.* Минимальные кубатурные формулы, точные для полиномов Хаара в двумерном случае // Теория симметрии и дифференциальные уравнения: Сборник трудов международной научной конференции "Теория симметрии и дифференциальные уравнения". Красноярск: ИВМ СО РАН, КГУ. 2002. С. 130 – 133.

[11] *Кириллов К. А.* Минимальные кубатурные формулы, точные для полиномов Хаара в $\mathbb{R}^2$ // Вопросы математического анализа. Красноярск: Изд–во Краснояр. гос. техн. ун–та. 2003. Вып. 6. С. 108 – 117.

[12] *Кириллов К. А.* Минимальные кубатурные формулы, точные для полиномов Хаара в двумерном случае // Рукопись деп. в ВИНИТИ 06.02.2003, № 231 В2003. 23 с.

[13] *Кириллов К. А.* О минимальных кубатурных формулах, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Кубатурные формулы и их приложения: Материалы VII международного семинара–совещания. Красноярск: КГТУ, 2003. С. 66 – 72.

[14] *Кириллов К. А.* Построение минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Кубатурные формулы и их приложения: Материалы VIII международного семинара–совещания. Улан–Удэ: Изд–во ВСТГУ, 2005. С. 55 – 59.

[15] *Кириллов К. А.* Оценка погрешности минимальных квадратурных формул с весовой функцией, точных для полиномов Хаара // Математические методы и моделирование: Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 42. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2006. С. 45 – 50.

[16] *Кириллов К. А.* Об оценках погрешности минимальных формул приближенного интегрирования, точных для конечных сумм Хаара // Теория функций, дифференциальные уравнения, вычислительная математика: Сборник материалов Уфимской международной математической конференции, посвященной памяти А. Ф. Леонтьева. Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2007. С. 19 – 22.

[17] *Кириллов К. А.* Верхняя оценка погрешности минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Труды IX международного семинара–совещания "Кубатурные формулы и их приложения". Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2008. С. 62 – 70.

[18] *Кириллов К. А.* Об оценках погрешности кубатурных формул, точных для полиномов Хаара // Кубатурные формулы, методы Монте–Карло и их приложения: Материалы международной конференции. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011 г. С. 63 – 67.