На правах рукописи

Кацунова Анастасия Сергеевна

Главные значения некоторых многомерных сингулярных интегралов

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск 2011

Работа выполнена в Институте космических и информационных технологий Сибирского федерального университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Александр Мечиславович Кытманов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, доцент Александр Анатольевич Шлапунов кандидат физико-математических наук, доцент Вячеслав Павлович Кривоколеско
Ведущая организация:	Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск

Защита состоится 23 декабря 2011 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 при Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79/10.

Автореферат разослан «___» ноября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Н.А. Бушуева

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одним из мощных конструктивных методов в теории голоморфных функций является метод интегральных представлений. Интегральное представление выражает значения любой функции, голоморфной в области, через ее значения на границе или на части границы области. Интегральная формула[1,2], предложенная Коши в 1831 г., играет основополагающую роль в теории голоморфных функций одного комплексного переменного. Интегральная формула Коши справедлива для функций, голоморфных внутри области и непрерывных в замыкании области.

Если требовать лишь непрерывность функции на границе области, то говорят об интеграле типа Коши[2]. Для точек, лежащих на границе, интеграл Коши становится особым (сингулярным) и расходящимся в обычном смысле. Дальнейшее рассмотрение граничных значений такого интеграла привело к понятию главного значения по Коши (v.p.) особого интеграла и к нахождению формул, предложенных Сохоцким[3] и Племелем[4], которые нашли применения в механике.

Интегралы типа Коши лежат в основе построения теории краевых задач голоморфных функций комплексного переменного, которая имеет многочисленные приложения в задачах математической физики[5]. Особую роль в теории краевых задач играет формула перестановки повторного сингулярного интеграла, предложенная Пуанкаре[6] и Бертраном[7] для интеграла Коши, с ее помощью можно получить формулу композиции[8] (формулу обращения) для особого интеграла Коши.

Теория функций многих комплексных переменных, которая явилась естественным развитием теории функций одного комплексного переменно-

---

[1]Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.

[2]Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М.: Наука, 1985.

[3]Сохоцкий Ю.В. Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды. Санкт-Петербург, 1873.

[4]Plemelj J. Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe // Monatsh. Math. Phys. 1908. B. 19. P. 205-210.

[5]Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

[6]Poincaré H. Lecons de mécanique céleste. T. 3. Paris, 1910.

[7]Bertrand G. La théorie des marées et les équations intégrales // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1923. T. 40. P. 151-258.

[8]Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

го, представляет значительный интерес благодаря эффективным применениям методов этой теории в различных областях естествознания.

В n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ простейшим примером интегрального представления является кратная формула Коши[9], справедливая для поликруговых областей. Многомерная формула Коши выражает значения голоморфной функции через ее значения на части границы, называемой остовом. Ядро в формуле Коши не зависит от конкретного вида области, что делает интегральное представление универсальным. Но формула Коши обладает рядом недостатков, которые ограничивают ее применение, поскольку справедлива лишь для узкого класса областей.

Существует ряд других интегральных представлений, обобщающих интегральную формулу Коши для комплексной плоскости и справедливых для классов ограниченных областей с гладкими границами, причем интегрирование в них ведется по всей границе. Примерами могут служить интегральные представления Бохнера–Мартинелли, Коши–Фантаппье, Хенкина–Рамиреза.

Интегральное представление, полученное в работах Бохнера[10] и Мартинелли[11,12], считают первым многомерным представлением, в котором интегрирование велось по всей границе области. Интегральное представление Бохнера–Мартинелли на комплексной плоскости совпадает с интегральной формулой Коши. Интегральное представление Коши–Фантаппье, найденное Лере[13], можно также получить из интегрального представления Бохнера–Мартинелли. Предложенное в работе Хенкина[14] интегральное представление является одной из реализаций формулы Коши–Фантаппье (см. также обзор[15]).

[9] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1985.

[10] Bochner S. Analitic and meromorphic continuation by means of Green's formula // Ann. Math. 1943. V. 44. P. 652-673.

[11] Martinelli E. Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di piú variabili complesse // Mem. R. Accad. Ital. 1938. V. 9. P. 269-283.

[12] Martinelli E. Sopra una dimonstrazione de R. Fueter per un theorema di Hartogs // Comment. Math. Helv. 1943. V.15. P. 340-349.

[13] Leray J. Fonction de variables complexes: sa représentation comme somme de puissances négatives de fonctions linéaires // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1956. T. 20. № 5. P. 589-590.

[14] Хенкин Г. М. Интегральное представление функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых областях и некоторые приложения. Матем. сб. 1969. Т. 78(120). №4. С. 611–632.

[15] Хенкин Г. М. Метод интегральных представлений в комплексном анализе. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.7. М.: ВИНИТИ, 1985. С.

Как и в случае интегральной формулы Коши для функций одного комплексного переменного, интегралы в предложенных выше многомерных формулах становятся сингулярными на границе области, что требует рассмотрения их главного значения. В работах Альта[16], Керзмана и Стейна[17] для интеграла (типа) Хенкина–Рамиреза было рассмотрено главное значение v.p.h. Оно отличалось от обычного главного значения v.p. тем, что из границы области выбрасывался не шар, а „эллипсоид“, вытянутый вдоль комплексных касательных направлений. Ими было показано, что для функций, удовлетворяющих условию Гельдера, главное значение v.p.h. существует и справедлива формула, аналогичная формуле Сохоцкого–Племеля для интеграла (типа) Коши на комплексной плоскости. Кытманов и Мысливец[18] показали, что главное значение v.p. для интеграла Хенкина–Рамиреза отлично от главного значения v.p.h., тем самым заметили, что формула Сохоцкого–Племеля будет иметь другой вид. В той же работе было найдено главное значение v.p.h. для интеграла (типа) Бохнера–Мартинелли, а главное значение v.p. и аналог формулы Сохоцкого–Племеля для этого интеграла можно найти в монографии Кытманова[19]. В работе Кытманова, Пренова и Тарханова[20] для интеграла Бохнера–Мартинелли были рассмотрены формула перестановки повторного особого интеграла и формула композиции.

Несмотря на эти работы, вопрос о нахождении и сравнении главных значений v.p. и v.p.h. различных сингулярных интегралов оставался до конца не исследованным. Формулы перестановки особых интегралов и формулы композиции, полученные с их помощью, могут быть применены в теории сингулярных интегральных операторов. Но (в отличие от комплексной плоскости[5, 8]) для функций многих комплексных переменных эта теория еще не развита, поскольку для интегральных представлений не найдены удобные формулы композиции.

23-124.

[16]Alt W. Singuläre integrale mit gemischten homogenitäten auf mannigfaltigkeiten und anwendungen in der funktionentheorie // Math. Zeit. 1974. B. 137. №3. S. 227-256.

[17]Kerzman N., Stein E.M. The Szegö kernel in terms of Cauchy–Fantappié kernels // Duke Math. J. 1978. V. 45. №3. P. 197-224.

[18]Кытманов А.М., Мысливец С.Г. О главном значении по Коши особого интеграла Хенкина–Рамиреза в строго псевдовыпуклых областях пространства $\mathbb{C}^n$ // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46. №3. С. 625-633.

[19]Кытманов А. М. Интеграл Бохнера–Мартинелли и его приложения. Новосибирск: Наука, 1992.

[20]Кытманов А.М., Пренов Б.Б., Тарханов Н.Н. Формула Пуанкаре–Бертрана для интеграла Мартинелли–Бохнера // Изв. вузов. Матем. 1992. №11. С. 29-34.

Цель диссертации. Целью диссертационной работы является изучение главных значений особых интегралов Бохнера–Мартинелли и Коши–Сеге, их применение к рассмотрению граничных значений голоморфных функций, нахождению аналогов формулы перестановки повторных особых интегралов, получению формул композиции.

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа и многомерной теории функций, а также общие методы функционального анализа.

Научная новизна. Основные результаты диссертационной работы являются новыми.

Основные результаты

1. Найдено главное значение в смысле Керзмана–Стейна интеграла Бохнера–Мартинелли. Получен аналог формулы Сохоцкого–Племеля.

2. Получен аналог формулы Пуанкаре–Бертрана для интеграла Бохнера–Мартинелли в случае рассмотрения главного значения в смысле Керзмана–Стейна.

3. Получены аналоги формулы Пуанкаре–Бертрана и формулы обращения для интеграла Коши–Сеге в случае рассмотрения главного значения по Коши и в смысле Керзмана–Стейна.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты носят теоретический характер и могут быть применены в многомерном комплексном анализе при решении сингулярных интегральных уравнений.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях: международной научной конференции „Студент и научно-техничекий прогресс“ (Новосибирск, 2006, 2010); Всероссийской научно-технической конференции „Молодежь и наука: начало XXI века“ (Красноярск, 2006); Российской конференции „Математика в современном мире“ (Новосибирск, 2007); Международной конференции „Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений“ (Новосибирск, 2008); международной конференции „Аналитические функции многих комплексных переменных“ (Красноярск, 2009); молодежных научных школах-конференциях „Лобачевские чтения“ (Казань, 2009, 2010); VI Всесибирском конгрессе женщин-математиков (Красноярск, 2010); международной школе-конференции по геометрии и анализу (Кемерово, 2011).

Результаты работы докладывались на Красноярском городском семинаре по многомерному комплексному анализу (СФУ, 2007–2011).

Публикации. Основные результаты опубликованы в 3 статьях, две из которых в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в Перечень ВАК, и 9 тезисах. Все работы выполнены без соавторства.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав основного текста и заключения. Список литературы содержит 49 наименований. Работа изложена на 101 страницах.

Содержание работы

Во **введении** раскрывается актуальность темы диссертационного исследования, формулируются основные результаты, а также дается краткое изложение содержания диссертации.

Первая глава посвящена обзору известных ранее результатов и состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе вводятся основные обозначения, приводятся определение строго псевдовыпуклой области и некоторые свойства таких областей. А именно, существование барьерной функции и биголоморфного отображения, переводящего (локально) строго плюрисубгармоническую функцию, определяющую область, в строго выпуклую функцию.

Нам понадобятся следующие обозначения. Если $z, w \in \mathbb{C}^n$, то $\langle z, w\rangle = z_1w_1 + \ldots + z_nw_n$. Тогда $|z| = \sqrt{\langle \overline{z}, z\rangle}$, где $\overline{z} = (\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$.

Пусть D — строго псевдовыпуклая ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с границей ∂D класса $\mathcal{C}^2$, т.е.

$$D = \{z \in \Omega_1 : \ \varrho(z) < 0\},$$

где $\varrho(z)$ — вещественнозначная строго плюрисубгармоническая функция класса $\mathcal{C}^2$ в некоторой окрестности $\Omega_1 \supset \overline{D}$ и такая, что $d\varrho \neq 0$ на ∂D. Для строго псевдовыпуклой области справедлива теорема о существовании барьерной функции $\Phi(\zeta, z)$ в некоторой окрестности $\Omega(\overline{D})$ (см. работы[15,21]) и

$$\Phi(\zeta, z) = \langle P(\zeta, z), \zeta - z\rangle\,,$$

[21] Айзенберг Л.А., Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.

где $P=(P_1,\dots,P_n)$ — гладкая вектор-функция переменных $(\zeta,z)\in\Omega(\overline{D})\times\Omega(\overline{D})$, голоморфная по $z\in\Omega(\overline{D})$ при фиксированном $\zeta\in\Omega(\overline{D})$.

Будем считать, что функция f принадлежит классу $\mathcal{C}^{\alpha}_{\mathcal{KS}}(\partial D)$ (т.е. $f\in\mathcal{C}^{\alpha}_{\mathcal{KS}}(\partial D)$), $0<\alpha\leqslant 1$, если для точек $\zeta,z\in\partial D$ выполняется неравенство

$$|f(\zeta)-f(z)|\leqslant C_4\,|\Phi(\zeta,z)|^{\alpha}.$$

Во втором параграфе рассмотрены интеграл Хенкина–Рамиреза и его главные значения по Коши и в смысле Керзмана–Стейна. Эти главные значения различны для единичной функции. Приведены аналоги формул Сохоцкого–Племеля.

Третий параграф посвящен интегралу Бохнера–Мартинелли. Рассмотрено главное значение по Коши для этого интеграла. Приведена связь ядер Коппельмана с ядром Бохнера–Мартинелли. Кроме этого, рассмотрен аналог формулы перестановки Пуанкаре–Бертрана для интеграла Бохнера–Мартинелли и, как следствие, формула композиции.

В четвертом параграфе рассмотрен интеграл Коши–Сеге, который является частным случаем интеграла Хенкина–Рамиреза. Поэтому, для интеграла Коши–Сеге верны результаты второго параграфа.

Вторая глава посвящена исследованию интеграла Бохнера–Мартинелли и состоит из четырех параграфов. Все результаты данной главы справедливы для строго псевдовыпуклой области D.

Обозначим $U(\zeta,z)$ — ядро интеграла Бохнера–Мартинелли, т.е.

$$U(\zeta,z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\overline{\zeta}_k-\overline{z}_k)\;d\overline{\zeta}[k]\wedge d\zeta}{|\zeta-z|^{2n}},$$

где $d\zeta=d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n$, $d\overline{\zeta}[k]=d\overline{\zeta}_1\wedge\ldots\wedge d\overline{\zeta}_{k-1}\wedge d\overline{\zeta}_{k+1}\wedge\ldots\wedge d\overline{\zeta}_n$.

В этой главе для точек $z\in\partial D$ рассматривается главное значение данного интеграла в смысле Керзмана–Стейна:

$$\text{v.p.h.}\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\;U(\zeta,z)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial D\setminus E_z(\varepsilon)} f(\zeta)\;U(\zeta,z),$$

где $E_z(\varepsilon)=\{\zeta\in\partial D:\ |\Phi(\zeta,z)|<\varepsilon\}$.

Первый параграф посвящен изучению главного значения в смысле Керзмана–Стейна особого интеграла Бохнера–Мартинелли.

Теорема 2.1.1. *При $n > 1$ справедлива формула*

$$\text{v.p.h.} \int\limits_{\partial D} U(\zeta, z) = \frac{1}{2}, \quad z \in \partial D.$$

При доказательстве теоремы 2.1.1 используется лемма о биголоморфном отображении (см. работу[21]).

Для интегрируемой функции f (т.е. $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$) рассмотрим интеграл Бохнера–Мартинелли

$$F(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\, U(\zeta, z), \quad z \notin \partial D. \tag{1.3.2}$$

Обозначим через F^+ интеграл (1.3.2) для точек $z \in D$, а через F^- — интеграл (1.3.2) для точек $z \notin \overline{D}$. Из теоремы 2.1.1 получается

Следствие 2.1.1. *Пусть $n > 1$. Если $f \in \mathcal{C}^{\alpha}_{\mathcal{KS}}(\partial D)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то интеграл Бохнера–Мартинелли F^+ непрерывно продолжается на $\overline{D}$ и $F^+ \in \mathcal{C}^{\beta}_{\mathcal{KS}}(\overline{D})$ для $\beta = \frac{\alpha}{2}$, а интеграл F^- непрерывно продолжается на $\mathbb{C}^n \backslash D$ и $F^- \in \mathcal{C}^{\beta}_{\mathcal{KS}}(\mathbb{C}^n \backslash D)$. Кроме того, справедливы формулы*

$$F^+(z) = \frac{f(z)}{2} + \text{v.p.h.} \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\, U(\zeta, z),$$

$$F^-(z) = -\frac{f(z)}{2} + \text{v.p.h.} \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\, U(\zeta, z), \quad z \in \partial D.$$

Второй параграф содержит вспомогательные результаты, необходимые в следующих параграфах данной главы.

Лемма 2.2.4. *Для точек $z \in \partial D$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} \int\limits_{\partial D_w} U(w, z)\, U(\zeta, w) = 0.$$

Справедливы также следующие оценки, которые необходимы во второй и третьей главах.

Лемма 2.2.5. *Пусть D — строго псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$ и*

$$H(z, w) = \text{v.p.h.} \int\limits_{\partial D} \frac{d\sigma(\zeta)}{|\zeta - w|^{\nu}\; |\zeta - z|^{2n-1-\alpha}},$$

$w, z \in \partial D,\ 0 < \nu < 2n-1,\ \alpha > 0,$ *тогда*

$$\begin{array}{lll} H(z,w) \leqslant C_1, & \text{если} & 0 < \nu < \alpha, \\ H(z,w) \leqslant C_2 |\ln|z-w|| + C_3, & \text{если} & \nu = \alpha, \\ H(z,w) \leqslant C_4 |z-w|^{\alpha-\nu}, & \text{если} & 2n-1 > \nu > \alpha. \end{array}$$

Лемма 2.2.6. *Для функции* $\Psi(z,w)$, *определенной формулой*

$$\Psi(z,w) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\ |\zeta - w|^{-\nu}\ U(\zeta, z),$$

где $w,\ z \in \partial D,\ f \in \mathcal{C}^{\alpha}_{\mathcal{KS}}(\partial D),\ 0 < \alpha \leqslant 1,$ *и* $0 < \nu < 2n-1,$ *справедлива оценка*

$$|\Psi(z,w)| \leqslant C\ |z-w|^{-\nu-\varepsilon}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

В третьем параграфе доказана формула перестановки повторного особого интеграла Бохнера–Мартинелли, если рассматривать главное значение интеграла в смысле Керзмана–Стейна. Сформулируем основные результаты данного параграфа.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $f(z,w) = f_0(z,w)\ |z-w|^{-\nu},\ \ 0 \leqslant \nu < 2n-1,$ *а* $f_0 \in \mathcal{C}^{\alpha}_{\mathcal{KS}}(\partial D \times \partial D),\ 0 < \alpha \leqslant 1,$ *тогда справедлива формула*

$$\int\limits_{\partial D_w} d\sigma(w) \int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta, w)\ U(\zeta, z) = \int\limits_{\partial D_\zeta} U(\zeta, z) \int\limits_{\partial D_w} f(\zeta, w)\ d\sigma(w), \quad z \in \partial D.$$

Теорема 2.3.2. *Пусть* $f \in \mathcal{C}^{\alpha}_{\mathcal{KS}}(\partial D \times \partial D),\ 0 < \alpha \leqslant 1,$ *тогда для* $z \in \partial D$

$$\int\limits_{\partial D_w} U(w,z) \int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta, w)\ U(\zeta, w) = \int\limits_{\partial D_\zeta} \int\limits_{\partial D_w} f(\zeta, w)\ U(w,z)\ U(\zeta, w) + \frac{1}{4}\ f(z,z).$$

При доказательстве теоремы 2.3.2 используются теоремы 2.1.1, 2.3.1 и лемма 2.2.4.

В четвертом параграфе приводятся формулы композиции, полученные из формулы перестановки.

Третья глава посвящена исследованию интеграла Коши–Сеге в многомерном комплексном шаре и состоит из двух параграфов.

Пусть B — единичный шар из $\mathbb{C}^n$, а именно

$$B = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \ |\zeta| < 1\},$$

где $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, $|\zeta|^2 = |\zeta_1|^2 + \ldots + |\zeta_n|^2$. Тогда $S = \{\zeta : \ |\zeta| = 1\}$ — граница шара B.

Обозначим через $K(\zeta, z)$ — ядро интеграла Коши–Сеге для шара, т.е.

$$K(\zeta, z) = \frac{1}{\big(1 - \langle \overline{\zeta}, z \rangle\big)^n},$$

а через $\sigma(\zeta)$ — дифференциальную форму

$$\sigma(\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \, \overline{\zeta}_k \ d\overline{\zeta}[k] \wedge d\zeta.$$

В первом параграфе предлагается более простое (в отличие от работы[17]) доказательство нахождения главного значения интеграла в смысле Керзмана–Стейна, а также для данного главного значения рассматриваются формулы перестановки и обращения.

Теорема 3.1.2. *Пусть* $f(\zeta, w) = f_0(\zeta, w) \ \big|1 - \langle \overline{\zeta}, w \rangle\big|^{-\nu}$, $0 \leqslant \nu < n$, $f_0 \in \mathcal{C}^{\alpha}_{\mathcal{KS}}(S \times S)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *тогда*

$$\int\limits_{S_w} d\sigma(w) \int\limits_{S_\zeta} f(\zeta, w) \ K(\zeta, z) \ \sigma(\zeta) = \int\limits_{S_\zeta} K(\zeta, z) \ \sigma(\zeta) \int\limits_{S_w} f(\zeta, w) \ d\sigma(w), \quad z \in S.$$

Лемма 3.1.3. *Для точек* $\zeta^0, z^0 \in S$, $\zeta^0 \neq z^0$, *справедливо равенство*

$$\int\limits_{S_w} K(w, z^0) \ K(\zeta^0, w) \ \sigma(w) = 0.$$

Теорема 3.1.3. *Пусть* $f \in \mathcal{C}^{\alpha}_{\mathcal{KS}}(S \times S)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *тогда*

$$\int\limits_{S_w} K(w, z) \ \sigma(w) \int\limits_{S_\zeta} f(\zeta, w) \ K(\zeta, w) \ \sigma(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{S_\zeta} \sigma(\zeta) \int\limits_{S_w} f(\zeta, w) \ K(w, z) \ K(\zeta, w) \ \sigma(w) + \frac{1}{4} \ f(z, z), \ \ z \in S.$$

При доказательстве теоремы 3.1.3 используются теорема 3.1.2 и лемма 3.1.3.

Следствие 3.1.1. *Пусть* $n > 1$. *Если* $f(\zeta, w) = f(\zeta) \in \mathcal{C}^{\alpha}_{\mathcal{KS}}(S)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *то*

$$K^2_{sh}[f] = \frac{1}{4}\, f(z), \quad z \in S,$$

где

$$K_{sh}[f] = \text{v.p.h.} \int_S f(\zeta)\ K(\zeta, z)\ \sigma(\zeta).$$

Следствие 3.1.1 является одной из формул композиции для особого интеграла Коши–Сеге при $n > 1$.

Во втором параграфе доказаны формулы перестановки и обращения, если рассматривать главное значение особого интеграла по Коши.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $f(\zeta, w) = f_0(\zeta, w)\ \left|1 - \left\langle \overline{\zeta}, w \right\rangle\right|^{-\nu}$, $0 \leqslant \nu < n$, $f_0 \in \mathcal{C}^{\alpha}(S \times S)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *тогда*

$$\int_{S_w} d\sigma(w) \int_{S_\zeta} f(\zeta, w)\ K(\zeta, z)\ \sigma(\zeta) = \int_{S_\zeta} K(\zeta, z)\ \sigma(\zeta) \int_{S_w} f(\zeta, w)\ d\sigma(w), \quad z \in S.$$

Лемма 3.2.3. *При* $n > 1$ *для точек* $\zeta^0,\ z^0 \in S$, $\zeta^0 \neq z^0$, *справедливо равенство*

$$\int_{S_w} K(w, z^0)\ K(\zeta^0, w)\ \sigma(w) = K(\zeta^0, z^0).$$

Теорема 3.2.2. *Пусть* $n > 1$. *Если* $f \in \mathcal{C}^{\alpha}(S \times S)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *тогда*

$$\int_{S_w} K(w, z)\ \sigma(w) \int_{S_\zeta} f(\zeta, w)\ K(\zeta, w)\ \sigma(\zeta) =$$

$$= \int_{S_\zeta} \sigma(\zeta) \int_{S_w} f(\zeta, w)\ K(w, z)\ K(\zeta, w)\ \sigma(w),\ z \in S.$$

При доказательстве теоремы 3.2.2 используются теорема 3.2.1 и лемма 3.2.3.

Следствие 3.2.1. *Пусть* $n > 1$. *Если* $f(\zeta, w) = f(\zeta) \in \mathcal{C}^{\alpha}(S)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *то*

$$K^2_s[f] = K_s[f].$$

Как и следствие 3.1.1, следствие 3.2.1 является одной из формул композиции для особого интеграла Коши–Сеге при $n > 1$.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Александру Мечиславовичу Кытманову за постановку задачи и неоценимую помощь в создании работы.

Публикации по теме диссертации

[1] Кацунова А.С. О нахождении главного значения Хенкина–Рамиреза для интеграла Бохнера–Мартинелли в строго псевдовыпуклых областях пространства $\mathbb{C}^n$ // Математика: материалы XLIV международной научной студенческой конференции „Студент и научнотехничекий прогресс“ / Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2006. С.14.

[2] Кацунова А.С. О нахождении главных значений интеграла Мартинелли–Бохнера // Математика в современном мире. Российская конференция, посвященная 50-летию Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН: Тезисы докладов / Новосибирск: ИМ СО РАН, 2007. С. 66-67.

[3] Кацунова А.С. О формуле перестановки для особых интегральных операторов // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева: Тезисы докладов / Новосибирск: ИМ СО РАН, 2008. С. 321.

[4] Кацунова А.С. О формулах перестановки повторных интегралов Коши–Сеге // Тезисы международной конференции „Аналитические функции многих комплексных переменных“ / Красноярск: СФУ, 2009. С. 22.

[5] Кацунова А.С. Нахождение предельных значений некоторых потенциалов // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: Материалы Восьмой молодежной научной школы-конференции „Лобачевские чтения – 2009“ / Казань: Казан. матем. об-во, 2009. Т.39. С. 257-258.

[6] Кацунова А.С. О вычислении некоторых потенциалов // VI Всесибирский конгресс женщин-математиков (в день рождения С.В. Кова-

левской): Материалы Всероссийской конференции / Красноярск: РИЦ СибГТУ, 2010. С. 177-178.

[7] Кацунова А.С. О формуле перестановки Пуанкаре–Бертрана для шара // Математика: материалы XLVIII Международной научной студенческой конференции „Студент и научно-технический прогресс“ / Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010. С. 96.

[8] Кацунова А.С. О нахождении главных значений интеграла Бохнера–Мартинелли в строго псевдовыпуклых областях // Сибирские электронные математические известия. 2010. Т. 7. С. 132-139.

[9] Кацунова А.С. О формуле перестановки повторного особого интеграла Коши–Сеге // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: Материалы Девятой молодежной научной школы-конференции „Лобачевские чтения – 2010“ / Казань: Казан. матем. об-во, 2010. Т.40. С. 165-167.

[10] Кацунова А.С. О формуле перестановки повторного особого интеграла Бохнера–Мартинелли в строго псевдовыпуклых областях // Журнал Сибирского федерального университета. Сер. Математика и физика. 2011. Т.4. №1. С. 102-111.

[11] Кацунова А.С. О формуле перестановки особого интеграла Коши–Сеге в многомерном шаре // Тезисы докладов Международной школы-конференции по геометрии и анализу. Электронный ресурс, номер гос. рег. 0321102235. / Кемерово: КемГУ, 2011. URL: http://www.math.kemsu.ru/kma/file/tesis/doc/section6/Katsunova/Katsunova.pdf С. 1-5.

[12] Кацунова А.С. О повторном особом интеграле Коши–Сеге // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени М.Ф. Решетнева. 2011. Выпуск 3 (36). С. 31-35.

Подписано в печать ______________
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 0,8
Тираж 110 экз. Заказ 5392

Отпечатано полиграфическим центром
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041 Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел/факс (391)249-74-81, 249-73-55
E-mail: print_sfu@mail.ru; http://lib.sfu-kras.ru