На правах рукописи

Федченко Дмитрий Петрович

О ЗАДАЧЕ КОШИ И ФОРМУЛАХ КАРЛЕМАНА ДЛЯ КОМПЛЕКСА ДОЛЬБО НАД ПРОСТРАНСТВАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2010

Работа выполнена в Институте математики Сибирского федерального университета.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент
Шлапунов Александр Анатольевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
Киселев Олег Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор
Мысливец Симона Глебовна

Ведущая организация:

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск

Защита состоится 19 ноября 2010 г. в 10 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан 13 октября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Н. А. Бушуева

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Интегральные представления в комплексном анализе решают классическую задачу восстановления голоморфной функции в некоторой области из n-мерного комплексного пространства по ее значениям на границе или на части границы этой области. Например, интегральное представление Мартинелли–Бохнера задействует значения функции на всей границе, а интегральное представление Коши для поликруговых областей – только значения на остове. Еще со времен Адамара[1] известно, что эта задача, вообще говоря, является некорректно поставленной, а именно, в случае задания значений на произвольном подмножестве границы, может не быть непрерывной зависимости решения задачи от ее начальных данных. С другой стороны, если множество, на котором заданы данные Коши, достаточно массивно, то теорема единственности для голоморфных функций гарантирует, что задача Коши имеет не более одного решения, что, в свою очередь, позволяет надеяться на возможность построения подходящего интегрального представления для решения задачи. В этом случае некорректность задачи означает, что в данном интегральном представлении будет содержаться предельный переход или интегрирование будет вестись по некомпактному множеству. Одна из первых формул, восстанавливающих голоморфную функцию в области одного специального вида по ее значениям на части границы, была предложена Карлеманом[2], а формулы подобного рода стали называться формулами Карлемана. После этой пионерской работы появилось множество других, связанных как с одномерными, так и с многомерными формулами Карлемана (Голузин–Крылов [3], Лаврентьев[4], Фок–Куни[5], Ярмухамедов[6]). Все эти и многие другие формулы, а также их приложения представлены в монографии Айзенберга[7]. Многомерные формулы Карлемана стали появляться в 90-х годах XX-го столетия (Айзенберг–Кытманов[8]). Уместно отметить, что данные исследования были глубоко

[1] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale Univ. Press, New Haven-London, 1923.

[2] T. Carleman, *Les fonctions quasianalytiques*, Paris: Gauthier-Villars. 1926.

[3] Г. М. Голузин, В. И. Крылов, *Обобщенная формула Carleman'a и ее приложение к аналитическому продолжению функций*, Мат. Сб., **40**:2 (1933), 144–149.

[4] М. М. Лаврентьев, *О задаче Коши для уравнения Лапласа*, Известия АН СССР. Сер. Мат., **20** (1956), 819-842.

[5] В. А. Фок, Ф. М. Куни, *О введении гасящей функции в дисперсионные соотношении*, Докл. АН СССР **127** (1959), 1195–1198.

[6] Ш. Ярмухамедов, *О задаче Коши для уравнения Лапласа*, Матем. заметки, 1975, **18**:1, 57–61.

[7] Л. А. Айзенберг, *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения*, Новосибирск: Наука. 1990.

[8] Л. А. Айзенберг, А. М. Кытманов, *О возможности голоморфного продолжения в область функ-*

мотивированы с точки зрения приложений (гидродинамика, теория передачи сигнала, геологоразведка и т.д.), по этой причине данная тематика остается актуальной[9] [10] [11].

Однако, в ходе изучения задачи аналитического продолжения для голоморфных функций многих переменных, стало ясно, что правильнее рассматривать более общую задачу: задачу Коши для многомерной неоднородной системы Коши–Римана[12]. В случае одного комплексного переменного эти задачи эквивалентны во многих естественных функциональных пространствах (например, в пространствах Гёльдера или Соболева), но для многих переменных, чтобы доказать эквивалентность, требуется информация о разрешимости системы Коши–Римана или, другими словами, о когомологиях комплекса Дольбо на первом шаге[13] над различными функциональными пространствами, а значит, такая эквивалентность не имеет места для областей, не обладающих некоторыми свойствами выпуклости относительно оператора Коши–Римана.

Как оказалось, результаты, полученные для системы Коши–Римана, естественным образом могут быть обобщены на случай общих эллиптических переопределенных систем[14]. С другой стороны, многомерный оператор Коши–Римана, продолженный на комплексные дифференциальные формы, порождает соответствующий комплекс совместности, называемый комплексом Дольбо, который играет важную роль во многих вопросах комплексного анализа. Итак, задача Коши для комплекса Дольбо представляет другое важное обобщение классической задачи Коши для голоморфных функций, активно изучаемое в последние годы (Андреотти–Хилл[15], Бринкшульте–Хилл[16], Кытманов–Мысливец[17]). Особую ценность эта задача приобрела после представления Хансом Ле-

---

ций, заданных на куске ее границы. Мат. Сб., **182**:4 (1991), 490–507.

[9]L. Aizenberg, A. Vidras *On Carleman Formulas and on the class of holomorphic functions representable by them*, Math. Nachr. **237** (2002), 5–25.

[10]I. V. Shestakov, A. A. Shlapunov, *Negative Sobolev Spaces in the Cauchy Problem for the Cauchy–Riemann Operator*, Журнал СФУ. Математика и физика. 2009. №1. С. 17–30.

[11]K. O. Makhmudov, O.I. Makhmudov, N. Tarkhanov, *Equations of Maxwell type*, arXiv:math.AP/0910.1224, pp. 1–17.

[12]A. A. Shlapunov, *On the Cauchy problem for the Cauchy–Riemann operator in Sobolev spaces*, Contemporary Math. 2008, **445**, 333–347.

[13]Г. М. Хенкин, *Метод интегральных представлений в комплексном анализе*, Комплексный анализ – многие переменные – 1, Итоги науки и техники. Сер. современные проблемы математики. Фундаментальные направления, **7** ВИНИТИ, М., 1985, 23–124.

[14]N. Tarkhanov, *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations*, Akademie Verlag, Berlin, 1995.

[15]A. Andreotti, C.D. Hill, *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy problem. Part 1: Reduction to vanishing theorems*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, **26**:3 (1972), 325–363.

[16]J. Brinkschulte, C. D. Hill, *On the Cauchy problem for the $\overline{\partial}$ operator*, Ark. Mat., (2008), 1–11.

[17]А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец, *Об условиях $\overline{\partial}$-замкнутости дифференциальных форм*, Сиб. матем. журн., **50**:6 (2009).

ви[18] примера дифференциального уравнения без решений, построенного с помощью касательного оператора Коши–Римана, тесно связанного с задачей Коши для комплекса Дольбо. Ясно также, что эта задача Коши может стать хорошим модельным примером для изучения задачи Коши для более общих эллиптических комплексов.

Кроме того, несмотря на обилие работ по тематике, вопрос о том как находить *простые* формулы для решения задачи Коши (даже для случая системы Коши–Римана) в каждой конкретной ситуации, остается открытым. Поэтому каждая новая конструктивная формула Карлемана представляет отдельный интерес.

Цель диссертации состоит в нахождении приемлемой постановки задачи Коши для комплекса Дольбо над пространствами распределений, описании ее условий разрешимости, а также, в построении (по возможности простых) формул Карлемана, дающих точное и приближенные решения этой задачи.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

— доказано существование следов на границе области касательной и нормальной составляющих комплексных дифференциальных форм с коэффициентами в подходящих пространствах распределений конечного порядка сингулярности в данной области, что позволило рассмотреть задачу Коши в обобщенной постановке;

— построены эллиптические аналоги классических гиперболических формул Д‘Аламбера, Кирхгофа, Пуассона для решения задачи Коши для неоднородного уравнения Лапласа в цилиндрических областях и описано их применение для построения формул Карлемана для системы Коши–Римана;

— найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши для комплекса Дольбо в пространствах распределений в терминах гармонического продолжения интеграла типа Мартинелли–Бохнера–Коппельмана из меньшей области в большую;

— построены формулы Карлемана задачи Коши для комплекса Дольбо в областях специального вида.

Точные формулировки основных результатов работы приведены ниже.

[18] H. Lewy, *An example of a smooth linear partial differential equation without solution*, Ann. Math., **66**(1957), 155–158.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты носят теоретический характер и могут быть применены в многомерном комплексном анализе и при решении задачи Коши для общих эллиптических дифференциальных комплексов.

Методы исследования. В работе используются метод интегральных представлений, методы гармонического анализа, метод аналитического продолжения, методы теории гильбертовых пространств, а также общие методы функционального анализа.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на студенческих конференциях (Красноярск, 2006, 2007), $XLIV$ и XLV Международных студенческих конференциях «*Студент и научно-технический прогресс*» (Новосибирск, 2006, 2007), Международной конференции «*Анализ и геометрия на комплексных многообразиях*» (Красноярск, август 2007), Международной конференции «*Современные проблемы математического моделирования и вычислительных технологий*» (Красноярск, август 2008), Международной конференции «*Аналитические функции многих комплексных переменных*» (Красноярск, август 2009), школе-конференции по геометрическому анализу (Горно-Алтайск, 2010), семинаре профессора Н. Тарханова (Потсдам, Германия, 2009), городском семинаре по многомерному комплексному анализу под руководством профессора А. М. Кытманова и профессора А. К. Циха (Красноярск, 2006–2010).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в четырех статьях. Три из них входят в список ВАК ведущих научных изданий.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав основного содержания, заключения и списка литературы из 56 наименований. Работа изложена на 104 страницах.

Содержание диссертации

Во введении дается краткое изложение содержания диссертации, формулируются ее основные результаты, а также определяется и оценивается их место среди уже известных фактов.

Глава 1 посвящена адаптации формулы Мартинелли–Бохнера–Коппельмана для сечений (которые являются распределениями) расслоения внешних комплексных дифференциальных форм. В частности, для этого потребовалось описать следы на границе касательной и нормальной составляющих дифференциальных форм, коэффициенты которых принадлежат специальным пространствам Соболева с отрицательными показателями гладкости. Выбор этих пространств не является случайным. В третьей главе диссертации показано, что именно в одном из этих пространств постановка задачи Коши для комплекса Дольбо является наиболее удачной и именно в нем условия разрешимости имеют наиболее простой вид.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с бесконечно гладкой границей ∂D. Следуя Шехтеру[19], в дополнение к стандартной шкале пространств Соболева[20] $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$, определим несколько иные пространства Соболева с отрицательными показателями гладкости $\mathscr{H}^s(D)$, $\mathbb{Z} \ni s \leq 0$, как пополнения пространства $C^\infty(\overline{D})$ относительно норм

$$\|u\|_{\mathscr{H}^s(D)} = \sup_{\varphi \in C^\infty(\overline{D})} \frac{|(u,\varphi)_{L^2(D)}|}{\|\varphi\|_{H^{-s}(D)}}.$$

Обозначим через $\Lambda^{p,q}$ расслоение внешних дифференциальных форм бистепени (p,q) над $\mathbb{C}^n$, а множество (p,q)-форм с коэффициентами из функционального пространства $\mathfrak{S}(D)$ обозначим через $\mathfrak{S}(D,\Lambda^{p,q})$. Пусть $\overline{*}\varphi = \overline{*\varphi}$ для формы φ, где $*$ – оператор Ходжа. Положим для $u \in C^\infty(\overline{D},\Lambda^{p,q})$:

$$\widetilde{\tau}(u) = \sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}{}' \sum_{j=1}^{n} u_{IJ}(z) \frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

$$\widetilde{\nu}(u) = \sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}{}' \sum_{j=1}^{n} u_{IJ}(z) \frac{\partial \rho}{\partial z_j} \overline{*}(d\overline{z}_j \wedge \overline{*}(dz_I \wedge d\overline{z}_J)),$$

где ρ – определяющая функция области D, а u_{IJ} – коэффициенты дифференциальной формы u. Тогда $\tau(u) = (\widetilde{\nu} \circ \widetilde{\tau})(u)$.

Пусть $\overline{\partial}$ – оператор Коши–Римана для дифференциальных форм.

Обозначим пополнение пространства $C^\infty(\overline{D},\Lambda^{p,q})$ относительно норм

[19] M. Schechter, *Negative norms and boundary problems*, Ann. Math, **72**:3 (1960), 581–593.
[20] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press. Inc., Boston et al., 1978.

графиков

$$\|u\|_{s,\overline{\partial}} = \Big(\|u\|^2_{\mathscr{H}^s(D,\Lambda^{p,q})} + \|\overline{\partial} u\|^2_{\mathscr{H}^{s-1}(D,\Lambda^{p,q+1})} \Big)^{1/2},$$
$$\|u\|_{s,\widetilde{\tau}} = \Big(\|u\|^2_{\mathscr{H}^s(D,\Lambda^{p,q})} + \|\widetilde{\tau}(u)\|^2_{H^{s-1/2}(\partial D,\Lambda^{p,q+1})} \Big)^{1/2}$$
$$\|u\|_{s,\tau} = \Big(\|u\|^2_{\mathscr{H}^s(D,\Lambda^{p,q})} + \|\tau(u)\|^2_{H^{s-1/2}(\partial D,\Lambda^{p,q})} \Big)^{1/2}$$

через $H^s_{\overline{\partial}}(D,\Lambda^{p,q})$, $H^s_{\widetilde{\tau}}(D,\Lambda^{p,q})$ и $H^s_{\tau}(D,\Lambda^{p,q})$ соответственно. Основной результат данной главы состоит в следующем.

Теорема 1.3. *Линейные пространства $H^s_{\overline{\partial}}(D,\Lambda^{p,q})$, $H^s_{\widetilde{\tau}}(D,\Lambda^{p,q})$ и $H^s_{\tau}(D,\Lambda^{p,q})$, $s \le 0$, совпадают, а их нормы эквивалентны.*

Следствие 1.2. *Для любой формы $u \in H^s_{\overline{\partial}}(D,\Lambda^{p,q})$ корректно определена форма $\tau(u) \in H^{s-1/2}(\partial D,\Lambda^{p,q})$.*

В целом, данные утверждения выражают тот факт, что (комплексная) касательная часть $\tau(u)$ формы u представляет собой так называемые данные Коши относительно оператора Коши–Римана для дифференциальных форм соответствующей бистепени.

Глава 2 посвящена задаче Коши для многомерной неоднородной системы Коши–Римана:

$$\begin{cases} \overline{\partial} u = f & \text{в} \quad D, \\ u = u_0 & \text{на} \quad \Gamma, \end{cases}$$

т.е. задаче Коши на нулевом шаге комплекса Дольбо. Здесь обсуждаются два различных подхода к решению задачи.

Во-первых, нами приведен критерий разрешимости этой задачи, в терминах гармонического $L^2(D)$-продолжения интеграла Мартинелли–Бохнера из меньшей области в большую, в случае, когда по заданным функции u_0 из класса Лебега $L^2(\Gamma)$ и $(0,1)$-форме f с коэффициентами из класса $L^2(D)$ ищется функция $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(D \cup \Gamma)$. Более того, на его основе в диссертации построены несколько простых и эффективных формул Карлемана в областях специального вида.

Во-вторых, уместно отметить, что задача Коши для многомерной системы Коши–Римана может быть легко сведена к задаче Коши для оператора Лапласа Δ, которая, в свою очередь, представляет отдельный интерес для исследования, в силу своей важности как внутри математики, так и во многих приложениях. По этой причине последний параграф главы 2 посвящен построению формул типа Карлемана для задачи Коши для уравнения Лапласа в областях цилиндрического вида. Сводя эту задачу к задаче Коши для волнового уравнения и используя гиперболическую теорию, мы получаем точные формулы для решения (эллиптические аналоги классических формул Д'Аламбера, Пуассона, Кирхгофа), обобщающие классический подход Ханса Леви[21].

Более подробно, пусть теперь D – ограниченная область с кусочно гладкой границей в $\mathbb{R}^n$. Потребуем, чтобы область D была цилиндрической формы, т.е. являлась частью цилиндра $B \times \mathbb{R}$, отсекаемой двумя поверхностями $x_n = b(x')$ и $x_n = t(x')$, заданными на B, где B – ограниченная область с гладкой границей в пространстве переменного $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Данные Коши будем задавать на верхней части $\Gamma := \{(x', t(x')) : x' \in B\}$, которая предполагается вещественно аналитической.

Рассмотрим в области D линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка $\Delta u = f(x)$, где функция $f(x)$ вещественно аналитическая на $\overline{D}$. Задача Коши для решения этого уравнения с данными на Γ может быть сформулирована в следующем виде. По заданным на Γ функциям u_0 и u_1 найти функцию u гладкую в D вплоть до Γ такую, что

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & f(x) & \text{в} \ D, \\ u & = & u_0 & \text{на} \ \Gamma, \\ u'_{x_n} & = & u_1 & \text{на} \ \Gamma. \end{array} \right. \tag{2.44}$$

Продолжая функцию $u(x', x_n)$ до голоморфной функции

$$U(x', x_n, y_n) := u(x', x_n + \imath y_n)$$

в некоторую комплексную окрестность интервала $(b(x'), t(x')]$, сведем задачу Коши для уравнения Лапласа к задаче Коши для неоднородного волнового уравнения от переменных (x', y_n)

$$\left\{ \begin{array}{rcll} U''_{y_n y_n} & = & \Delta_{x'} U - f(x', x_n + \imath y_n), & \text{где} \ \ x' \in B, |y_n| < \varepsilon(x'), \\ U(x', x_n, 0) & = & u_0(x', x_n), & \text{где} \ \ x' \in B, \\ U'_{y_n}(x', x_n, 0) & = & \imath\, u_1(x', x_n), & \text{где} \ \ x' \in B, \end{array} \right.$$

куда переменная x_n входит в качестве параметра, лежащего в интервале $(b(x'), t(x'))$.

Один из основных результатов данной главы состоит в следующем.

Теорема 2.5. *Пусть $n = 2$, а u – произвольное решение задачи Коши (2.44) в D, вещественно аналитическое вплоть до Γ. Тогда справедлива*

[21] H. Lewy, *Neuer Beweis des analytischen Charakters der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen*, Math. Ann. **101** (1927), 609–619.

формула

$$u(x) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\varepsilon(x_1)}^{\varepsilon(x_1)} U(x_1, t(x_1), y_2) \exp N\Big(\Big(\frac{t(x_1)-b(x_1)+\imath y_2}{x_2 - b(x_1)}\Big)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\Big) \frac{dy_2}{t(x_1)-x_2+\imath y_2}$$

для всех $x \in D$.

Здесь

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \arctan\Big(\frac{\varepsilon(x_1)}{t(x_1) - b(x_1)}\Big),$$

а

$$U(x_1, t(x_1), y_2) \;=\; -\frac{1}{2}\int_0^{y_2} dy_2' \int_{x_1-y_2'}^{x_1+y_2'} f(x_1', t(x_1) + \imath(y_2 - y_2'))\, dx_1'$$
$$+ \;\; \frac{u_0(x_1+y_2, t(x_1)) + u_0(x_1-y_2, t(x_1))}{2} + \frac{\imath}{2}\int_{x_1-y_2}^{x_1+y_2} u_1(x_1', t(x_1))dx_1'.$$

Формула для $u(x)$ в теореме 2.5 получается применением классической формулы Карлемана к решению задачи Коши для волнового уравнения в треугольной комплексной окрестности с вершиной в точке $b(x')$ и основанием $t(x') \mp \imath\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Кроме того, получены аналогичные результаты в размерностях $n = 3$ и $n = 4$. Поскольку речь идет о построении простых формул Карлемана, то задача охватить все размерности не ставилась.

Наконец, **глава 3** посвящена задаче Коши для комплекса Дольбо в произвольных степенях. Мы начинаем с рассмотрения задачи в классических пространствах Соболева, а заканчиваем результатами в пространствах распределений. Недавно задача Коши для комплекса Дольбо была рассмотрена на уровне когомологий[22] [23], что дает известные преимущества (например, теорему единственности). В отличие от этих работ, мы рассматриваем задачу на уровне сечений (т.е. для дифференциальных форм, а не для их когомологий) и предпочитаем явно выделить в соответствующих когомологиях решений задачи канонический представитель. При этом мы продолжаем развивать подход, предложенный Айзенбергом и Кытмановым для задачи голоморфного продолжения функции в

[22]M. Nacinovich, B. W. Schulze, N. Tarkhanov, *On Carleman formulas for the Dolbeault cohomology.* Ann. Univ. Ferrara, Sez.VII, Sc. Mat., Suppl. Vol. XLV (1999), p. 253–262.

[23]И. В. Шестаков, *О задаче Коши для когомологий Дольбо*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, Красноярск, 2009.

область с куска границы, который основан на применении интегральных представлений и гармонического анализа.

Пусть снова D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, а Γ – связное открытое (в топологии ∂D) подмножество границы области D. Следует отметить, что на область D не налагается никаких условий выпуклости.

Как известно, для функций из класса Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{N}$, корректно определены следы на границе области D, что в сумме с возможностью применения методов теории гильбертовых пространств дает мощный аппарат по исследованию задачи Коши для комплекса Дольбо.

Задача 3.3. *Для заданной формы $f \in L^2(D, \Lambda^{0,q+1})$, найти (если это возможно) форму $u \in H^1(D, \Lambda^{0,q})$ такую, что*

$$\begin{cases} \overline{\partial} u = f & \textit{в} \quad D, \\ \tau(u) = 0 & \textit{на} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Тот факт, что мы ищем форму с нулевой касательной частью нисколько не ограничивает общности, так как задача всегда может быть редуцирована к данному случаю (например, с помощью подходящего интеграла Пуассона).

Обозначим через $\mathfrak{U}_{p,q}(\zeta, z)$ при $0 \le q \le n-1$ ядра интегрального представления Мартинелли–Бохнера–Коппельмана и рассмотрим для $(p, q+1)$-формы g с коэффициентами из $C(\overline{D})$ следующий интеграл

$$(T_D\, g)(z) = -\int_D g \wedge \mathfrak{U}_{p,q}(\zeta, z).$$

Этот интеграл индуцирует ограниченный оператор в пространствах Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{N}$. Область определения $T_D\, g$, как интеграла, зависящего от параметра, совпадает с $\mathbb{C}^n \setminus \partial D$. В случае, когда $T_D\, g$ рассматривается в области D, будем писать T_D^- и T_D^+ вне области D. Отметим также, что коэффициенты формы $T_D\, g$ гармоничны в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$.

Как оказалось, для задачи 3.3 в пространствах Соболева с положительной гладкостью не удается найти адекватное обобщение теоремы Айзенберга–Кытманова. Поэтому мы приведем лишь одно из следствий, описывающих условия разрешимости задачи в этих пространствах.

С этой целью, выберем область D^+ так, чтобы множество $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$ было областью с кусочно гладкой границей. Обозначим через $Z_{p,q}(H^1(\Omega))$ множество всех $\overline{\partial}$-замкнутых (p,q)-форм с коэффициентами из пространства $H^1(\Omega)$, а через $B_{p,q}(H^1(\Omega))$ множество всех $\overline{\partial}$-точных (p,q)-форм с коэффициентами из $H^1(\Omega)$. Введем в рассмотрение следующее пространство когомологий

$$H_{p,q}(H^1(\Omega)) := Z_{p,q}(H^1(\Omega))/B_{p,q}(H^1(\Omega)).$$

Следствие 3.2. *Задача Коши* 3.3 *разрешима тогда и только тогда, когда* $\overline{\partial} f = 0$ *в* D, $\tau(f) = 0$ *на* Γ *и существует дифференциальная форма* Φ *из класса* $H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$ *равная* $(T_D f)^+$ *в* D^+ *такая, что* $[\Delta\Phi] = 0$ *в* $H_{p,q}(H^1(\Omega))$.

Итак, формулировка следствия 3.2 близка по духу к теореме Айзенберга–Кытманова, но на практике проверка соответствующих условий разрешимости в когомологиях может оказаться слишком затруднительной. Чтобы окончательно обобщить их результат, будем искать в когомологиях канонический представитель среди решений. Наиболее просто это сделать в случае, когда решение ищется в пространстве Лебега L^2 в области, однако это требует рассмотрения задачи Коши в пространствах Соболева с отрицательными показателями гладкости.

Положим $\mathscr{D}'(\overline{\Gamma}, \Lambda^{p,q}) = \bigcup\limits_{s=0}^{\infty} H^{-s-1/2}(\overline{\Gamma}, \Lambda^{p,q})$, $H(D) = \bigcup\limits_{s=0}^{\infty} \mathscr{H}^{-s}(D)$, а $H_{\overline{\partial}}(D) = \bigcup\limits_{s=0}^{\infty} H^{-s}_{\overline{\partial}}(D)$. Обозначим через $\overline{\partial}^*$ формально сопряженный оператор для оператора $\overline{\partial}$.

Задача 3.4. *По заданным* $f \in H(D, \Lambda^{p,q+1})$, $u_0 \in \mathscr{D}'(\overline{\Gamma}, \Lambda^{p,q})$, *найти такую форму* $u \in H_{\overline{\partial}}(D, \Lambda^{p,q})$, *что*

$$(u, \overline{\partial}^* \psi)_D = (f, \psi)_D - \langle \tau(u_0), \overline{*}\, \widetilde{\nu}(\psi) \rangle_\Gamma \tag{3.8}$$

для всех $\psi \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(D \cup \Gamma, \Lambda^{p,q+1})$.

Мы не будем формулировать критерий разрешимости в пространстве $H_{\overline{\partial}}(D, \Lambda^{p,q})$ поскольку он аналогичен критерию в классических пространствах Соболева, а сразу приведем основной результат этой главы, касающийся решений из пространств Лебега.

Теорема 3.5. *Пусть* $f \in \mathscr{H}^{-1}(D, \Lambda^{p,q+1})$, $u_0 = 0$. *Задача Коши* 3.4 *разрешима в пространстве* $H^0_{\overline{\partial}}(D, \Lambda^{p,q})$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{\partial} f = 0$ *в* D, $\tau(f) = 0$ *на* Γ *и существует* $\Phi \in L^2(\Omega, \Lambda^{p,q})$, *совпадающая с* $T_D f$ *в* D^+ *и имеющая гармонические коэффициенты в* Ω.

Обозначим через $v(f)$ решение задачи Коши 3.4 ортогональное ее ядру.

Следствие 3.9. *Если задача Коши* 3.4 *для данных* $u_0 = 0$ *и* $f \in L^2(D, \Lambda^{p,q+1}) \cap H^s_{\mathrm{loc}}(D \cup \Gamma)$ *разрешима в пространстве* $L^2(D, \Lambda^{p,q})$, *то*

$v(f)$ принадлежит $H^{s+1}_{\mathrm{loc}}(D\cup\Gamma,\Lambda^{p,q})$ и справедлива формула Карлемана:

$$v(f)(z) = \lim_{N\to\infty} \int_D f(\zeta)\wedge \mathfrak{C}_N(\zeta,z), \tag{3.23}$$

где предел достигается в $H^0_{\overline{\partial}}(D,\Lambda^{p,q})$ и $H^{s+1}_{\mathrm{loc}}(D\cup\Gamma,\Lambda^{p,q})$.

Таким образом, нам удалось получить в положительных степенях комплекса Дольбо критерий разрешимости задачи Коши, вполне аналогичный критерию для нулевой степени комплекса. Это достаточно неожиданно, поскольку операторы Коши–Римана в положительных степенях комплекса Дольбо не являются эллиптическими (хотя сам комплекс, конечно, эллиптический).

Обозначим теперь через $h(\Omega)$ пространство гармонических функций класса Лебега $L^2(\Omega)$. Пусть $\{h^{(i)}_\nu\}$ – множество однородных гармонических многочленов[24], образующих полную ортонормированную систему в пространстве $L^2(\partial B(0,1))$ на единичной сфере $\partial B(0,1)$ в $\mathbb{R}^{2n}$, $n\geq 1$. Тогда $\{h^{(i)}_\nu|_{\partial B(0,1)}\}$ – *сферические гармоники*, где ν – степень однородности, а i – номер многочлена степени ν в этом базисе, $1\leq i\leq J(\nu)$, где $J(\nu)=\frac{(2n+2\nu-2)(2n+\nu-3)!}{\nu!(2n-2)!}$, $\nu>0$, $J(0)=1$. Нетрудно заметить, что система $\{h^{(i)}_\nu\}$ ортогональна в $h(B(0,R))$ в любом шаре $B(0,R)$.

Пусть D – часть единичного шара Ω, отсеченная гиперповерхностью Γ, не содержащей точку ноль, тогда ядро в формуле Карлемана из следствия 3.9 имеет следующий вид

$$\mathfrak{C}_N(\zeta,z) =$$

$$\mathfrak{U}_{p,q}(\zeta,z) - \sum_{\substack{|I|=p\\ |J|=q}}{}' \sum_{\mu=0}^{N}\sum_{i=1}^{J(\mu)} \overline{*}_\zeta\overline{\partial}_\zeta \left(\frac{\overline{h^{(i)}_\mu(\zeta)}\, d\zeta_I\wedge d\overline{\zeta}_J}{|\zeta|^{2n+2\mu-2}(2n+2\mu-2)}\right)\, h^{(i)}_\mu(z)\, dz_I\wedge d\overline{z}_J.$$

Научные работы автора по теме диссертации поддержаны грантом Сибирского федерального университета по научно-методическому проекту № 45.2007, грантами Президента РФ НШ–2427.2008.1 и НШ–7347.2010.1, грантом Рособразования 2.1.1/4620, совместной стипендией Министерства образования и науки РФ и DAAD по программе «Михаил Ломоносов».

Автор глубоко признателен своему научному руководителю Александру Анатольевичу Шлапунову, а также профессору Николаю Тарханову за постановку задач, внимание к работе и за вдохновение в математике.

[24] С. Л. Соболев, *Введение в теорию кубатурных формул*, Наука, Москва, 1974.

Работы автора по теме диссертации

1. Д. П. Федченко, А. А. Шлапунов, *О задаче Коши в пространствах Гёльдера для многомерной системы Коши–Римана*, Вестник КрасГУ. Серия физ.-мат. науки, Вып. 9, (2006), 101–110.

2. Д. П. Федченко, А. А. Шлапунов, *О задаче Коши для многомерного оператора Коши–Римана в пространстве Лебега L^2 в области*, Матем. сб., **199**:11 (2008), 141–160.

3. Д. П. Федченко, *О задаче Коши для комплекса Дольбо в пространствах Соболева*, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., **2**:4 (2009), 506–516.

4. D. P. Fedchenko, *On a Carleman formula for lunes*, Complex Variables and Elliptic Equations, принята к печати, arXiv:math.CV/1001.1233, 8 Jan 2010, 4 pp.

5. D. P. Fedchenko, N. Tarkhanov, *Hyperbolic Formulas in Elliptic Cauchy Problem*, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., **3**:4 (2010), 419–432, arXiv:math-ph/1003.3606, 18 Mar 2010, 16 pp.

Тезисы докладов конференций

6. Д. П. Федченко, *О формуле Карлемана для полукруга с данными Коши на координатной оси*, Материалы *XLIV* Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Новосибирск, НГУ, 2006. С. 29–30.

7. Д. П. Федченко, *О задаче Коши в пространствах Гёльдера для многомерной системы Коши–Римана*, Материалы *XLV* Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Новосибирск, НГУ, 2007. С. 106–107.

8. Д. П. Федченко, *О задаче Коши для комплекса Дольбо в пространствах Соболева*, Тезисы докладов международной конференции «Аналитические функции многих комплексных переменных», Красноярск, СФУ, 2009. С. 18–19.

9. Д. П. Федченко, *О задаче Коши для комплекса Дольбо в пространствах распределений*, Материалы школы-конференции по геометрическому анализу. Горно–Алтайск, ГАГУ, 2010. С. 65–68.