ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ

УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Дураков Борис Евгеньевич

ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ КОНЕЧНЫХ ФРОБЕНИУСОВЫХ ПОДГРУПП С ИНВОЛЮЦИЯМИ

1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук, профессор,

Созутов Анатолий Ильич

Красноярск – 2023

Содержание

Введение

Описание группы по строению ее подгрупп является одной из основных задач теории групп. В диссертации изучается строение бесконечных групп с различными системами конечных фробениусовых подгрупп с инволюциями. Особая роль инволюций в теории групп хорошо известна. Теорема Фробениуса является одним из мощных средств исследования в теории конечных групп [35], а ее обобщения имеют большое значение и для бесконечных групп [48]. Однако уже в классе всех периодических групп теорема Фробениуса неверна (см. примеры § 1.3), поэтому речь идёт о переносе теоремы лишь на некоторые классы групп. Большинство результатов диссертации — обобщения теоремы Фробениуса для групп с различными условиями конечности.

В классе всех периодических групп также неверны аналоги таких ключевых результатов теории конечных групп, как Z^*-теорема Глаубермана [31] и теорема Бэра–Судзуки в чётном варианте [17].

С другой стороны, на классы периодических групп и групп с конечной инволюцией некоторые значимые результаты теории конечных групп переносятся без потерь, например, о группах с абелевыми централизаторами инволюций [16, 27, 37].

Неединичный элемент группы мы называем *конечным*, если он с любым своим сопряженным элементом порождает конечную подгруппу. Группа, в которой каждый элемент простого порядка конечен, называется *слабо сопряженно бипримитивно конечной*. Группа, все сечения которой по конечным подгруппам слабо сопряженно бипримитивно конечны, называется *сопряженно бипримитивно конечной*, или *группой Шункова*. Бинарно конечная группа — это периодическая группа, в которой любые два элемента порождают конечную подгруппу. Говорят, что смешанная группа обладает *периодической частью*, если все элементы конечных порядков в ней составляют подгруппу.

К числу фундаментальных результатах о конечных группах 2-ранга 1 относят теоремы Бернсайда (1911) и Брауэра–Судзуки (1959). При доказательстве этих теорем используется теория мономиальных сдвигов и теория характеров, которые в нужном объёме не могут быть перенесены на бесконечные группы. Следуя Горенстейну [6, теорема 4.88], сформулируем их далее в виде единой теоремы (предложение 1.1.9). Через $O(G)$ обозначим максимальную нормальную периодическую подгруппу без инволюций группы G (если G конечна, то $O(G)$ — её максимальная нормальная подгруппа нечётного порядка).

Теорема Бернсайда–Брауэра–Судзуки. *Пусть G — конечная группа, содержащая инволюцию i, и пусть силовские 2-подгруппы группы G являются либо циклическими группами, либо группами кватернионов, либо обобщёнными группами кватернионов. Тогда инволюция $iO(G)$ лежит в центре фактор-группы $G/O(G)$.*

Справедлив ли аналог этой теоремы в классе всех периодических групп, неизвестно (вопрос 4.75 В. П. Шункова в Коуровской тетради [58] (1973 г.):

(A) *Пусть G — периодическая группа, содержащая инволюцию i, и пусть силовские 2-подгруппы группы G являются либо локально циклическими группами, либо обобщенными группами кватернионов. Будет ли инволюция $iO(G)$ центральным элементом в $G/O(G)$?*

Ответ на вопрос **(A)** неизвестен, даже если централизатор инволюции i — квазициклическая 2-группа (вопрос В. Д. Мазурова 15.54 из Коуровской тетради [58], 2002 г.):

(B) *Предположим, что периодическая группа G содержит инволюцию i, централизатор которой — локально циклическая 2-группа. Верно ли, что множество всех элементов нечётного порядка из G, инвертируемых инволюцией i, составляет подгруппу?*

Вопрос **(B)** решается положительно в случаях, когда G действует точно дважды транзитивно на множестве $G/C_G(i)$ смежных классов группы G по $C_G(i)$ [36] и когда $C_G(i)$ не максимальна в G [23] (в частности, для несчётных групп вопрос **(B)** имеет положительное решение).

Подгруппы, порождённые парами инволюций в группах из вопросов **(A)** и **(B)**, являются группами Фробениуса. В главе 3 диссертации исследуются бесконечные группы, в которых каждая конечная подгруппа содержится в конечной фробениусовой подгруппе (условие насыщенности).

Группу G мы называем *группой Фробениуса с дополнением H и ядром F*, если: 1) H обособлена в G, т. е. H — собственная подгруппа группы G и $H \cap H^g = 1$ для всех $g \in G \setminus H$, 2) все элементы группы, не сопряжённые с элементами из H, вместе с единицей составляют нормальную подгруппу F, и 3) $G = F \leftthreetimes H$.

По теореме Фробениуса (1901 г.) для конечных групп из условия 1) следуют условия 2) и 3), но в классе бесконечных групп все три условия независимы (см. примеры § 2.3). В конечной группе Фробениуса дополнения описаны в 1935 г. Цассенхаузом [62], а Томпсон в 1959 г. доказал [61] знаменитую гипотезу Фробениуса о нильпотентности ядра — разложимости ядра в прямое произведение силовских подгрупп. Ядра групп Фробениуса — это в точности группы, допускающие регулярный автоморфизм (без неподвижных точек) простого порядка (заметим, что строение таких конечных групп до конца ещё не изучено).

Бесконечная группа Фробениуса может иметь весьма сложное строение. Как доказал В. В. Блудов (1997 г.), любая группа может быть вложена в ядро подходящей группы Фробениуса. В периодической группе Фробениуса дополнения не обязаны быть локально конечными, и есть не локально конечные группы Фробениуса конечного периода (примеры приведены в параграфе 1.3 диссертации).

Ядро и множество дополнений группы Фробениуса составляют её расщепление. В этом свойстве проявляется близость групп Фробениуса с такими хорошо известными объектами комбинаторной теории групп, как группы Новикова–Адяна, Ольшанского и др.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество конечных групп. Группа G *насыщена группами из множества* $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$; множество $\mathfrak{X}$ называют *насыщающим* для G.

Группы, насыщенные группами из различных множеств $\mathfrak{X}$ конечных групп, интенсивно изучаются более 25 лет; таким исследованиям посвящены работы многих авторов (А. А. Кузнецов [11], Д. В. Лыткина [14, 15], В. Д. Мазуров [13], А. И. Созутов [26,33], А. А. Шлёпкин [40,43,45,60], А. К.Шлёпкин [46], и другие). Множество $\mathfrak{X}$ в этих работах, как правило, состоит из конечных простых неабелевых групп, их расширений и прямых произведений. В них устанавливается либо локальная конечность исследуемой периодической группы, либо существование локально конечной периодической части в группе Шункова. В частности, многие исследования посвящены решению вопроса 14.101 А. К. Шлёпкина из Коуровской тетради [58] в случаях насыщенности периодической группы различными множествами конечных простых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности.

В работах Б. Амберга и Л. С. Казарина [52], а также А. Франсмана [51], А. А. Шлёпкина [41, 42], А. К. Шлёпкина и А. Г. Рубашкина [47] изучались группы, насыщенные конечными группами диэдра, или обобщенно полудиэдральными группами. Рассматриваемые в этих статьях периодические группы с дополнительными условиями также оказывались локально конечными.

Среди изучаемых в диссертационном исследовании насыщенных конечными группами Фробениуса групп есть смешанные и периодические не локально конечные группы (см. примеры в параграфе 1.3). Сложность исследования групп с данным условием насыщенности без дополнительных условий показывают вопросы 20.94 и 20.95 А. И. Созутова из Коуровской тетради [58] (2022 г.):

(C) *Существует ли бесконечная периодическая простая группа, насыщенная конечными группами Фробениуса?*

(D) *Будет ли группой Фробениуса периодическая группа, содержащая инволюцию и насыщенная конечными группами Фробениуса, если в ней нет четверных подгрупп Клейна?*

До сих пор неизвестно, существуют ли группы Фробениуса с циклическим дополнением, порождённым конечным элементом (вопрос 6.56 В. П. Шункова из Коуровской тетради [58], 1978 г.).

(E) *Пусть $G = F \cdot \langle a \rangle$ — группа Фробениуса, причем дополнение $\langle a \rangle$ имеет простой порядок.*

a) Если G бинарно конечна, то будет ли она локально конечной?

b) Если группы $\langle a, a^g \rangle$ конечны для всех $g \in G$, то будет ли ядро F локально конечной группой?

В диссертационном исследовании доказывается, что если при рассматриваемых нами дополнительных условиях группа G из пункта б) существует, то ядро группы G разложимо в прямое произведение своих силовских подгрупп.

Целью диссертационного исследования является получение частичных решений вопросов **(A)**, **(B)** и **(D)** при дополнительных условиях, накладываемых на группу, и выяснение свойств контрпримера к вопросам **(B)** и **(C)**.

Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Номер теоремы, леммы и др. включает номер главы, параграфа и порядковый номер.

К основным результатам относятся следующие.

1. Группа G с обособленной, не максимальной в G 2-подгруппой T и конечной инволюцией i локально конечна и является группой Фробениуса с абелевым ядром $[i, G]$ и локально циклическим, или (обобщенно) кватернионным дополнением T.

2. Установлена справедливость теоремы Брауэра–Судзуки для периодических групп с условием конечности подгрупп, порождаемых инволюцией i со всяким элементом порядка, не делящегося на 4. В частности, вопрос **(A)** решён положительно в классах бинарно конечных и сопряжённо бинарно конечных групп. Определена структура контрпримера (в предположении его существования) к вопросу **(B)**.

3. Установлено, что периодическая слабо сопряженно бипримитивно конечная группа с нетривиальным локально конечным радикалом, насыщенная конечными группами Фробениуса, является группой Фробениуса. Найден ряд свойств таких групп и их фактор-групп по локально конечному радикалу. Аналогичный результат получен для бинарно конечных групп с теми же условиями.

4. Доказано, что периодическая группа, насыщенная конечными группами Фробениуса с дополнениями чётных порядков и содержащая два элемента таких, что произведение их порядков больше 4, а порождённая любой парой сопряжённых с ними элементов подгруппа конечна, является группой Фробениуса с абелевым ядром и дополнением с инволюцией, все элементарные абелевы подгруппы которого циклические.

5. Доказано, что периодическая группа Шункова, насыщенная конечными группами Фробениуса с дополнениями чётных порядков, является локально конечной группой Фробениуса с абелевым ядром и дополнением с инволюцией.

6. Доказано, что группа G 2-ранга один с конечным элементом четного порядка > 2 разлагается в полупрямое произведение периодической абелевой подгруппы F и централизатора инволюции, при этом любая максимальная периодическая подгруппа в G является группой Фробениуса с ядром F.

7. С использованием условия насыщенности в классе слабо сопряжённо бипримитивно конечных групп 2-ранга 1 получена характеризация групп, которые разложимы в полупрямое произведение двух своих подгрупп, в котором нормальная подгруппа абелева и является ядром в группе Фробениуса, порождённой всеми элементами простых порядков группы.

8. Установлено, что насыщенная конечными группами Фробениуса группа 2-ранга больше одного слабо сопряжённо бипримитивная группа представима полупрямым произведением своей нормальной периодической подгруппы и подгруппы без инволюций, при этом первая подгруппа является ядром группы Фробениуса с дополнением, порождённым всеми элементами простых порядков из второй подгруппы.

9. Установлено, что удовлетворяющая условиям предыдущего пункта группа с тривиальным локально конечным радикалом содержит нормальную силовскую 2-подгруппу, централизатор которой содержит подгруппу, которая порождена всеми элементами простых нечётных порядков из нормальной компоненты разложения группы и является прямым произведением своих силовских подгрупп.

Глава 1 содержит, главным образом, основные определения и технические результаты, необходимые для дальнейшей работы, а также примеры, задающие границы наших исследований и примеры групп, удовлетворяющих условиям теорем.

В § 1.1 приводятся определения конечного элемента, группы Фробениуса, (слабо) сопряжённо бипримитивно конечной группы, насыщающего множества и другие необходимые определения, приводятся известные результаты, используемые при доказательстве теорем.

§ 1.2 посвящён постановке основных задач с описанием известных подходов к их решению.

В § 1.3 приводятся примеры, показывающие независимость условий в нашем определении группы Фробениуса (определение 1.1.24), а также примеры смешанных и периодических не локально конечных групп, удовлетворяющих основным теоремам глав 2 и 3.

Результаты, приведенные в главе 1, являются, в основном, известными фактами.

В **главе 2** исследуются бесконечные группы 2-ранга 1.

В § 2.1 исследуются группы с обособленной не максимальной 2-подгруппой. В теореме 2.1.1 доказано, что при дополнительном условии конечности одной из инволюций группы такая группа будет локально конечной группой Фробениуса с абелевым ядром и дополнением, изоморфным квазициклической или кватернионной группе. Из теоремы 2.1.1 следует частичное положительное решение вопроса **(A)** в случае, когда централизатор некоторой инволюции является 2-

группой, не максимальной в группе.

В теореме 2.1.3 результат теоремы 2.1.1 переносится на случай инволюции j, совершенной в группе и собственной подгруппе группы, содержащей централизатор j.

В § 2.2 исследуется вопрос о справедливости теоремы Бернсайда–Брауэра–Судзуки для некоторых бесконечных групп 2-ранга 1. В теореме 2.2.1 доказано, что теорема Бернсайда–Брауэра–Судзуки верна для периодических групп с условием конечности подгрупп, порождаемых инволюцией i со всяким элементом порядка, не делящегося на 4. Таким образом, вопрос **(A)** решён положительно в классах бинарно конечных и сопряжённо бинарно конечных групп. Определена структура контрпримера (в предположении его существования) к вопросу **(B)** (теорема 2.2.3).

В § 2.3 исследуются периодические группы с обобщённо конечными элементами, насыщенные конечными группами Фробениуса. В теореме 2.3.1 доказано, что периодическая группа, насыщенная конечными группами Фробениуса с дополнениями чётных порядков и содержащая два элемента таких, что произведение их порядков больше 4, а порождённая любой парой сопряжённых с ними элементов подгруппа конечна, является группой Фробениуса с абелевым ядром и дополнением с инволюцией, все элементарные абелевы подгруппы которого циклические. Доказано, что периодическая группа Шункова, насыщенная конечными группами Фробениуса с дополнениями чётных порядков, является локально конечной группой Фробениуса с абелевым ядром и дополнением с инволюцией (следствие 2.3.2).

Результаты второй главы о бесконечных группах с обособленной 2-подгруппой опубликованы в совместной с научным руководителем А. И. Созутовым статье [63]. Идея доказательств теоремы 2.1.1 принадлежит А. И. Созутову, доказательство проведено автором. Следствие 2.1.2 и теорема 2.1.3 принадлежат автору лично. Теоремы 2.2.1 и 2.2.3 опубликованы в [64], результат о справедливости вопроса **(A)** для бинарно конечных и сопряжённо бинарно конечных групп из статьи [64] сформулирован в виде следствия 2.2.2. Теорема 2.3.1 и следствие 2.3.2 опубликованы в [66].

В **главе 3** исследуются бесконечные группы, насыщенные конечными группами Фробениуса.

В § 3.1 приводятся результаты о бинарно конечных и периодических слабо сопряжённо бинарно конечных группах с нетривиальным локально конечным радикалом, насыщенных конечными группами Фробениуса. В теореме 3.1.1 доказано, что периодическая слабо сопряжённо бипримитивно конечная группа с нетривиальным локально конечным радикалом, является группой Фробениуса, найден ряд свойств таких групп. В теореме 3.1.2 при дополнительном условии конечности элементов простых порядков в фактор-группе группы по её локально конечному радикалу определяется строение этой фактор-группы. Аналогичный результат получен для бинарно конечных групп с указанными условиями (теорема 3.1.3).

Существование групп с условием $F > R$ из теорем 3.1.1 – 3.1.3 пока не доказано, но и не опровергнуто. В частности, даже с дополнительным условием насыщенности пока не удалось решить вопрос **(E)**.

В § 3.2 изучаются группы 2-ранга 1, насыщенные конечными группами Фробениуса. В теореме 3.2.1 доказано, что насыщенная конечными группами Фробениуса группа G 2-ранга 1 с конечным элементом чётного порядка, большего 2, разложима в полупрямое произведение своей нормальной периодической абелевой подгруппы F и централизатора инволюции $i \in \langle a \rangle$, при этом для любой периодической подгруппы $T \leqslant C_G(i)$ подгруппа $F \leftthreetimes T$ является группой Фробениуса с ядром F и дополнением T. Получена характеризация ΩFA-групп в классе слабо сопряжённо бипримитивно конечных групп при помощи условия насыщенности конечными группами Фробениуса (теорема 3.2.2).

В § 3.3 исследуются группы 2-ранга > 1, насыщенные конечными группами Фробениуса. В теореме 3.3.1 доказано, что насыщенная конечными группами Фробениуса слабо сопряжённо бипримитивно конечная группа 2-ранга > 1 представима полупрямым произведением своей нормальной периодической подгруппы и подгруппы без инволюций, при этом первая подгруппа является ядром группы Фробениуса с дополнением, порождённым всеми элементами простых порядков из второй подгруппы. Установлено, что удовлетворяющая условиям предыдущего пункта группа с тривиальным локально конечным радикалом содержит нормальную силовскую 2-подгруппу, централизатор которой содержит подгруппу, которая порождена всеми элементами простых нечётных порядков из нормальной компоненты разложения группы и является прямым произведением своих силовских подгрупп (теорема 3.3.2) .

Основные теоремы параграфа 3.1 опубликованы в совместной работе [65] (соавтор А. И. Созутов). Доказательство теоремы 3.1.1 для случая $F < R$ принадлежит А. И. Созутову (лемма 3.1.4 и, для случая $F < R$, леммы 3.1.5, 3.1.7), автор доказал леммы 3.1.9, 3.1.8, 3.1.11 и, для случая $F > R$, леммы 3.1.5, 3.1.7. Теорема 3.1.2 доказана в нераздельном соавторстве с А. И. Созутовым, теорема 3.1.3 принадлежит автору лично.

Результаты параграфов 3.2 и 3.3 опубликованы в совместной с А. И. Созутовым работе [67]. Теоремы 3.2.1 и 3.2.2 о насыщенных конечными группами Фробениуса группах 2-ранга 1 получены автором лично, результаты о группах 2-ранга > 2 (теоремы 3.3.1 и 3.3.2) получены в нераздельном соавторстве с А. И. Созутовым.

Все основные результаты диссертации являются новыми.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [63]– [79]. Публикации [63–67] входят в издания, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях бесконечных групп с инволюциями и условиями конечности, а также при чтении спецкурсов. Результаты диссертации также могут быть использованы при составлении программ специальных курсов для бакалавров, магистрантов и аспирантов университетских математических кафедр.

Результаты диссертационной работы апробировались на заседаниях Красноярского алгебраического семинара (2021 – 2023), на научно-исследовательском семинаре кафедры алгебры и математической логики «Группы и алгебры с условием конечности» (2016 – 2023), международном семинаре «Ural Seminar on Group Theory and Combinatorics» (2022) и докладывались на конференциях:

1. Международная конференция «Алгебра и логика: теория и приложения» (Красноярск, 2016).

2. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Проспект Свободный» Красноярск, 2017-2020, 2022).

3. Международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2017, 2020-2022).

4. Международная молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2017, 2023).

5. Международная школа-конференция «Algorithmic problems in group theory and related areas» (Новосибирск, 2018).

6. Международная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2019).

7. IX Всероссийская с международным участием научно-методическая конференция «Информационные технологии в математике и математическом образовании» (Красноярск, 2020).

8. Конференция «Алгебра и ее приложения» (Пермь, 2020).

9. Конференция международных математических центров мирового уровня (Сочи, 2021).

10. Летняя школа-конференция по алгебраической геометрии (Новосибирск, 2021).

11. Международная школа конференция по теории групп (Брянск, 2022).

12. Международная конференция «Алгебра и динамические системы» (Нальчик, 2022).

13. Вторая конференция Математических центров России (Москва, 2022).

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Созутову Анатолию Ильичу за постановку задач, помощь в освоении методов исследований и внимание к работе. Автор благодарит Дуракова Бориса Константиновича и Дуракова Евгения Борисовича за советы при выборе направления исследований и всестороннюю поддержку. Признателен всем сотрудникам кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики СФУ за хорошие условия работы над диссертацией.

Результаты § 2.1 – 2.2 исследования и их апробация поддержаны Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936). Основные теоремы § 2.3 и главы 3 исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10017).

Глава 1. Исследуемые группы

В главе 1 диссертации приводится наиболее употребляемая терминология, в соответствии, в основном, с монографиями А. И. Созутова [21,32], используемые известные результаты и ряд примеров групп, для которых теоремы Фробениуса, Бернсайда, Брауэра-Судзуки и Томпсона в полном обьеме не верны. Эти примеры обосновывают необходимость дополнительных условий в формулировках доказываемых в диссертации теорем. Приведены также примеры смешанных и периодических не локально конечных групп, удовлетворяющих доказываемым в диссертации теоремам. Примеры построены с помощью известных групп С. И. Адяна, А. Ю. Ольшанского, свободных произведений групп с обьединенными подгруппами и сплетений.

В § 1.1 приводятся определения основных изучаемых классов групп, определение конечного элемента, группы Фробениуса, насыщающего множества, и другие необзодимые понятия. Приводятся известные результаты, используемые при доказательстве теорем.

§ 1.2 посвящён постановке основных задач с описанием известных подходов к их решению.

В § 1.3 приводятся примеры, показывающие независимость условий в нашем определении группы Фробениуса (определение 1.1.24), а также примеры групп, обосновывающие необходимость дополнительных условий конечности в исследованиях и примеры периодических не локально конечных групп, удовлетворяющих основным теоремам глав 2 и 3.

1.1. Используемые определения и результаты

Приведем необходимые определения изучаемых алгебраических систем, в соответствии с [21] и [32].

Определение 1.1.1. *Элемент a называется конечным в группе G, если все подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$ ($g \in G$) конечны.*

Определение 1.1.2. *Группа, в которой каждый элемент простого порядка конечен, называется слабо сопряженно бипримитивно конечной.*

Определение 1.1.3. *Группа, все сечения которой по конечным подгруппам слабо сопряженно бипримитивно конечны, называется сопряженно бипримитивно конечной, или группой Шункова.*

Определение 1.1.4. *Бинарно конечная группа — это периодическая группа, в которой любые два элемента порождают конечную подгруппу.*

Определение 1.1.5. *Говорят, что смешанная группа G обладает периодической частью $T(G)$, если все элементы конечных порядков в G составляют подгруппу $T(G)$.*

Определение 1.1.6. *Через $\Omega_1(G)$ обозначается подгруппа группы G, порожденная всеми элементами простых порядков из G.*

Определение 1.1.7. *Через $O(G)$ обозначается максимальная нормальная периодическая подгруппа без инволюций группы G.*

Таким образом, если G конечна, то $O(G)$ — её максимальная нормальная подгруппа нечётного порядка.

Определение 1.1.8. *Собственная подгруппа B группы G называется сильно вложенной, если B содержит инволюцию и для любого элемента $g \in G \setminus B$ подгруппа $B \cap B^g$ не содержит инволюций.*

2-рангом группы G (конечной или бесконечной) будем называть максимум рангов её элементарных абелевых 2-подгрупп [32, § 1.2].

К числу фундаментальных результатах о конечных группах 2-ранга 1 относят теоремы Бернсайда и Брауэра–Судзуки. С использованием известных результатов о строении конечных 2-групп с единственной инволюцией [38, теорема 12.5.2], следуя Горенстейну [6, теорема 4.88], сформулируем далее эти теоремы в виде единой теоремы.

Предложение 1.1.9 (теорема Бернсайда–Брауэра–Судзуки). *Пусть G — конечная группа, содержащая инволюцию i, и пусть силовские 2-подгруппы группы G являются либо циклическими группами, либо группами кватернионов, либо обобщёнными группами кватернионов. Тогда инволюция $iO(G)$ лежит в центре фактор-группы $G/O(G)$.*

Нам понадобятся следующие хорошо известные свойства групп диэдра (см., например, [21, лемма 2.8]).

Лемма 1.1.10. *Пусть $D = \langle i, j\rangle$, где i и j — различные инволюции. Тогда i и j инвертируют элемент ij, $D = \langle i\rangle \times \langle j\rangle$ в случае $|D| = 4$ и $D = \langle ij\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle$ иначе. Если $|ij|$ чётен, в D есть центральная инволюция $z \in \langle ij\rangle$, в случае нечётности $|ij|$ инволюции i и j сопряжены при помощи инволюции $k \in D$. Группа D конечна тогда и только тогда, когда $|ij|$ конечен.*

Из леммы 1.1.10 следует, что в периодической группе каждая инволюция конечна (то есть является конечным элементом в смысле определения 1.1.1). По определению $[i, G]$ есть группа, порожденная всеми коммутаторами $[i, g] = i^{-1}g^{-1}ig$, где g пробегает G. Хорошо известно, что подгруппа $[i, G]$ нормальна в G (см., например, [32, предложение 2.16]).

Предложение 1.1.11 (лемма Бусаркина, [32, лемма 2.20]). *Пусть G — группа, i — её инволюция, подгруппы $\langle i, i^g\rangle$ конечны для всех $g \in G$ и $C_G(i) = \langle i\rangle$. Тогда $G = F \leftthreetimes \langle i\rangle$, где F — периодическая абелева группа без инволюций, и $f^i = f^{-1}$ для всех $f \in F$.*

Определение 1.1.12. *Инволюцию i назовем совершенной в G, если любые две инволюции из i^G, порядок произведения которых бесконечен, сопряжены при помощи инволюции из i^G.*

Лемма Бусаркина переносится на класс групп с совершенной инволюцией, как показывает следующая лемма.

Предложение 1.1.13 (лемма Созутова, [32, лемма 2.19]). *Пусть G — группа, j — её совершенная в G инволюция. Если $|C_G(j)| = 2$, то $G = F \leftthreetimes \langle j \rangle$ — группа Фробениуса с 2-полным абелевым ядром F и дополнением $\langle j \rangle$.*

Лемма 1.1.14 (лемма Фраттини, [32, лемма 1.10]). *Пусть A — нормальная подгруппа группы G и B — такая подгруппа из A, что $B^G = B^A$. Тогда $G = AN_G(B)$.*

Предложение 1.1.15 (теорема Шмидта, [9, теорема 23.1.1]). *Расширение локально конечной группы при помощи локально конечной группы есть локально конечная группа.*

Определение 1.1.16. *Инволюция i группы G называется почти регулярной, если $|C_G(i)| < \infty|$.*

В теории периодических групп хорошо известен результат В. П. Шункова о локальной конечности периодической группы с почти регулярной инволюцией. Приведём его здесь вместе с обобщениями В. В. Беляева и А. И. Созутова на более широкие классы групп с конечной и совершенной инволюцией соответственно.

Предложение 1.1.17 (теорема Шункова, [50]). *Если периодическая группа обладает почти регулярной инволюцией, то она локально конечна, почти разрешима и обладает полной частью.*

Определение 1.1.18. *FC-коммутантом группы G называют её подгруппу $FC(G) = \{x \in G \mid |G : C_G(x)| < \infty\}$.*

Предложение 1.1.19 (теорема Беляева, [3]). *Пусть группа G содержит конечную почти регулярную инволюцию j. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *G — локально конечная группа;*

2. *$[j, G]$ содержится в FC-радикале группы G и $|G : [j, G]| \leqslant |C_G(j)|$;*

3. *Коммутант FC-радикала группы G конечен.*

Предложение 1.1.20 (теорема Созутова, [32, теорема 2.1]). *Пусть группа G содержит почти регулярную совершенную в G инволюцию j. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *$[j, G]$ содержится в FC-радикале группы G и $|G : [j, G]| \leqslant |C_G(j)|$.*

2. *Коммутант FC-радикала группы G конечен.*

3. *FC-радикал $FC(G)$ содержит нормальную в G нильпотентную класса $\leqslant 2$ подгруппу конечного индекса.*

Следующая теорема хорошо известна.

Предложение 1.1.21 (теорема Ито, [9, теорема 26.8]). *Пусть группа G является произведением двух абелевых подгрупп. Тогда G метабелева (разрешима ступени 2).*

В 2017 году Б. Амберг и Я. П. Сысак доказали теорему, которая обобщает теорему Ито на случай, когда одна или обе подгруппы A и B являются (обобщёнными) группами кватернионов.

Предложение 1.1.22 (теорема Амберга–Сысака, [53, theorem 1.1]). *Пусть группа $G = AB$ является произведением двух подгрупп A и B, каждая из которых либо абелева, либо содержит квазициклическую подгруппу индекса 2. Тогда G разрешима ступени не больше, чем 3. Более того, если A — абелева, а* *подгруппа* B *неабелева и* X — *её квазициклическая подгруппа, то* $AX = XA$ — *метабелева подгруппа индекса 2 в* G.

Далее приведём необходимые результаты о строении групп Фробениуса.

Определение 1.1.23. *Пусть* G — *группа,* H — *её собственная подгруппа. Согласно В. П. Шункову [34],* (G, H) *называется парой Фробениуса, если для любого* $g \in G \setminus H$ *выполняется* $H \cap H^g = 1$. *Следуя Ю. М. Горчакову [7], при тех же условиях будем говорить, что* H *обособлена в* G.

Определение 1.1.24. *Группу* G *мы называем группой Фробениуса с дополнением* H *и ядром* F *при выполнении следующих трех условий:*

1) H *обособлена в* G;

2) множество $F = G \setminus \bigcup_{g\in G} g^{-1}H^{\#}g$ *является подгруппой;*

3) $G = F \leftthreetimes H$.

Предложение 1.1.25 (теорема Бернсайда, [21, теорема 1.2]]). *Если подгруппа* A *дополнения* H *конечной группы Фробениуса имеет порядок* pq, *где* p *и* q — *не обязательно различные простые числа, то* A — *циклическая группа.*

Доказательство следующего утверждения принадлежит Бернсайду. Его можно найти, например, в [35].

Предложение 1.1.26. *Пусть* L — *конечная группа Фробениуса с дополнением* H *и* $i \in H$ — *инволюция. Тогда* $H = C_G(i)$, *инволюция* i *в* H *единственна и* $L = F \leftthreetimes H$, *где* F — *абелева группа, инвертируемая каждой инволюцией из* L.

Хорошо известные свойства (локально) конечных групп Фробениуса [67, предложение 1]:

Предложение 1.1.27. *Пусть $G = F \rtimes H$ — (локально) конечная группа Фробениуса с ядром F и дополнением H. Тогда*

1) *F и H сильно изолированные холловские подгруппы, $\pi(F) \cap \pi(H) = \emptyset$;*

2) *Если в H есть инволюция i, то она единственна в H, $H = C_G(i)$, $x^i = x^{-1}$ для любого $x \in F$ и F — абелева группа;*

3) *F — нильпотентная группа ступени нильпотентности, ограниченной значением некоторой функции от минимального простого числа $p \in \pi(H)$;*

4) *Каждая подгруппа порядка pq из H, где p и q не обязательно различные простые числа, циклическая; силовские p-подгруппы в H либо циклические, либо (обобщенные) группы кватернионов при $p = 2$;*

5) *Произвольная нормальная в G подгруппа либо содержится в F, либо содержит F;*

6) *Собственная подгруппа U группы G либо содержится в F и нильпотентна, либо в одном из дополнений и ее центр нетривиален, либо является группой Фробениуса, ядро которой есть $U \cap F$, а дополнение — пересечение U с одним из дополнений H^g.*

Ядро F конечной группы Фробениуса $G = F \rtimes H$ по предложению 1.1.27 нильпотентно и раскладывается в прямое произведение своих силовских подгрупп; прямое произведение их центров — характеристическая абелева подгруппа F, на которой дополнение H действует регулярно. Строение таких групп H описано Цассенхаузом [62]. Следующий результат А. И. Созутова [28, теорема 1] обобщает результаты Цассенхауза на класс слабо сопряжённо бипримитивно конечных групп. Приведём его в виде, опубликованном в [67].

Предложение 1.1.28. *Если группа H с конечными элементами простых порядков действует свободно на абелевой группе, то её подгруппа $\Omega_1(H)$, по-*

рождённая всеми элементами простых порядков, есть группа одного из типов.

1. $\Omega_1(H)$ — *(локально) циклическая группа.*

2. $\Omega_1(H) = V \times L$, *где* V — *(локально) циклическая* $\{2,3\}'$*-группа,* $L \simeq SL_2(3)$.

3. $\Omega_1(H) = V \times L$, *где* V — *(локально) циклическая* $\{2,3,5\}'$*-группа,* $L \simeq SL_2(5)$.

Определение 1.1.29. *Произвольную группу* $G = F \leftthreetimes H$, *в которой* $\Omega_1(G) = F \leftthreetimes \Omega_1(H)$ — *локально конечная группа Фробениуса с абелевым ядром* F, *назовем* ΩFA*-группой.*

Определение 1.1.30. *Элемент* a *произвольной группы* G *назовем фробениусовым, если все подгруппы* $L_g = \langle a, a^g\rangle$, *где* $g \in G \setminus N_G(\langle a\rangle)$, *являются группами Фробениуса с дополнением* $\langle a\rangle$.

Следующее предложение непосредственно следует из основной теоремы работы [25].

Предложение 1.1.31. *Пусть группа* G *содержит конечный фробениусовый элемент* a *порядка больше двух. Тогда* $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a\rangle)$, $F \leftthreetimes \langle a\rangle$ *является группой Фробениуса с периодическим ядром* F *и дополнением* $\langle a\rangle$, *и для любого* $x \in F$ *подгруппа* $\langle a, x\rangle$ *конечна.*

Определение 1.1.32. *Элемент* a *группы* G *называется* H*-фробениусовым, где* H — *собственная подгруппа группы* G, *если каждая подгруппа* $L_g = \langle a, a^g\rangle$, *где* $g \in G \setminus H$, *является группой Фробениуса с дополнением, содержащим элемент* a.

Строение групп с H-фробениусовым элементом чётного порядка, большего двух, определяет следующая основная теорема работы [20].

Предложение 1.1.33. *Если группа G содержит H-фробениусовый элемент a чётного порядка > 2, то $G = F \leftthreetimes C_G(i)$, где i — инволюция из $\langle a \rangle$, F — периодическая абелева подгруппа.*

Г. Хигман [56] доказал, что класс нильпотентности конечной группы, допускающей регулярный автоморфизм простого порядка p, не превосходит некоторой константы $k(p)$. Им же было установлено, что $k(p) \geq \frac{p^2-1}{4}$. В. А. Крекниным и А. И. Кострикиным в [10] была найдена верхняя граница: $k(p) \leq \frac{(p-1)^{2^{p-1}}-1}{p-1}$ (см., например, [35], [21, стр. 18]).

Определение 1.1.34. *Для дополнения Фробениуса H группы $G = F \leftthreetimes H$ обозначим через $k(H)$ минимум значений функции $k(p)$ по $p \in \pi(H)$.*

1.2. Основные задачи

В данном параграфе приведены вопросы, стоящие в центре наших исследований.

До сих пор не решён поставленный в 1973 году вопрос 4.75 В. П. Шункова в Коуровской тетради [58] о том, справедливо ли обобщение теоремы Бернсайда–Брауэра–Судзуки в классе периодических групп.

(A) *Пусть G — периодическая группа, содержащая инволюцию i, и пусть силовские 2-подгруппы группы G являются либо локально циклическими группами, либо обобщенными группами кватернионов. Будет ли инволюция $iO(G)$ центральным элементом в $G/O(G)$?*

Ответ на него неизвестен, даже если централизатор инволюции i — квазициклическая 2-группа (вопрос В. Д. Мазурова 15.54 из Коуровской тетради [58], поставленный в 2002 году):

(B) *Предположим, что периодическая группа G содержит инволюцию i, централизатор которой — локально циклическая 2-группа. Верно ли, что множество всех элементов нечётного порядка из G, инвертируемых инволюцией i, составляет подгруппу?*

Ответ на вопрос **(B)** положителен в случаях, когда G действует точно дважды транзитивно на множестве $G/C_G(i)$ смежных классов группы G по $C_G(i)$ [36] и когда $C_G(i)$ не максимальна в G [23].

В параграфе 2.3 и главе 3 диссертации исследуются бесконечные группы, в которых каждая конечная подгруппа содержится в конечной фробениусовой подгруппе (условие насыщенности), при различных дополнительных условиях конечности. Сложность исследования периодических групп с таким условием насыщенности без дополнительных условий показывают следующие вопросы 20.94 и 20.95 А. И. Созутова из Коуровской тетради [58]. Результаты главы 3 направлены на частичное положительное решение вопроса **(C)** и выяснение свойств контрпримера к вопросу **(D)**.

(C) *Существует ли бесконечная периодическая простая группа, насыщенная конечными группами Фробениуса?*

(D) *Будет ли группой Фробениуса периодическая группа, содержащая инволюцию и насыщенная конечными группами Фробениуса, если в ней нет четверных подгрупп Клейна?*

До сих пор неизвестно, существуют ли группы Фробениуса с циклическим дополнением, порождённым конечным элементом (вопрос 6.56 В. П. Шункова из Коуровской тетради [58], 1978 г.).

(E) *Пусть* $G = F \cdot \langle a \rangle$ *— группа Фробениуса, причем дополнение* $\langle a \rangle$ *имеет простой порядок.*

a) Если G бинарно конечна, то будет ли она локально конечной?

b) Если группы $\langle a, a^g \rangle$ конечны для всех $g \in G$, то будет ли ядро F локально конечной группой?

В диссертационном исследовании доказывается, что если при рассматриваемых нами дополнительных условиях группа G из пункта б) существует, то ядро группы G разложимо в прямое произведение своих силовских подгрупп (теоремы 3.1.1 – 3.1.3).

1.3. Границы исследований

В данном параграфе приведены примеры не локально конечных периодических смешанных групп, задаюшие границы наших исследований.

Теорема Фробениуса неверна в классах всех групп и периодических групп. В предлагаемых примерах из [21, глава 2] показано многообразие возможностей, возникающих в связи с определением группы Фробениуса (определение 1.1.24). Сначала приведём примеры групп без кручения.

Пример 1.3.1. *Пусть G — свободная группа с двумя образующими, H — максимальная абелева подгруппа из коммутанта группы G. Из свойств свободных групп [12, 38] вытекает, что (G, H) — пара Фробениуса, т.е. выполняется условие 2 определения группы Фробениуса. Однако для H очевидно не существует нормального дополнения.*

Пример 1.3.2. *Пусть $G = \langle a, b \rangle$ — свободная группа с двумя образующими, $H = \langle a \rangle$. Из свойств свободных групп [12, 38] следует, что (G, H) — пара Фробениуса, и для H существуют нормальные дополнения F, $G = F \leftthreetimes H$. Тем самым выполняются условия 1, 2 определения группы Фробениуса. Однако ни для какого дополнения F не может выполняться равенство $G \setminus F^{\#} \neq \cup H^x$ (условие 3), поскольку G/G' — свободная абелева группа ранга 2.*

Подгруппа H группы G, содержащая представители всех классов сопряжённых элементов из G, называется *сопряжённо плотной.* В примере 1.3.3 каждая собственная подгруппа группы G является сопряжённо плотной.

Пример 1.3.3. *Существуют группа без кручения, все неединичные элементы в которых сопряжены [12]. Тем самым для любой собственной подгруппы H такой группы G множество F из условия определения группы Фробениуса есть единичная подгруппа, но $G \neq F \leftthreetimes H$.*

Пример 1.3.4. *Пусть G — простая группа Ольшанского, все собственные подгруппы которой бесконечные циклические [18], а H — ее максимальная* *циклическая подгруппа. Тогда, очевидно, (G, H) — пара Фробениуса, но H не обладает в G нормальным дополнением.*

Следующие группы могут быть и смешанными.

Пример 1.3.5. *Пусть F_1 — периодическая группа Новикова-Адяна [2], H — циклическая подгруппа из её коммутанта и F_2, F_3, $\ldots$ — конечная или бесконечная последовательность конечных групп Фробениуса с дополнительным множителем, изоморфным H. Обозначим через G свободное произведение групп F_1, F_2, $\ldots$, F_n, $\ldots$ с объединенной подгруппой H. Из свойств таких произведений [12] и свободных бернсайдовых групп нечётного периода $n \geq 665$ [2] следует, что (G, H) — пара Фробениуса, но для H в G не существует нормального дополнения.*

Примеры периодических групп.

Пример 1.3.6. *Пусть $G = B(m, n)$ — свободная m-порожденная группа нечетного периода $n \geqslant 665$. В коммутанте группы G возьмем произвольную циклическую подгруппу и обозначим через H максимальную циклическую подгруппу из G, содержащую выбранную подгруппу. Как показал С. И. Адян [2], максимальные циклические подгруппы в G пересекаются тривиально. Это означает, что (G, H) — пара Фробениуса. Однако H, очевидно, не обладает нормальным дополнением.*

Пример 1.3.7. *Пусть $G = \langle a, b\rangle = B(2, n)$ — свободная 2-порождённая группа нечетного периода $n \geqslant 665$ и $H = \langle a\rangle$. Как и в предыдущем примере, подгруппа H обособлена в G, при этом для неё в G существуют нормальные дополнения, и выполняются условия 1), 2) определения группы Фробениуса. Однако для каждого такого дополнения F условие 3) определения группы Фробениуса не выполняется, поскольку G/G' — прямое произведение двух циклических подгрупп порядка n.*

Пример 1.3.8. *Пусть G — бесконечная p-группа Ольшанского, все собственные подгруппы которой сопряжены [18], и H — её собственная подгруппа. Тогда (G, H) — пара Фробениуса, $F = G \setminus \cup_{x \in G}(H \setminus \{1\})^x$ — подгруппа, равная единичной. Однако $G \neq F \leftthreetimes H$ и H не обладает в G нормальным дополнением.*

Пример 1.3.9. *Для всякого простого $p \geqslant 3$ существует такая бесконечная 2-порожденная p-группа G, содержащая обособленную квазициклическую подгруппу H, что каждый элемент $g \in G$ сопряжен в G с некоторым элементом из H [18].*

Пример 1.3.10. *Пусть $G = B \leftthreetimes \langle a \rangle$, где $B \cong B(m, n)$ — свободная m-порождённая группа периода $n \geq 665$ [2], $m > 1$, a — автоморфизм группы B порядка два, существующий ввиду свободы B, и $H = C_G(a)$. Тогда (G, H) — пара Фробениуса, H — бесконечная группа и для H в G не существует нормального дополнения.*

Доказательство. Пусть b — отличная от a инволюция из G. Поскольку в $B(m, n)$ нет элементов чётного порядка, то $b \in G \setminus H$. Группа диэдра $\langle a, b \rangle$ не может содержать четверной подгруппы Клейна, так как $|G/B| = 2$, отсюда по лемме 1.1.10 инволюции a и b сопряжены в B и не перестановочны. Следовательно, инволюция a единственна в H, и $N_G(H) = H$. Если $x \in G \setminus H$ и $1 \neq b \in H^x \cap H$, то $c = a \cdot x^{-1}ax \neq 1$, $c^a = c^{-1}$ и $b \in C_G(c)$. Ввиду свойств групп Новикова-Адяна [2] $C_G(c) = \langle c \rangle$ — циклическая группа порядка k, делящего n. Но тогда $\langle c \rangle \leqslant \langle b \rangle$ и $a^{-1}ca = c$, что невозможно ввиду выбора c. Полученное противоречие означает, что $H \cap H^x = 1$ для любого $x \in G \setminus H$ и (G, H) — пара Фробениуса. Предположим, что $G = F \leftthreetimes H$. Тогда автоморфизм a действует на периодической группе F регулярно, и поэтому F — абелева группа. Получили противоречие, поскольку в $B(m, n)$ нет абелевых нормальных подгрупп [2]. Значит, для H в G не существует нормального дополнения. Наконец, бесконечность подгруппы H вытекает из теоремы Шункова (предложение 1.1.17). □

Если $A = A(m,n)$ — группа Адяна [2], $\langle d\rangle = Z(A)$ и k — натуральное число, то хорошо известно, что $H = A/\langle d^k\rangle$ — группа периода $\frac{nk}{(n,k)}$ с циклическим неотщепляемым центром $Z = \langle d\rangle/\langle d^k\rangle$ порядка k и $H/Z \simeq B(m,n)$.

Пример 1.3.11. *Если $n = p$, $k = q$ — простые числа, то силовская q-подгруппа в H единственна, совпадает с Z, и не выделяется прямым множителем в H.*

Следующий пример опубликован А. И. Созутовым в 1980 г. в [29]. Заметим, что в том же году группы, аналогичные группам H из [29, 30], были построены А. Ю. Ольшанским [19], [18, теорема 35.1] и В. Л. Ширваняном [39].

Пример 1.3.12. *В случае, когда $\pi(n) \subseteq \pi(k)$, $\Omega_1(H)$ — центральная циклическая подгруппа в H, и группа H слабо сопряженно бипримитивно конечна.*

Как следует из предложения 1.1.28, при условии $|V| > 2$ существует бесконечно много не изоморфных локально конечных, и не локально конечных периодических групп H, в которых подгруппа $\Omega_1(H)$ изоморфна фиксированной группе Ω любого из указанных в предложении 1.1.28 типов. Рассматривая их свободные произведения с обьединенной подгруппой Ω, получим бесконечное множество смешанных групп H, порожденных множествами их элементов конечных порядков, в которых $\Omega_1(H) = \Omega$. Если при этом H — периодическая группа, то $G = F_H \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с ядром F_H и дополнением H. Если H — смешанная группа, то $\Omega_1(G) = F_H \leftthreetimes \Omega$ — локально конечная группа Фробениуса, и $F_H \leftthreetimes K$ — группа Фробениуса для любой неединичной периодической подгруппы $K \leq H$.

Приведем пример периодической не локально конечной группы, удовлетворяющей и условиям, и утверждениям теоремы 3.1.1 (при $F < R$), построенный в [29, 30] с помощью группы H из примера 1.3.12.

Пример 1.3.13. *Для любого простого числа $q \notin \pi(H)$ существует слабо сопряженно бипримитивно конечная группа Фробениуса $G = F \leftthreetimes H$ с (элемен-*

тарным) абелевым ядром F и периодическим не локально конечным дополнением H.

Построим пример смешанной группы с конечным элементом простого порядка p, насыщенную конечными группами Фробениуса с дополнениями порядков, кратных p.

Пример 1.3.14. *Для любого простого числа p существует насыщенная конечными группами Фробениуса смешанная группа с дополнениями порядков, кратных p.*

Доказательство. Пусть H — свободное произведение циклических подгрупп порядка p^2 и p^3 с объединённой подгруппой $\langle a \rangle$ порядка p, и рассмотрим сплетение G циклической группы некоторого простого порядка $q \neq p$ и группы H, бесконечная абелева подгруппа F — база этого сплетения.

Возьмём фактор-группу группы G по $C_F(\langle a \rangle)$, получим смешанную группу $\overline{G}$, насыщенную конечными группами Фробениуса с дополнениями, порядки которых кратны p. Подгруппа $\overline{F} \leftthreetimes \langle \overline{a} \rangle$ по теореме Шмидта (предложение 1.1.15) локально конечна, следовательно, все элементы порядка p в группе $\overline{G}$ конечны. $\square$

В частности, при $p = 2$ группа $\overline{G}$ удовлетворяет условию и заключению теоремы 2.3.1.

Глава 2. Группы 2-ранга 1

Глава посвящена изложению результатов, из которых следуют частичные положительные ответы на вопросы **(A)** и **(B)**.

В § 2.1 исследуются группы с обособленной не максимальной 2-подгруппой. Доказывается, что группы с не максимальными обособленными 2-подгруппами, содержащие конечную или совершенную инволюцию, являются группами Фробениуса (теоремы 2.1.1, 2.1.3 и следствие 2.1.2).

В § 2.2 найдено одно достаточное условие выполнимости в группе теоремы Бернсайда–Брауэра–Сузуки (2.2.1, следствие 2.2.2). В теореме 2.2.1 указаны некоторые свойства контрпримера к вопросу **(B)** в предположении его существования.

В § 2.3 главы исследуются насыщенные конечными группами Фробениуса с дополнениями четных порядков периодические группы с парой элементов a, b таких, что элемент a со всяким сопряжённым с элементом b порождает конечную подгруппу. Доказано, что такие группы являются группами Фробениуса с абелевыми ядрами и дополнениями, все элементарные абелевы подгруппы которых циклические.

2.1. Группы с обособленной не максимальной 2-подгруппой

Параграф посвящён доказательству следующих результатов.

Теорема 2.1.1. *Группа G с обособленной, не максимальной в G 2-подгруппой T и конечной инволюцией i локально конечна и является группой Фробениуса с абелевым ядром $[i, G]$ и локально циклическим, или (обобщенно) кватернионным дополнением T.*

Следствие 2.1.2. *Если в несчетной группе G с конечной инволюцией i централизатор некоторой инволюции — 2-группа ранга 1, то G — локально конечная группа Фробениуса.*

Теорема 2.1.3. *Пусть 2-подгруппа T в группе G обособлена, $T < B < G$, и в T есть инволюция i, совершенная в B и G. Тогда G — группа Фробениуса с 2-полным абелевым ядром $[i, G]$ и локально циклическим или (обобщенно) кватернионным дополнением T.*

Пусть выполняются условия теоремы 2.1.1 и J — множество инволюций из G.

Лемма 2.1.4. *Все инволюции в G сопряжены, порядок произведения любых двух инволюций $j, k \in J$ конечен, нечетен и $j = k^v$ для единственной инволюции $v \in J \cap \langle j, k\rangle$. Подгруппа T либо локально циклическая, либо (обобщенная) группа кватернионов (конечная, или бесконечная), и можно считать, что $T = C_G(i)$.*

Доказательство. Пусть $j \in J \cap T$ и $k \in i^G \setminus T$. В силу конечности i в G подгруппы $\langle k, k^j\rangle$ и $D = \langle k, j\rangle = \langle k, k^j\rangle \cdot \langle j\rangle$ конечны. Из обособленности T в G и лемме 1.1.10) следует, что $|jk| = 2n + 1$, $j = k^c = k^v$, где $c = (jk)^n$, $v = cj \in J \cap D$. Следовательно, $T \cap J \subseteq i^G$. Если теперь k — произвольная инволюция из $J \setminus T$, то подгруппы $\langle k, k^j\rangle$ и $D = \langle k, j\rangle$ конечны уже в силу конечности j в G, $k = j^v$ для однозначно определенной инволюции $v \in D$ и $J = i^G$.

Если $t \in J \cap T$, то как и выше $t = k^s$, $k = t^s$, где $s \in J \setminus T$. Ввиду равенства $t^{sv} = j$ и обособленности T в G имеем $sv \in T \cap T^s = 1$, $s = v$, $t = j$, $T \cap J = \{j\}$ и $T = C_G(j)$. По теореме Шункова (теорема 2.15 из [32]) T либо локально циклическая, либо (обобщенно) кватернионная группа (конечная, или бесконечная). Лемма доказана. $\square$

В силу леммы 2.1.4 далее считаем, что $T = C_G(i)$. Если подгруппа T конечна, то по предложению 1.1.19 группа G локально конечна и в этом случае $G = [i, G] \leftthreetimes C_G(i)$ — локально конечная группа Фробениуса с ядром $[i, G]$ и дополнением $T = C_G(i)$. Таким образом, справедлива

Лемма 2.1.5. *Когда подгруппа T конечна, теорема верна.*

На основании леммы 2.1.5 будем предполагать, что подгруппа $T = C_G(i)$ бесконечна. Собственная подгруппа B группы G называется *сильно вложенной*, если B содержит инволюцию и для любого элемента $g \in G \setminus B$ подгруппа $B \cap B^g$ не содержит инволюций. В силу условий теоремы $T < B < G$, где B — некоторая подгруппа.

Лемма 2.1.6. *Подгруппа B сильно вложена в G.*

Доказательство. Пусть $g \in G \setminus B$ и предположим, что $k = j^g \in B \cap B^g$ для некоторой инволюции $j \in B$. Как вытекает из леммы 2.1.4, примененной к группе B, $i^B = j^B$ и $k^v = j$ для некоторой инволюции $v \in B$. Но тогда $gv \in C_G(j) < B$, что противоречит выбору элемента g. Следовательно, B сильно вложена в G. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.1.7. $B = [i, B] \leftthreetimes C_G(i)$ *— локально конечная группа Фробениуса с ядром $[i, B]$ и дополнением $C_G(i)$.*

Доказательство. По определению сильно вложенной подгруппы множество $J \setminus B$ непусто. Пусть k — произвольная инволюция из $G \setminus B$. По лемме 2.1 из [27] в подгруппе B существует множество M_k строго вещественных относительно k элементов той же мощности, что и множество инволюций из B (очевидно, что при сделанных предположениях $|J \cap B| = |B|$). В частности, подгруппа $H = B \cap B^k$ неединична, при этом $H^k = H$ и $C_H(k) = 1$. По лемме 1.1.11 H — периодическая абелева группа без инволюций. По лемме 2.2 из [27] $B = H \cdot C_G(i)$, то есть группа B факторизуема абелевой подгруппой H и подгруппой $T = C_G(i)$. В силу леммы 2.1.4 T либо абелева (квазициклическая) группа, либо содержит нормальную абелеву (квазициклическую) подгруппу C индекса 2. В первом случае по известной теореме Ито [57] коммутант K группы B абелев. Из $i \in K$ следовало бы $K \leq C_G(i) = T$ и $B \leq C_G(i)$, вопреки выбору $B \neq C_G(i)$. Поэтому $i \notin K$ и $K \cap C_G(i) = 1$. По лемме 1.1.11 K — периодическая абелева группа без инволюций, каждый элемент которой инвертируется инволюцией i. Поскольку фактор-группа B/K абелева, то $[i, B] = K$ и очевидно, что $B = [i, B] \leftthreetimes C_G(i)$ — локально конечная группа Фробениуса с ядром $[i, B]$ и дополнением $C_G(i)$. Во втором случае группа B не более чем 3-ступенно разрешима по предложению 1.1.22, при этом множество HC является подгруппой индекса 2 в B с абелевым коммутантом K. Как и выше, из $i \in K$ следовало бы $K \leq C_G(i) = T$ и $C_G(i) = B$ вопреки выбору B, поэтому $i \notin K$ и $K \cap C_G(i) = 1$. Снова по лемме 1.1.11 K — периодическая абелева группа без инволюций, и $B = [i, B] \leftthreetimes C_G(i)$ — локально конечная группа Фробениуса с ядром $[i, B]$ и дополнением $C_G(i)$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2.1.1. В случае, когда подгруппа $C_G(i)$ конечна, теорема следует из леммы 2.1.5. Пусть подгруппа $C_G(i)$ бесконечна и k — произвольная инволюция из $G \setminus B$. В силу леммы 2.1.6 и лемм 2.1 – 2.2 из [27] подгруппа $H_k = B \cap B^k$ не содержит инволюций и $B = H_k T$. Поскольку по лемме 2.1.7 B — группа Фробениуса, дополнение T которой 2-группа, то $H_k \leq [i, B]$ и из

$B = H_kT$ следует $H_k = [i, B]$. По лемме 1.1.11 k инвертирует каждый элемент b из $[i, B]$. Отсюда следует $\langle J\rangle = C_G(b) \leftthreetimes \langle i\rangle$, по лемме 1.1.11 $C_G(b) = [i, G]$ — периодическая абелева группа без инволюций, инвертируемая каждой инволюцией из J. По лемме 1.1.14 $G = [i, G] \leftthreetimes C_G(i)$, по теореме Шмидта (предложение 1.1.15) группа G локально конечна и очевидно является группой Фробениуса с абелевым ядром $[i, G]$ и дополнением $C_G(i)$. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 2.1.3. Пусть выполняются условия теоремы 2.1.3, и J — множество инволюций из G. Воспользуемся схемой доказательства теоремы 2.1.1. Пусть $k \in J\setminus T$. Если подгруппа $D = \langle i, k\rangle$ конечна, то по лемме 2.1.4 $k = i^v$ ($v \in J \cap D$). Если D бесконечна, то порядок элемента $ikik$ бесконечен и по определению совершенной инволюции $i^k = i^v$ для некоторой инволюции $v \in i^G$. Отсюда $kv \in C_G(i)$ и $k = v$ ввиду обособленности T. Следовательно, $J = i^G$, $B \cap J = i^B$. Далее, для $t \in J \cap T$ имеем $t = k^s$, где $s \in J \setminus T$, $i^{vs} = t$, $vs \in T \cap T^s = 1$, $s = v$, $T \cap J = \{i\}$ и $T = C_G(i)$. По теореме Шункова T либо локально циклическая, либо (обобщенно) кватернионная группа (конечная, или бесконечная).

Выделим попутно доказанное свойство: для любых двух различных инволюций $j, k \in G$ в G существует единственная инволюция $v = v(j, k)$ такая, что $j^v = k$, $k^v = j$.

Поскольку $C_G(i) < B$ и $B \cap J = i^B$, то подгруппа B сильно вложена в G. Пусть $g \in G \setminus B$, k, t — не обязательно различные инволюции из B и $D = \langle g^{-1}kg, i\rangle$. Как доказано выше, в $J\setminus B$ найдется инволюция v_k такая, что $v_kiv_k = g^{-1}kg$. Так как $i = v_kg^{-1}kgv_k$, то $v_k \in Bg$. Аналогично определим инволюцию v_t: $v_tiv_t = g^{-1}tg$, $v_t \in Bg$. Если $k \neq t$, то $g^{-1}kg = v_kiv_k \neq g^{-1}tg = v_tiv_t$ и $v_k \neq v_t$. Пусть v — произвольная инволюция из Bg, $g = bv$, где $b \in B$. Положим $k = bib^{-1}$. Тогда $g^{-1}kg = viv$ и $v = v_k$. Таким образом, отображение $J \cap B \to J \cap Bg$: $k \leftrightarrow v_k$ биективно. При $g = v_k = v$ имеем $vtv = v_tiv_t$ и $i^{v_tv} = t$. Значит, $v_tv \in H = B \cap B^v$, $J \cap Bv = J \cap (H \leftthreetimes \langle v\rangle)$, $i^B = i^H$ и $B = C_G(i)H$. Так как

B сильно вложена в G, то в подгруппе H нет инволюций, и поскольку $C_G(i)$ — 2-группа, то $C_H(i) = 1$. Отсюда следует, что для произвольных различных элементов $h_1, h_2 \in H$ инволюции $t_1 = i^{h_1}$ и $t_2 = i^{h_2}$ различны. С другой стороны, как показано выше, $i^{v_{t_1}v} = t_1$ и $v_{t_1}v \in H$. Значит, $h_1 = v_{t_1}v$, $h_2 = v_{t_2}v$, $h_1^v = h_1^{-1}$, $h_2^v = h_2^{-1}$, $h_2h_1 = (h_1^{-1}h_2^{-1})^{-1} = (h_1^v h_2^v)^v = h_1h_2$ и H — абелева группа.

Далее, как и в доказательстве теоремы 2.1.1 заключаем, что либо по теореме Ито (предложение 1.1.21) коммутант K группы B абелев, либо по предложению 1.1.22 группа B содержит подгруппу индекса 2 с абелевым коммутантом K, при этом $i \notin K$ и $K \cap C_G(i) = 1$. Отсюда легко следует, что подгруппа $V = K \leftthreetimes \langle i \rangle$ нормальна в B и содержит все инволюции из B. Следовательно, инволюция i совершенна в V, и по лемме 1.1.13 V — группа Фробениуса с 2-полным ядром K и дополнением $\langle i \rangle$. Ввиду леммы 1.1.14 $B = K \leftthreetimes T$ и по теореме из [7] B — группа Фробениуса с ядром K и дополнением T. Отсюда и из доказанного выше заключаем, что $K = B \cap B^v$ для любой инволюции $v \in J \setminus B$, $C_K(v) = 1$ и v инвертирует K. Значит, $N = \langle J \rangle = C_G(K) \leftthreetimes \langle i \rangle$ и по лемме 1.1.13 N — группа Фробениуса с 2-полным ядром $C_G(K) = [i, G]$ и дополнением $\langle i \rangle$. Применяя лемму 1.1.14 и теорему из [7] заключаем, что теорема 2.1.3 верна. $\square$

2.2. О теореме Бернсайда–Брауэра–Судзуки для некоторых бесконечных групп 2-ранга 1

В следующей теореме приводятся дополнительные условия, при которых для периодической группы справедлив аналог теоремы Бернсайда–Брауэра–Судзуки.

Теорема 2.2.1. *Пусть G — периодическая группа 2-ранга 1 и её инволюция i порождает с каждым элементом конечного порядка из G, не делящегося на 4, конечную подгруппу. Тогда $iO(G) \in Z(G/O(G))$.*

В частности, из теоремы 2.2.1 следует положительное решение вопроса **(A)** в классах бинарно конечных и сопряжённо бинарно конечных групп.

Следствие 2.2.2. *Пусть G — (сопряжённо) бинарно конечная группа, i — её инволюция. Тогда $iO(G) \in Z(G/O(G))$.*

Следующая теорема описывает свойства контрпримера к вопросу **(B)** в предположении его существования.

Теорема 2.2.3. *Пусть G — не локально конечная группа с конечной инволюцией и централизатор T некоторой её инволюции i — локально циклическая 2-группа. Тогда T максимальна в G, группа G проста и изоморфна фактор-группе свободного произведения $X = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_n$ циклических групп порядка 2 и n для любого $n > 2$ из её спектра.*

Доказательство теоремы 2.2.1. Будем обозначать через $J(G)$ множество инволюций группы G.

Пусть группа G и её инволюция i удовлетворяют условиям теоремы 2.2.1. Если j, k — инволюции из G, то подгруппа $\langle j, k\rangle$ по условию конечна. Порядок элемента jk нечётен, поскольку иначе по лемме 1.1.10 в $\langle j, k\rangle$ содержалась бы четверная подгруппа Клейна 2-ранга 2. Поэтому по лемме 1.1.10 инволюции j и k сопряжены, а в силу произвольности выбора j и k все инволюции в G сопряжены и $J(G) = i^G$.

Пусть X — множество всех элементов из G, имеющих нечётный порядок, а Y — множество всех элементов из G, имеющих порядок вида $2(2n-1)$, $n \in \mathbb{N}$. Для любого $x \in X$ ввиду условий теоремы подгруппа $H_x = \langle x, i\rangle$ конечна. Поскольку образы $\overline{i}$ и $\overline{x}$ элементов i и x в фактор-группе $\overline{H_x} = H_x/O(H_x)$ в силу теоремы Бернсайда–Брауэра–Судзуки (предложение 1.1.9) перестановочны, а порядки их взаимно просты, то $|\overline{i}\overline{x}| = 2|\overline{x}|$. Так как порядок $O(H_x)$ нечётен, то прообраз $ix \in G$ элемента $\overline{i}\overline{x}$ лежит в Y.

Аналогично, для любого $y \in Y$ подгруппа $H_y = \langle y, i\rangle$ по условию теоремы конечна. Обозначим теперь через $\overline{i}$ и $\overline{y}$ образы i и y в фактор-группе $\overline{H_y} = H_y/O(H_y)$ соответственно. Из сопряжённости по второй теореме Силова [38, теорема 4.2.2] всех силовских 2-подгрупп в H_y и единственности инволюций в них следует сопряжённость инволюций в H_y. Поэтому все инволюции в $\overline{H_y}$ сопряжены, а поскольку $\bar{i} \in Z(\overline{H_y})$ по теореме Бернсайда–Брауэра–Судзуки (предложение 1.1.9), то $J(\overline{H_y}) = \{\bar{i}\}$. Так как $y \in Y$, то $|\overline{y}| = 2(2k-1)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\overline{y}^{2k-1}$ — инволюция и по доказанному равна $\bar{i}$. Поэтому $|\bar{i}\overline{y}| = 2k-1$. Отсюда из нечётности $|O(H_y)|$ следует, что $iy \in X$.

Таким образом, $iX \subseteq Y$ и $iY \subseteq X$, откуда следует $iX = Y$ и $iY = X$. Тогда для каждого $g \in G$ верны равенства $(iX)^g = Y^g$ и $(iY)^g = X^g$, откуда в силу инвариантности множеств X и Y получаем $i^gX = Y$ и $i^gY = X$. Поскольку элемент g был выбран произвольно, то $jX = Y$ и $jY = X$ для любой инволюции $j \in i^G$.

Из вышеизложенного следует, что подгруппа $B = \langle i^G \rangle$ домножениями слева транзитивно действует на множестве $\{X, Y\}$. А именно, те элементы из B, которые представляются произведением чётного числа инволюций, оставляют множества X и Y на месте домножениями слева и, следовательно, составляют подгруппу H — стабилизатор точек X и Y [38, теорема 5.2.1], где

$$H = \langle jk \mid j, k \in i^G \rangle = \{h \in B \mid hX = X,\ hY = Y\}.$$

Все оставшиеся элементы из B, являющиеся произведениями нечётного числа инволюций, домножением слева переставляют множества X и Y и составляют смежный класс Hi [38, теорема 5.3.1].

Таким образом, $B = H \leftthreetimes \langle i \rangle$. Подгруппы H и B порождаются инвариантными множествами и, следовательно, нормальны в G. Поэтому в фактор-группе $\overline{G} = G/T$ образ подгруппы B — нормальная подгруппа $\overline{B}$, изоморфная по свойствам полупрямого произведения [5, гл. 10, § 1] подгруппе $\langle i \rangle$. Следовательно, $\overline{B}$ порождается образом $\bar{i}$ инволюции i, и $\bar{i}$ лежит в центре $\overline{G}$. Если $O(G) = H$, то теорема доказана; если же $O(G) > H$, то $G/O(G) \simeq (G/H)/(O(G)/H)$ [12, гл. 2, § 10], а поскольку группа $\overline{O(G)} = O(G)/H$ нечётного порядка, то образ инволюции $\bar{i}$ в фактор-группе $\overline{G}/\overline{O(G)}$ является инволюцией $iO(G) = \bar{\bar{i}}$. Подгруппа $\langle \bar{\bar{i}} \rangle$ нормальна в $\overline{G}/\overline{O(G)}$ как образ нормальной подгруппы $\overline{B}$ [12, гл. 2, § 10]. Следовательно, инволюция $iO(G)$ лежит в центре фактор-группы $\overline{G}/\overline{O(G)} \simeq G/O(G)$ и теорема доказана. $\square$

Доказательство следствия 2.2.2. Бинарно конечная группа 2-ранга 1, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 2.2.1, и вопрос **(A)** для неё решается положительно. Пусть G — сопряжённо бинарно конечная группа 2-ранга 1 с инволюцией i, a — её элемент порядка, не делящегося на 4. Тогда подгруппа $\langle a, i\rangle = \langle a, a^i\rangle \cdot \langle i\rangle$ в силу сопряжённо бинарной конечности группы G конечна. Таким образом, для группы G выполнены условия теоремы 2.2.1, следовательно, $iO(G) \in Z(G/O(G))$. Следствие доказано. $\square$

Доказательство теоремы 2.2.3. Пусть группа G, её инволюция i и подгруппа $T = C_G(i)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.2.3. Если T не максимальна в G, то по теореме А. И. Созутова [23] G локально конечна, что противоречит условию теоремы. Следовательно, T максимальна в G. Если для некоторого неединичного элемента $x \notin i^G$ подгруппы $\langle i, x^g\rangle$ для каждого $g \in G$ конечны, то G локально конечна [21, теорема 2.12] вопреки условиям. Следовательно, в каждом классе $x^G \notin \{\{1\}, i^G\}$ найдётся элемент a такой, что подгруппа $K = \langle i, a\rangle$ бесконечна. Тогда очевидно, что $a \notin T$ и $K \neq T$.

Если $K > T$, то в силу максимальности T имеем $K = G$. Пусть теперь $K \not> T$. Поскольку $i \in K$, то $H = K \cap T > 1$ и в силу строения локально циклической 2-группы T подгруппа H конечна. Инволюция i конечна в K, поскольку она конечна в G, и по теореме В. В. Беляева [3] группа K локально конечна и, в силу двупорождённости, конечна. Получившееся противоречие доказывает, что $G = \langle i, a\rangle$. В силу того, что элемент x мы можем взять любого порядка $n > 2$ из спектра группы, этим доказано третье утверждение теоремы.

Докажем теперь от противного, что группа G проста. Пусть $H \triangleleft G$. Если $i \in H$, то поскольку в централизаторе инволюции i нет четверных подгрупп Клейна, по лемме 1.1.10 произведение ij для всякой инволюции $j \in i^G \setminus \{i\}$ имеет нечётный порядок, и класс сопряжённых с jk элементов содержится в H

в силу её нормальности в G. Следовательно, H содержит отличные от $\{1\}$ и i^G классы сопряжённых элементов. В каждом из таких классов x^G по доказанному найдётся такой элемент a, что $G = \langle i, a \rangle$. Но тогда $H = G$ — противоречие.

Если теперь $i \notin H$, то $C_H(i) = H \cap T = 1$. Кроме того, в H, как и в предыдущем случае, найдётся такой элемент a, что $G = \langle i, a \rangle$. Имеем $G = \langle H, i \rangle = H \leftthreetimes \langle i \rangle$. Но тогда $T = C_G(i) = \langle i \rangle \cdot C_H(i) = \langle i \rangle$ — противоречие. Следовательно, G проста и тем самым теорема 2.2.3 доказана. □

2.3. Группы, насыщенные конечными группами Фробениуса с дополнениями чётных порядков

Параграф посвящён доказательству следующего результата.

Теорема 2.3.1. *Пусть G — периодическая группа, насыщенная конечными группами Фробениуса с дополнениями чётных порядков, i — её инволюция. Если для некоторых элементов $a, b \in G$ с условием $|a| \cdot |b| > 4$ все подгруппы $\langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$, конечны, то $G = A \leftthreetimes C_G(i)$ — группа Фробениуса с абелевым ядром A.*

Следствие 2.3.2. *Периодическая группа Шункова, насыщенная конечными группами Фробениуса с дополнениями чётных порядков, является локально конечной группой Фробениуса с абелевым ядром и дополнением с инволюцией.*

Доказательство теоремы 2.3.1. Далее G — бесконечная периодическая группа, насыщенная конечными группами Фробениуса с дополнениями чётных порядков. Отметим, что среди периодических групп, удовлетворяющих данному условию, существуют не локально конечные группы (см. пример 1.3.13). Зафиксируем в G инволюцию i, существование которой следует из условия насыщенности.

В дальнейшем приняты следующие обозначения: J — множество инволюций группы G, $C_g = C_G(g)$, $Y = \cup_{j\in J} C_j$, $X = (G \setminus Y) \cup \{1\}$.

Пусть j — произвольная отличная от i инволюция группы G. Подгруппа $\langle i, j\rangle$ конечна по лемме 1.1.10 и по условию содержится в некоторой конечной группе Фробениуса с дополнением чётного порядка. В силу предложения 1.1.25 инволюции i и j не перестановочны, и инволюция i в C_i единственна. Из леммы 1.1.10 следует сопряжённость i и j. Таким образом, $J = i^G$ и G — группа 2-ранга 1, то есть все элементарные абелевые 2-подгруппы группы G циклические.

Докажем, что C_i обособлена в G. Действительно, пусть $1 \neq g \in C_i \cap C_j$, где $j \neq i$ — инволюция из G. Поскольку G — группа 2-ранга 1, то $g \neq i, j$. Подгруппа $\langle g, i, j\rangle = \langle g\rangle \cdot \langle i, j\rangle$ конечна и в силу условия насыщенности содержится в некоторой конечной группе Фробениуса с чётным дополнением — однако инволюции i и j не могут одновременно быть перестановочными с g по лемме 1.1.26, противоречие. Следовательно, $C_i \cap C_j = 1$ и C_i обособлена в G.

Пусть $x \in X$ и $1 \neq c \in C_x$. Тогда подгруппа $\langle x, c\rangle$ конечна и ввиду условия насыщенности и леммы 1.1.26 каждый элемент этой подгруппы инвертируется некоторой инволюцией $j \in J$.

Подгруппа C_x нормальна в $N_G(\langle x\rangle)$, поэтому $\langle C_x, j\rangle = C_x \leftthreetimes \langle j\rangle$, и по лемме Бусаркина (предложение 1.1.11) подгруппа C_x абелева и инвертируется инволюцией j. Следовательно, $C_x \subseteq X$. Аналогично, подгруппа C_c абелева, и отсюда $C_c = C_x$. Таким образом, C_x сильно изолирована, то есть содержит централизатор каждого своего неединичного элемента.

Мы показали, что $X^\#$ есть объединение попарно непересекающихся множеств вида $C_x^\#$, и G — расщепляемая группа с компонентами расщепления C_x, где $x \in X$, и C_j, где $j \in J$. При этом компоненты C_j не обязаны быть локально конечными (пример 1.3.13). Как доказано выше, эти подгруппы сопряжены, инволюция i в C_i единственна и все элементарные абелевые подгруппы группы C_i циклические.

По условиям теоремы в G для её элементов a и b выполняется (a, b)-условие конечности, то есть в G конечны все подгруппы $\langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$. Если $|a| = 2$ и $|b| > 2$, то по [21, теорема 2.12] $G = A \leftthreetimes C_i$ — группа Фробениуса с абелевым ядром A, и теорема для этого случая доказана.

Если $a \in b^G$ и $|b| > 2$, то в G конечны все подгруппы $\langle b, b^j \rangle$, где $j \in J$, поэтому конечны и подгруппы $\langle b, j \rangle = \langle b, b^j \rangle \cdot \langle j \rangle$. В силу сопряжённости инволюций в G отсюда следует (i, b)-условие конечности в G. Этот случай разобран выше, и теорема в этом случае верна.

Пусть теперь элементы a и b имеют простые нечётные порядки и $a \notin b^G$. С точностью до сопряжённости и переобозначения элементов a и b возможны два случая.

1. $a \in C_i$. Пусть $g \in G \setminus C_i$ и $L_g = \langle a, b^g \rangle$. По условию насыщенности L_g содержится в конечной группе Фробениуса L с дополнением чётного порядка H. Пересечение $L \cap C_i$ нетривиально и является обособленной в L подгруппой, поэтому с точностью до сопряжённости в силу леммы 1.1.26 $L \cap C_i = H$ и $i \in H$. Отсюда $\langle i, b^g \rangle$ конечна, и из произвольности выбора g следует (i, b)-условие конечности в G. Как доказано выше, теорема в этом случае верна.

2. $a, b \in X$. Поскольку подгруппа $\langle a, b \rangle$ конечна, то по условию насыщенности она содержится в абелевом ядре некоторой конечной группы Фробениуса и $C_a = C_b$ ввиду сильной изолированности C_a. Для всякого элемента $g \in G$ подгруппа $\langle a, b^g \rangle$ по условию конечна, по лемме 1.1.26 содержится в абелевом ядре некоторой конечной группы Фробениуса и поэтому $b^g \in C_a$. Следовательно, нормальное замыкание элемента b является подгруппой B группы G, лежащей в C_a. По лемме Бусаркина (предложение 1.1.11) каждая инволюция $j \in J$ инвертирует подгруппу B. Следовательно, в подгруппе $K = \langle J \rangle$ произведения чётного числа инволюций оставляют поэлементно на месте подгруппу B и образуют нормальную в G подгруппу $A = \{jk \mid j, k \in J\}$, а произведения нечётного числа инвертируют B. Поэтому $K = A \leftthreetimes \langle i \rangle$. По лемме 1.1.10 $Ai = i^A$, и по лемме Фраттини (лемма 1.1.14) $G = K \cdot C_i = A \leftthreetimes C_i$. Пусть $x \in X$. Подгруппа

$A \cdot \langle x \rangle$ локально конечна по теореме Шмидта (предложение 1.1.15), поэтому подгруппа $\langle a, x \rangle$ конечна, и в силу условия насыщенности и леммы 1.1.26 получаем $x \in C_a$. Отсюда $X = C_a$, $G = A \leftthreetimes C_i$ — группа Фробениуса, и теорема для этого случая доказана.

Все возможные случаи рассмотрены, и теорема 2.3.1 доказана. $\square$

Доказательство следствия 2.3.2. Пусть G — периодическая группа Шункова. Тогда в силу условия насыщенности в ней существует элемент a простого порядка > 2. Элемент a конечен по определению группы Шункова, и по основной теореме $G = A \leftthreetimes C_i$ — группа Фробениуса с абелевым ядром A, что доказывает следствие. $\square$

Глава 3. Группы, насыщенные конечными группами Фробениуса

В главе 3 детально изучаются группы, насыщенные конечными группами Фробениуса. При дополнительных условиях получено частичное положительное решение вопроса **(D)** и в предположении существования групп из вопроса **(E)** найдены свойства таких групп при дополнительных условиях. Найдены дополнительные условия, при которых бесконечная периодическая группа, насыщенная конечными группами Фробениуса, не будет простой (свойства контрпримера к вопросу **(C)**).

В § 3.1 устанавливается строение периодических слабо сопряжённо бипримитивно конечных групп с нетривиальным локально конечным радикалом с указанным условием насыщенности, их подгрупп, порожденных элементами простых порядков, а также бинарно конечных групп (теоремы 3.1.1, 3.1.2 и 3.1.3).

В § 3.2 изучаются группы 2-ранга 1, насыщенные конечными группами Фробениуса (теорема 3.2.1), дана характеризация ΩFA-групп в классе слабо сопряжённо бипримитивно конечных групп (теорема 3.2.2), и установлено, что группа с конечным элементом чётного порядка, большего 2, разложима в полупрямое произведение своей нормальной периодической абелевой подгруппы F и централизатора инволюции.

В § 3.3 дается описание групп 2-ранга > 1, насыщенных конечными группами Фробениуса (теоремы 3.3.1, 3.3.2).

3.1. Группы с нетривиальным локально конечным радикалом

В параграфе доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.1.1. *Периодическая слабо сопряженно бипримитивно конечная группа G с нетривиальным локально конечным радикалом R, насыщенная конечными группами Фробениуса, является группой Фробениуса с ядром F и дополнением H, при этом либо $F < R$, либо $F > R$. Если $F < R$, то R — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $R \cap H$, содержащим подгруппу $\Omega_1(H)$. Если $F > R$, то $\Omega_1(H)$ — локально циклическая $\{2,3\}'$-группа, любая конечная подгруппа из фактор-группы F/R нильпотентна, для каждого $q \in \pi(F/R)$ периоды силовских q-подгрупп в F/R не превосходят числа $q^{k(H)}$ и для $q > k(H)$ силовские q-подгруппы имеют период q.*

Теорема 3.1.2. *Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы 3.1.1, и пусть ее ядро F не локально конечно, а фактор-группа G/R слабо сопряженно бипримитивно конечна. Тогда $\Omega_1(F/R)$ — прямое произведение своих не локально конечных силовских q-подгрупп периодов не превышающих $q^{k(H)}$, а для $q > k(H)$ силовские q-подгруппы в $\Omega_1(F/R)$ имеют период q.*

В [26, теорема 2] доказано, что группа Шункова с нетривиальным локально конечным радикалом, насыщенная конечными группами Фробениуса, обладает периодической частью, являющейся группой Фробениуса с локально конечным дополнением. Теоремы 3.1.1, 3.1.2 дают дополнительную информацию о ядрах периодических частей групп Шункова из [26, теорема 2].

Теорема 3.1.3. *Бинарно конечная группа G с нетривиальным локально конечным радикалом R, насыщенная конечными группами Фробениуса, является группой Фробениуса с локально конечным дополнением H и ядром F, разложимым в прямое произведение силовских подгрупп. Если G не локально конечна, то $R < F$, для каждого $q \in \pi(F/R)$ периоды силовских q-подгрупп в F/R не* *превосходят числа* $q^{k(H)}$ *и для* $q > k(H)$ *силовские* q*-подгруппы имеют период* q.

Как и в [26], введем обозначения, предполагая, что насыщающее множество $\mathfrak{X}$ группы G состоит из конечных групп Фробениуса. Через $\mathfrak{X}_G(K) = \mathfrak{X}(K)$ обозначаем множество всех подгрупп группы G, содержащих подгруппу или множество K из G, и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. В частности, $\mathfrak{X}(1)$ — множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Для любой (конечной) подгруппы $L \leq G$ запись $L = F_L \leftthreetimes H_L$ будет означать, что $L \in \mathfrak{X}(1)$, где F_L — ядро и H_L — дополнение группы Фробениуса L, а включение $K \leq H_L$ будет пониматься в том смысле, что подгруппа K содержится в подходящем дополнении H_L группы L.

Пусть группа G с нетривиальным локально конечным радикалом R удовлетворяет условиям теоремы 3.1.1. Сначала установим некоторые свойства группы G.

Лемма 3.1.4. *В случае* $G = R$ *теорема 3.1.1 верна.*

Доказательство. По лемме 1 из [26] $G = F_G \leftthreetimes H_G$ — группа Фробениуса, и ввиду локально конечности группы G теорема 3.1.1 безусловно верна. Лемма доказана. □

Лемма 3.1.5. *Пусть* $G \neq R$. *Тогда* $G = F \leftthreetimes H$ *— группа Фробениуса с ядром* F *и дополнением* H, *при этом* $F \neq R$ *и либо* $F < R$, *либо* $F > R$.

Доказательство. Если в R есть конечная фробениусова подгруппа, то по [26, лемма 2] $R = F_R \leftthreetimes H_R$ — группа Фробениуса, и согласно [26, лемма 5] G — группа Фробениуса с ядром $F = F_R$ и дополнением $H = N_G(H_R)$.

Пусть в R нет фробениусовых подгрупп, и пусть $L \in \mathfrak{X}(1)$. По теореме Шмидта (предложение 1.1.15) группа $M = RL$ локально конечна и по [26, лемма 1] $M = F_M \leftthreetimes H_M$ — группа Фробениуса. В силу свойств (локально) конечных групп Фробениуса $H_M = H_L$, $R \leq F_M$, и R — нильпотентная группа по теореме Томпсона-Хигмана. По условиям теоремы любой элемент простого порядка $a \in H_L$ является конечным в G, и очевидно не является энгелевым. По теореме 2.1.1 либо G — группа Фробениуса с ядром $F < R$ и дополнением H, либо $a \notin R$, $G = F \leftthreetimes H$, где $H = N_G(\langle a \rangle)$, (G, H) — пара Фробениуса, и $F \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с ядром $F > R$ и дополнением $\langle a \rangle$. В первом случае лемма уже доказана, рассмотрим второй случай. Согласно определению группы Фробениуса, нужно доказать равенство $G \setminus F^{\#} = \bigcup_{g \in G} H^g$.

Пусть b — произвольный элемент простого порядка из H. По условиям теоремы все подгруппы $L_f = \langle b, b^f \rangle$ $(f \in F^{\#})$ конечны. Поскольку (G, H) — пара Фробениуса и $H \cap F = 1$, то $b^f \notin L \cap H$ и $(L, L \cap H)$ — пара Фробениуса. По теореме Фробениуса $L = F_L \leftthreetimes H_L$, где $H_L = L \cap H$. Легко убедиться, что $F_L = L \cap F$ и $H_L = \langle b \rangle$. По предложению 1.1.31 $F \leftthreetimes \langle b \rangle$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle b \rangle$, в частности, $Fb = b^F$.

Пусть t — элемент составного порядка из $G \setminus F$, и $|t| = mq$, где q — простое число. Тогда $t^m \in Fb$ для некоторого элемента b порядка q из H и, как доказано выше, $t^m = b^f$ для подходящего элемента $f \in F$. Поскольку (G, H) — пара Фробениуса, то $t \in H^f$. Из этого следует, что $G \setminus F^{\#} = \cup_{g \in G} H^g$, и согласно определению $G = F \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H. Неравенство $F \neq H$ и инцидентность подгрупп F и H доказана выше. Лемма доказана. □

Лемма 3.1.6. *Для каждого элемента b простого порядка из H и любого $f \in F^{\#}$ подгруппа $L_f = \langle b, b^f \rangle$ конечна, принадлежит $\mathfrak{X}(1)$, $L_F = L \cap F$, $H_L = \langle b \rangle$ и $f \in L$.*

Доказательство. Лемма фактически доказана в ходе доказательства леммы 3.1.5. □

Лемма 3.1.7. *Если $F < R$, то $\Omega_1(H) \leq R \cap H$. Если $F > R$, то R — нильпотентная группа, $A = \Omega_1(H)$ — локально циклическая $\{2, 3\}'$-группа и*

$F \leftthreetimes A$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением A, насыщенная конечными группами Фробениуса.

Доказательство. Если H содержит инволюцию i, то $F \leftthreetimes \langle i \rangle$ — группа Фробениуса и по [21, лемма 2.3] ядро F является абелевой группой. При этом $R > F$, R — группа Фробениуса с ядром $R \cap F$, дополнением $H \cap R$, $\Omega_1(H) \leq R \cap H$ и лемма доказана. Аналогично, если H содержит элемент a порядка 3, то по лемме 3.1.6 $F \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса и по [15, 21, лемма 2.4] ядро F является нильпотентной группой. Для случая $R > F$ теорема доказана.

Пусть $R < F$. В силу доказанного выше $F \leftthreetimes \Omega_1(H)$ — группа Фробениуса, и по предложению 1.1.28 $A = \Omega_1(H)$ — (локально) циклическая $\{2, 3\}'$-группа. Понятно, что в H нет фробениусовых подгрупп, и слабо сопряженно биппримитивно конечная группа Фробениуса $F \leftthreetimes A$ также насыщена конечными группами Фробениуса. Лемма доказана. □

Неизвестно, переносится ли условие насыщенности на группы $F \leftthreetimes A_1$, $1 < A_1 < A$.

Лемма 3.1.8. *Когда $R < F$, конечные подгруппы в F и в F/R нильпотентны.*

Доказательство. По теореме Томпсона-Хигмана радикал R нильпотентен, и для группы G справедливы леммы $6-11$ из [26]. Пусть K — произвольная конечная подгруппа из F, и $K \leq L \in \mathfrak{X}(K)$. Каждый элемент c простого порядка q из K конечен в G и по [26, лемма 7] является энгелевым, т.е. все подгруппы $\langle c, c^g \rangle$ в G являются конечными q-группами. Поэтому $K \leq F_L$, и в силу теоремы Томпсона K нильпотентна.

Далее, пусть $\overline{K}$ — произвольная конечная подгруппа из F/R. По теореме Шмидта (предложение 1.1.15) ее полный прообраз K локально конечен и, очевидно, $K = RM$ для некоторой конечной подгруппы $M \leq K$. Как уже доказано, подгруппа M нильпотентна. Значит, и подгруппа $\overline{K} \simeq M/(M \cap R)$ нильпотентна. Лемма доказана. □

Лемма 3.1.9. *Если a — элемент простого порядка из H, $G_a = F \leftthreetimes \langle a\rangle$ и b, c — перестановочные элементы взаимно простых порядков из F, то нормальные замыкания $B = \langle b^{G_a}\rangle$, $C = \langle c^{G_a}\rangle$ поэлементно перестановочны и абелева подгруппа $B \cap C$ содержится в R.*

Доказательство. Для любого элемента a простого порядка p из A подгруппа $G_a = F \leftthreetimes \langle a\rangle$ является группой Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a\rangle$, при этом по лемме 3.1.6 все подгруппы $\langle a, a^g\rangle$ в G_a конечны. Поэтому $G_a \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{G}$ в обозначениях § 5.3 монографии [21, стр. 172]. Аналогично, $G_a/R \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{G}$. В частности, для групп G_a и G_a/R справедливы леммы 5.11 – 5.43 из [21]. По [21, лемма 5.21] подгруппы B, C поэлементно перестановочны, и абелева подгруппа $B \cap C$ содержится в центре группы BC и нормальна в G_a. Следовательно, $B \cap C \leq R$, и лемма доказана. □

Лемма 3.1.10. *Если a и G_a из леммы 3.1.9, $\overline{G}_a = G_a/R$ и $\bar{b}, \bar{c}$ — перестановочные элементы взаимно простых порядков из $\overline{F}$, то нормальные замыкания $\overline{B} = \langle \bar{b}^{\overline{G}_a}\rangle$, $\overline{C} = \langle \bar{c}^{\overline{G}_a}\rangle$ поэлементно перестановочны, $\overline{B} \cap \overline{C} = \overline{1}$ и $\overline{B} \cdot \overline{C} = \overline{B} \times \overline{C}$.*

Доказательство. Доказательство поэлементной перестановочности подгрупп $\overline{B}$ и $\overline{C}$ дословно переносится из леммы 3.1.9. И поскольку локально конечный радикал в $\overline{F}$ очевидно тривиален, то $\overline{B} \cap \overline{C} = \overline{1}$ и $\overline{B} \cdot \overline{C} = \overline{B} \times \overline{C}$. Лемма доказана. □

Напомним, что через $k(p)$ обозначается значение функции Хигмана от простого числа p.

Лемма 3.1.11. *Пусть p — наименьшее число из $\pi(H)$, $q \in \pi(F)$ и b — произвольный q-элемент из F. Тогда $b^{k(p)} \in R$ при любом q, и $b^q \in R$ при $q \geq k(p)$.*

Доказательство. Как и в лемме 3.1.9, для элемента a порядка p из H группа $G_a = F \leftthreetimes \langle a\rangle$ ввиду леммы 3.1.6 принадлежит классу $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{G}$ [21, стр. 172].

По [21, леммы 5.22] $b^{k(p)} \in R$, а при условии $q \geq k(p)$, $b^q \in R$ по [21, леммы 5.25]. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.1.1. При условии $F \leq R$ утверждения теоремы следуют из лемм 3.1.4, 3.1.5 и 3.1.7. При условии $F > R$ утверждения теоремы, кроме последнего, доказаны в леммах 3.1.5, 3.1.7, 3.1.8 и 3.1.9. Ограниченность периодов силовских q-подгрупп в F/R является очевидным следствием леммы 3.1.11. Теорема 3.1.1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.1.2. Когда $\pi(F/R) = \{q\}$, теорема следует из леммы 3.1.11. Пусть $|\pi(F/R)| > 1$ и $q, r \in \pi(F/R)$. Из леммы 3.1.10 следует, что для любого q-элемента b из F/R нормальное замыкание $B = \langle b^{G/R} \rangle$ не содержит q'-элементов, перестановочных с b. И если B не является q-группой, то ввиду леммы 3.1.8 это означает, что элемент b с любым q'-элементом из B порождает бесконечную подгруппу. Пусть b, c элементы различных простых порядков q и r из F/R, $L = \langle b, b^c \rangle$ и $M = \langle c, c^b \rangle$. По условиям теоремы каждый элемент простого порядка из F/R конечен в F/R, следовательно, подгруппы L и M конечны. В силу леммы 3.1.8 L — q-группа, M — r-группа, и $L \cap M = 1$. Следовательно, $bc = cb$, и ввиду леммы 3.1.10 $B = \langle b^{G/R} \rangle$ — q-группа, $C = \langle c^{G/R} \rangle$ — q-группа. Отсюда очевидно следует, что $\Omega_1(F/R)$ — прямое произведение своих не локально конечных силовских подгрупп. Ограниченность периодов силовских подгрупп в F/R вытекает из леммы 3.1.11. Теорема 3.1.2 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.1.3. По теореме 3.1.1 $G = F \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса, в которой дополнение H локально конечно по [26, теорема 2], а все конечные подгруппы ядра F нильпотентны по лемме 3.1.8. Ввиду бинарной конечности произведение любых q-элементов из F является q-элементом, и F есть прямое произведение своих силовских подгрупп. Соответствующая ограниченность периодов силовских подгрупп в F/R следует из леммы 3.1.11. Теорема 3.1.3 доказана. $\square$

3.2. Группы 2-ранга 1, насыщенные конечными группами Фробениуса

Параграф посвящён исследованию бесконечных групп 2-ранга 1, насыщенных конечными группами Фробениуса. Доказана следующая теорема.

Теорема 3.2.1. *Пусть в насыщенной конечными группами Фробениуса группе G 2-ранга один есть конечный элемент a четного порядка, большего двух. Тогда $G = F \leftthreetimes C_G(i)$, где i — инволюция из $\langle a \rangle$, F — периодическая абелева группа, инвертируемая инволюцией i, и для любой периодической подгруппы $T \leq C_G(i)$ произведение $F \leftthreetimes T$ является группой Фробениуса с ядром F и дополнением T.*

Непосредственно из теоремы 3.2.1 и указанных свойств ΩFA-групп вытекает следующая их характеризация в классе слабо сопряженно бипримитивно групп:

Теорема 3.2.2. *Группа G 2-ранга 1 с конечным элементом четного порядка > 2 и слабо сопряженно бипримитивно конечным централизатором инволюции тогда и только тогда является ΩFA-группой, когда она насыщена конечными группами Фробениуса.*

Пусть группа G насыщена конечными группами Фробениуса, содержит конечную инволюцию i, $C = C_G(i)$ и J — множество инволюций группы G. Докажем вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства теорем.

Лемма 3.2.3. *Если $J \cap C = \{i\}$, то $J = i^G$, G — группа 2-ранга один, каждая конечная неединичная подгруппа из C является неинвариантным множителем некоторой конечной группы Фробениуса из $\mathfrak{X}(1)$ и подгруппа C периодически обособлена в G, т.е. для любого $g \in G \setminus C$ подгруппа $C \cap C^g$ не содержит элементов конечных порядков.*

Доказательство. В силу конечности инволюции i в G для произвольной инволюции $j \in J \setminus \{i\}$ подгруппа $D = \langle i, j \rangle$ конечна, и ввиду равенства $J \cap C = \{i\}$

порядок произведения ij нечетен. Следовательно, инволюции i и j сопряжены в D и $J = i^G$. Для каждой конечной неединичной подгруппы K из C подгруппа $H = \langle K, i\rangle$ конечна, по условию насыщенности $H \leq M \in \mathfrak{X}(H)$ и используя предложение 1.1.27 заключаем, что $K \leq H \leq H_M$ и K — неинвариантный множитель конечной группы Фробениуса $F_M \leftthreetimes K$.

Пусть $g \in G \setminus C$ и c — элемент конечного порядка из $C \cap C^g$. В силу условий $j = i^g \neq i$, и согласно доказанному выше $K = \langle c, i, j\rangle = \langle c\rangle \times \langle i, j\rangle$, $|ij| = 2n+1$. Однако такая группа не вложима в конечную группу Фробениуса, что противоречит условию насыщенности. Следовательно, C периодически обособлена в G. Лемма доказана. $\square$

Следующая лемма формулируется в предположении, что 2-ранг группы G не обязательно равен 1.

Лемма 3.2.4. *Пусть C — периодическая группа, a — конечный в G элемент нечетного порядка и $a^i = a^{-1}$. Тогда $G = F \leftthreetimes C$ — группа Фробениуса с абелевым ядром F.*

Доказательство. Пусть $A = C_G(a)$ и $c \in C \cap A$. Тогда подгруппа $L = \langle c, i, a\rangle$ конечна, и по условию насыщенности $L \leq M \in \mathfrak{X}(L)$. Поскольку i, a одновременно не могут принадлежать F_M и H_M, то приходим к выводу, что $a \in F_M$, $i \in H_M$ и, значит, $C_M(a) \cap C_M(i) = 1$. Следовательно, $c = 1$, $C \cap A = 1$, и по лемме Бусаркина (предложение 1.1.11) A — периодическая абелева группа нечетного периода, инвертируемая инволюцией i. Отсюда заключаем, что $C_G(c) = A$ для любого элемента $c \in A^{\#}$, т.е. подгруппа A сильно изолирована в G, и из $A \cap A^x \neq 1$ для произвольного $x \in G$ следует $A^x = A$.

Пусть $k \in J \cap C$ и $k \neq i$. Ввиду конечности элемента a подгруппа $K = \langle a, k\rangle$ конечна, и поскольку $K^i = K$, то конечна и подгруппа $L = \langle i, a, k\rangle$. По условию насыщенности $L \leq M \in \mathfrak{X}(L)$, и как и выше заключаем, что $i \in H_M$, $a \in F_M$. Но $H_M = C_M(i)$ и $k \in H_M$, противоречие свойствам конечных групп Фробениуса.

Следовательно, $C \cap J = \{i\}$, и лемма 3.2.3 завершает доказательство. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.2.1. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы 3.2.1, a — конечный в G элемент порядка, большего двух, i — инволюция из $\langle a \rangle$, $C = C_G(i)$. Ввиду условий теоремы 3.2.1 $C \cap J = \{i\}$, и по лемме 3.2.3 $J = i^G$ и подгруппа C периодически обособлена в G, т.е. для любого $g \in G \setminus C$ подгруппа $C \cap C^g$ не содержит элементов конечных порядков. Отсюда следует, что для любого $g \in G \setminus C$ конечная подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$ является группой Фробениуса с дополнением $H_g = C \cap L_g$. По предложению 1.1.33 $G = F \leftthreetimes C$, где F — периодическая абелева нормальная в G подгруппа, очевидно инвертируемая инволюцией i. Пусть T — произвольная периодическая подгруппа из C и $B = F \leftthreetimes T$. В силу леммы 3.2.3 T обособлена в B и, значит, $F \leftthreetimes \langle t \rangle$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle t \rangle$ для любого $t \in T$. Поэтому для любого $f \in F$ существует $x \in F$ такой, что $ft = t^x$. Следовательно, $B \setminus F^{\#} = \cup_{x \in F} T^x$, и B — группа Фробениуса с ядром F и дополнением T по определению групп Фробениуса. Теорема 3.2.1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.2.2. Докажем вначале, что группа G из условий теоремы при указанном условии насыщенности является ΩFA-группой. По теореме 3.2.2 $G = F \leftthreetimes C$, где $C = C_G(i)$, i — инволюция, F — периодическая абелева группа и $F \leftthreetimes T$ — группа Фробениуса для любой конечной подгруппы $T \leq C$. Ввиду слабо сопряженно бипримитивной конечности C для каждого элемента b простого порядка $p > 2$ и любого элемента $x \in C$ подгруппа $L_x = \langle b, b^x \rangle$ конечна и является дополнением в группе Фробениуса $F \leftthreetimes L$. Согласно предложениям 1.1.27, 1.1.28 либо $L_x = \langle b \rangle$, либо $L_x \simeq SL_2(5)$ и $p = 5$, либо $L_x \simeq SL_2(5)$ или $L_x \simeq SL_2(3)$ и $p = 5$. При $p > 5$ сразу имеем $\langle b^C \rangle = \langle b \rangle$. Если при $p = 5$ среди подгрупп L_x нет изоморфных $SL_2(5)$, также получаем $\langle b^C \rangle = \langle b \rangle$. Если среди подгрупп L_x есть изоморфная $SL_2(5)$, то, как доказано А. Х. Журтовым и В. Д. Мазуровым [8], $\langle b^C \rangle \simeq SL_2(5)$. Аналогично, при $p = 3$

либо $\langle b^C \rangle = \langle b \rangle$, либо $\langle b^C \rangle \simeq SL_2(3)$, либо $\langle b^C \rangle \simeq SL_2(5)$.

Отсюда следует, что $\Omega_1(C)$ локально конечна и ввиду предложения 1.1.28 $\Omega_1(H)$ — группа одного из типов 1-3 предложения 1.1.28 и G является ΩFA-группой.

Обратно, если G — ΩFA-группа, то по определению $\Omega_1(G) = F \leftthreetimes \Omega_1(H)$ — локально конечная группа Фробениуса с абелевым ядром F и дополнением $\Omega_1(H)$, при этом $|\Omega_1(H)| > 2$ и $\Omega_1(H)$ — группа одного из типов 1-3 предложения 1.1.28. Заметим, что если M — конечная группа и $\Omega_1(M)$ — группа Фробениуса, то и M — группа Фробениуса. Отсюда и из доказаного выше следует, что группа G насыщена конечными группами Фробениуса, теорема 3.2.2 доказана. $\square$

3.3. Группы 2-ранга > 1, насыщенные конечными группами Фробениуса

В параграфе доказываются теоремы о строении бесконечных групп 2-ранга больше 1, насыщенных конечными группами Фробениуса.

Теорема 3.3.1. *Пусть слабо сопряженно бипримитивно конечная группа G содержит четверную группу Клейна и насыщена конечными группами Фробениуса. Тогда $G = F \leftthreetimes H$, где F — периодическая группа, $\Omega_1(H)$ — локально циклическая группа без инволюций, и $\Omega_1(G) = F \leftthreetimes \Omega_1(H)$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\Omega_1(H)$.*

Строение периодических групп из теоремы 3.3.1, обладающих нетривиальным локально конечным радикалом, изучалось в теоремах 3.1.1 – 3.1.3. Для групп без локально конечных нормальных подгрупп доказана такая теорема:

Теорема 3.3.2. *Пусть группа G из теоремы 3.3.1 не содержит локально конечных нормальных подгрупп. Тогда силовская 2-подгруппа T нормальна в G, централизатор $C_G(T)$ содержит подгруппу Q, порожденную всеми эле-*

ментами простых нечетных порядков из F, и Q является прямым произведением своих силовских p-подгрупп.

В этом параграфе предполагаем, что G — группа с конечными элементами простых порядков и 2-ранг группы G больше 1. Обозначим через T характеристическую подгруппу группы G, порожденную всеми 2-элементами из G.

Лемма 3.3.3. *Инволюции в G являются конечными энгелевыми элементами. Любая подгруппа $L = \langle k, a \rangle$, порожденная инволюцией k и элементом простого порядка $p > 2$, либо является группой Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$ и ядром $O_2(L)$, либо абелева. В любой конечной подгруппе $L \leq G$ четного порядка силовская 2-подгруппа S_L нормальна.*

Доказательство. Допустим, что $a^i = a^{-1}$ для некоторых инволюции i и элемента простого порядка $p > 2$ из G. Легко убедиться, что в $C_G(i)$ есть инволюция $k \neq i$. В силу конечности элемента a подгруппа $\langle k, a \rangle$ конечна, значит, конечна и подгруппа $L = \langle k, a, i \rangle$. Однако L не может быть подгруппой конечной группы Фробениуса, что противоречит условию насыщенности. Следовательно, инволюции в G являются конечными энгелевыми элементами.

Пусть L — произвольная конечная подгруппа четного порядка из G и $S \in Syl_2(L)$. По условию насыщенности $L \leq M \in \mathfrak{X}(L)$ и ввиду теоремы Бэра-Судзуки $O_2(M) \neq 1$. Значит, $S \leq F_M$, что и доказывает лемму. $\square$

Лемма 3.3.4. *Каждый перестановочный с некоторой инволюцией k элемент a простого порядка $p > 2$ является энгелевым в G, и подгруппы T, $\langle a^G \rangle$ поэлементно перестановочны. Если a, b — энгелевы элементы различных простых порядков p, q из G, то их нормальные замыкания $P = \langle a^G \rangle$ и $Q = \langle b^G \rangle$ поэлементно перестановочны.*

Доказательство. Очевидно, что $C_k = C_G(k)$ не содержит конечных фробениусовых подгрупп. Поэтому в силу леммы 3.3.3 $aj = ja$ для любой инволюции $j \in C_k$.

Далее, если $x^2 = k$ и $ax \neq xa$, то $L = \langle a, x \rangle$ конечна и по условию насыщенности $L \leq M \in \mathfrak{X}(1)$. Поскольку $k \in Z(L)$, то ввиду леммы 3.3.3 $L \leq F_M$ и, значит, $ax = xa$. С помощью индукции аналогично доказывается, что каждый 2-элемент x, некоторая степень которого равна k, перестановочен с a. Пусть теперь x — произвольный 2-элемент группы G и v — инволюция из $\langle x \rangle$. По лемме 3.3.3 $\langle v, k \rangle$ — 2-группа и ее центр содержит инволюцию z. Применяя доказанное выше, последовательно получаем $za = az$, затем $va = av$, и, наконец, $ax = xa$. Также последовательно заключаем, что $T \leq C_a$, $a^G \subseteq C_G(T)$ и $C_G(T)$ не содержит конечных фробениусовых подгрупп. Поэтому при $\langle a^g \rangle \neq \langle a \rangle$ конечная подгруппа $L = \langle a, a^g \rangle$ не является группой Фробениуса. Подгруппа $K = \langle k, a, a^g \rangle$ конечна, и по условию насыщенности $K \leq M \in \mathfrak{X}(1)$. Так как $k \in Z(K) \neq 1$, то либо $K \leq H_M$, либо $K \leq F_M$. Первый случай невозможен, поскольку инволюция k — энгелев элемент. Значит, $L \leq K \leq F_M$, и согласно предложению 1.1.27 L — p-группа. Ввиду произвольности g заключаем, что a — конечный энгелев элемент в G.

Далее, пусть $x \in a^G$, $y \in b^G$ и $L_x = \langle x, x^y \rangle$, $L_y = \langle y, y^x \rangle$. Поскольку элементы простых порядков в G конечны, то подгруппы L_x и L_y конечны, и в силу теоремы Бэра-Судзуки L_x — p-группа, а L_y — q-группа. Так как $[x, y] \in L_x \cap L_y$, то $[x, y] = 1$ и $xy = yx$. Следовательно, подгруппы P и Q поэлементно перестановочны. $\square$

Лемма 3.3.5. *Если локально конечный радикал группы G нетривиален, теорема 3.3.1 верна.*

Доказательство. Пусть R — неединичный локально конечный радикал группы G. Рассмотрим вначале случай, когда $R = F \leftthreetimes C$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением C. По теореме Томпсона-Хигмана F — нильпотентная группа, а по лемме Фраттини (лемма 1.1.14) $G = F \leftthreetimes H$, где $H = N_G(C)$. Пусть H_1 — произвольная неединичная конечная подгруппа из H. По теореме Шмидта (предложение 1.1.15) подгруппа KR локально конечна, поэтому для произвольных неединичных конечных подгрупп $C_1 \le C$, $F_1 \le F$ подгруппа $K = \langle H_1, C_1, F_1 \rangle$ конечна, и по условию насыщенности $K \le M \in \mathfrak{X}(k)$. Очевидно, что $F_1 \le F_M$ и $K \cap F_M \ne 1$, $C_1 \le H_M$ и $H_1 \le M \cap N_G(C) \le H_M$, значит, $H_1 \le H_M$. Отсюда следует, что $F \leftthreetimes H_1$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением C, в силу леммы 3.3.3 H — $2'$-группа, и ввиду конечности элементов простых порядков в G и предложения 1.1.27 каждая подгруппа простого порядка нормальна в H. Следовательно, $\Omega_1(H)$ — локально циклическая группа,. $\Omega_1(H) \le C$ и доказываемая теорема верна.

Пусть R — не группа Фробениуса, и ввиду [26, лемма 4] R — нильпотентная группа. По [22, лемма 9] $G = F \leftthreetimes H$, где $H = N_G(\langle a \rangle)$, и $F \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a \rangle$ для некоторого элемента a простого порядка $p > 2$. При этом F — периодическая группа, совпадающая с теоретико-множественным обьединением ядер F_g конечных фробениусовых подгрупп $L_g = \langle a, a^g \rangle = F_g \leftthreetimes \langle a \rangle$, где $g \in F$. Очевидно, что $R \le F$, элемент a не энгелев в G. Ввиду лемм 3.3.3, 3.3.4 в H нет инволюций и все 2-элементы группы G содержатся в F. Как и в доказательстве теоремы 1 из [26], заключаем, что для каждой конечной подгруппы $K \le H$ подгруппа $G = F \leftthreetimes K$ есть группа Фробениуса с ядром F и дополнением K. Ввиду конечности элементов простых порядков из H отсюда следует, что $\Omega_1(H)$ — локально циклическая группа, $\Omega_1(G) = F \leftthreetimes \Omega_1(H)$ — группа Фробениуса, и теорема верна. Это доказывает лемму. □

Для $p \in \pi(G)$ через S_p обозначим характеристическую в G подгруппу, порожденную всеми энгелевыми элементами порядка p из G, и пусть $\pi_0 = \{p \in \pi(G) \mid S_p \ne 1\}$.

Лемма 3.3.6. *Подгруппа S_p для любого $p \in \pi_0$ является p-группой.*

Доказательство. Согласно лемме 3.2.3 $2 \in \pi_0$, докажем лемму для S_2. Пусть b — элемента порядка $q > 2$ из S_2. Элемент b не может быть энгелевым, поскольку тогда в силу леммы 3.3.4 $\langle b^G \rangle$ — нормальная в G элементарная абелева подгруппа, что противоречит лемме 3.3.5. Согласно лемме 3.3.4 $bk \neq kb$ для любой инволюции k и по лемме 3.2.3 $\langle k, b\rangle$ — конечная группа Фробениуса с дополнением $\langle b\rangle$. Выберем в b^G элемент $x = i_1 i_2 \dots i_n$, имеющий минимальную длину n, как произведение инволюций $i_1, \dots, i_n$. Но из доказанного выше следует, что $\langle x, i_1\rangle$ — группа Фробениуса и $i_1 x = i_2 \dots i_n \in b^G$. Полученное противоречие означает, что каждый элемент конечного порядка в S_2 является 2-элементом.

Докажем, что в S_2 нет и элементов бесконечного порядка. Пусть a — не энгелевый элемент простого порядка q из G и $G_1 = S_2 \leftthreetimes \langle a\rangle$. В силу доказанного выше и леммы 3.3.4 $N_{S_2}(\langle a\rangle)$ — группа без кручения, и, значит, для любого $g \in G_1 \setminus N_{G_1}(\langle a\rangle)$ конечная подгруппа $L_g = \langle a, a^g\rangle$ является группой Фробениуса с ядром $F_g = O_2(L_g)$ и дополнением $\langle a\rangle$. По предложению 1.1.31 $G_1 = F \leftthreetimes N_{G_1}(\langle a\rangle)$, причем $F = \cup_{g\in G_1} F_g$. Понятно, что $F = S_2$, S_2 — 2-группа и лемма для $p = 2$ доказана.

Пусть $p \neq 2$. По лемме 3.3.4 S_p и S_2 поэлементно перестановочны, по лемме 3.3.4 каждый элемент простого порядка из S_p энгелев и применяя лемму 3.3.5 заключаем, что каждый элемент конечного порядка в S_p является p-элементом. Дословно повторяя рассуждения предыдущего абзаца (с заменой 2 на p) докажем, что S_p — p-группа. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.3.7. *T — силовская 2-подгруппа группы G, для каждого не энгелева элемента простого порядка p из G подгруппа $T \leftthreetimes \langle a\rangle$ есть группа Фробениуса с ядром T и дополнением $\langle a\rangle$, и $L = \langle a, x\rangle$ — конечная группа Фробениуса для любого $x \in T^{\#}$.*

Доказательство. В силу леммы 3.3.4 в T нет энгелевых элементов простых нечетных порядков. Пусть a — не энгелевый элемент простого порядка $p > 2$ из T. Тогда, согласно лемме 3.3.4, в $N_T(\langle a\rangle)$ нет 2-элементов. Пусть $g \in T \setminus N_T(\langle a\rangle)$, $L_x = \langle a, a^x\rangle$ и $L_x \leq M \in \mathfrak{X}(1)$. Поскольку a не энгелев и L_x не циклическая группа, то $L_x = F_x \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса с ядром $O_2(L_x) = F_x$ и дополнением $\langle a\rangle$. По предложению 1.1.31 $T = F \leftthreetimes N_T(\langle a\rangle)$, где $F = \cup_{x\in T}F_x$, и все 2-элементы из T содержатся в F, противоречие. Итак, все элементы конечных порядков в T являются 2-элементами.

Пусть a — не энгелевый элемент простого порядка из G и $B = T\leftthreetimes\langle a\rangle$. Тогда, как и выше, $C_T(a)$ не содержит 2-элементов, $B = F \leftthreetimes N_T(\langle a\rangle)$, где $F = \cup_{x\in T}F_x$, F_x — ядро конечной группы $L_x = \langle a, a^x\rangle = \langle a, x\rangle$ и $F = T$. В частности, T — 2-группа и лемма доказана. □

Лемма 3.3.8. *В случае $\pi_0 = \{2\}$ теорема верна.*

Доказательство. В силу лемм 3.3.4, 3.3.7 для любого элемента a порядка $p \neq 2$ и произвольного элемента $x \in T^{\#}$ подгруппа $K = \langle a, a^x\rangle = O_2(K) \leftthreetimes \langle a\rangle$, где $O_2(K) = K \cap T$, $K \in \mathfrak{X}(1)$, $F_K = K \cap T$, $\langle a\rangle = H_K$. По предложению 1.1.31 $T \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса с ядром T и дополнением $\langle a\rangle$, при этом $\langle a, a^x\rangle = \langle a, x\rangle$ для любого $x \in T$.

Пусть $M \in \mathfrak{X}(1)$ и $H_M = \langle a\rangle$. Предположим, что $M\cap T = 1$, т.е. $F_M\cap T = 1$. Рассмотрим группу $H = TM$. Очевидно, что $N_H(\langle a\rangle) = \langle a\rangle$ и $\langle a, a^x\rangle$ является конечной группой Фробениуса с дополнением $\langle a\rangle$ для любого $x \in H \setminus \langle a\rangle$. По предложению 1.1.31 H — группа Фробениуса с ядром $F = TF_M$ и дополнением $\langle a\rangle$, при этом любая пара элементов из $H \setminus F$ порождают конечную подгруппу. По [21, лемма 5.26] $C_F(b)$ бесконечен для любого $b \in F_M$. Но тогда по лемме 3.3.4 каждый элемент простого порядка из F_M является энгелевым в G, противоречие с условием $\pi = \{2\}$. Следовательно, $M \cap T \neq 1$, ввиду леммы 3.3.4 $F_M = M \cap T$ ядро каждой конечной фробениусовой подгруппы L из $\mathfrak{X}(1)$ является 2-подгруппой и совпадает с $L \cap T$. Отсюда и из условия насыщенности заключаем, что p-ранг группы G равен единице для каждого нечетного $p \in \pi(G)$. Обозначим $H = N_G(\langle a\rangle)$ и $L_g = \langle a, a^g\rangle$, где $g \in G \setminus H$. По условию насыщенности подгруппа $L_g \leq M \in \mathfrak{X}(1)$, и в силу доказанного выше и свойств конечных групп Фробениуса $L_g \in \mathfrak{X}(1)$, $L_g \cap T$ — ее ядро, $\langle a\rangle$ — дополнение. По предложению 1.1.31 $G = T \leftthreetimes H$, и как следует из доказанного,

$\Omega_1(G) = T \leftthreetimes \Omega_1(H)$ — группа Фробениуса с ядром T и локально циклическим дополнением $\Omega_1(H)$. Лемма доказана. □

Далее предполагаем, что $|\pi_0| \geq 2$.

Лемма 3.3.9. *Каждый элемент порядка $p \in \pi_0$ энгелев и содержится в подгруппе S_p.*

Доказательство. Для $p = 2$ лемма следует из леммы 3.3.4. Пусть $p > 2$. Докажем вначале, что каждый элемент d порядка p группы G принадлежит S_p. Предположим противное. Согласно лемме 3.3.4 все элементы порядка p из S_p энгелевы. Ввиду конечности d в S_p есть элемент c порядка p, перестановочный с d. По лемме 3.3.4 $ck = kc$ для любой инволюции k. Значит, подгруппа $L = \langle d, c, k\rangle$ конечна и $L \leq M \in \mathfrak{X}(L)$. Но тогда $k \in F_M$, $c \in F_M$, $d \in F_M$ и $dk = kd$. По лемме 3.3.4 элемент d — энгелев, и $d \in S_p$.

Вернемся к элементу b. По доказанному выше элемент d порядка p из $\langle b\rangle$ является энгелевым элементом. Согласно теореме Бэра-Судзуки b содержится в ядре каждой подгруппы $M \in \mathfrak{X}(b)$ и b — обобщенно энгелев элемент. Лемма доказана. □

Лемма 3.3.10. *Для подгруппы Q, порожденной всеми элементами конечных порядков из $C_G(T)$, и каждого не энгелева элемента a простого порядка $Q \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса с ядром Q, в которой $L = \langle a, x\rangle$ — конечная группа Фробениуса для любого $x \in Q^{\#}$.*

Доказательство. Понятно, что Q нормальна в G, ввиду леммы 3.3.5 $Q \cap T = 1$ и в силу леммы 3.3.4 $S_q \leq Q$ для любого $2 \neq q \in \pi_0$. Пусть a — не энгелев элемент простого порядка p из G. Ввиду лемм 3.3.4, 3.3.9 в $C_Q(a)$ нет q-элементов для любого $q \in \pi(G) \setminus \pi_0$. Допустим, что $C_Q(a)$ содержит элемент b простого порядка $q \in \pi_0$. Тогда для любой инволюции $k \in T$ подгруппа $L = \langle a, b, k\rangle$ конечна и является прямым прозведением подгруппы $\langle b\rangle$ и группы Фробениуса $\langle a, k\rangle$. Однако такая группа не вложима в конечную группу Фробениуса, вопреки условию насыщенности. Следовательно, в $C_Q(a)$ нет q-элементов, и нет элементов конечных порядков. Отсюда заключаем, что каждая подгруппа $L_x = \langle a, a^x \rangle$, где $x \in Q \setminus C_Q(a)$, является конечной группой Фробениуса с ядром $Q \cap L_x$ и дополнением $\langle a \rangle$. Применяя предложение 1.1.31 заключаем, что лемма верна. □

Доказательство теоремы 3.3.1. Согласно лемме 3.3.10 и предложению 1.1.31 $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a \rangle)$ для любого элемента a простого порядка $p \in \pi(G) \setminus \pi_0$.

Понятно, что $\pi(H) = \pi(G) \setminus \pi_0$, здесь $H = N_G(\langle a \rangle)$, и если $\pi(H) = \{p\}$, то теорема доказана. Если b — элемент простого порядка q из H и $q \neq p$, то, как доказано в лемме 3.3.10, конечная подгруппа $\langle a, b \rangle$ не может быть группой Фробениуса, и $ab = ba$.

Пусть K — произвольная конечная подгруппа из H. Тогда подгруппа $L = K\langle a \rangle$ конечна, по условию насыщенности $L \leq M \in \mathfrak{X}(K)$, ввиду леммы 3.3.10 $a \in H_M$, в силу доказанного выше $\Omega_1(K) \leq H_M$ и ввиду предложения 1.1.27 $\Omega_1(K)$ — циклическая группа. Отсюда следует, что $\Omega_1(H)$ — локально циклическая группа. Подгруппа $F \leftthreetimes \Omega_1(H)$ нормальна в G.

Возвращаясь к элементу b порядка q с $ab = ba$ заметим, что $C_F(b) = 1$. Действительно, в противном случае в $C_G(b)$ содержалась бы подгруппа вида $\langle b \rangle \times L$ с фробениусовой подгруппой $L = S \leftthreetimes \langle a \rangle$, чего быть не может. Значит, $C_F(b) = 1$ и, применяя предложение 1.1.31, получаем, что $B = F \leftthreetimes \langle b \rangle = F_b \leftthreetimes \langle b \rangle$ — группа Фробениуса с дополнением $\langle b \rangle$, и $F_b = [B, B] = F$. Также очевидно, что подгруппа $\langle b \rangle$ нормальна в H и $G = F \leftthreetimes N_G(\langle b \rangle)$ по предложению 1.1.31. Следовательно, $\Omega_1(G) = F \leftthreetimes \Omega_1(H)$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\Omega_1(H)$. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 3.3.2. Теорема следует из теоремы 3.3.1 и лемм 3.3.4, 3.3.6, 3.3.7 и 3.3.10. □

Список литературы

[1] Адян С. И. Периодические произведения групп // Труды матем. института АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 142 (1976), с. 3 – 21.

[2] Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975, 336 с.

[3] Беляев В. В. Группы с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика, т. 26 (1987), №5, с. 531 – 535.

[4] Блудов В. В. О группах Фробениуса // Сиб. матем. журн., т. 38 (1997), №6, с. 1219 – 1221.

[5] Винберг Э. Б. Курс алгебры. 2-е изд., испр. и доп. М.: Факториал Пресс, 2001, 544 с.

[6] Горенстейн Д. Конечные простые группы. М.: Мир, 1985, 352 с.

[7] Горчаков Ю. М. О бесконечных группах Фробениуса // Алгебра и логика, т. 4 (1965), №1, с. 15 – 29.

[8] Журтов А. Х., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д., Созутов А. И. О периодических группах, свободно действующих на абелевых группах // Труды ИММ УрО РАН, т. 19 (2013), №3, с. 136 – 143.

[9] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1982, 288 с.

[10] Крекнин В. А., Кострикин А. И. Об алгебрах Ли с регулярным автоморфизмом // ДАН СССР, т. 149 (1963), с. 249 – 251.

[11] Кузнецов А. А., Лыткина Д. В., Тухватуллина Л. Р., Филлипов К. А. Группы с условиями насыщенности. Красноярск: Изд-во КрасГАУ, 2009, 266 с.

[12] Курош А. Г. Теория групп. 3-е изд. М.: Наука, 1967, 648 с.

[13] Лыткина Д. В., Мазуров В. Д. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа B_3 // Сиб. матем. журн., т. 61 (2020), №3, с. 634 – 640.

[14] Лыткина Д. В., Созутов А. И., Шлёпкин А. А. Периодические группы 2-ранга два, насыщенные конечными простыми группами // Сиб. электрон. матем. изв., т. 15 (2018), с. 786 – 796.

[15] Лыткина Д. В., Шлёпкин А. А. Периодические группы, насыщенные линейными группами степени 2 и унитарными группами степени 3 над конечными полями нечетных характеристик // Математические труды, т. 21 (2018), №1, с. 55 – 72.

[16] Мазуров В. Д. О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика, т. 39 (2000), с. 74 – 86.

[17] Мазуров В. Д., Ольшанский А. Ю., Созутов А. И. О бесконечных группах конечного периода // Алгебра и логика, т. 54 (2015), №2, с. 243 – 251.

[18] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989, 446 с.

[19] Ольшанский А. Ю. Замечание о счетной нетопологизируемой группе // Вестн. МГУ: мат., мех., 1980, №3, с. 103.

[20] Попов А. М., Созутов А. И. О группах с H-фробениусовым элементом чётного порядка // Алгебра и логика, т. 44 (2005), №1, с. 70 – 80.

[21] Попов А. М., Созутов А. И., Шунков В. П. Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004, 211 с.

[22] Созутов А. И. О группах, насыщенных конечными группами Фробениуса // Матем. заметки, т. 109 (2021), №2, с. 264 – 275.

[23] Созутов А. И. О группах с квазициклическим централизатором конечной инволюции // Сиб. матем. журн., т. 57 (2016), №5, с. 1127 – 1130.

[24] Созутов А. И. О группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика, т. 46 (2007), №3, с. 360 – 368.

[25] Созутов А. И. О группах с фробениусовыми парами сопряженных элементов // Алгебра и логика, т. 16 (1977), №2, с. 204 – 212.

[26] Созутов А. И. О группах, насыщенных конечными группами Фробениуса // Матем. заметки, т. 109 (2021), №2, с. 264 – 275.

[27] Созутов А. И. О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика, т. 39 (2000), №5, с. 602 – 617.

[28] Созутов А. И. О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. матем. журн., т. 35 (1994), №4, с. 893 – 901.

[29] Созутов А. И. О существовании в группе бесконечных подгрупп с нетривиальным локально конечным радикалом // Препринт ВЦ СО АН СССР, Красноярск, 1980, с. 11 – 19.

[30] Созутов А. И. Пример бесконечной конечнопорожденной группы Фробениуса // VII Всесоюз. симпоз. по теории групп, Красноярск, 1980, с. 116.

[31] Созутов А. И., Дураков Е. Б. О двух вопросах из Коуровской тетради // Алгебра и логика, т. 52 (2013), №5, с. 632 – 637.

[32] Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г. Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: СФУ, 2011, 149 с.

[33] Созутов А. И., Шлёпкин А. К. О некоторых группах с конечной инволюцией, насыщенных конечными простыми подгруппами // Матем. заметки, т. 72 (2002), №3, с. 433 – 447.

[34] Созутов А. И., Шунков В. П. Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Матем. сб., т. 100 (1976), №4, с. 495 – 506.

[35] Старостин А. И. О группах Фробениуса // Укр. матем. журн., т. 23 (1971), №5, с. 629 – 639.

[36] Сучков Н. М. О конечности некоторых точно дважды транзитивных групп // Алгебра и логика, т. 40 (2001), №3, с. 344 – 351.

[37] Сучков Н. М. О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций // Матем. сб., т. 139 (2002), №2, с. 153 – 160.

[38] Холл М. Теория групп. М.: ИИЛ, 1962, 468 с.

[39] Ширванян В. Л. Некоммутативные периодические группы с нетривиальными пересечениями всех циклических подгрупп // VII Всесоюз. симпоз. по теории групп, Красноярск, 1980, с. 137.

[40] Шлёпкин А. А. О группах Шункова, насыщенных конечными простыми группами // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, т. 24 (2018), с. 51 – 67.

[41] Шлёпкин А. А. О группах, насыщенных группами диэдра и линейными группами степени 2 // Сиб. электрон. матем. изв., т. 15 (2018), с. 74 – 85.

[42] Шлёпкин А. А. О периодических группах и группах Шункова, насыщенных группами диэдра и $A5$ // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, т. 20 (2017), с. 96 – 108.

[43] Шлёпкин А. А. О периодической части группы Шункова, насыщенной сплетенными группами // Труды ИММ УрО РАН, т. 24 (2018), №3, с. 281–285.

[44] Шлёпкин А. А. О силовских 2-подгруппах групп Шункова, насыщенных группами $L_3(2^m)$ // Труды ИММ УрО РАН, т. 25 (2019), №4, с. 275–282.

[45] Шлёпкин А. А. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1 // Алгебра и логика, т. 57 (2018), №1, с. 118–125.

[46] Шлёпкин А. К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами // Матем. труды, т. 1 (1998), №1, с. 129–138.

[47] Шлёпкин А. К., Рубашкин А. Г. Об одном классе периодических групп // Алгебра и логика, т. 44 (2005), №1, с. 114–125.

[48] Шмидт О. Ю. Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп // Избр. труды, М.: Изд-во АН СССР, 1959, с. 298–300.

[49] Шунков В. П. Группы с конечно вложенной инволюцией // Алгебра и логика, т. 29 (1990), №1, с. 102–123.

[50] Шунков В. П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика, т. 11 (1972), №4, с. 470–494.

[51] Amberg B., Fransman A., Kazarin L. Products of locally dihedral subgroups // Journal of Algebra, vol. 350 (2012), no. 1, pp. 308–317.

[52] Amberg B., Kazarin L. Periodic groups saturated with dihedral subgroups // Book of abstracts of the international algebraic conference dedicated to 70-th birthday of Anatoly Yakovlev, Saint-Petersburg, 2010, pp. 79–80.

[53] Amberg B., Sysak Ya. On products of groups with abelian subgroups of small index // Journal of Group Theory, vol. 20 (2017), no. 6, pp. 1061–1072.

[54] Bender H. Endliche zweifach transitive Permutationsgruppen, deren Involutionen keine Fixpunkte haben // Mathematische Zeitschrift, vol. 104 (1968), pp. 175 – 204.

[55] Brauer R., Suzuki M. On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group // Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol. 45 (1959), pp. 1757 – 1759.

[56] Higman G. Groups and ring which have automorphisms without non-trivial fixed elements// J. London Math. Soc. vol. 32 (1957), pp. 321 – 334.

[57] Ito N. Uber das Product von zwei abelschen Gruppen // Math. Z., vol. 62 (1955), no. 4, pp. 400 – 401.

[58] Khukhro E. I., Mazurov V. D. Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook. ArXiv e-prints (Dec 2022). arXiv: 1401.0300v26 [math.GR], 269 p.

[59] Shlepkin A. A. Groups with a Strongly Embedded Subgroup Saturated with Finite Simple Non-abelian Groups // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, т. 31 (2020), с. 132 – 141.

[60] Shlepkin A. A. On the periodic part of the Shunkov group saturated with linear groups of degree 2 over finite fields of even characteristic // Чебышевский сб., т. 20 (2019), №4, с. 399 – 407.

[61] Thompson J. G. Finite groups with fixed-point free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Amer. Sci. USA, vol. 45 (1959), pp. 578 – 581.

[62] Zassenhaus H. Uber endliche Fastkörper // Abn. Math. Sem. Univ. Hamburg, vol. 11 (1935), pp. 187 – 220.

Работы автора по теме диссертации

[63] Созутов А. И., Дураков Б. Е. О группах с обособленной 2-подгруппой // Матем. заметки, т. 105 (2019), №3, с. 428 – 432.

[64] Дураков Б. Е. О некоторых группах 2-ранга один // Труды ИММ УрО РАН, т. 25 (2019), №4, с. 64 – 68.

[65] Durakov B. E., Sozutov A. I. On Periodic Groups Saturated with Finite Frobenius Groups // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, vol. 35 (2021), pp. 73 – 86.

[66] Дураков Б. Е. О группах, насыщенных конечными группами Фробениуса с дополнениями чётных порядков // Алгебра и логика, т. 60 (2021), №6, с. 560 – 574.

[67] Дураков Б. Е., Созутов А. И. О группах с инволюциями, насыщенных конечными группами Фробениуса // Сиб. матем. журн., т. 63 (2022), №6, с. 1256 – 1265.

[68] Созутов А. И., Дураков Б. Е. О группах с квазициклическим централизатором инволюции // Тезисы докладов Международной конференции Алгебра и логика: теория и приложения, посвящённой 70-летию В. М. Левчука, Красноярск, 2016, с. 70 – 71.

[69] Дураков Б. Е. О некоторых группах 2-ранга 1 // Электронный сборник материалов Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Проспект Свободный 2017», посвящённой году экологии в РФ. Фундаментальная математика, Красноярск: СФУ, 2017, с. 9 – 11.

[70] Дураков Б. Е., Дураков Е. Б., Созутов А. И. О группах два-ранга один // Мальцевские чтения: тезисы докладов международной конференции, Новосибирск, 2017, с. 68.

[71] Дураков Б. Е. О группах 2-ранга один // Материалы международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», Казань, 2019, с. 107 – 109.

[72] Дураков Б. Е., Созутов А. И. О группах, насыщенных конечными группами Фробениуса // Информационные технологии в математике и математическом образовании. Материалы IX Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, Красноярск, 2020, с. 12.

[73] Дураков Б. Е., Созутов А. И. О (слабо) сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными группами Фробениуса // Тезисы докладов конференции «Алгебра и ее приложения», посвящённой 70-летию пермской алгебр. школы им. С. Н. Черникова, Пермь, 2020, с. 17 – 18.

[74] Дураков Б. Е., Созутов А. И. О группах, насыщенных конечными группами Фробениуса // Мальцевские чтения: тезисы докладов международной конференции, Новосибирск, 2020, с. 148.

[75] Дураков Б. Е. On periodic groups of 2-rank one // Тезисы докладов конференции международных математических центров мирового уровня, Сочи, 2021, с. 235 – 236.

[76] Дураков Б. Е. О периодических группах, насыщенных конечными группами Фробениуса // Мальцевские чтения: тезисы докладов международной конференции, Новосибирск, 2021, с. 91.

[77] Дураков Б. Е. О периодических группах, насыщенных конечными группами Фробениуса // Тезисы докладов XIV международной школы-конференции по теории групп, посвящённой памяти В. А. Белоногова, В. А. Ведерникова и Л. А. Шеметкова, Брянск, 2022, с. 67.

[78] Дураков Б. Е. О периодических группах, насыщенных конечными группами Фробениуса // Мальцевские чтения: тезисы докладов международной конференции, Новосибирск, 2022, с. 100.

[79] Дураков Б. Е. О периодических группах, насыщенных конечными группами Фробениуса // Аннотации докладов Второй конференции Матем. центров России, Москва, 2022, с. 10.