ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Ульверт Роман Викторович

О РЕЗОЛЬВЕНТАХ ЧЕХА – ДЕ РАМА В ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ ВЫЧЕТОВ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
Цих А.К.

Красноярск – 2018

Содержание

Введение

В рамках комплексного анализа теория многомерных вычетов предполагает исследование интегралов $\bar{\partial}$-замкнутых форм бистепени (p, q) на n-мерном комплексном многообразии X. В случае $p = n$ такие формы автоматически d-замкнуты (замкнуты по де Раму), поэтому их естественно интегрировать по $(n+q)$-мерным циклам с компактными носителями (или с замкнутыми, если формы остаются интегрируемыми на цепях в подходящей компактификации многообразия X). Особое внимание уделяется формам с особенностями на аналитических множествах, в частности, рациональным дифференциальным формам в $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{CP}^n$ (см. [39], [1], [51]).

В одномерном случае ($n = 1$) имеется два эквивалентных определения вычета в изолированной особой точке $a \in \mathbb{C}$ функции $g(z)$ (дифференциальной формы $\omega = g(z)\,dz$). Вычет — это коэффициента c_{-1} ряда Лорана функции $g(z)$, либо интеграл формы $(2\pi i)^{-1}\omega$ по окружности малого радиуса с центром в точке a. В многомерной ситуации диапазон определений вычета значительно расширяется. Так, в теории Лере вычет формы — это снова форма, но меньшей степени. Но даже в рамках концепции вычета как числа имеется несколько подходов к его определению.

Наиболее распространен взгляд, согласно которому вычет — это коэффициент ряда Лорана $c_{-I} = c_{-1,\ldots,-1}$ мероморфной функции $g(z)$ (дифференциальной формы $\omega = g(z)\,dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$). Этот коэффициент получается в результате интегрирования формы $(2\pi i)^{-1}\omega$ по «торическому» циклу вида

$$T = \{|z_1| = r_1, \ldots, |z_n| = r_n\}.$$

Как правило, при $n > 1$ этот цикл нельзя приписывать какой-либо особой точке формы ω, например, точке полярной гиперповерхности, если g — мероморфная функция. В современной терминологии такие циклы приписываются компонентам связности дополнения амёбы полярной гиперповерхности (см. [36], [33]).

Другой подход к определению вычета основан на идее, согласно которой многомерным аналогом функции $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является не функция $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ от n комплексных переменных, а отображение $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Если такое отображение голоморфно и имеет изолированный нуль в точке a, то оно определяет в этой точке вычет мероморфной формы (см. [40], [51])

$$\omega = \frac{h(z)\,dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f_1(z) \ldots f_n(z)} \tag{0.1}$$

в виде интеграла

$$\operatorname{res}_{f,a}\omega = \operatorname{res}_{f,a} h = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma^{(a)}} \omega. \tag{0.2}$$

Здесь предполагается, что $f = (f_1, \ldots, f_n)$, а $\gamma^{(a)}$ — *локальный цикл* в малой окрестности U_a точки a:

$$\gamma^{(a)} = \{z \in U_a \colon |f_1(z)| = \varepsilon_1, \ldots, |f_n(z)| = \varepsilon_n\}. \tag{0.3}$$

Ориентация цикла $\gamma^{(a)}$ определяется условием $d(\arg f_1) \wedge \cdots \wedge (\arg f_n) \geqslant 0$.

Вычет (0.2) называют *локальным вычетом*, ассоциированным с отображением f, или *вычетом Гротендика*.

Понятие локального вычета можно свести к вычету ряда Лорана путем рассмотрения расширения поля мероморфных функций, ассоциированного с отображением f. Росток отображения $f\colon (\mathbb{C}^n_z, a) \to (\mathbb{C}^n_w, 0)$ определяет расширение поля ростков мероморфных функций $\mathcal{M}_w \hookrightarrow \mathcal{M}_z$ по формуле

$$\mathcal{M}_w \ni g(w) \to g(f(z)) \in \mathcal{M}_z.$$

Оказывается (см. [51], §6.4), множество всех мероморфных ростков вида h/J, где $J = J(f)$ — якобиан отображения f, лежит в конечном расширении K поля $\mathcal{M}_w$. Более того, след $\operatorname{Tr}_{K/\mathcal{M}_w}(h/J)$ элемента h/J относительно такого расширения голоморфен, а локальный вычет равен

$$\operatorname{res}_{f,a} h = \left[\operatorname{Tr}\frac{h}{J}\right](0) = c_{-I}\left[\operatorname{Tr}_{K/\mathcal{M}_w}\left(\frac{h}{J\cdot f_1\ldots f_n}\right)\right].$$

Связующий мост между понятиями вычета Гротендика и вычета ряда Лорана, реализуемый посредством расширения полей, не является единственным, о чем свидетельствует замечательная формула Гельфонд – Хованского (см. [37]). Согласно этой формуле, глобальный (полная сумма локальных) вычет Гротендика в комплексном алгебраическом торе $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ выражается через вычеты рядов Лорана формы (0.1) с «большими» областями сходимости.

Важным свойством вычета (0.2) является тот факт, что он равен нулю, если h принадлежит идеалу в кольце $\mathcal{O}_a$ ростков голоморфных функций, порожденном $f_1, \ldots, f_n$ (пишем $h \in \langle f\rangle$). Иными словами $\operatorname{res}_{f,a}$ — функционал на фактор-кольце $\mathcal{O}_a/\langle f\rangle$. Этот факт имеет топологическую природу. В самом деле, если $h = h_j f_j$, то форма ω имеет полюсы лишь на $n-1$ гиперповерхностях

$$F_k = \{f_k = 0\}, \quad k = 1, \ldots [k] \ldots, n,$$

в дополнении которых n-цикл $\gamma^{(a)}$ становится гомологически тривиальным:

$$\gamma^{(a)} \sim 0 \text{ в } U_a \setminus (F_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup F_n). \tag{0.4}$$

Действительно, цикл $\gamma^{(a)}$ есть граница $(n+1)$-цепи

$$\sigma_j = \{|f_1| = \varepsilon_1, \ldots, |f_j| \leqslant \varepsilon_j, \ldots, |f_n| = \varepsilon_n\},$$

рассматриваемой с подходящей ориентацией. Следовательно, по формуле Стокса интеграл (0.2) для $h = h_j f_j$ равен нулю.

Пусть теперь мероморфная форма ω задана на комплексном аналитическом многообразии X и $F_1, \ldots, F_n$ — ее полярные гиперповерхности, $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$. Свойство (0.4) берется за основу следующего определения (см. [17]).

Определение 1.6. Говорят, что n-мерный цикл $\Gamma \in Z_n(X \setminus F)$ *разделяет* гиперповерхности $F_1, \ldots, F_n$, если Γ удовлетворяет условию

$$\Gamma \sim 0 \text{ в } X \setminus (F_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup F_n) \text{ для всех } j = 1, \ldots, n.$$

Согласно сказанному выше, локальный цикл $\gamma^{(a)}$, участвующий в определении вычета Гротендика, разделяет набор полярных гиперповерхностей формы ω.

Важным аргументом при использовании локальных вычетов мероморфных форм является их рациональная вычислимость через конечное число коэффициентов Тейлора функций $h, f_1, \ldots, f_n$ в точке a. В связи с этим возникает актуальная задача о представлении интеграла от мероморфной формы ω через локальные вычеты. Топологическая формулировка этой задачи выглядит следующим образом. Пусть $\{F_1, \ldots, F_n\}$ — набор гиперповерхностей в n-мерном комплексном аналитическом многообразии X. Обозначим через F объединение этих гиперповерхностей, а через Z — дискретную часть их пересечения. Требуется выяснить, когда заданный n-цикл в $X \setminus F$ гомологически выражается через локальные циклы $\gamma^{(a)}$, $a \in Z$.

Наиболее завершенные результаты о характеризации разделяющих циклов в комплексном анализе представлены в работах Циха [17], [18], [51] и Южакова [19], [22]. Этим исследованиям предшествовал ряд результатов, полученных в работах Пикара [45], Фантаппье [32], Мартинелли [42] и Сорани [49].

Актуальность исследования локальных вычетов связана с их многочисленными приложениями. Так, в алгебраической геометрии локальные вычеты применялись при исследовании нулей векторных полей (Р. Ботт [25], П. Гриффитс [39]), в теории исключений (Л.А. Айзенберг [1], А.К. Цих [51], А.Г. Хованский [37], А.М. Кытманов [8], [4]). Отметим также приложения в комбинаторике (Г.П. Егорычев [6], А.П. Южаков [1]), в задачах о неявных отображениях (А.П. Южаков [20]), в теории особенностей (В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде [3]). Ряд приложений локальных вычетов связан с вычислением интегралов Меллина – Барнса ([7], [34]) и современными физическими исследованиями по теории струн ([12]) и физике частиц ([31]). Также отметим статьи [13], [14], где описываются свойства диагонали кратного степенного ряда, представляющего рациональную функцию многих переменных.

Цель диссертационной работы состоит в разработке комбинаторно-топологических методов кратного интегрирования в комплексных многообразиях. В частности предполагается исследовать проблему вычислимости интегралов мероморфных дифференциальных форм с помощью вычетов Гротендика и разработать методы вычисления указанных интегралов.

Основные результаты работы:

1. В терминах гомологических резольвент комплекса Чеха – де Рама на n-мерном комплексном многообразии X дана конструкция гомоморфизма

$$H_{2n-1}(X \setminus \bigcap F_j) \to H_n^{\text{sep}}(X \setminus \bigcup F_j)$$

гомологий дополнения к пересечению набора гиперповерхностей $\{F_j\}$ в разделяющую подгруппу дополнения к объединению набора $\{F_j\}$.

2. Доказано, что в 2-мерном случае комбинаторные коэффициенты для системы развернутых многогранников вычисляются по резольвенте границы подходящего полиэдра.

3. Получено обобщение теоремы Южакова о разделяющих циклах на случай одного класса дивизоров в необщем положении.

4. В локальном случае доказана справедливость гипотезы Южакова – Циха о разделяющих циклах набора $n+1$ дивизоров в n-мерном комплексном многообразии.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми. Они усиливают известные теоремы Южакова и Циха, проливают свет на связь результата Гельфонд — Хованского (о глобальном вычете Гротендика в торе) с циклами, разделяющими наборы гиперповерхностей.

Методы исследования. В основе вычислений кратных интегралов в комплексном многообразии с помощью многомерных вычетов лежит так называемый метод разделяющих циклов. Для его реализации были использованы свойства двойного комплекса Чеха – де Рама, теоремы о гомологиях пространств Штейна, результаты о разделении особенностей аналитических функций, а также свойства амёб аналитических гиперповерхностей.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты, полученные автором, в основном имеют теоретическое значение. Они раскрывают новые связи между различными концепциями определения вычета. Кроме того, они вносят существенный вклад в развитие метода разделяющих циклов, который в последнее время активно применяется в ряде разделов теоретической физики.

Результаты предполагается внедрить в учебный процесс в виде материала для проведения специальных курсов по теории многомерных вычетов и алгебраической геометрии, читаемых на кафедре теории функций Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы прошли апробацию на следующих семинарах и научных конференциях:

1. Международная конференция «IV Российско-Армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам» (Красноярск, 9–12 сентября 2012 г.)

2. XVIII Международная научно-практическая конференция «Решетневские чтения» (Красноярск, 11–14 ноября 2014)

3. V Школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России (Коряжма, 17–22 августа 2015)

4. Международная конференция «VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике» (Ростов-на-Дону, 11–16 сентября 2016 г.)

5. VI Школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России (Коряжма, 25–30 августа 2017)

6. Красноярский городской семинар по комплексному анализу и алгебраической геометрии (Сибирский федеральный университет, 2012–2018).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в трех статьях [53], [54], [54] в журналах из перечня изданий, рекомендуемых ВАК, двух сборниках материалов конференций [57], [58] и в тезисах докладов [56]. Все публикации подготовлены без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Список литературы содержит 58 наименований, список работ автора по теме диссертации: 6. Общий объем диссертации: 93 страницы. Иллюстративный материал: 3 рисунка.

В первой главе диссертации уточняются и дополняются известные сведения о когомологиях двойного комплекса $C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ Чеха – де Рама и гомологиях двойственного ему комплекса $C_*(\mathfrak{U}, S_*)$ групп сингулярных цепей. Данные комплексы сопоставляются счетному или конечному открытому покрытию $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ паракомпактного вещественного многообразия X (в случае комплекса Чеха – де Рама) или топологического пространства X (в случае двойственного комплекса).

Комплекс $C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ образован векторным пространством дифференциальных форм $\Omega^q = \Omega^q(X)$ и биградуированным векторным пространством

$$C^{p,q} = \prod_{i_0 < i_1 < \ldots < i_p} \Omega^q(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}), \quad p, q = 0, 1, \ldots,$$

элементы которого называются $\mathfrak{U}$-коцепями. Строки

$$0 \longrightarrow \Omega^q \xrightarrow{\rho} C^{0,q} \xrightarrow{\delta} C^{1,q} \xrightarrow{\delta} C^{2,q} \xrightarrow{\delta} \ldots,$$

этого комплекса образуют обобщенные точные последовательности Майера – Виеториса, а в столбцах Ω^* и $C^{p,*}$, $p = 0, 1, \ldots$, действует оператор дифференцирования $d\colon \Omega^q \to \Omega^{q+1}$, $d\colon C^{p,q} \to C^{p,q+1}$, $d^2 = 0$.

Двойственный комплекс $C_*(\mathfrak{U}, S_*)$, который также можно называть комплексом Чеха – де Рама (его гомологической версией), в свою очередь, образован группой $S_q^{\mathfrak{U}}$, порожденной всеми сингулярными симплексами, носители которых полностью содержатся в некотором элементе U_i покрытия $\mathfrak{U}$, и биградуированной группой

$$C_{p,q} = \bigoplus_{i_0 < i_1 < \ldots < i_p} S_q(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}), \quad p, q = 0, 1, \ldots,$$

элементы которой называются $\mathfrak{U}$-цепями. Данный комплекс также имеет точные строки

$$0 \longleftarrow S_q^{\mathfrak{U}} \xleftarrow{\varepsilon} C_{0,q} \xleftarrow{\delta} C_{1,q} \xleftarrow{\delta} C_{2,q} \xleftarrow{\delta} \ldots.$$

В столбцах $S_*^{\mathfrak{U}}$ и $C_{p,*}$, $p = 0, 1, \ldots$, действует оператор взятия границы цепей $\partial\colon S_q^{\mathfrak{U}} \to S_{q-1}^{\mathfrak{U}}$, $\partial\colon C_{p,q} \to C_{p,q-1}$, $\partial^2 = 0$.

Из рассмотрения спектральной последовательности «когомологического» комплекса Чеха – де Рама следует, что этот комплекс вычисляет когомологии $H^*(X)$ (см. [40], [26]). Двойственным образом, теорема 1.2 утверждает, что «гомологический» комплекс Чеха – де Рама вычисляет гомологии $H_*(S^{\mathfrak{U}})$. Этот результат не является новым (см. [26], [27]), однако приводится с подробным доказательством, в котором в явном виде появляется конструкция $\mathfrak{U}$-резольвенты (см. далее), связанная с тотальным комплексом, используемым в связи с соответствующей спектральной последовательностью. Учитывая существование изоморфизма $H_*(X) \simeq H_*(S^{\mathfrak{U}})$ из теоремы 1.2 следует, что комплекс $C_*(\mathfrak{U}, S_*)$ вычисляет гомологии пространства X.

Отметим, что далее мы сознательно не прибегаем к использованию общих фактов о спектральных последовательностях и соответствующей терминологии. Это вызвано тем, что нам требуется как можно более явное и детальное изложение результатов о комплексах Чеха – де Рама, ориентированное на последующие приложения в главе 2.

В параграфе 1.2 вводится понятие $\mathfrak{U}$-резольвенты элементов комплекса Чеха – де Рама, которое является главным техническим средством для доказательства всех основных результатов первой и второй главы диссертации. Вначале дается следующая версия определения резольвенты из статьи Э. Глисона [38].

Определение 1.3. Последовательность $\mathfrak{U}$-цепей $\{\xi_p\}_{p=0}^r$, $\xi_p \in C_{p,r-p}$, будем называть $\mathfrak{U}$-резольвентой цикла $\xi \in Z_r(S_*^{\mathfrak{U}})$, если выполняются следующие два условия:

1) $\varepsilon\xi_0 = \xi$;

2) $\delta\xi_p = \partial\xi_{p-1}$, $p = 1, \ldots, r$.

Таким образом, элементы ξ_p резольвенты располагаются на диагонали двойного комплекса и связаны условием 2), в котором оператор δ — граничный оператор Чеха. Далее в данном параграфе обсуждаются простейшие свойства $\mathfrak{U}$-резольвент, а также вводятся обобщения этого понятия (см. определения 1.4, 1.5), в частности, дается определение резольвенты для $\mathfrak{U}$-коцепи. Основным результатом параграфа является предложение 1.4, описывающее на языке резольвент «диагональную» последовательность гомоморфизмов

$$H_r(S_*^{\mathfrak{U}}) \to H_0(C_{*,r-1}^{cl}) \to H_1(C_{*,r-2}^{cl}) \to \ldots \to H_{r-2}(C_{*,1}^{cl}) \to H_{r-1}(C_{*,0}^{cl}) \simeq 0, \tag{0.5}$$

где $H_p(C_{*,q}^{cl})$ — группа p-мерных δ-гомологий комплекса

$$0 \longleftarrow Z_q(S_*^{\mathfrak{U}}) \xleftarrow{\varepsilon} C_{0,q}^{cl} \xleftarrow{\delta} C_{1,q}^{cl} \xleftarrow{\delta} C_{2,q}^{cl} \xleftarrow{\delta} \ldots,$$

образованного подгруппами $C_{p,q}^{cl} = Z_q(C_{p,*}) = \ker(\partial \colon C_{p,q} \to C_{p,q-1})$. Заметим, что представитель класса $[\xi] \in H_p(C_{*,q}^{cl})$ — это $\mathfrak{U}$-цепь $\xi \in C_{p,q}$, для которой $\partial\xi = 0$ и $\delta\xi = 0$. Последовательность гомоморфизмов (0.5) является двойственным вариантом последовательности гомоморфизмов для когомологий групп $\mathfrak{U}$-коцепей, описанной в [38].

Параграф 1.3 описывает спаривание между $\mathfrak{U}$-коцепями и $\mathfrak{U}$-цепями, соответствующими покрытию $\mathfrak{U}$ многообразия X. Это спаривание определяется по формуле

$$\langle \theta, \xi \rangle = \sum_{i_0 < i_1 < \ldots < i_p} \big\langle \theta(i_0, i_1, \ldots, i_p), \xi(i_0, i_1, \ldots, i_p) \big\rangle,$$

где теперь $\theta \in C^{p,q}$, $\xi \in C_{p,q}$, и обладает свойствами, изложенными в предложении 1.9, теореме 1.4 и следствии 1.1 (см. [38], [40]).

В параграфе 1.4 рассматривается наиболее важный для дальнейших приложений случай конечного покрытия $\mathfrak{U}$. Двойственность результатов о комплексах Чеха – де Рама в данной ситуации проявляется в полной мере. Основные результаты параграфа формулируются в теоремах 1.5, 1.6 и 1.8. В частности, утверждение теоремы 1.5 состоит в том, что для покрытия $\mathfrak{U}$, состоящего из m элементов, последовательность гомоморфизмов (0.5) заменяется на последовательность гомоморфизмов

$$H_r(S_*^{\mathfrak{U}}) \to H_0(C_{*,r-1}^{cl}) \to \ldots \to H_{m-3}(C_{*,r-m+2}^{cl}) \to H_{r-m+1}(C_{m-1,*}), \tag{0.6}$$

действие которых описывается цепочкой образов

$$[\xi] \longmapsto [\partial\xi_0] \longmapsto \ldots \longmapsto [\partial\xi_{m-3}] \longmapsto [\xi_{m-1}],$$

где $\xi_0, \ldots, \xi_{m-3}, \xi_{m-2}, \xi_{m-1}$ — резольвента для цикла $\xi \in Z_r(S_*^{\mathfrak{U}})$.

Заключительный параграф первой главы содержит один из основных результатов диссертации. Рассмотрим n-мерное комплексное аналитическое многообразие X и набор $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ гиперповерхностей в X. В данном контексте всегда будем использовать обозначения $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$ и $\widetilde{X} = X \setminus (F_1 \cap \ldots \cap F_n)$. Напомним, что согласно определению 1.6, цикл $\Gamma \in Z_n(X \setminus F)$ называется разделяющим для набора $\mathcal{F}$, если $\Gamma \sim 0$ в $X \setminus (F_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup F_n)$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Обозначим через $H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$ подгруппу группы гомологий $H_n(X \setminus F)$, образованную классами всех циклов, разделяющих данный набор гиперповерхностей (эта подгруппа далее называется *разделяющей*).

Множества $U_j = X \setminus F_j$, $j = 1, \ldots, n$, образуют открытое покрытие $\mathfrak{U}$ многообразия $\widetilde{X}$. Условие разделения циклом Γ набора $\mathcal{F}$, означает, что $\delta\Gamma$ является ∂-границей в группе $C_{n-2,n}$. Последнее замечание дает возможность использовать язык резольвент комплекса Чеха – де Рама в связи с разделяющими циклами. Следующая теорема является основным результатом первой главы.

Теорема 1.9. *Пусть $\xi \in Z_{2n-1}(\widetilde{X})$, и $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ — $\mathfrak{U}$-резольвента произвольного цикла из $Z_{2n-1}(S_*^{\mathfrak{U}})$, представляющего класс $[\xi] \in H_{2n-1}(\widetilde{X}) \simeq H_{2n-1}(S_*^{\mathfrak{U}})$. Тогда соответствие гомологических классов $[\xi] \mapsto [\xi_{n-1}]$ определяет гомоморфизм*

$$\varphi\colon H_{2n-1}(\widetilde{X}) \to H_n^{sep}(X \setminus F).$$

Если X — штейново, то φ является изоморфизмом.

Эта теорема дает гомологическое описание тех n-циклов, разделяющих гиперповерхности $F_1, \ldots, F_n$, которые связаны при помощи резольвент с $(2n-1)$-гомологиями многообразия $X \setminus (F_1 \cap \ldots \cap F_n)$. Такое описание оказывается полным в случае многообразий Штейна. Доказательство теоремы основано на использовании последовательности гомоморфизмов (0.6).

Вторая глава начинается с определения локального вычета (вычета Гротендика). Как было сказано в начале введения, вычет $\operatorname{res}_{f,a} \omega$ можно сопоставить изолированной точке a пересечения набора особых гиперповерхностей $F_1, \ldots, F_n$ мероморфной формы ω. При этом локальный цикл (0.3), участвующий в определении вычета через интеграл (0.2), разделяет данный набор гиперповерхностей. Поэтому группа $H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$, порожденная классами локальных циклов $\gamma^{(a)}$, соответствующих всем изолированным точкам a пересечения гиперповерхностей $F_1, \ldots, F_n$, является подгруппой группы $H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$. Как уже отмечалось, одной из топологических задач теории многомерных вычетов является описание условий, при которых разделяющий цикл Γ имеет гомологическое представление в виде линейной комбинации локальных циклов, то есть $[\Gamma] \in H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$.

В параграфе 2.2 рассматриваются гомологические и когомологические резольвенты, связанные с локальными вычетами (данный материал менее подробно изложен в монографии [40], Глава 5, §1). В частности отмечается (см. лемма 2.1), что локальный цикл $\gamma^{(a)} = \{z \in U_a \colon |f_i(z)| = \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ является конечным элементом $\mathfrak{U}$-резольвенты для границы $\partial\Pi_a$ специального аналитического полиэдра

$$\Pi_a = \{z \in U_a \colon |f_i(z)| < \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n\}, \tag{0.7}$$

где $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие области $U_a \setminus a$ множествами

$$U_i = \{z \in U_a \colon f_i(z) \neq 0\},\ i = 1, \ldots, n.$$

В свою очередь для мероморфной n-формы ω вида (0.1) с полярной гиперповерхностью $F = \{f_1 \cdot \ldots \cdot f_n = 0\}$ находится когомологическая резольвента, конечный элемент которой имеет вид

$$\theta_{-1} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} (n-1)!\, \frac{h}{\|f\|^{2n}} \sum_{i \in I} (-1)^{i-1} \bar{f}_i d\bar{f}_{I \setminus i} \wedge dz_I, \quad z \in U_a \setminus a.$$

В качестве иллюстрации применения описанных резольвент и свойств спаривания из параграфа 1.3 выводится известная формула представления локального вычета через интеграл по сфере:

$$\operatorname{res}_{f,a} \omega = \frac{1}{(2\pi i)^n} \langle \theta_{-1}, \partial\Pi_a \rangle = \frac{1}{(2\pi i)^n} \langle \theta_{-1}, S_a \rangle = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{S_a} \theta_{-1},$$

где S_a — это $(2n-1)$-мерная сфера малого радиуса с центром в точке a.

Параграфы 2.3, 2.4 посвящены получению новых доказательств для двух основных результатов А. К. Циха, связанных с задачей описания условий, при которых разделяющий цикл гомологически выражается через локальные циклы. Первый из этих результатов формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть X — многообразие Штейна размерности n, и $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ — набор гиперповерхностей в X. Тогда n-цикл Γ из $X \setminus F$ разделяет набор $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда Γ гомологичен линейной комбинации локальных циклов $\gamma^{(a)}$, $a \in Z_0$, где Z_0 — дискретная часть пересечения $F_1 \cap \ldots \cap F_n$.*

Предлагаемое нами доказательство основано на применении теоремы 1.9 о существовании разделяющего гомоморфизма $\varphi\colon H_{2n-1}(\widetilde{X}) \to H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$. Согласно замечанию из параграфа 2.2 имеем $[\gamma^{(a)}] = \varphi[\partial\Pi_a]$, поэтому в общем случае

$$H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F) \subset \operatorname{im}\varphi \subset H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F).$$

Для многообразий Штейна все три группы гомологий совпадают:

$$H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F) = \operatorname{im}\varphi = H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F),$$

что и доказывает теорему. Отметим, что в условиях теоремы 2.1 при $Z_0 = \varnothing$ получим $H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F) = H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F) \simeq 0$, то есть в этом случае любой разделяющий цикл гомологически тривиален.

Второй из упомянутых результатов является одним из вариантов так называемого «принципа разделяющих циклов» А. К. Циха. Рассмотрим специальный аналитический полиэдр

$$\Pi = \{z \in G\colon \chi_i(z) \in G_i,\ i = 1, \ldots, n\}, \quad \chi_i \in \mathcal{O}(G),\ G_i \Subset \chi_i(G),$$

и набор гиперповерхностей $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$, где

$$F_i = \{z \in G\colon f_i(z) = 0\},\ f_i \in \mathcal{O}(G), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\mathcal{O}(G)$ — кольцо функций, голоморфных в области G. Пусть как и прежде $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$ и Z_0 — дискретная часть пересечения $F_1 \cap \ldots \cap F_n$. Назовем набор гиперповерхностей $\mathcal{F}$ *согласованным* с аналитическим полиэдром Π, если

$$F_i \cap \sigma^{(i)} = \varnothing \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\sigma^{(i)} = \{z \in G\colon \chi_i(z) \in \partial G_i,\ \chi_j(z) \in G_i,\ j \neq i\}$, $i = 1, \ldots, n$, — грани полиэдра Π. Напомним, что пересечение всех граней полиэдра Π называется его остовом.

Предложение 2.1. *Если набор гиперповерхностей $\mathcal{F}$ согласован с полиэдром Π, то его* *остов σ_n допускает в $\overline{\Pi} \setminus F$ гомологическое представление*

$$\sigma_n \sim \sum_{a \in Z_0 \cap \Pi} \gamma^{(a)},$$

где $\gamma^{(a)}$ — локальный цикл в точке a для набора $\mathcal{F}$.

При доказательстве мы также пользуемся теоремой 1.9 и возможностью связать с помощью резольвенты границу полиэдра с его остовом.

В параграфе 2.5 рассматривается одно из возможных обобщений понятия разделяющего цикла. Это обобщение, в частности, имеет отношение к теории узлов. Нетривиальное зацепление называется *брунновым*, если оно становится тривиальным при удалении любой своей компоненты. Наиболее известным примером такого зацепления являются кольца Борромео — нетривиальное зацепление трех колец (окружностей), которые попарно незацеплены. По аналогии с понятием цикла, разделяющего набор гиперповерхностей в комплексном многообразии, следует говорить, что в данном случае каждая из окружностей как одномерный цикл разделяет набор двух других окружностей в $\mathbb{R}^3$.

Пусть X — вещественное многообразие размерности d, и $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$ — набор замкнутых подмножеств из X, где $2 \leqslant m \leqslant d-1$. Обозначим $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$. Дается следующее определение.

Определение 2.1. Будем говорить, что $(d-m)$-мерный цикл Γ в $X \setminus Y$ разделяет набор $\mathcal{Y}$, если Γ гомологичен нулю в $X \setminus (Y_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup Y_m)$ для всех $j \in I = \{1, \ldots, m\}$.

В соответствии с этим определением любая компонента $\Gamma \sim S^1$ (топологическая окружность S^1 как одномерный цикл) бруннового зацепления с тремя компонентами разделяет набор оставшихся компонент $\{Y_1, Y_2\}$, $Y_j \sim S^1$, в $X = \mathbb{R}^3$. С другой стороны, данному определению удовлетворяют и циклы, разделяющие набор гиперповерхностей в n-мерном комплексном многообразии (в этом случае $d = 2n$ и $m = n$).

Пример бруннового зацепления с тремя компонентами обобщается в следующем предложении.

Предложение 2.3. *Пусть X — сфера S^{2n+1} размерности $2n+1$, $n \geqslant 1$, и $\mathcal{Y}$ — набор из $n+2$ попарно непересекающихся поверхностей, гомеоморфных S^n, в котором каждая из поверхностей разделяет остальные. Тогда каждая сфера из набора $\mathcal{Y}$ гомологически тривиальна в дополнении остальных сфер.*

В частности, для брунновых зацеплений с тремя компонентами последнее предложение утверждает, что на каждую топологическую окружность данного зацепления можно натянуть «пленку», лежащую в дополнении к другим двум окружностям (для колец Борромео можно в этом убедиться непосредственно).

Доказательство данного предложения основано на существовании разделяющего гомоморфизма, аналогичного гомоморфизму φ из теоремы 1.9 (см. предложение 2.2). Заметим также, что предложение 2.3 является аналогом того факта, что любой цикл, разделяющий набор гиперповерхностей в штейновом многообразии, будет гомологически тривиален в случае $Z_0 = \varnothing$.

Параграф 2.6 содержит основной результат главы 2, имеющий отношение к известной теореме Гельфонд – Хованского о глобальном вычете Гротендика в комплексном алгебраическом торе $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ (см. [37]). Эта теорема дает обобщение того факта, что в одномерном случае сумма вычетов мероморфной формы $\omega = g(z)\,dz/(z \cdot f(z))$ в конечных ненулевых корнях многочлена $z \cdot f(z)$ выражается двумя слагаемыми:

$$\sum_{a \in f^{-1}(0) \cap \mathbb{T}^1} \operatorname{res}_a \omega = -(\operatorname{res}_0 \omega - \operatorname{res}_\infty \omega).$$

Эти слагаемые являются взятыми с коэффициентами ± 1 вычетами, приписываемыми точкам (0-мерным дивизорам) $z = 0$ и $z = \infty$ на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{CP}^1$, которые «подклеиваются» при компактификации тора $\mathbb{T}^1 \subset \mathbb{CP}^1$. В случае $n = 2$ и мероморфной формы

$$\omega = \frac{g(z,w)}{f_1(z,w) \cdot f_2(z,w)} \, \frac{dz \wedge dw}{z \cdot w}$$

рассматривается компактификация тора $\mathbb{T}^2$ в виде торического многообразия, построенного по многоугольнику $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, где Δ_j — многоугольник Ньютона полинома f_j, $j = 1, 2$, и берется сумма многоугольников по Минковскому. В соответствии с формулой Гельфонд – Хованского, при условии *развернутости* набора многоугольников Δ_1, Δ_2, глобальный вычет Гротендика формы ω выражается в виде суммы *торических вычетов*, связанных с вершинами многоугольника-суммы Δ, взятых с некоторыми коэффициентами. Эти коэффициенты зависят лишь от комбинаторных свойств набора многоугольников Δ_1, Δ_2 и называются *комбинаторными коэффициентами* (см. [37]). Двойственным объектом по отношению к многоугольнику $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ является веер Бергмана $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ с вершиной O в начале координат (см. [23]). При этом мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2.4. *Пусть $[\gamma]$ — образующая группы $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, представленная замкнутой кривой γ, окружающей точку O и ориентированной против часовой стрелки. Тогда разложение образа $\varphi[\gamma]$ по базе $\{[t_j]\}$ группы $H_0(\mathbb{R}^2 \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2))$ имеет вид*

$$\varphi([\gamma]) = \sum_{j=1}^{N} k_j [t_j],$$

где k_j — комбинаторные коэффициенты Гельфонд – Хованского.

Отметим, что отображение φ в формулировке теоремы — это разделяющий гомоморфизм

$$\varphi\colon H_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}) \to H_0^{\mathrm{sep}}(\mathbb{R}^2 \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)),$$

определенный в параграфе 2.5.

Третья глава посвящена исследованию гипотезы Южакова – Циха о разделяющих циклах в многообразиях Штейна. Как было показано в главе 2, для штейновых многообразий размерности n любой цикл, разделяющий набор n гиперповерхностей, представляется в виде линейной комбинации локальных циклов. В ситуации, когда мероморфная форма (0.1) имеет особенности на более чем n гиперповерхностях, в связи с локальными вычетами этой формы естественно возникает обобщенный взгляд на понятие разделяющего цикла. Упомянутая гипотеза связана с распространением результата о разделяющих циклах в многообразиях Штейна на этот более общий случай.

В параграфе 3.1 формулируется гипотеза Южакова – Циха и обсуждаются полученные ранее результаты, подтверждающие эту гипотезу в частных случаях. В данной главе рассматриваются наборы гиперповерхностей $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_m\}$ в комплексном аналитическом многообразии X размерности n, где $m \geqslant n$. Разбиением множества индексов $\{1, \ldots, m\}$ будем называть упорядоченный набор непустых попарно непересекающихся подмножеств $\mathcal{J} = (J_1, \ldots, J_n)$ таких, что $J_1 \cup \ldots \cup J_n = \{1, \ldots, m\}$. Каждое такое разбиение $\mathcal{J}$ определяет упорядоченный набор гиперповерхностей

$$\mathcal{F}_{\mathcal{J}} = (F_1, \ldots, F_n),\ \text{где}\ F_i = \bigcup_{j \in J_i} D_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Как и прежде, через F обозначается объединение $F_1 \cup \ldots \cup F_n$, которое, очевидно, совпадает с объединением гиперповерхностей исходного набора $\mathcal{D}$.

Пусть $Z_{\mathcal{J}}$ — дискретная часть пересечения $F_1 \cap \ldots \cap F_n$. Каждой точке $a \in Z_{\mathcal{J}}$ сопоставляется локальный цикл

$$\Gamma_{\mathcal{J}}^{(a)} = \{z \in U_a\colon |f_i(z)| = \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

где $F_i|_{U_a} = \{f_i(z) = 0\}$. При этом каждый такой локальный цикл разделяет набор гиперповерхностей $\mathcal{D}$ в смысле следующего определения (см. [51]).

Определение 3.1. Говорят, что n-мерный цикл $\Gamma \in Z_n(X \setminus F)$ разделяет гиперповерхности $D_1, \ldots, D_m$ $(m \geqslant n)$, если Γ удовлетворяет условию

$$\Gamma \sim 0 \text{ в } X \setminus (D_{\alpha_1} \cup \ldots \cup D_{\alpha_{n-1}}) \text{ для всех поднаборов } \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \ldots, m\}.$$

Как и раньше, рассматривается подгруппа $H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$ группы гомологий $H_n(X \setminus F)$, порожденная всевозможными локальными циклами $\Gamma_{\mathcal{J}}^{(a)}$, и подгруппа $H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$, образованная всеми классами циклов, разделяющих набор $\mathcal{D}$, причем $H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F) \subset H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$. Гипотезу Южакова – Циха можно коротко сформулировать следующим образом.

Гипотеза. *Пусть X — штейново многообразие и $\{D_1, \ldots, D_m\}$ — произвольный набор гиперповерхностей в X, $m \geqslant n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Тогда $H_n^{sep}(X \setminus F) = H_n^{loc}(X \setminus F)$.*

Будем говорить, что набор $\mathcal{D}$ *имеет дискретные пересечения*, если для любого n-поднабора $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \{1, \ldots, m\}$ множество $D^\alpha = D_{\alpha_1} \cap \ldots \cap D_{\alpha_n}$ дискретно.

Сформулированная гипотеза была доказана Южаковым при некоторых дополнительных ограничениях:

Теорема 3.1([22], теорема 1). *Утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо в каждом из следующих случаев:*

1) *Набор гиперповерхностей $\mathcal{D}$ имеет дискретные пересечения и $D^\alpha \cap D^\beta = \varnothing$ для любых n-поднаборов индексов $\alpha, \beta \subset \{1, \ldots, m\}$ при $\alpha \neq \beta$;*

2) *$X = U_a$ — достаточно малая штейнова окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n$ и $D^\alpha = \{a\}$ для любого n-поднабора индексов $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$.*

Отметим, что условие 1) теоремы 3.1 означает, что гиперповерхности из набора $\mathcal{D}$ находятся «в общем положении» (это условие сохраняется при малых «шевелениях» D_j). В рамках условия 2) рассматривается локальная ситуация и подразумевается, что речь идет о *центрированном* наборе $\mathcal{D}$ ростков гиперповерхностей в точке a. Условие $D^\alpha = \{a\}$ для любого n-поднабора индексов $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$ также выражает свойство «общего положения».

Еще одна важная ситуация, в которой выполняется утверждение гипотезы о разделяющих циклах в многообразиях Штейна, рассматривалась Г. А. Московченко. Показано (см. [11], теорема 2.3), что для произвольного набора гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$ группы $H_n(\mathbb{C}^n \setminus F)$, $H_n^{\mathrm{sep}}(\mathbb{C}^n \setminus F)$ и $H_n^{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}^n \setminus F)$ совпадают.

Параграф 3.2 содержит вспомогательные утверждения, необходимые для доказательств основных теорем главы. В основном обсуждаются результаты о *разделении особенностей* (сингулярностей) голоморфной функции $n \geqslant 1$ переменных. Прототипом процедуры разделения особенностей является теорема о разложении рациональной функции одного переменного на простейшие дроби. В нашем случае роль простейших дробей играют функции, особые множества которых являются объединениями не более чем n гиперповерхностей. В частности, доказывается лемма 3.3, описывающая разделение особенностей в локальной ситуации.

В параграфах 3.3–3.5 доказываются новые результаты, подтверждающие гипотезу Южакова – Циха. Наиболее значимыми из них являются следующие две теоремы, относящиеся к основным результатам диссертации.

Первая из этих теорем является обобщением теоремы Южакова 3.1.

Теорема 3.3. *Утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо при выполнении следующего условия: набор гиперповерхностей имеет дискретные пересечения, и для любых n-поднаборов индексов $\alpha, \beta \subset \{1, \ldots, m\}$ множества D^α и D^β, имеющие хотя бы одну общую точку, полностью совпадают:*

$$D^\alpha \cap D^\beta \neq \varnothing \Rightarrow D^\alpha = D^\beta.$$

Действительно, при выполнении условия 1) теоремы 3.1 из $D^\alpha \cap D^\beta \neq \varnothing$ следует, что $\alpha = \beta$, откуда тривиальным образом $D^\alpha = D^\beta$. Если же выполняется условие 2), то множества D^α совпадают для всех n-поднаборов $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$.

В условиях второй теоремы в важном частном случае удается избавиться от предположения «общего положения» элементов набора гиперповерхностей. Доказана теорема.

Теорема 3.4. *Пусть X — достаточно малая штейнова окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n$. Тогда утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо для любого набора, состоящего из $m = n + 1$ гиперповерхностей.*

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А.К. Циху за постановку задачи и неоценимую поддержку при подготовке диссертационной работы.

Глава 1

Резольвенты комплекса Чеха – де Рама

В данной главе уточняются и дополняются известные факты о двойном комплексе Чеха – де Рама и двойственном ему комплексе, образованном группами сингулярных цепей, связанных с открытым покрытием $\mathfrak{U}$ многообразия (или, в более общей формулировке, топологического пространства). В качестве основного инструмента используется понятие $\mathfrak{U}$-резольвенты, предложенное Э. Глисоном, и его обобщения. В заключительном параграфе главы намечается подход к исследованию циклов, разделяющих гиперповерхности в комплексных аналитических многообразиях, с использованием резольвент.

1.1 Двойной комплекс Чеха – де Рама

Пусть $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ — открытое покрытие топологического пространства X, где I — счетное или конечное упорядоченное множество индексов. Далее будем использовать стандартное обозначение S^q для группы сингулярных цепей размерности q (с коэффициентами в $\mathbb{C}$) на X. Следующие два определения даются в статье [38].

Определение 1.1. $\mathfrak{U}$-цепью на X кратности p и размерности q называется альтернированная (кососимметрическая) функция σ, определенная на множестве I^{p+1} и принимающая значения

$$\sigma(i_0, i_1, \ldots, i_p) \in S_q(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}),$$

не равные нулю лишь для конечного числа элементов из I^{p+1}.

Если X — вещественное (паракомпактное) многообразие, то аналогичным образом дается двойственное понятие $\mathfrak{U}$-коцепи на X. Будем применять обозначение Ω^q для векторного пространства (комплекснозначных) дифференциальных форм степени q на X.

Определение 1.2. $\mathfrak{U}$-коцепью на X кратности p и степени q называется альтернированная функция θ, определенная на множестве I^{p+1} и принимающая значения

$$\theta(i_0, i_1, \ldots, i_p) \in \Omega^q(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}).$$

Заметим, что $\mathfrak{U}$-цепи естественным образом отождествляются с элементами биградуированной группы

$$C_{p,q} = \bigoplus_{i_0<i_1<\ldots<i_p} S_q(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}), \quad p,q = 0,1,\ldots \tag{1.1}$$

Аналогично, $\mathfrak{U}$-коцепи будем отождествлять с элементами векторного пространства

$$C^{p,q} = \prod_{i_0<i_1<\ldots<i_p} \Omega^q(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}), \quad p,q = 0,1,\ldots \tag{1.2}$$

Комплекс Чеха – де Рама.

Биградуированное векторное пространство (1.2) всех $\mathfrak{U}$-коцепей на многообразии X связано с известным двойным комплексом Чеха – де Рама. Напомним (см., например, [26]) его конструкцию.

Включения

$$U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_{p+1}} \hookrightarrow U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots [i_k] \ldots \cap U_{i_{p+1}}, \quad k = 0,\ldots,p+1,$$

индуцируют кограничный оператор Чеха $\delta\colon C^{p,q} \to C^{p+1,q}$, $\delta^2 = 0$, определяемый по формуле

$$(\delta\theta)(i_0,i_1,\ldots,i_{p+1}) = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \theta(i_0,\ldots[i_k]\ldots,i_{p+1}),$$

где в правой части равенства подразумевается, что берутся ограничения форм на пересечение $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{p+1}}$. В свою очередь включения $U_i \subset X$ индуцируют оператор $\rho\colon \Omega^q(X) \to C^{0,q}$:

$$(\rho\theta)(i) = \theta\,|_{U_i}\,, \quad i \in I,$$

причем $\delta\rho = 0$.

Последовательность

$$0 \longrightarrow \Omega^q \xrightarrow{\rho} C^{0,q} \xrightarrow{\delta} C^{1,q} \xrightarrow{\delta} C^{2,q} \xrightarrow{\delta} \ldots, \tag{1.3}$$

называется *обобщенной последовательностью Майера – Виеториса.*

Предложение 1.1 ([26], Предложение 8.5)**.** *Последовательность* (1.3) *точна.*

В частности, при $I = \{1,2\}$ обобщенная последовательность Майера — Виеториса дает известную короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \Omega^q(U_1 \cup U_2) \longrightarrow \Omega^q(U_1) \oplus \Omega^q(U_2) \longrightarrow \Omega^q(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0.$$

Двойным комплексом Чеха — де Рама называется следующий (расширенный) двойной комплекс $C^*(\mathfrak{U},\Omega^*)$, соответствующий биградуированному пространству $(C^{p,q})$:

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \Omega^{q+1} \arrow[r, "\rho"] \arrow[u, "d"] & C^{0,q+1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & C^{1,q+1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Omega^{q} \arrow[r, "\rho"] \arrow[u, "d"] & C^{0,q} \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & C^{1,q} \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots \\
 & \arrow[u, "d"] & \arrow[u, "d"] & \arrow[u, "d"] & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \Omega^{0} \arrow[r, "\rho"] \arrow[u, "d"] & C^{0,0} \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & C^{1,0} \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "d"] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\tag{1.4}
$$

Строки этого комплекса образуют точные последовательности, а в столбцах действует оператор дифференцирования $d\colon C^{p,q}\to C^{p,q+1}$, $d^2=0$,

$$(d\theta)(i_0,i_1,\dots,i_p)=d(\theta(i_0,i_1,\dots,i_p)),$$

причем $d\delta=\delta d$, $d\rho=\rho d$. Отметим, что в силу последних равенств, отображения $\rho\colon\Omega^*\to C^{0,*}$ и $\delta\colon C^{p,*}\to C^{p+1,*}$ являются цепными отображениями коцепных комплексов, образованных соответствующими столбцами двойного комплекса.

Введем следующие обозначения:

$Z^q(\Omega^*)=\ker(d\colon\Omega^q\to\Omega^{q+1})$ — подпространство d-замкнутых форм;

$B^q(\Omega^*)=\operatorname{im}(d\colon\Omega^{q-1}\to\Omega^q)$ — подпространство d-точных форм;

$C^{p,q}_{cl}=Z^q(C^{p,*})=\ker(d\colon C^{p,q}\to C^{p,q+1})$ — подпространство d-замкнутых $\mathfrak{U}$-коцепей;

$B^q(C^{p,*})=\operatorname{im}(d\colon C^{p,q-1}\to C^{p,q})$ — подпространство d-точных $\mathfrak{U}$-коцепей;

$Z^p(C^{*,q})=\ker(\delta\colon C^{p,q}\to C^{p+1,q})$ — подпространство δ-замкнутых $\mathfrak{U}$-коцепей;

$B^p(C^{*,q})=\operatorname{im}(\delta\colon C^{p-1,q}\to C^{p,q})$, $B^0(C^{*,q})=\operatorname{im}(\rho\colon\Omega^q\to C^{0,q})$ — подпространства δ-точных $\mathfrak{U}$-коцепей.

Точность строк двойного комплекса (1.4) означает, что

$$Z^p(C^{*,q})=B^p(C^{*,q}),\quad p=0,1,\dots,$$

откуда следует тривиальность когомологий коцепных комплексов, образованных этими строками:

$$H^p(C^{*,q})=Z^p(C^{*,q})/B^p(C^{*,q})\simeq 0,\quad p=0,1,\dots$$

Кроме того, учитывая, что ρ — мономорфизм, получаем естественный изоморфизм

$$\rho_*\colon \Omega^q \to Z^0(C^{*,q}).$$

Так как ρ и δ — цепные отображения, то корректно определены следующие подпространства:

$Z^p(C^{*,q}_{cl}) = \ker(\delta\colon C^{p,q}_{cl} \to C^{p+1,q}_{cl}) = \{\theta \in C^{p,q}\colon d\theta = 0,\, \delta\theta = 0\}$;

$B^p(C^{*,q}_{cl}) = \operatorname{im}(\delta\colon C^{p-1,q}_{cl} \to C^{p,q}_{cl})$, $B^0(C^{*,q}_{cl}) = \operatorname{im}(\rho\colon Z^q(\Omega^*) \to C^{0,q}_{cl}) \simeq Z^q(\Omega^*)$.

Подпространства $Z^p(C^{*,q}_{cl})$, $B^p(C^{*,q}_{cl})$ являются соответствующими подпространствами коциклов и кограниц для коцепного комплекса

$$0 \longrightarrow Z^q(\Omega^*) \xrightarrow{\rho} C^{0,q}_{cl} \xrightarrow{\delta} C^{1,q}_{cl} \xrightarrow{\delta} C^{2,q}_{cl} \xrightarrow{\delta} \dots,$$

рассматриваемого как подкомплекс комплекса (1.3). Обозначим

$$H^p(C^{*,q}_{cl}) = Z^p(C^{*,q}_{cl})/B^p(C^{*,q}_{cl}), \quad p = 0, 1, \dots$$

Если $\theta \in Z^0(C^{*,q}_{cl})$, то $\rho\theta = 0$, поэтому найдется форма $\tau \in \Omega^q$, для которой $\theta = \rho\tau$. Имеем $\rho(d\tau) = d(\rho\tau) = d\theta = 0$. Но ρ — мономорфизм, поэтому $d\tau = 0$, то есть $\tau \in Z^q(\Omega^*)$, и $\theta \in B^0(C^{*,q}_{cl})$. Таким образом, показано, что

$$Z^0(C^{*,q}_{cl}) = B^0(C^{*,q}_{cl}) \simeq Z^q(\Omega^*),$$

откуда следует, что

$$H^0(C^{*,q}_{cl}) \simeq 0.$$

Аналогично, при $p \geqslant 1$ для $\theta \in Z^p(C^{*,q}_{cl})$ в силу точности последовательности (1.3) существует цепь $\tau \in C^{p-1,q}$, для которой $\theta = \delta\tau$. Однако, не обязательно $d\tau = 0$, что говорит о нетривиальности групп $H^p(C^{*,q}_{cl})$ в общем случае.

В [38] доказываются следующие важные леммы.

Лемма 1.1 ([38], Лемма 1.7)**.** *Пусть $\theta \in Z^p(C^{*,q}_{cl})$, где $p \geqslant 1$. Предположим, что $\theta = \delta\tau$ для $\tau \in C^{p-1,q}$. Тогда $d\tau \in Z^{p-1}(C^{*,q+1}_{cl})$, и класс $[d\tau] \in H^{p-1}(C^{*,q+1}_{cl})$ зависит только от класса $[\theta] \in H^p(C^{*,q}_{cl})$. Это соответствие задает гомоморфизм групп*

$$(d\delta^{-1})_*\colon H^p(C^{*,q}_{cl}) \to H^{p-1}(C^{*,q+1}_{cl}).$$

$$
\begin{tikzcd}
0 & & \\
d\tau \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & 0 & \\
\tau \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"'] & \theta \arrow[u, "d"'] \arrow[r, "\delta"'] \arrow[ul, dashed, "d\delta^{-1}"] & 0
\end{tikzcd}
$$

Замечание. Так как $H^0(C_{cl}^{*,q}) \simeq 0$, то при $p = 1$ описанный в данной лемме гомоморфизм является тривиальным:

$$(d\delta^{-1})_*\colon H^1(C_{cl}^{*,q}) \to 0.$$

Лемма 1.2 ([38], Лемма 1.8)**.** *Пусть $\theta \in Z^1(C_{cl}^{*,q})$. Предположим, что $\theta = \delta\tau$ для $\tau \in C^{0,q}$. Тогда $d\tau \in Z^0(C_{cl}^{*,q+1}) \simeq Z^{q+1}(\Omega^*)$, и образ $d\tau$ в $H^{q+1}(\Omega^*) = Z^{q+1}(\Omega^*)/B^{q+1}(\Omega^*)$ зависит только от класса $[\theta] \in H^1(C_{cl}^{*,q})$. Это соответствие задает гомоморфизм групп*

$$(\rho^{-1}d\delta^{-1})_*\colon H^1(C_{cl}^{*,q}) \to H^{q+1}(\Omega^*).$$

$$
\begin{tikzcd}
0 & 0 & & \\
\rho^{-1}(d\tau) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\rho", "\mathrm{iso}"'] & d\tau \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & 0 & \\
 & \tau \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"'] & \theta \arrow[u, "d"'] \arrow[r, "\delta"'] \arrow[ull, dashed, "\rho^{-1}d\delta^{-1}"] & 0
\end{tikzcd}
$$

Объединяя утверждения лемм 1.1 и 1.2, получим следующую «диагональную» последовательность гомоморфизмов:

$$H^r(C_{cl}^{*,0}) \to H^{r-1}(C_{cl}^{*,1}) \to \ldots \to H^p(C_{cl}^{*,r-p}) \to \ldots \to H^1(C_{cl}^{*,r-1}) \to H^r(\Omega^*), \tag{1.5}$$

которая позволяет «поднять» $\mathfrak{U}$-коцепь θ, $d\theta = 0$, $\delta\theta = 0$, кратности p и степени q до коцикла степени $(p+q)$ на многообразии.

Двойственный двойной комплекс.

Практически все построения и результаты (часть из которых описана выше), связанные с двойным комплексом Чеха – де Рама, «двойственным образом» можно повторить для расширенного двойного комплекса, соответствующего биградуированной группе (1.1) всех $\mathfrak{U}$-цепей на произвольном топологическом пространстве X.

Как и в случае комплекса (1.4), включения

$$U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p} \hookrightarrow U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots [i_k] \ldots \cap U_{i_p}, \quad k = 0, \ldots, p,$$

индуцируют оператор $\delta\colon C_{p,*} \to C_{p-1,*}$, $\delta^2 = 0$, определяемый с помощью формулы «альтернированной суммы»:

$$(\delta\sigma)(i_0, i_1, \ldots, i_{p-1}) = \sum_{i \in I} \sigma(i, i_0, \ldots, i_{p-1}).$$

Оператор δ в данном случае называется граничным оператором Чеха. Использование одинакового обозначения для кограничного и граничного операторов Чеха видится вполне допустимым, так как всегда будет понятно из контекста, о каком именно операторе идет речь.

Обозначим через $S_q^{\mathfrak{U}}$ подгруппу группы $S_q = S_q(X)$, порожденную всеми сингулярными q-симплексами, носители которых полностью содержатся в некотором элементе U_i покрытия $\mathfrak{U}$. При этом естественное вложение $\iota\colon S_*^{\mathfrak{U}} \to S_*(X)$, очевидно, является цепным отображением.

Используем следующие обозначения:

$Z_q(S_*) = \ker(\partial\colon S_q \to S_{q-1})$ — подгруппы ∂-замкнутых цепей на X;

$B_q(S_*) = \operatorname{im}(\partial\colon S_{q+1} \to S_q)$ — подгруппы ∂-точных цепей на X;

$Z_q(S_*^{\mathfrak{U}}) = \ker(\partial\colon S_q^{\mathfrak{U}} \to S_{q-1}^{\mathfrak{U}})$ — подгруппы ∂-замкнутых цепей для $S_*^{\mathfrak{U}}$;

$B_q(S_*^{\mathfrak{U}}) = \operatorname{im}(\partial\colon S_{q+1}^{\mathfrak{U}} \to S_q^{\mathfrak{U}})$ — подгруппы ∂-точных цепей для $S_*^{\mathfrak{U}}$;

$H_q(X) = H_q(S_*) = Z_q(S_*)/B_q(S_*)$, $H_q(S_*^{\mathfrak{U}}) = Z_q(S_*^{\mathfrak{U}})/B_q(S_*^{\mathfrak{U}})$ — соответствующие группы гомологий.

Следующий факт показывает, что при вычислении гомологий пространства X достаточно использовать комплекс $S_*^{\mathfrak{U}}$.

Теорема 1.1 ([52], Теорема 1.14)**.** *Гомоморфизм*

$$\iota_*\colon H(S_*^{\mathfrak{U}}) \to H(X),$$

индуцированный цепным отображением $\iota\colon S_*^{\mathfrak{U}} \to S_*(X)$, является изоморфизмом.

Включения $U_i \subset X$ индуцируют оператор $\varepsilon\colon C_{0,*} \to S_*^{\mathfrak{U}}$, действие которого, по той же самой формуле «альтернированной суммы», задается следующим образом:

$$\varepsilon\sigma = \sum_{i \in I} \sigma(i),$$

причем $\varepsilon\delta = 0$. Получаем последовательность Майера — Виеториса для групп сингулярных цепей объединения

$$0 \longleftarrow S_q^{\mathfrak{U}} \xleftarrow{\varepsilon} C_{0,q} \xleftarrow{\delta} C_{1,q} \xleftarrow{\delta} C_{2,q} \xleftarrow{\delta} \dots \tag{1.6}$$

Предложение 1.2 ([26], Предложение 15.2)**.** *Последовательность* (1.6) *точна.*

Расширенный двойной комплекс $C_*(\mathfrak{U}, S_*)$, соответствующий биградуированной группе $(C_{p,q})$, имеет вид

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \\
0 & \longleftarrow & S_q^{\mathfrak{U}} & \xleftarrow{\varepsilon} & C_{0,q} & \xleftarrow{\delta} & C_{1,q} & \xleftarrow{\delta} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \\
0 & \longleftarrow & S_{q-1}^{\mathfrak{U}} & \xleftarrow{\varepsilon} & C_{0,q-1} & \xleftarrow{\delta} & C_{1,q-1} & \xleftarrow{\delta} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \\
0 & \longleftarrow & S_0^{\mathfrak{U}} & \xleftarrow{\varepsilon} & C_{0,0} & \xleftarrow{\delta} & C_{1,0} & \xleftarrow{\delta} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array} \tag{1.7}$$

Его строками являются точные последовательности Майера – Виеториса для групп сингулярных цепей, а в столбцах действует граничный оператор $\partial\colon C_{*,q} \to C_{*,q-1}$, $\partial^2 = 0$,

$$(\partial\sigma)(i_0, i_1, \dots, i_p) = \partial(\sigma(i_0, i_1, \dots, i_p)),$$

причем $\partial\delta = \delta\partial$, $\partial\varepsilon = \varepsilon\partial$.

В частности при $I = \{1, 2\}$ короткие точные последовательности строк двойного комплекса $C_*(\mathfrak{U}, S_*)$ индуцируют длинную точную последовательность Майера – Виеториса для групп гомологий. В общем случае аналогом последовательности Майера – Виеториса для гомологий служит спектральная последовательность данного двойного комплекса (см. [26], [27]).

Рассмотрим тотальный комплекс TC двойного комплекса $C = (C_{p,q}; \delta, \partial)$, образованный градуированной группой

$$(TC)_r = \bigoplus_{p+q=r} C_{p,q}$$

с граничным оператором $D\colon (TC)_r \to (TC)_{r-1}$, действующим по формуле

$$D\big|_{C_{p,q}} = \delta + (-1)^p \partial.$$

Следующее утверждение является аналогом так называемого *обобщенного принципа Майера – Виеториса* для когомологий де Рама (см. [26], Предложение 8.8).

Теорема 1.2. *Отображение* $\varepsilon\colon C_{0,*} \to S_*^{\mathfrak{U}}$ *индуцирует изоморфизм*

$$\varepsilon_*^{TC}\colon H(TC) \to H(S_*^{\mathfrak{U}}).$$

Приводимое далее доказательство теоремы 1.2 довольно стандартно с точки зрения гомологической алгебры и может быть заменено более короткими рассуждениями, если пользоваться общими фактами о спектральных последовательностях двойного комплекса. Однако появляющаяся в нашем доказательстве конструкция понадобится нам в дальнейшем.

Доказательство. Цепное отображение $\varepsilon\colon C_{0,*} \to S_*^{\mathfrak{U}}(X)$ определяет отображение

$$\varepsilon^{TC}\colon TC \to S_*^{\mathfrak{U}}, \quad \varepsilon^{TC}\big|_{(TC)_r}(\Sigma) = \varepsilon(\Sigma_{0,r}),$$

где $\Sigma_{0,r}$ — «старшая» компонента цепи $\Sigma \in (TC)_r$, образованной $\mathfrak{U}$-цепями $\Sigma_{i,r-i} \in C_{i,r-i}$, $i = 0, 1, \ldots, r$. При этом ε^{TC} также является цепным отображением. Действительно, для произвольной цепи $\Sigma \in (TC)_r$ имеем

$$\varepsilon^{TC} D(\Sigma) = \varepsilon(\delta\Sigma_{1,r-1} + (-1)^0 \partial\Sigma_{0,r}) = \varepsilon\delta(\Sigma_{1,r-1}) + \varepsilon\partial(\Sigma_{0,r}) = \partial\varepsilon(\Sigma_{0,r}) = \partial\varepsilon^{TC}(\Sigma),$$

где $\varepsilon\delta = 0$ в силу точности строк расширенного двойного комплекса, и $\varepsilon\partial = \partial\varepsilon$. Следовательно, отображение ε^{TC} индуцирует гомоморфизм в гомологиях

$$\varepsilon_*^{TC}\colon H(TC) \to H(S_*^{\mathfrak{U}}).$$

Докажем, что ε_*^{TC} — изоморфизм.

Сюръективность ε_*^{TC}. Пусть $[\sigma]$ — гомологический класс в $H_r(S_*^{\mathfrak{U}})$ с представителем $\sigma \in Z_r(S_*^{\mathfrak{U}})$. Так как ε сюръективно, то найдется $\mathfrak{U}$-цепь $\sigma_0 \in C_{0,r}$, для которой $\sigma = \varepsilon\sigma_0$. Рассмотрим $\mathfrak{U}$-цепь $\partial\sigma_0$. Имеем

$$\varepsilon(\partial\sigma_0) = \partial(\varepsilon\sigma_0) = \partial\sigma = 0,$$

откуда, используя точность строк комплекса $C_*(\mathfrak{U}, S_*)$, получаем $\partial\sigma_0 \in \operatorname{im}\delta$. Следовательно, найдется $\mathfrak{U}$-цепь $\sigma_1 \in C_{1,r-1}$, такая, что $\partial\sigma_0 = \delta\sigma_1$. При этом

$$\delta(\partial\sigma_1) = \partial(\delta\sigma_1) = \partial(\partial\sigma_0) = 0,$$

поэтому найдется $\mathfrak{U}$-цепь $\sigma_2 \in C_{2,r-2}$ со свойством $\partial\sigma_1 = \delta\sigma_2$. Продолжая описанное построение, получим последовательность $\mathfrak{U}$-цепей $\sigma_i \in C_{i,r-i}$, $i = 0, 1, \ldots, r$, для которой выполняются следующие свойства: $\sigma = \varepsilon\sigma_0$, и $\partial\sigma_{i-1} = \delta\sigma_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Пусть цепь $\Sigma \in (TC)_r$ имеет компоненты $\Sigma_{i,r-i} \in C_{i,r-i}$, $i = 0, 1, \dots, r$, определяемые равенствами

$$\Sigma_{0,r} = \sigma_0,\ \Sigma_{1,r-1} = -\sigma_1,\ \Sigma_{2,r-2} = -\sigma_2,\ \Sigma_{3,r-3} = \sigma_3,\ \Sigma_{4,r-4} = \sigma_4,\ \Sigma_{5,r-5} = -\sigma_5,\ \dots$$

Учитывая, что $\partial\sigma_{i-1} = \delta\sigma_i$, непосредственно проверяется выполнение следующего условия:

$$\partial\Sigma_{i,r-i} = (-1)^{i+1}\delta(\Sigma_{i+1,r-i-1}), \quad i = 0, 1, \dots, r-1. \tag{1.8}$$

Покажем, что Σ является D-циклом, то есть $D\Sigma = 0$. Действительно, используя (1.8), для всех $i = 0, 1, \dots, r-1$ получим

$$\begin{aligned}(D\Sigma)_{i,(r-1)-i} = \delta(\Sigma_{i+1,(r-1)-i}) + (-1)^i\partial(\Sigma_{i,r-i}) = \\ =\delta(\Sigma_{i+1,r-i-1}) + (-1)^i(-1)^{i+1}\delta(\Sigma_{i+1,r-i-1}) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, для заданного цикла $\sigma \in S_r^{\mathfrak{U}}$ построен D-цикл $\Sigma \in (TC)_r$, для которого $\varepsilon^{TC}(\Sigma) = \varepsilon(\Sigma_{0,r}) = \varepsilon\sigma_0 = \sigma$, то есть

$$[\sigma] = \varepsilon_*^{TC}([\Sigma]).$$

Инъективность ε_*^{TC}. Пусть для D-цикла Σ в $(TC)_r$ выполняется $\varepsilon_*^{TC}([\Sigma]) = [0]$. Обозначим через $\sigma_i = \Sigma_{i,r-i} \in C_{i,r-i}$ соответствующие компоненты Σ. Тогда по определению отображения ε_*^{TC} цепь $\sigma = \varepsilon\sigma_0 \in S_r^{\mathfrak{U}}$ является циклом, гомологичным нулю, то есть $\sigma = \partial\tau$ для некоторой цепи $\tau \in S_{r+1}^{\mathfrak{U}}$. Так как ε сюръективно, то найдется $\mathfrak{U}$-цепь $\tau_0 \in C_{0,r+1}$, для которой $\varepsilon\tau_0 = \tau$. Для $\mathfrak{U}$-цепи $\sigma_0 - \partial\tau_0 \in C_{0,r+1}$ имеем

$$\varepsilon(\sigma_0 - \partial\tau_0) = \varepsilon\sigma_0 - \varepsilon\partial\tau_0 = \sigma - \partial(\varepsilon\tau_0) = \sigma - \partial\tau = 0.$$

Следовательно, существует $\mathfrak{U}$-цепь $\tau_1 \in C_{1,r}$, для которой $\sigma_0 - \partial\tau_0 = \delta\tau_1$. Отсюда

$$\sigma_0 = \delta\tau_1 + (-1)^0\partial\tau_0.$$

Рассмотрим $\mathfrak{U}$-цепь $\sigma_1 + \partial\tau_1 \in C_{1,r}$. Учитывая, что $D\Sigma = 0$, получим в частности $\delta\sigma_1 + (-1)^0\partial\sigma_0 = 0$. Имеем

$$\delta(\sigma_1 + \partial\tau_1) = \delta\sigma_1 + \delta\partial\tau_1 = -\partial\sigma_0 + \partial(\delta\tau_1) = -\partial\sigma_0 + \partial(\sigma_0 - \partial\tau_0) = 0.$$

Из точности строк рассматриваемого двойного комплекса следует, что найдется $\mathfrak{U}$-цепь

$\tau_2 \in C_{2,r-1}$, для которой $\sigma_1 + \partial\tau_1 = \delta\tau_2$. Приходим к равенству

$$\sigma_1 = \delta\tau_2 + (-1)^1\partial\tau_1.$$

Аналогичным образом, используя точность строк рассматриваемого двойного комплекса и соотношения вида $\delta\sigma_{i-1} + (-1)^{i-2}\partial\sigma_{i-2} = 0$, последовательно найдем $\mathfrak{U}$-цепи $\tau_i \in C_{i,r-i}$, $i = 3, \ldots, r+1$, для которых выполняются равенства

$$\sigma_{i-1} = \delta\tau_i + (-1)^{i-1}\partial\tau_{i-1}.$$

Таким образом, существует цепь $T \in (TC)_{r+1}$, компонентами которой являются $\mathfrak{U}$-цепи $\tau_i = T_{i,(r+1)-i} \in C_{i,(r+1)-i}$, $i = 0, 1, \ldots, r+1$, для которой, в силу нашего построения, $\Sigma = DT$. Последнее означает, что $[\Sigma] = [0]$, то есть инъективность отображения ε_*^{TC}. □

Объединяя теоремы 1.1 и 1.2, получим следующее утверждение (см. [26], [27]).

Теорема 1.3. *Двойной комплекс $(C_{p,q}; \delta, \partial)$ вычисляет гомологии пространства X. Более точно: отображение $\varepsilon_* = \iota_*\varepsilon_*^{TC}$,*

$$\varepsilon_* \colon H(TC) \to H(X),$$

является изоморфизмом.

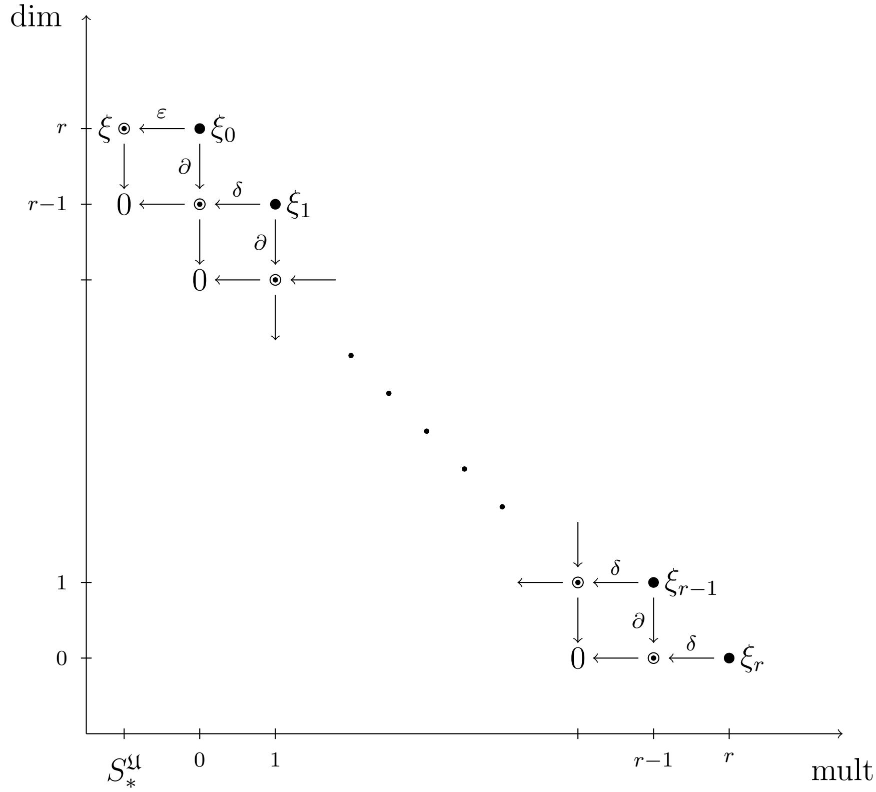
1.2 Резольвенты для $\mathfrak{U}$-цепей и $\mathfrak{U}$-коцепей

Согласно статье Глисона [38], последовательность $\mathfrak{U}$-цепей $\sigma_i \in C_{i,r-i}$, $i = 0, 1, \ldots, r$, построенная для произвольного цикла $\sigma \in Z_r(S_*^{\mathfrak{U}})$ при доказательстве сюръективности отображения ε_*^{TC} в прошлом параграфе, называется $\mathfrak{U}$-*резольвентой* цикла σ и будет играть важную роль в дальнейшем изложении. Понятие резольвенты (имеющее, как известно, несколько различных значений) будет использоваться нами только в связи с рассматриваемыми двойными комплексами $\mathfrak{U}$-цепей и $\mathfrak{U}$-коцепей. Приводимое далее определение немного отличается от определения Глисона.

Определение 1.3. Последовательность $\mathfrak{U}$-цепей $\{\xi_p\}_{p=0}^r$, $\xi_p \in C_{p,r-p}$, будем называть $\mathfrak{U}$-резольвентой цикла $\xi \in Z_r(S_*^{\mathfrak{U}})$, если выполняются следующие два условия:

1) $\varepsilon\xi_0 = \xi$;

2) $\delta\xi_p = \partial\xi_{p-1}$, $p = 1, \ldots, r$.



Существование и степень неоднозначности построения резольвенты описывает следующее предложение.

Предложение 1.3. *Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное открытое покрытие топологического пространства X. Для любого цикла $\xi \in Z_r(S_*^{\mathfrak{U}})$ существует $\mathfrak{U}$-резольвента. При этом элемент $\xi_p \in C_{p,r-p}$ резольвенты определен с точностью до слагаемых вида $\delta\tau$, где $\tau \in C_{p+1,r-p}$, $\partial\tau = 0$.*

Доказательство. Существование $\mathfrak{U}$-резольвенты для любого цикла $\xi \in Z_r(S_*^{\mathfrak{U}})$ следует из доказательства теоремы 1.1. Докажем второе утверждение. При $p = 0$ достаточно показать, что для $\tau \in C_{1,r}$, $\partial\tau = 0$, выполняются равенства $\varepsilon(\delta\tau) = 0$ и $\partial(\delta\tau) = 0$. Первое равенство следует из того, что $\varepsilon\delta = 0$, а второе доказывает следующая цепочка равенств: $\partial(\delta\tau) = \delta(\partial\tau) = \delta(0) = 0$. Аналогично, при $p \geqslant 1$ и $\tau \in C_{p+1,r-p}$, $\partial\tau = 0$, имеем $\delta(\delta\tau) = 0$, и $\partial(\delta\tau) = 0$. □

Замечание. Определение $\mathfrak{U}$-резольвенты, данное Глисоном (см. [38], определение 1.12) предполагает, что $\xi \in Z_r(S_*)$. При этом условие $\xi \in Z_r(S_*^{\mathfrak{U}})$ приводится как критерий существования $\mathfrak{U}$-резольвенты (см. [38], теорема 2.12).

Замечание. Следует уточнить, что в точности также можно показать, что элемент ξ_p резольвенты определен с точностью до слагаемых вида $\partial\tau'$, где $\tau' \in C_{p,r-p+1}$, $\delta\tau' = 0$ ($\varepsilon\tau' = 0$ при $p = 0$). Покажем, что в этом случае также найдется $\mathfrak{U}$-цепь $\tau \in C_{p+1,r-p}$,

$\partial\tau = 0$, для которой $\partial\tau' = \delta\tau$. Действительно, из точности строк расширенного двойного комплекса (1.7) следует, что существует $\mathfrak{U}$-цепь $\sigma \in C_{p+1,r-p+1}$, такая что $\tau' = \delta\sigma$. При этом для $\mathfrak{U}$-цепи $\tau = \partial\sigma$ имеем

$$\partial\tau' = \partial(\delta\sigma) = \delta(\partial\sigma) = \delta\tau, \quad \partial\tau = \partial(\partial\sigma) = 0.$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий определение $\mathfrak{U}$-резольвенты и показывающий его «естественность» в комбинаторном и геометрическом смысле.

Пример 1.1. Пусть Δ_{r+1} — стандартный $(r+1)$-симплекс в $\mathbb{R}^{r+2}$, $r \geqslant 0$,

$$\Delta_{r+1} = (e_0, \ldots, e_{r+1}), \quad e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0),$$

и $\xi = \partial\Delta_{r+1}$ — его граница. Рассмотрим совокупность открытых множеств

$$U_i = \left\{ (x_0, \ldots, x_{r+1}) \in \mathbb{R}^{r+2} \colon (r+1)x_i - \sum_{k \neq i} x_k < 1 \right\}, \quad i \in I = \{0, \ldots, r+1\}.$$

Покажем, что $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathbb{R}^{r+2}$. Действительно, если бы элемент $x = (x_0, \ldots, x_{r+1})$ не принадлежал этому объединению, то x являлся бы решением системы неравенств

$$(r+1)x_i - \sum_{k \neq i} x_k \geqslant 1, \quad i \in I.$$

Но эта система, как нетрудно убедиться, просуммировав соответствующие части всех неравенств, не имеет решений. Следовательно, данная совокупность множеств $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ образует открытое покрытие пространства $\mathbb{R}^{r+2}$.

Покажем, что последовательность $\mathfrak{U}$-цепей $\xi_0, \ldots, \xi_r$, заданных равенствами

$$\xi_p(i_0, \ldots, i_p) = (-1)^{i_0 + \ldots + i_p}(e_0, \ldots [i_0, \ldots, i_p] \ldots, e_{r+1}), \quad p = 0, \ldots, r,$$

где $0 \leqslant i_0 < \ldots < i_p \leqslant r+1$, является $\mathfrak{U}$-резольвентой r-цикла ξ. Отметим, что символ $[i_0, \ldots, i_p]$ здесь обозначает пропуск вершин с соответствующими индексами. При этом порядок следования оставшихся вершин сохраняется. При перестановке любых двух индексов из $i_0, \ldots, i_p$ по правилу альтернирования цепь $\xi_p(i_0, \ldots, i_p)$ меняет знак, что согласуется с изменением ориентации грани $(e_0, \ldots [i_0, \ldots, i_p] \ldots, e_{r+1})$ при перестановке соответствующих вершин. Считаем также, что $\xi_p(i_0, \ldots, i_p) = 0$ при наличии совпадающих индексов.

Вначале следует пояснить, почему

$$\operatorname{supp} \xi_p(i_0, \ldots, i_p) \subset U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}.$$

Очевидно, что $e_j \in U_i$ при $j \neq i$ (и $e_i \notin U_i$). Следовательно, каждая из вершин $e_0, \ldots [i_0, \ldots, i_p] \ldots, e_{r+1}$ лежит в $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}$. Но U_i — выпуклые множества (полупространства), поэтому рассматриваемое пересечение также выпукло, а значит и выпуклая оболочка данных вершин лежит в этом пересечении.

Проверим, что $\xi = \varepsilon\xi_0$. Действительно, учитывая определение границы симплекса, получим

$$\varepsilon\xi_0 = \sum_{i\in I} \xi_0(i) = \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i (e_0, \ldots [i] \ldots, e_{r+1}) = \partial\Delta_{r+1} = \xi.$$

Осталось проверить равенства $\partial\xi_{p-1} = \delta\xi_p$, $p = 1, \ldots, r$. Для фиксированного набора индексов $i_0, \ldots, i_{p-1}$, $0 \leqslant i_0 < \ldots < i_{p-1} \leqslant r+1$, обозначим

$$\{j_0, \ldots j_{r-p+1}\} = I \setminus \{i_0, \ldots, i_{p-1}\},$$

где $j_0 < \ldots < j_{r-p+1}$. Тогда

$$(\partial\xi_{p-1})(i_0, \ldots, i_{p-1}) = (-1)^{i_0+\ldots+i_{p-1}} \partial(e_0, \ldots [i_0, \ldots, i_{p-1}] \ldots, e_{r+1}) =$$
$$= (-1)^{i_0+\ldots+i_{p-1}} \partial(e_{j_0}, \ldots, e_{j_{r-p+1}}) = (-1)^{i_0+\ldots+i_{p-1}} \sum_{k=0}^{r-p+1} (-1)^k (e_{j_0}, \ldots [j_k] \ldots, e_{j_{r-p+1}}) =$$
$$= (-1)^{i_0+\ldots+i_{p-1}} \sum_{k=0}^{r-p+1} (-1)^k (-1)^{j_k-k} (e_0, \ldots [j_k, i_0, \ldots, i_{p-1}] \ldots, e_{r+1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{r-p+1} (-1)^{i_0+\ldots+i_{p-1}+j_k} (e_0, \ldots [j_k, i_0, \ldots, i_{p-1}] \ldots, e_{r+1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{r-p+1} \xi_p(j_k, i_0, \ldots, i_{p-1}) = \sum_{i\in I} \xi_p(i, i_0, \ldots, i_{p-1}) = (\delta\xi_p)(i_0, \ldots, i_{p-1}).$$

Появление множителя $(-1)^{j_k-k}$ на одном из шагов преобразований связано с тем, что при расположении индексов $i_0, \ldots, i_{p-1}, j_k$ в порядке возрастания индекс j_k получает номер $j_k - k$, если начинать нумерацию с нуля. Следовательно, для того, чтобы переместить этот индекс в начало списка, нужно проделать ровно $j_k - k$ последовательных перестановок индекса j_k с индексом, располагающимся непосредственно слева от него.

Отметим, что построенная резольвента для границы стандартного симплекса фактически является градуированным по размерности набором всех собственных граней данного симплекса, взятых с ориентацией, индуцированной ориентацией объемлющего пространства.

Будем использовать следующие обозначения, аналогичные введенным выше для подпространств форм и $\mathfrak{U}$-коцепей.

$C^{cl}_{p,q} = Z_q(C_{p,*}) = \ker(\partial\colon C_{p,q} \to C_{p,q-1})$ — подгруппы ∂-замкнутых $\mathfrak{U}$-цепей;

$B_q(C_{p,*}) = \operatorname{im}(\partial\colon C_{p,q+1} \to C_{p,q})$ — подгруппы ∂-точных $\mathfrak{U}$-цепей;

$Z_p(C_{*,q}) = \ker(\delta\colon C_{p,q} \to C_{p-1,q})$, $Z_0(C_{*,q}) = \ker(\varepsilon\colon C_{0,q} \to S_q^{\mathfrak{U}})$ — подгруппы δ-замкнутых $\mathfrak{U}$-цепей;

$B_p(C_{*,q}) = \operatorname{im}(\delta\colon C_{p+1,q} \to C_{p,q})$ — подгруппы δ-точных $\mathfrak{U}$-цепей.

Из точности строк двойного комплекса (1.7) заключаем, что

$$Z_p(C_{*,q}) = B_p(C_{*,q}), \quad H_p(C_{*,q}) = Z_p(C_{*,q})/B_p(C_{*,q}) \simeq 0, \quad p = 0, 1, \ldots$$

Отображения $\varepsilon\colon C_{0,*} \to S_*^{\mathfrak{U}}$ и $\delta\colon C_{p,*} \to C_{p-1,*}$ являются цепными отображениями комплексов, образованных столбцами двойного комплекса (1.7). Поэтому для комплекса (1.6) определен подкомплекс

$$0 \longleftarrow Z_q(S_*^{\mathfrak{U}}) \xleftarrow{\varepsilon} C_{0,q}^{cl} \xleftarrow{\delta} C_{1,q}^{cl} \xleftarrow{\delta} C_{2,q}^{cl} \xleftarrow{\delta} \ldots,$$

имеющий следующие подгруппы циклов и границ:

$Z_p(C_{*,q}^{cl}) = \ker(\delta\colon C_{p,q}^{cl} \to C_{p-1,q}^{cl})$, $Z_0(C_{*,q}^{cl}) = \ker(\varepsilon\colon C_{0,q}^{cl} \to Z_q(S_*^{\mathfrak{U}}))$;

$B_p(C_{*,q}^{cl}) = \operatorname{im}(\delta\colon C_{p+1,q}^{cl} \to C_{p,q}^{cl})$.

Соответствующие группы гомологий обозначим

$$H_p(C_{*,q}^{cl}) = Z_p(C_{*,q}^{cl})/B_p(C_{*,q}^{cl}), \quad p = 0, 1, \ldots$$

Сформулируем и докажем утверждение, двойственное по отношению к лемме 1.1.

Лемма 1.3. *Пусть $\xi \in Z_p(C_{*,q}^{cl})$, где $p \geqslant 0$. Предположим, что $\xi = \delta\xi_{p+1}$ для $\mathfrak{U}$-цепи $\xi_{p+1} \in C^{p+1,q}$. Тогда $\partial\xi_{p+1} \in Z_{p+1}(C_{*,q-1}^{cl})$, и класс $[\partial\xi_{p+1}] \in H_{p+1}(C_{*,q-1}^{cl})$ зависит только от класса $[\xi] \in H_p(C_{*,q}^{cl})$. Это соответствие задает гомоморфизм групп*

$$(\partial\delta^{-1})_*\colon H_p(C_{*,q}^{cl}) \to H_{p+1}(C_{*,q-1}^{cl}).$$

$$\begin{tikzcd}
0 & \xi \arrow[l, "\delta"'] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, dashed, "\partial\delta^{-1}"] & \xi_{p+1} \arrow[l, "\delta"'] \arrow[d, "\partial"] \\
& 0 & \partial\xi_{p+1} \arrow[l, "\delta"] \arrow[d, "\partial"] \\
& & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 & \xi \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, dashed, "\partial\delta^{-1}"] & \xi_1 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[d, "\partial"] \\
& 0 & \partial\xi_1 \arrow[l, "\delta"] \arrow[d, "\partial"] \\
& & 0
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Заметим, что существование $\mathfrak{U}$-цепи ξ_{p+1}, для которой $\xi = \delta\xi_{p+1}$, следует из точности строк двойного комплекса (1.7) в силу условия $\delta\xi = 0$ ($\varepsilon\xi = 0$ при $p = 0$). Имеем

$$\partial(\partial\xi_{p+1}) = 0, \quad \delta(\partial\xi_{p+1}) = \partial(\delta\xi_{p+1}) = \partial\xi = 0,$$

поэтому $\partial\xi_{p+1} \in Z_{p+1}(C^{cl}_{*,q-1})$.

Если также $\xi = \delta\xi'_{p+1}$, то $\delta(\xi_{p+1} - \xi'_{p+1}) = 0$, поэтому найдется $\mathfrak{U}$-цепь $\tau \in C^{p+2,q}$, такая что $\xi_{p+1} - \xi'_{p+1} = \delta\tau$. Отсюда $\xi'_{p+1} = \xi_{p+1} - \delta\tau$. Имеем

$$\partial\xi'_{p+1} = \partial(\xi_{p+1} - \delta\tau) = \partial\xi_{p+1} - \partial(\delta\tau),$$

причем $\partial(\delta\tau) \in B_{p+1}(C^{cl}_{*,q-1})$, так как $\partial(\delta\tau) = \delta(\partial\tau)$, где $\partial(\partial\tau) = 0$. Отсюда следует, что $[\partial\xi_{p+1}] = [\partial\xi'_{p+1}] \in H_{p+1}(C^{cl}_{*,q-1})$.

Пусть, наконец, ξ' — произвольный представитель класса $[\xi] \in H_p(C^{cl}_{*,q})$. Тогда найдется $\mathfrak{U}$-цепь $\sigma \in C^{p+1,q}$, для которой $\xi - \xi' = \delta\sigma$ и $\partial\sigma = 0$. Если $\delta\xi_{p+1} = \xi$, то $\delta(\xi_{p+1} - \sigma) = \xi - \delta\sigma = \xi'$. Тогда $\mathfrak{U}$-цепи ξ' сопоставляется класс $\mathfrak{U}$-цепи

$$\partial(\xi_{p+1} - \sigma) = \partial\xi_{p+1} - \partial\sigma = \partial\xi_{p+1},$$

что и требовалось показать.

Осталось заметить, что для отображения $[\xi] \mapsto [\partial\xi_{p+1}]$ образ суммы классов, очевидно, равен сумме образов, то есть отображение является гомоморфизмом. $\square$

Замечание. Так как $C^{cl}_{p,0} = C_{p,0}$ при $p \geqslant 0$, то $H_p(C^{cl}_{*,0}) = H_p(C_{*,0}) = 0$. Следовательно, при $q = 1$ описанный в лемме 1.3 гомоморфизм является тривиальным:

$$(\partial\delta^{-1})_*\colon H_p(C^{cl}_{*,1}) \to 0.$$

Лемма 1.4. *Пусть $\xi \in Z_q(S^{\mathfrak{U}}_*)$, где $q \geqslant 1$. Предположим, что $\xi = \varepsilon\xi_0$ для $\mathfrak{U}$-цепи $\xi_0 \in C^{0,q}$. Тогда $\partial\xi_0 \in Z_0(C^{cl}_{*,q-1})$, и класс $[\partial\xi_0] \in H_0(C^{cl}_{*,q-1})$ зависит только от класса $[\xi] \in H_q(S^{\mathfrak{U}}_*)$. Это соответствие задает гомоморфизм групп*

$$(\partial\varepsilon^{-1})_*\colon H_q(S^{\mathfrak{U}}_*) \to H_0(C^{cl}_{*,q-1}).$$

$$\begin{tikzcd}
\xi \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, dashed, "\partial\varepsilon^{-1}"] & \xi_0 \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\partial"] \\
0 & \partial\xi_0 \arrow[l, "\varepsilon"] \arrow[d, "\partial"] \\
 & 0
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Существование $\mathfrak{U}$-цепи ξ_0, для которой $\xi = \varepsilon\xi_0$, следует из сюръективности отображения ε. Принадлежность $\partial\xi_0 \in Z_0(C^{cl}_{*,q-1})$ и независимость класса $[\partial\xi_0] \in H_0(C^{cl}_{*,q-1})$ от выбора $\mathfrak{U}$-цепи ξ_0 обосновываются также, как в доказательстве леммы 1.3.

Пусть ξ' — произвольный представитель класса $[\xi] \in H_q(S^{\mathfrak{U}}_*)$. Тогда найдется цепь $\sigma \in S^{\mathfrak{U}}_{q+1}$, для которой $\xi - \xi' = \partial\sigma$. Так как ε — эпиморфизм, то существует $\mathfrak{U}$-цепь $\tau \in C_{0,q+1}$, такая что $\sigma = \varepsilon\tau$. При этом $\varepsilon(\xi_0 - \partial\tau) = \xi - \varepsilon(\partial\tau) = \xi - \partial(\varepsilon\tau) = \xi - \partial\sigma = \xi'$, поэтому ∂-циклу ξ' сопоставляется класс $[\partial(\xi_0 - \partial\tau)] = [\partial\xi_0 - \partial\partial\tau] = [\partial\xi_0]$. Показано, что соответствие $[\xi] \mapsto [\partial\xi_0]$ корректно определено. Очевидно, это соответствие является гомоморфизмом. □

Замечание. При $q = 1$ гомоморфизм, описанный в предыдущей лемме, является тривиальным:

$$(\partial\varepsilon^{-1})_*\colon H_1(S^{\mathfrak{U}}_*) \to 0.$$

Две последние леммы определяют следующую диагональную последовательность гомоморфизмов, «двойственную» последовательности (1.5)

$$H_r(S^{\mathfrak{U}}_*) \to H_0(C^{cl}_{*,r-1}) \to H_1(C^{cl}_{*,r-2}) \to \ldots \to H_{r-2}(C^{cl}_{*,1}) \to H_{r-1}(C^{cl}_{*,0}) \simeq 0. \tag{1.9}$$

Из определений гомоморфизмов $(\partial\varepsilon^{-1})_*$ и $(\partial\delta^{-1})_*$, а также из доказательства теоремы 1.1, становится очевидным следующее утверждение, говорящее о связи понятия $\mathfrak{U}$-резольвенты с последовательностью гомоморфизмов (1.9).

Предложение 1.4. *Пусть $\{\xi_p\}$ — $\mathfrak{U}$-резольвента цикла $\xi \in Z_r(S^{\mathfrak{U}}_*)$. Тогда цепочка последовательных образов для класса $[\xi] \in H_r(S^{\mathfrak{U}}_*)$ под действием гомоморфизмов* (1.9) *имеет вид*

$$[\xi] \longmapsto [\partial\xi_0] \longmapsto [\partial\xi_1] \longmapsto \ldots \longmapsto [\partial\xi_{r-2}] \longmapsto [\partial\xi_{r-1}] = [0].$$

Аналогичным образом можно рассматривать часть последовательности гомоморфизмов (1.9), «стартуя» с группы гомологий $H_p(C^{cl}_{*,q})$ для $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 1$. В этом случае получим следующую последовательность гомоморфизмов.

$$H_p(C^{cl}_{*,q}) \to H_{p+1}(C^{cl}_{*,q-1}) \to \ldots \to H_{p+q-1}(C^{cl}_{*,1}) \to H_{p+q}(C^{cl}_{*,0}) \simeq 0, \tag{1.10}$$

с которой естественно связать следующее обобщение понятия $\mathfrak{U}$-резольвенты.

Определение 1.4. Пусть ξ — $\mathfrak{U}$-цепь кратности $p \geqslant 0$ и размерности $q \geqslant 1$ такая, что $\partial\xi = 0$ и $\delta\xi = 0$ ($\varepsilon\xi = 0$ при $p = 0$). Последовательность $\mathfrak{U}$-цепей $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p+q+1}$, $\xi_k \in C_{k,p+q-k+1}$, назовем $\mathfrak{U}$-резольвентой для ξ, если выполняются следующие условия:

1) $\delta\xi_{p+1} = \xi$;

2) $\delta\xi_k = \partial\xi_{k-1}$, $k = p+2, \ldots, p+q+1$.

Замечание. Как и в случае $\mathfrak{U}$-резольвенты цикла $\xi \in Z_r(S_*^{\mathfrak{U}})$, резольвента существует для любой $\mathfrak{U}$-цепи $\xi \in Z_p(C_{*,q}^{cl})$. При этом в обоих случаях элемент резольвенты $\xi_k \in C_{k,s}$ определен с точностью до $\mathfrak{U}$-цепей из $B_k(C_{*,s}^{cl})$.

Замечание. Если последовательность $\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \ldots, \xi_{p+q+1}$ образует резольвенту для $\mathfrak{U}$-цепи $\xi \in Z_p(C_{*,q}^{cl})$, то последовательность $\xi_{p+k+1}, \xi_{p+k+2}, \ldots, \xi_{p+q+1}$ образует *укороченную* резольвенту для $\mathfrak{U}$-цепи $d\xi_{p+k}$, $k = 1, \ldots, q$. Аналогично можно говорить об укороченных резольвентах, «стартуя» с цикла $\xi \in Z_r(S_*^{\mathfrak{U}})$.

Заменяя в предложении 1.4 резольвенту для цикла $\xi \in Z_r(S_*^{\mathfrak{U}})$ на резольвенту $\mathfrak{U}$-цепи $\xi \in Z_p(C_{*,q}^{cl})$, получим следующее утверждение.

Предложение 1.5. *Пусть $\xi \in Z_p(C_{*,q}^{cl})$ и $\{\xi_k\}$ — резольвента для ξ. Тогда цепочка последовательных образов для класса $[\xi] \in H_p(C_{*,q}^{cl})$ под действием гомоморфизмов* (1.10) *имеет вид*

$$[\xi] \longmapsto [\partial\xi_{p+1}] \longmapsto [\partial\xi_{p+2}] \longmapsto \ldots \longmapsto [\partial\xi_{p+q-1}] \longmapsto [\partial\xi_{p+q}] = [0].$$

Резольвенты для $\mathfrak{U}$-коцепей

По аналогии с последовательностью гомоморфизмов (1.10) рассмотрим последовательность гомоморфизмов, описанных в лемме 1.1, «стартующую» с группы $H^p(C_{cl}^{*,q})$ при $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 0$:

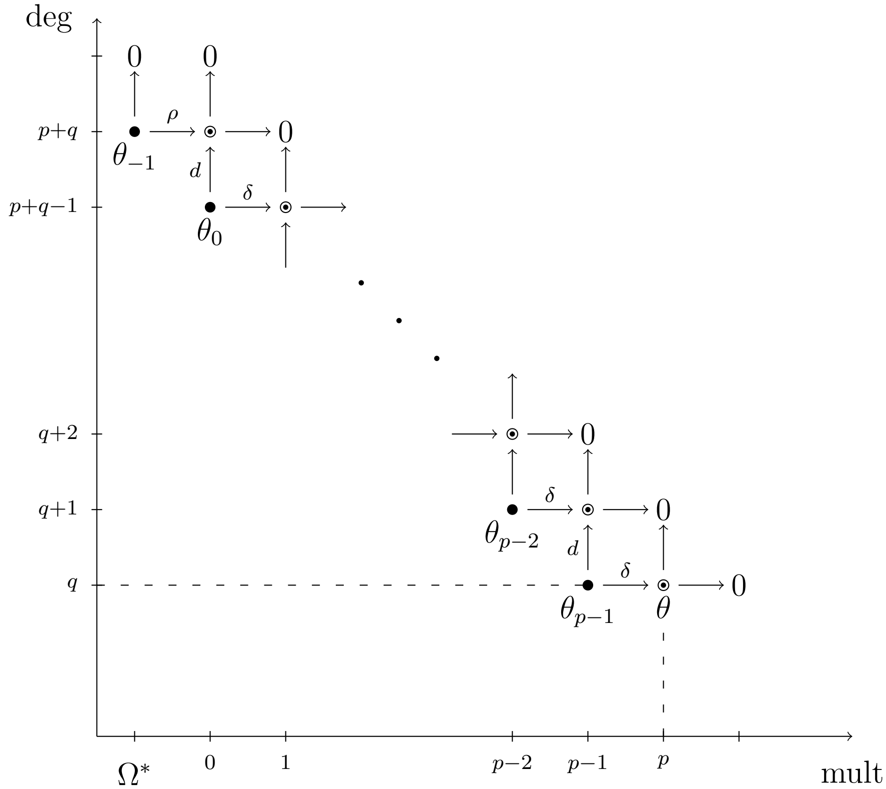
$$H^p(C_{cl}^{*,q}) \to H^{p-1}(C_{cl}^{*,q+1}) \to \ldots \to H^1(C_{cl}^{*,p+q-1}) \to H^0(C_{cl}^{*,p+q}) \simeq 0. \tag{1.11}$$

Введем понятие резольвенты для $\mathfrak{U}$-коцепи. Насколько нам известно, следующее ниже определение не формулировалось раньше в явном виде. Однако имеется множество примеров фактического использования данного понятия в связи с техникой последовательного понижения (или повышения) кратности интегрирования при помощи формулы Стокса, в частности при получении интегральных представлений в комплексном анализе (см. [40], [1] и др.). Данная техника также будет описана ниже как следствие основных свойств *спаривания* между $\mathfrak{U}$-коцепями и $\mathfrak{U}$-цепями.

Определение 1.5. Пусть $\theta \in Z^p(C_{cl}^{*,q})$. Последовательность $\mathfrak{U}$-коцепей $\theta_{p-1}, \theta_{p-2}, \ldots, \theta_0$, где $\theta_k \in C^{k,p+q-k-1}$, назовем $\mathfrak{U}$-резольвентой для $\mathfrak{U}$-коцепи θ, если выполняются следующие два условия:

1) $\delta\theta_{p-1} = \theta$;

2) $\delta\theta_{k-1} = d\theta_k$, $k = 1, \ldots, p-1$.



Формулируемые далее результаты, завершающие данный параграф, являются двойственными по отношению к результатам о резольвентах $\mathfrak{U}$-цепей.

Предложение 1.6. *Пусть* $\mathfrak{U}$ *— произвольное открытое покрытие многообразия* X. *Для любой* $\mathfrak{U}$*-коцепи* $\theta \in Z^p(C_{cl}^{*,q})$ *существует* $\mathfrak{U}$*-резольвента. При этом элемент резольвенты* $\theta_k \in C^{k,p+q-k-1}$ *определен с точностью до элементов из* $B^k(C_{cl}^{*,p+q-k-1})$.

Доказательство. Оба утверждения следуют из точности строк двойного комплекса Чеха – де Рама и определения резольвенты в точности также, как при доказательстве предложения 1.3. □

Из леммы 1.1 и определения резольвенты заключаем, что имеется следующая связь между резольвентой $\mathfrak{U}$-коцепи из $Z^p(C_{cl}^{*,q})$ и последовательностью (1.11).

Предложение 1.7. *Пусть* $\theta \in Z^p(C_{cl}^{*,q})$ *и* $\{\theta_k\}$ *— резольвента для* θ. *Тогда цепочка последовательных образов для класса* $[\theta] \in H^p(C_{cl}^{*,q})$ *под действием гомоморфизмов* (1.11) *имеет вид*

$$[\theta] \longmapsto [d\theta_{p-1}] \longmapsto [d\theta_{p-2}] \longmapsto \ldots \longmapsto [d\theta_1] \longmapsto [d\theta_0] = [0].$$

Резольвенту $\theta_{p-1}, \theta_{p-2}, \ldots, \theta_0$ для $\mathfrak{U}$-коцепи $\theta \in Z^p(C_{cl}^{*,q})$ при $p \geqslant 2$ всегда можно дополнить единственным элементом $\theta_{-1} \in Z^{p+q}(\Omega^*)$ с сохранением условия вида 2) из определения резольвенты. Действительно, для $\mathfrak{U}$-коцепи $d\theta_0 \in C^{0,p+q}$ имеем $\delta(d\theta_0) = d(\delta\theta_0) = d(d\theta_1) = 0$. Следовательно, существует $\mathfrak{U}$-коцепь $\theta_{-1} \in \Omega^{p+q}$, для которой $\rho\theta_{-1} = d\theta_0$. При этом $\rho(d\theta_{-1}) = d(\rho\theta_{-1}) = d(d\theta_0) = 0$. Так как ρ — мономорфизм, то отсюда следует, что $d\theta_{-1} = 0$, а также что элемент $\theta_{-1} = \rho^{-1}(d\theta_0)$ определен однозначно. Полученную последовательность $\mathfrak{U}$-коцепей $\theta_{p-1}, \theta_{p-2}, \ldots, \theta_0, \theta_{-1}$ будем называть *расширенной резольвентой* для $\mathfrak{U}$-коцепи θ.

Тривиальный гомоморфизм на конце последовательности гомоморфизмов (1.11) в соответствии с леммой 1.2 может быть заменен гомоморфизмом $(\rho^{-1}d\delta^{-1})_*$, как это было сделано в случае последовательности (1.5):

$$H^p(C_{cl}^{*,q}) \to H^{p-1}(C_{cl}^{*,q+1}) \to \ldots \to H^1(C_{cl}^{*,p+q-1}) \to H^{p+q}(\Omega^*). \tag{1.12}$$

Получаем следующую модификацию для предложения 1.7:

Предложение 1.8. *Пусть $\theta_{p-1}, \theta_{p-2}, \ldots, \theta_0, \theta_{-1}$ — расширенная резольвента для $\mathfrak{U}$-коцепи $\theta \in Z^p(C_{cl}^{*,q})$. Тогда цепочка последовательных образов для класса $[\theta] \in H^p(C_{cl}^{*,q})$ под действием гомоморфизмов* (1.12) *имеет вид*

$$[\theta] \longmapsto [d\theta_{p-1}] \longmapsto [d\theta_{p-2}] \longmapsto \ldots \longmapsto [d\theta_1] \longmapsto [\theta_{-1}].$$

1.3 Спаривание между $\mathfrak{U}$-цепями и $\mathfrak{U}$-коцепями

Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное открытое покрытие многообразия X. Обозначим

$$\langle\theta, \xi\rangle = \int\limits_{\xi} \theta,$$

где $\theta \in \Omega^q$, $\xi \in S_q^{\mathfrak{U}}$. Данное спаривание распространяется на $\mathfrak{U}$-коцепи и $\mathfrak{U}$-цепи следующим образом:

$$\langle\theta, \xi\rangle = \sum_{i_0 < i_1 < \ldots < i_p} \left\langle \theta(i_0, i_1, \ldots, i_p), \xi(i_0, i_1, \ldots, i_p) \right\rangle, \tag{1.13}$$

где теперь $\theta \in C^{p,q}$, $\xi \in C_{p,q}$. Из свойства альтернированности функций $\theta(i_0, i_1, \ldots, i_p)$ и $\xi(i_0, i_1, \ldots, i_p)$ следует, что

$$(p+1)!\langle\theta, \xi\rangle = \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_p \in I} \left\langle \theta(i_0, i_1, \ldots, i_p), \xi(i_0, i_1, \ldots, i_p) \right\rangle.$$

Предложение 1.9. *Спаривание* (1.13) *обладает следующими свойствами:*

1) $\langle d\theta, \xi\rangle = \langle\theta, \partial\xi\rangle$ для любых $\theta \in C^{p,q}$ и $\xi \in C_{p,q+1}$, или $\theta \in \Omega^q$ и $\xi \in S_{q+1}^{\mathfrak{U}}$;

2) $\langle\delta\theta, \xi\rangle = \langle\theta, \delta\xi\rangle$ для любых $\theta \in C^{p,q}$ и $\xi \in C_{p+1,q}$;

3) $\langle\rho\theta, \xi\rangle = \langle\theta, \varepsilon\xi\rangle$ для любых $\theta \in \Omega^q$ и $\xi \in C_{0,q}$;

4) $\langle\theta,\xi_p\rangle = \langle d\theta_{p-1},\xi_{p-1}\rangle$ *для любых* $\theta \in Z^p(C^{*,q}_{cl})$, $\theta_{p-1} \in C^{p-1,q}$, $\xi_p \in C_{p,q}$, $\xi_{p-1} \in C_{p-1,q+1}$, *таких, что* $\theta = \delta\theta_{p-1}$, $\partial\xi_{p-1} = \delta\xi_p$;

5) $\langle\theta_{p-1},\xi\rangle = \langle\theta_p,\partial\xi_p\rangle$ *для любых* $\theta_{p-1} \in C^{p-1,q}$, $\theta_p \in C^{p,q-1}$, $\xi \in Z_{p-1}(C^{cl}_{*,q})$, $\xi_p \in C_{p,q}$, *таких, что* $d\theta_p = \delta\theta_{p-1}$, $\xi = \delta\xi_p$;

6) $\langle\theta,\xi_0\rangle = \langle d\theta_{-1},\xi_{-1}\rangle$ *для любых* $\theta \in Z^0(C^{*,q}_{cl})$, $\theta_{-1} \in \Omega^q$, $\xi_0 \in C_{0,q}$, $\xi_{-1} \in S^{\mathfrak{U}}_{q+1}$, *таких, что* $\theta = \rho\theta_{-1}$, $\partial\xi_{-1} = \varepsilon\xi_0$;

7) $\langle\theta_{-1},\xi\rangle = \langle\theta_0,\partial\xi_0\rangle$ *для любых* $\theta_{-1} \in \Omega^q$, $\theta_0 \in C^{0,q-1}$, $\xi \in Z_q(S^{\mathfrak{U}}_*)$, $\xi_0 \in C_{0,q}$, *таких, что* $d\theta_0 = \rho\theta_{-1}$, $\xi = \varepsilon\xi_0$.

Доказательство. Свойство 1) следует из теоремы Стокса.

Свойство 2) доказывает следующая цепочка равенств:

$$\langle\delta\theta,\xi\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\theta(i_0,\dots[i_k]\dots,i_{p+1}),\xi(i_0,\dots,i_{p+1})\right\rangle =$$
$$= \sum_{k=0}^{p+1}\big\langle\theta(i_0,\dots[i_k]\dots,i_{p+1}),(-1)^k\xi(i_0,\dots,i_{p+1})\big\rangle =$$
$$= \sum_{k=0}^{p+1}\big\langle\theta(i_0,\dots[i_k]\dots,i_{p+1}),\xi(i_k,i_0,\dots[i_k]\dots,i_{p+1})\big\rangle =$$
$$= \sum_{k=0}^{p+1}\frac{1}{(p+1)!}\sum_{j_0,\dots,j_p\in I}\sum_{j\in I}\big\langle\theta(j_0,\dots,j_p),\xi(j,j_0,\dots,j_p)\big\rangle =$$
$$= \frac{1}{p!}\sum_{j_0,\dots,j_p\in I}\big\langle\theta(j_0,\dots,j_p),(\delta\xi)(j_0,\dots,j_p)\big\rangle = \langle\theta,\delta\xi\rangle.$$

Свойство 3) доказывают равенства

$$\langle\rho\theta,\xi\rangle = \sum_{i\in I}\langle\theta,\xi(i)\rangle = \left\langle\theta,\sum_{i\in I}\xi(i)\right\rangle = \langle\theta,\varepsilon\xi\rangle.$$

Свойство 4) доказано в [38] (см. лемма 1.13). Совершенно также доказывается свойство 5). Приведем для полноты изложения это доказательство:

$$\langle\theta_{p-1},\xi\rangle = \langle\theta_{p-1},\delta\xi_p\rangle = \langle\delta\theta_{p-1},\xi_p\rangle = \langle d\theta_p,\xi_p\rangle = \langle\theta_p,\partial\xi_p\rangle.$$

Свойств 6) и 7) доказываются аналогично. □

Замечание. Если в условиях свойства 5) дополнительно предположить, что $\xi = \partial\xi_{p-1}$ для

$\xi_{p-1} \in C_{p-1,q+1}$, то это свойство легко получается из свойства 4):

$$\langle \theta_{p-1}, \xi \rangle = \langle \theta_{p-1}, \partial\xi_{p-1} \rangle = \langle d\theta_{p-1}, \xi_{p-1} \rangle = \langle \delta\theta_{p-1}, \xi_p \rangle = \langle d\theta_p, \xi_p \rangle = \langle \theta_p, \partial\xi_p \rangle.$$

В общем случае свойство 5) не следует из свойства 4).

Если $\Theta = [\theta] \in H^q(\Omega^*)$, $\Xi = [\xi] \in H_p(S_*^{\mathfrak{U}})$, то по теореме Стокса корректно определено спаривание

$$\langle \Theta, \Xi \rangle = \langle \theta, \xi \rangle.$$

Теорема 1.4 ([38], Теорема 1.14). *Пусть $\Theta \in H^q(C_{cl}^{*,p})$ и Θ^* — образ Θ в $H^{p+q}(\Omega^*)$ под действием последовательности гомоморфизмов* (1.12). *Пусть $\Xi \in H_{p+q}(S_*^{\mathfrak{U}})$ и ξ — представитель класса Ξ, имеющий $\mathfrak{U}$-резольвенту $\xi_0, \ldots, \xi_p, \ldots$. Если θ — представитель класса Θ, то*

$$\langle \theta, \xi_p \rangle = \langle \Theta^*, \Xi \rangle.$$

Приведем доказательство данной теоремы как иллюстрацию возможностей использования понятия резольвенты для $\mathfrak{U}$-коцепей и свойств спаривания из предложения 1.9.

Доказательство. Пусть $\theta_{p-1}, \ldots, \theta_0, \theta_{-1}$ — расширенная резольвента для θ. Учитывая предложение 1.8, для доказательства теоремы достаточно показать, что $\langle \theta, \xi_p \rangle = \langle \theta_{-1}, \xi \rangle$. Действительно, используя свойства спаривания, получаем

$$\langle \theta, \xi_p \rangle = \langle d\theta_{p-1}, \xi_{p-1} \rangle = \langle d\theta_{p-2}, \xi_{p-2} \rangle = \ldots = \langle d\theta_0, \xi_0 \rangle = \langle \rho\theta_{-1}, \xi_0 \rangle = \langle \theta_{-1}, \varepsilon\xi_0 \rangle = \langle \theta_{-1}, \xi \rangle.$$

□

Следствие 1.1 ([38], Следствие 1.15). *Пусть $\theta \in Z^q(C_{cl}^{*,p})$, и $\xi, \xi' \in Z_{p+q}(S_*^{\mathfrak{U}})$ — гомологичные циклы, имеющие резольвенты $\{\xi_k\}$ и $\{\xi'_k\}$ соответственно. Тогда*

$$\langle \theta, \xi_p \rangle = \langle \theta, \xi'_p \rangle.$$

1.4 Резольвенты в случае конечного покрытия

Двойственность двойных комплексов (1.4) и (1.7) для $\mathfrak{U}$-коцепей и $\mathfrak{U}$-цепей проявляется наиболее полно в случае конечного покрытия многообразия (топологического пространства) X.

Пусть открытое покрытие $\mathfrak{U}$ топологического пространства X является конечным и состоит из m ($m \geqslant 2$) элементов.

В этом случае для двойного комплекса (1.7) имеем $C_{p,q} \simeq 0$ при $p \geqslant m$. В силу точности строк отсюда в частности видим, что $\delta\colon C_{m-1,*} \to C_{m-2,*}$ — мономорфизм. Следовательно

$$Z_{m-1}(C_{*,q}) \simeq 0, \quad H_{m-1}(C^{cl}_{*,q}) = H_{m-1}(C_{*,q}) \simeq 0.$$

Пусть $\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \dots, \xi_{p+q+1}$ — резольвента для $\mathfrak{U}$-цепи $\xi \in Z_p(C^{cl}_{*,q})$, где $p+q \geqslant m-1$. Тогда, очевидно, $\xi_m = 0, \dots, \xi_{p+q+1} = 0$, и $\partial\xi_{m-1} = 0$. Будем считать ∂-цикл ξ_{m-1} конечным элементом резольвенты, не учитывая следующие за ним нулевые элементы.

Следующее утверждение является аналогом леммы 1.2.

Лемма 1.5. *Пусть $\xi \in Z_{m-3}(C^{cl}_{*,q})$, $q \geqslant 1$, и ξ_{m-2}, ξ_{m-1} — резольвента для ξ. Сопоставим классу $[\xi] \in H_{m-3}(C^{cl}_{*,q})$ класс $[\xi_{m-1}] \in H_{q-1}(C_{m-1,*})$. Тогда данное соответствие определяет гомоморфизм групп гомологий*

$$(\delta^{-1}\partial\delta^{-1})_*\colon H_{m-3}(C^{cl}_{*,q}) \to H_{q-1}(C_{m-1,*}).$$

$$\begin{tikzcd}
0 & \xi \arrow[l, "\delta"'] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[drr, dashed, "\delta^{-1}\partial\delta^{-1}"] & \xi_{m-2} \arrow[l, "\delta"'] \arrow[d, "\partial"] & \\
& 0 & \partial\xi_{m-2} \arrow[l, "\delta"] \arrow[d, "\partial"] & \xi_{m-1} \arrow[l, "\delta"] \arrow[d, "\partial"] \\
& & 0 & 0 \arrow[l, "\text{mono}"', "\delta"]
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Покажем, что образ описанного соответствия не зависит от выбора резольвенты. Пусть помимо ξ_{m-2}, ξ_{m-1} имеется резольвента ξ'_{m-2}, ξ'_{m-1} для ξ. Имеем $\delta(\xi_{m-2} - \xi'_{m-2}) = \delta\xi_{m-2} - \delta\xi'_{m-2} = \xi - \xi = 0$, поэтому найдется (единственная) $\mathfrak{U}$-цепь $\tau \in C_{m-1,q}$, для которой $\delta\tau = \xi_{m-2} - \xi'_{m-2}$. Отсюда $\xi'_{m-2} = \xi_{m-2} - \delta\tau$, и

$$\delta\xi'_{m-1} = \partial\xi'_{m-2} = \partial(\xi_{m-2} - \delta\tau) = \partial\xi_{m-2} - \partial(\delta\tau) = \delta\xi_{m-1} - \delta(\partial\tau) = \delta(\xi_{m-1} - \partial\tau).$$

Так как $\delta\colon C_{m-1,*} \to C_{m-2,*}$ — мономорфизм, то отсюда получаем $\xi'_{m-1} = \xi_{m-1} - \partial\tau$, поэтому $[\xi'_{m-1}] = [\xi_{m-1}]$ в $H_{q-1}(C_{m-1,*})$.

Далее, покажем, что образ также не зависит от выбора представителя гомологического класса в $H_{m-3}(C^{cl}_{*,q})$. Пусть $[\zeta] = [\xi]$. Тогда $\zeta = \xi + \delta\sigma$, где $\partial\sigma = 0$. Положим $\zeta_{m-2} = \xi_{m-2} + \sigma$, $\zeta_{m-1} = \xi_{m-1}$. Имеем $\delta\zeta_{m-2} = \delta(\xi_{m-2} + \sigma) = \delta\xi + \delta\sigma = \xi + \delta\sigma = \zeta$,

$$\partial\zeta_{m-2} = \partial(\xi_{m-2} + \sigma) = \partial\xi_{m-2} + \partial\sigma = \partial\xi_{m-2} = \delta\xi_{m-1} = \delta\zeta_{m-1}.$$

Следовательно, ζ_{m-2}, ζ_{m-1} — резольвента для ζ, причем $\zeta_{m-1} = \xi_{m-1}$.

Для того, чтобы показать, что данное соответствие гомологических классов является гомоморфизмом, достаточно заметить, что в качестве резольвенты для суммы $\mathfrak{U}$-цепей можно брать (поэлементную) сумму резольвент. $\square$

Замечание. При $m = 2$ для цикла $\xi \in Z_r(S_*^{\mathfrak{U}})$ и его резольвенты ξ_0, ξ_1 аналогичным образом соответствие $[\xi] \mapsto [\xi_1]$ задает гомоморфизм

$$(\delta^{-1}\partial\varepsilon^{-1})_*\colon H_r(S_*^{\mathfrak{U}}) \to H_{r-1}(C_{1,*}).$$

Единственное различие состоит в доказательстве независимости образа от представителя класса $[\xi] \in H_r(S_*^{\mathfrak{U}})$. Если $[\zeta] = [\xi]$, то $\zeta = \xi + \partial\tau$. Так как ε — эпиморфизм, то найдется $\mathfrak{U}$-цепь σ, для которой $\tau = \varepsilon\sigma$. Положим $\zeta_0 = \xi_0 + \partial\sigma, \zeta_1 = \xi_1$. Тогда, как нетрудно проверить, ζ_0, ζ_1 — резольвента для ζ, причем $[\zeta_1] = [\xi_1]$. Данный гомоморфизм позволяет построить известную длинную точную последовательность Майера — Виеториса для групп гомологий объединения двух открытых подмножеств.

Из последовательностей гомоморфизмов (1.9), (1.10), с учетом предложений 1.4, 1.5 и леммы 1.5, получим следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Пусть открытое покрытие $\mathfrak{U}$ топологического пространства X является конечным и состоит из m ($m \geqslant 3$) элементов. Тогда*

1) для любого $r \geqslant m$ имеет место последовательность гомоморфизмов

$$H_r(S_*^{\mathfrak{U}}) \to H_0(C^{cl}_{*,r-1}) \to \ldots \to H_{m-3}(C^{cl}_{*,r-m+2}) \to H_{r-m+1}(C_{m-1,*}), \tag{1.14}$$

действие которых описывается следующей цепочкой образов:

$$[\xi] \longmapsto [\partial\xi_0] \longmapsto \ldots \longmapsto [\partial\xi_{m-3}] \longmapsto [\xi_{m-1}],$$

где $\xi_0, \ldots, \xi_{m-3}, \xi_{m-2}, \xi_{m-1}$ — резольвента для цикла $\xi \in Z_r(S_*^{\mathfrak{U}})$;

2) для части последовательности (1.14) *вида*

$$H_p(C^{cl}_{*,q}) \to H_{p+1}(C^{cl}_{*,q-1}) \to \ldots \to H_{m-3}(C^{cl}_{*,p+q-m+3}) \to H_{p+q-m+2}(C_{m-1,*}) \tag{1.15}$$

при $0 \leqslant p \leqslant m-3$, $q \geqslant 1$, соответствующая цепочка образов имеет вид

$$[\xi] \longmapsto [\partial\xi_{p+1}] \longmapsto \ldots \longmapsto [\partial\xi_{m-3}] \longmapsto [\xi_{m-1}],$$

где $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{m-3}, \xi_{m-2}, \xi_{m-1}$ — резольвента для $\mathfrak{U}$-цепи $\xi \in Z_p(C^{cl}_{*,q})$.

Следствие 1.2. *Пусть ξ и ξ' — гомологичные циклы из $Z_r(S_*^{\mathfrak{U}})$, имеющие резольвенты $\{\xi_p\}$ и $\{\xi'_p\}$ соответственно. Тогда конечные элементы ξ_{m-1} и ξ'_{m-1} данных резольвент также гомологичны как циклы из $Z_{r-m+1}(C_{m-1,*})$.*

Замечание. Последнее утверждение можно получить как следствие теоремы 1.2. Действительно, достаточно показать, что конечный элемент резольвенты цикла, гомологичного нулю, также гомологичен нулю. Пусть $\xi \in B_r(S_*^{\mathfrak{U}})$. Изоморфизм $H(TC) \simeq H(S_*^{\mathfrak{U}})$ позволяет сопоставить циклу ξ некоторый D-цикл $\Xi \in B_r(TC)$. При этом компоненты $\Xi_{p,r-p} \in C_{p,r-p}$ цикла Ξ, как видно из доказательства теоремы 1.2, определяют резольвенту $\xi_0, \dots, \xi_{m-1}$, для которой $\xi_{m-1} = \pm \Xi_{m-1,r-m+1}$. Так как $\Xi \in B_r(TC)$, то $\Xi = D\Sigma$, где $\Sigma \in (TC)_{r+1}$. Но тогда, в силу определения оператора D, в частности $\Xi_{m-1,r-m+1} = \delta(0) + (-1)^{m-1}\partial\Sigma_{m-1,r-m+2}$. Поэтому

$$\xi_{m-1} = \pm\partial\Sigma_{m-1,r-m+2}, \quad \Sigma_{m-1,r-m+2} \in C_{m-1,r-m+2}.$$

Аналогичным образом рассматривается случай конечного покрытия для двойного комплекса Чеха — де Рама. Пусть $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие многообразия X, состоящее из m ($m \geqslant 2$) элементов. Тогда $C^{p,q} \simeq 0$ при $p \geqslant m$, и $\delta\colon C^{m-2,*} \to C^{m-1,*}$ — эпиморфизм. Также очевидно, что $Z^{m-1}(C_{cl}^{*,q}) = C_{cl}^{m-1,q}$.

Получаем следующий двойственный вариант леммы 1.4.

Лемма 1.6. *Пусть $\theta \in Z^{m-1}(C_{cl}^{*,q})$, $q \geqslant 0$, и $\theta_{m-2}, \theta_{m-3}, \dots$ — резольвента для θ. Сопоставим классу $[\theta] \in H^q(C^{m-1,*})$ класс $[d\theta_{m-2}] \in H^{m-2}(C_{cl}^{*,q+1})$. Тогда данное соответствие определяет гомоморфизм групп когомологий*

$$(d\delta^{-1})_*\colon H^q(C^{m-1,*}) \to H^{m-2}(C_{cl}^{*,q+1}).$$

$$\begin{tikzcd}
0 & \\
d\theta_{m-2} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & 0 \\
\theta_{m-2} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"'] & \theta \arrow[u, "d"'] \arrow[ul, dashed, "d\delta^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Следует из тех же самых рассуждений, что и при доказательстве леммы 1.4 с учетом определения резольвенты для $\mathfrak{U}$-коцепей. $\square$

Комбинируя утверждения предложения 1.8 и последней леммы, получим следующую теорему, двойственную теореме 1.5.

Теорема 1.6. *Пусть открытое покрытие $\mathfrak{U}$ многообразия X является конечным и состоит из m ($m \geqslant 3$) элементов. Тогда имеет место следующая последовательность гомоморфизмов*

$$H^q(C^{m-1,*}) \to H^{m-2}(C_{cl}^{*,q+1}) \to H^1(C_{cl}^{*,m+q-2}) \to H^{m+q-1}(\Omega^*), \tag{1.16}$$

действие которых соответствует цепочке последовательных образов

$$[\theta] \longmapsto [d\theta_{m-2}] \longmapsto \ldots \longmapsto [d\theta_1] \longmapsto [\theta_{-1}]$$

d-коцикла $\theta \in Z^{m-1}(C_{cl}^{*,q})$, имеющего расширенную резольвенту $\theta_{m-2}, \theta_{m-3}, \ldots, \theta_0, \theta_{-1}$.

Замечание. При $m = 2$ утверждение последней теоремы заменяется на утверждение о существовании гомоморфизма

$$(\rho^{-1} d\delta^{-1})_* \colon H^q(C^{1,*}) \to H^{q+1}(\Omega^*),$$

действующего по формуле $[\theta] \mapsto [\theta_{-1}]$, где θ_0, θ_{-1} — расширенная резольвента d-коцикла $\theta \in Z^1(C_{cl}^{*,q})$. Данный гомоморфизм позволяет построить длинную точную последовательность Майера — Виеториса для когомологий объединения двух открытых подмножеств.

Следствие 1.3. *Пусть θ и θ' — когомологичные коциклы из $Z^q(C^{m-1,*})$, имеющие расширенные резольвенты $\theta_{m-2}, \ldots, \theta_0, \theta_{-1}$ и $\theta'_{m-2}, \ldots, \theta'_0, \theta'_{-1}$ соответственно. Тогда коциклы θ_{-1} и θ'_{-1} из $Z^{m+q-1}(\Omega^*)$ также когомологичны.*

Определим спаривание для классов $\Xi = [\xi] \in H_q(C_{m-1,*})$ и $\Theta = [\theta] \in H^q(C^{m-1,*})$ по формуле

$$\langle \Theta, \Xi \rangle = \langle \theta, \xi \rangle.$$

Следующая теорема аналогична теореме 1.4.

Теорема 1.7. *Пусть $\Xi \in H_p(C_{*,q}^{cl})$ и Ξ_* — образ Ξ в $H_{p+q-m+2}(C_{m-1,*})$ под действием последовательности гомоморфизмов* (1.15). *Пусть $\Theta \in H^{p+q-m+2}(C^{m-1,*})$ и θ — представитель класса Θ, имеющий резольвенту $\theta_{m-2}, \ldots, \theta_0$. Если ξ — представитель класса Ξ, то*

$$\langle \theta_p, \xi \rangle = \langle \Theta, \Xi_* \rangle.$$

Доказательство. Пусть $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{m-1}$ — резольвента для ξ. Достаточно показать, что $\langle \theta_p, \xi \rangle = \langle \theta, \xi_{m-1} \rangle$. Последнее получаем из свойств спаривания:

$$\langle \theta_p, \xi \rangle = \langle \theta_{p+1}, \partial \xi_{p+1} \rangle = \ldots = \langle \theta_{m-2}, \partial \xi_{m-2} \rangle = \langle \theta_{m-2}, \delta \xi_{m-1} \rangle = \langle \delta \theta_{m-2}, \xi_{m-1} \rangle = \langle \theta, \xi_{m-1} \rangle.$$

□

Из последней теоремы вытекает утверждение, двойственное следствию 1.1:

Следствие 1.4. *Пусть* $\xi \in Z_p(C^{cl}_{*,q})$, *и* $\theta, \theta' \in Z^{p+q-m+2}(C^{m-1,*})$ *— гомологичные коциклы, имеющие резольвенты* $\{\theta_k\}$ *и* $\{\theta'_k\}$ *соответственно. Тогда*

$$\langle \theta_p, \xi \rangle = \langle \theta'_p, \xi \rangle.$$

Объединяя теоремы 1.4 и 1.7, получаем утверждение, наиболее ярко выражающее двойственность между гомологиями и когомологиями объединения и пересечения конечного числа открытых множеств:

Теорема 1.8. *Пусть* $\Theta \in H^{r-m+1}(C^{m-1,*})$ *и* $\Xi \in H_r(S^{\mathfrak{U}}_*)$. *Тогда*

$$\langle \Theta^*, \Xi \rangle = \langle \Theta, \Xi_* \rangle,$$

где Θ^* *— образ* Θ *в* $H^r(\Omega^*)$ *под действием гомоморфизмов* (1.16), *и* Ξ_* *— образ* Ξ *в* $H_{r-m+1}(C_{m-1,*})$ *под действием гомоморфизмов* (1.14).

1.5 Разделяющие циклы, связанные с резольвентами

Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} X = n \geqslant 2$, и $\{F_1, \ldots, F_n\}$ — набор аналитических гиперповерхностей (дивизоров) в X. Обозначим $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$. В теории многомерных вычетов, как будет показано в следующей главе, важную роль играет следующее понятие.

Определение 1.6. Говорят, что n-мерный цикл $\Gamma \in Z_n(X \setminus F)$ *разделяет* гиперповерхности $F_1, \ldots, F_n$, если Γ удовлетворяет условию

$$\Gamma \sim 0 \text{ в } X \setminus (F_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup F_n) \text{ для всех } j = 1, \ldots, n. \tag{1.17}$$

Обозначим через $H^{\mathrm{sep}}_n(X \setminus F)$ подгруппу группы гомологий $H_n(X \setminus F)$, образованную классами всех циклов, разделяющих данный набор гиперповерхностей. Будем называть $H^{\mathrm{sep}}_n(X \setminus F)$ *разделяющей подгруппой* (сравните с [22]).

Рассмотрим открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_j\}$ многообразия $\widetilde{X} = X \setminus (F_1 \cap \ldots \cap F_n)$, где $U_j = X \setminus F_j$, $j = 1, \ldots, n$. Заметим, что условие $[\xi] \in H^{\mathrm{sep}}_n(X \setminus F)$, то есть условие разделения циклом ξ набора $\{F_1, \ldots, F_n\}$, означает, что $\delta\xi$ является ∂-границей в $C_{n-2,n}$. Следующая теорема является главным результатом главы 1 и будет использоваться как главный инструмент при доказательстве ряда утверждений следующей главы.

Теорема 1.9. *Пусть* $\xi \in Z_{2n-1}(\widetilde{X})$, *и* $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ *—* $\mathfrak{U}$*-резольвента произвольного цикла из* $Z_{2n-1}(S^{\mathfrak{U}}_*)$, *представляющего класс* $[\xi] \in H_{2n-1}(\widetilde{X}) \simeq H_{2n-1}(S^{\mathfrak{U}}_*)$. *Тогда соответствие* *гомологических классов* $[\xi] \mapsto [\xi_{n-1}]$ *определяет гомоморфизм*

$$\varphi\colon H_{2n-1}(\widetilde{X}) \to H_n^{sep}(X \setminus F).$$

Если X *— штейново, то* φ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $\iota_*\colon H_{2n-1}(S_*^{\mathfrak{U}}) \to H_{2n-1}(\widetilde{X})$ — изоморфизм, описанный в теореме 1.1. Из теоремы 1.5 следует, что при $n > 2$ имеется последовательность гомоморфизмов

$$H_{2n-1}(S_*^{\mathfrak{U}}) \xrightarrow{\psi_0} H_0(C_{*,2n-2}^{cl}) \xrightarrow{\psi_1} \ldots \xrightarrow{\psi_{n-3}} H_{n-3}(C_{*,n+1}^{cl}) \xrightarrow{\psi_{n-2}} H_n(C_{n-1,*}),$$

где $H_n(C_{n-1,*}) = H_n(X \setminus F)$ и

$$\psi_0 = (\partial\varepsilon^{-1})_*\colon [\xi] \longmapsto [\partial\xi_0],$$
$$\psi_k = (\partial\delta^{-1})_*\colon [\partial\xi_{k-1}] \longmapsto [\partial\xi_k], \quad k = 1, \ldots, n-3,$$
$$\psi_{n-2} = (\delta^{-1}\partial\delta^{-1})_*\colon [\partial\xi_{n-3}] \longmapsto [\xi_{n-1}].$$

Гомоморфизм, о котором говорится в первом утверждении теоремы, имеет вид

$$\varphi = \psi_{n-2} \circ \ldots \circ \psi_1 \circ \psi_0 \circ \iota_*^{-1}.$$

При этом образ φ лежит в $H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$, так как по определению резольвенты $\delta\xi_{n-1} = \partial\xi_{n-2}$, то есть конечный элемент ξ_{n-1} резольвенты является разделяющим циклом.

Покажем, что если X — многообразие Штейна, то φ — изоморфизм.

Сюръективность φ. Согласно результату Серра, имеем $H_q(X) \simeq 0$ при $q > n$. Множества $U_j = X \setminus F_j$, $j = 1, \ldots, n$, (и всевозможные их пересечения) также являются многообразиями Штейна. Следовательно, для покрытия $\mathfrak{U}$ имеем

$$H_q(C_{p,*}) \simeq 0, \quad p = 0, \ldots, n-1, \quad q > n. \tag{1.18}$$

Достаточно показать, что для произвольного цикла $\xi_{n-1} \in Z_n(X \setminus F)$, разделяющего набор дивизоров $\{F_1, \ldots, F_n\}$ в X, существует цикл $\xi \in Z_{2n-1}(S_*^{\mathfrak{U}})$ с резольвентой, конечный элемент которой равен ξ_{n-1}. Итак, пусть $[\xi_{n-1}] \in H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$. Тогда $\delta\xi_{n-1}$ является ∂-границей в $C_{n-2,n}$ ($\delta\xi_{n-1} \sim 0$), то есть существует $\mathfrak{U}$-цепь $\xi_{n-2} \in C_{n-2,n+1}$ такая, что $\delta\xi_{n-1} = \partial\xi_{n-2}$. Так как $\delta\xi_{n-2} \in Z_{n+1}(C_{n-3,*})$, то в силу (1.18) $\delta\xi_{n-2} \sim 0$. Следовательно, найдется $\xi_{n-3} \in C_{n-3,n+2}$, $\delta\xi_{n-2} = \partial\xi_{n-3}$. Продолжая аналогичным образом, используя условие (1.18), построим последовательность $\mathfrak{U}$-цепей $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$, $\xi_p \in C_{p,2n-p-1}$, со свойством $\delta\xi_p = \partial\xi_{p-1}$, которая очевидно является резольвентой для цикла $\xi = \varepsilon\xi_0 \in Z_{2n-1}(S_*^{\mathfrak{U}})$.

Инъективность φ. Пусть $\xi_{n-1} \in Z_n(X \setminus F)$ — конечный элемент резольвенты $\{\xi_p\}$ цикла $\xi \in Z_{2n-1}(S_*^{\mathfrak{U}})$. Достаточно показать, что из $[\xi_{n-1}] = [0]$ следует $[\xi] = [0]$. Действительно, если $\xi_{n-1} \sim 0$, то существует $\mathfrak{U}$-цепь $\sigma_{n-1} \in C_{n-1,n+1}$ такая, что $\xi_{n-1} = \partial\sigma_{n-1}$. При этом $\partial\xi_{n-2} = \delta\xi_{n-1} = \delta(\partial\sigma_{n-1}) = \partial(\delta\sigma_{n-1})$, поэтому $\partial(\xi_{n-2} - \delta\sigma_{n-1}) = 0$. Учитывая условие (1.18), найдется $\mathfrak{U}$-цепь $\sigma_{n-2} \in C_{n-2,n+2}$ такая, что $\xi_{n-2} - \delta\sigma_{n-1} = \partial\sigma_{n-2}$. Имеем

$$\partial\xi_{n-3} = \delta\xi_{n-2} = \delta(\delta\sigma_{n-1} + \partial\sigma_{n-2}) = \delta\delta\sigma_{n-1} + \delta\partial\sigma_{n-2} = \delta\partial\sigma_{n-2} = \partial\delta\sigma_{n-2}.$$

Отсюда $\partial(\xi_{n-3} - \delta\sigma_{n-2}) = 0$. Из условия (1.18) заключаем, что найдется $\sigma_{n-3} \in C_{n-3,n+3}$, $\xi_{n-3} - \delta\sigma_{n-2} = \partial\sigma_{n-3}$. Повторяя данные рассуждения, получим, наконец, $\mathfrak{U}$-цепь $\sigma_0 \in C_{0,2n}$ такую, что $\xi_0 - \delta\sigma_1 = \partial\sigma_0$. При этом

$$\partial(\varepsilon\sigma_0) = \varepsilon(\partial\sigma_0) = \varepsilon(\xi_0 - \delta\sigma_1) = \varepsilon\xi_0 - \varepsilon\delta\sigma_1 = \varepsilon\xi_0 = \xi.$$

Показано, что $\xi = \partial(\varepsilon\sigma_0)$, то есть $\xi \sim 0$.

При $n = 2$ гомоморфизм φ имеет вид $\psi \circ \iota_*^{-1}$, где ψ описан в замечании к лемме 1.5:

$$\psi = (\delta^{-1}\partial\varepsilon^{-1})_* \colon H_3(S_*^{\mathfrak{U}}) \to H_2(C_{1,*}), \quad \psi \colon [\xi] \mapsto [\xi_1].$$

Доказательство того, что $\varphi \colon H_3(\widetilde{X}) \to H_2^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$ в случае штейновых многообразий является изоморфизмом, аналогично изложенному выше для $n > 2$. $\square$

Замечание. Теорема 1.9 в частности говорит о том, что в группе $H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$ можно выделить подгруппу $\operatorname{im}\varphi$ классов разделяющих циклов, связанных при помощи резольвент с $(2n-1)$-гомологиями многообразия $X \setminus (F_1 \cap \ldots \cap F_n)$.

Замечание 1.1. Двойственным образом можно сформулировать когомологический вариант теоремы 1.9. Обозначим $H^{2n-1}_{\mathrm{sep}}(\widetilde{X})$ подгруппу группы когомологий $H^{2n-1}(\widetilde{X})$, образованную классами коциклов $\theta_{-1} \in Z^{2n-1}(\widetilde{X})$, для которых $\rho\theta_{-1} \sim 0$, то есть

$$\theta_{-1} \sim 0 \text{ в } X \setminus F_j \text{ для всех } j = 1, \ldots, n.$$

Тогда расширенная резольвента для коцикла $\theta \in Z^n(X \setminus F)$ определяет по теореме 1.6 гомоморфизм

$$\varphi' \colon H^n(X \setminus F) \to H^{2n-1}_{\mathrm{sep}}(\widetilde{X}).$$

Заметим, что в случае штейнового многообразия X уже нельзя утверждать, что φ' — изоморфизм.

Глава 2

Исследование разделяющих циклов с помощью резольвент

В теории многомерных вычетов важную роль играет понятие разделяющего цикла. В частности, такие циклы возникают в связи с вычетами Гротендика. В данной главе демонстрируется применение понятия резольвенты и основных результатов главы 1 при исследовании вопросов, связанных с разделяющими циклами. В двух заключительных параграфах главы описывается обобщенный подход к понятию разделяющего цикла и доказывается одна из основных теорем диссертации, связанная с известной теоремой Гельфонд – Хованского о сумме вычетов Гротендика в комплексном алгебраическом торе.

2.1 Локальные вычеты и разделяющие циклы

Для функции $g(z)$ одного комплексного переменного вычет Коши в изолированной особой точке a определяется интегралом

$$\operatorname{res}_a g(z) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\gamma^{(a)}} g(z)\, dz,$$

где предполагается, что функция $g(z)$ голоморфна в проколотой окрестности $U_a \setminus a$ точки a, и одномерный цикл интегрирования $\gamma^{(a)}$ в локальных координатах — это положительно ориентированная окружность с центром в точке a достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$:

$$\gamma^{(a)} = \{z \colon |z - a| = \varepsilon\}. \tag{2.1}$$

Будем называть цикл $\gamma^{(a)}$ *локальным* в точке a. По теореме Коши определение вычета не зависит от выбора локального цикла (от выбора локальных координат и радиуса ε).

Эквивалентное определение вычета Коши связано с разложением функции в ряд Лорана в проколотой окрестности изолированной особой точки: если

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in U_a \setminus a,$$

то вычет определяется равенством $\operatorname{res}_a g(z) = c_{-1}$. При этом корректность такого определения обуславливается единственностью разложения функции в ряд Лорана в проколотой окрестности изолированной особой точки.

Рассмотрим задачу о вычислении интеграла

$$\int\limits_{\Gamma} g(z)\,dz, \tag{2.2}$$

где $g(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}$ за исключением дискретного множества особых точек F, и Γ — одномерный цикл в $\mathbb{C}\setminus F$ с компактным носителем. Целью является вычисление интеграла (2.2) с помощью вычетов.

Опишем одномерные гомологии пространства $\mathbb{C} \setminus F$. Так как множество F дискретно, то есть все особые точки g изолированны (это верно, например, если g мероморфна в $\mathbb{C}$), то для каждой точки $a \in F$ определен класс $[\gamma^{(a)}]$ гомологичных локальных циклов. При этом циклы, соответствующие разным особым точкам, гомологически независимы. Совокупность классов $[\gamma^{(a)}]$, $a \in F$, образует базу группы $H_1(\mathbb{C} \setminus F)$ одномерных компактных гомологий. Следовательно, любой одномерный цикл Γ в $\mathbb{C}\setminus F$ гомологичен целочисленной линейной комбинации локальных циклов:

$$\Gamma \sim \sum_{a\in F} n^{(a)}\gamma^{(a)}.$$

Возвращаясь к интегралу (2.2), получим

$$\int\limits_{\Gamma} g(z)\,dz = \sum_{a\in F} n^{(a)} \int\limits_{\gamma^{(a)}} g(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in F} n^{(a)} \operatorname{res}_a\, g(z).$$

Таким образом, в одномерном случае с изолированной особой точкой связывается единственный гомологический класс локальных циклов (2.1), единственное разложение в ряд Лорана в достаточно малой проколотой окрестности этой точки, и, следовательно, единственный вычет. При этом любой интеграл (2.2) сводится к вычетам.

Как отмечалось во введении, один из основных подходов к получению многомерных обобщений вычета Коши связан с рассмотрением вычета для мероморфных функций (для мероморфных дифференциальных форм) n переменных, который ассоциируется с отображением $f = (f_1, \ldots, f_n)$, компоненты которого — голоморфные функции n переменных. Дадим соответствующее определение.

Рассмотрим мероморфную форму ω в n-мерном комплексном аналитическом многообразии X, имеющую в локальных координатах вид

$$\omega = \frac{h(z)\,dz}{f_1(z)\dots f_n(z)}, \quad z = (z_1, \dots, z_n), \quad dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n.$$

Будем предполагать, что знаменатель определяет отображение

$$f = (f_1, \dots, f_n)\colon \overline{U}_a \to \mathbb{C}^n,$$

голоморфное в замыкании окрестности U_a точки a, являющейся изолированным нулем отображения f, и $h(z)$ голоморфна в $\overline{U}_a$. Пусть F — полярная гиперповерхность мероморфной формы ω. При этом

$$F\,|_{U_a} = \{z \in U_a\colon f_1(z)\cdot\ldots\cdot f_n(z) = 0\}.$$

Рассмотрим *локальный цикл*

$$\gamma^{(a)} = \{z \in U_a\colon |f_i(z)| = \varepsilon_i,\ i = 1, \dots, n\}, \tag{2.3}$$

лежащий в $U_a \setminus F$ при достаточно малых $\varepsilon_i > 0$. Ориентацию цикла $\gamma^{(a)}$ зададим условием

$$d(\arg f_1) \wedge \dots \wedge (\arg f_n) \geqslant 0.$$

По определению *локальный вычет* (вычет Гротендика) формы ω представляется интегралом вида

$$\operatorname{res}_{f,a} \omega = \operatorname{res}_{f,a} h = (2\pi i)^{-n} \int\limits_{\gamma^{(a)}} \omega \tag{2.4}$$

и ассоциируется с голоморфным отображением $f = (f_1, \dots, f_n)$. Из договоренности об ориентации цикла $\gamma^{(a)}$ следует, что локальный вычет кососимметричен относительно перестановок компонент отображения $f = (f_1, \dots, f_n)$. Как уже отмечалось во введении, с алгебраической точки зрения $\operatorname{res}_{f,a}$ является функционалом на фактор-кольце $\mathcal{O}_a/\langle f_1, \dots, f_n\rangle$ (см. также [51], [40]). Последний факт основывается на том, что локальный цикл $\gamma^{(a)}$, участвующий в определении вычета $\operatorname{res}_{f,a}$, является разделяющим циклом для набора ростков гиперповерхностей $\{f_j = 0\}$, $j = 1, \dots, n$ (см. определение 1.6).

Пусть полярная гиперповерхность F мероморфной формы ω представляется в виде объединения набора гиперповерхностей $\{F_1, \dots, F_n\}$. Тогда каждой изолированной точке a пересечения этих гиперповерхностей сопоставляется локальный вычет $\operatorname{res}_{f,a} \omega$, где компоненты f_j отображения f — это функции, представляющие соответствующие гиперповерхности F_j в достаточно малой окрестности U_a точки a. При этом каждый локальный цикл $\gamma^{(a)}$ разделяет данный набор гиперповерхностей уже в глобальном смысле.

Обозначим через Z_0 дискретную часть пересечения гиперповерхностей $F_1, \ldots, F_n$ и рассмотрим подгруппу $H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$ в $H_n(X \setminus F)$, порожденную классами всех локальных циклов $\gamma^{(a)}$, $a \in Z_0$. Так как все локальные циклы являются разделяющими, то имеет место включение $H^{\mathrm{loc}}(X \setminus F) \subset H^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$, где $H^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$ — подгруппа классов всех циклов, разделяющих данный набор гиперповерхностей (разделяющая подгруппа, см. параграф 1.5). Для произвольного n-цикла Γ в $X \setminus F$ возникает задача о представлении интеграла

$$\int\limits_{\Gamma} \omega \tag{2.5}$$

через локальные вычеты. Более точно, в топологической формулировке этой задачи, требуется выяснить, когда заданный n-цикл Γ в $X \setminus F$ имеет гомологическое представление вида

$$\Gamma \sim \sum_{a \in Z_0} n^{(a)} \gamma^{(a)}, \tag{2.6}$$

то есть описать условия, при которых $[\Gamma] \in H^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$. Как отмечалось в начале данного параграфа, в одномерном случае эта задача решается тривиальным образом. При $n \geqslant 2$ в качестве необходимого условия для существования представления вида (2.6) выступает условие разделения. В следующих параграфах данной главы демонстрируется применение теории $\mathfrak{U}$-резольвент к исследованию описанной задачи и других задач, связанных с разделяющими циклами.

2.2 Резольвенты, связанные с локальными вычетами

Применим язык резольвент $\mathfrak{U}$-цепей и $\mathfrak{U}$-коцепей (гомологических и когомологических резольвент) в связи с понятием локального вычета. Вначале выясним «происхождение» локальных циклов, участвующих в определении вычета Гротендика.

Специальный аналитический полиэдр и резольвента его границы.

Пусть в области $G \subset \mathbb{C}^n$ задан конечный набор голоморфных функций $\chi_1(z), \ldots, \chi_m(z)$, $m \geqslant n$, и набор плоских областей $G_1, \ldots, G_m$ таких, что $G_i \Subset \chi_i(G)$, $i = 1, \ldots, m$. Согласно [1], множество

$$\Pi = \{z \in G \colon \chi_i(z) \in G_i,\ i = 1, \ldots, m\} \tag{2.7}$$

будем называть *аналитическим полиэдром*, а множества

$$\sigma^{(i)} = \{z \in G \colon \chi_i(z) \in \partial G_i,\ \chi_j(z) \in G_i,\ j \neq i\}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

— его гранями.

Далее, говоря об аналитическом полиэдре (2.7), будем предполагать, что он является связным, границы ∂G_i кусочно-гладкие, и пересечение любых k его различных граней имеет размерность не выше $2n-k$ (при выполнении этих условий аналитический полиэдр также называют полиэдром Вейля). В частности, при таких предположениях аналитический полиэдр является областью голоморфности.

Пусть $I = \{1, \ldots, m\}$. Для каждого подмножества $J = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset I$, состоящего из k элементов, рассмотрим $(2n-k)$-мерное *ребро* полиэдра (2.7), образованное пересечением граней $\sigma^{(j)}$, $j \in J$:

$$\sigma_k(J) = \sigma_k(j_1, \ldots, j_k) = \bigcap_{j \in J} \sigma^{(j)}, \quad k = 2, \ldots, n.$$

Снабдим эти ребра естественной ориентацией, индуцированной ориентацией области $G \subset \mathbb{C}^n$. Объединение всех n-мерных ребер $\sigma_n(j_1, \ldots, j_n)$ называется *остовом* аналитического полиэдра Π.

При $m = n$ полиэдр (2.7) называется *специальным аналитическим полиэдром*. Если плоские области G_i являются кругами с центром в начале координат, то такой полиэдр имеет следующий вид:

$$\Pi = \{z \in G\colon |\chi_i(z)| < \rho_i,\ i = 1, \ldots, n\}. \tag{2.8}$$

Если, кроме того, $\chi_i(z) = z_i$ в $G = \mathbb{C}^n$, $i = 1, \ldots, n$, то полиэдр (2.8) представляет собой открытый поликруг радиуса $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$:

$$B_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n\colon |z_i| < \rho_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Рассмотрим набор граней и ребер полиэдра (2.8) с точки зрения понятия $\mathfrak{U}$-резольвенты. Множества

$$U_i = \{z \in G\colon \chi_i(z) \neq 0\}, \quad i \in I = \{1, \ldots, n\},$$

образуют открытое покрытие $\mathfrak{U}$ области $\widetilde{G} = G \setminus \{\chi_1(z) = \ldots = \chi_n(z) = 0\}$. Будем считать, что ориентация полиэдра определяется порядком $r_1, \varphi_1, \ldots, r_n, \varphi_n$ параметров r_i, φ_i, где $\chi_i = r_i e^{i\varphi_i}$. Грани $\sigma^{(i)}$ и ребра $\sigma_k(J)$ будут рассматриваться как цепи, имеющие соответствующую индуцированную ориентацию. Тогда, как нетрудно убедиться, для границы полиэдра Π справедливо представление

$$\partial\Pi = \sum_{i \in I} \sigma^{(i)}, \quad \operatorname{supp} \sigma^{(i)} \subset U_i,$$

поэтому $\partial\Pi \in Z^{\mathfrak{U}}_{n-1}(\widetilde{G})$. Следовательно, для цикла $\partial\Pi$ существует $\mathfrak{U}$-резольвента. Выпишем её в явном виде.

Для каждого подмножества $J = \{j_0, \ldots, j_p\} \subset I$, $j_0 < \ldots < j_p$, $p = 0, 1, \ldots, n-1$, следующее равенство определяет $(2n-p-1)$-цепь $\xi_p(J)$, носитель которой лежит в множестве

$U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_p}$:

$$\xi_p(J) = \sigma_{2n-p-1}(J) = \{z \in G\colon |\chi_i(z)| \leqslant \rho_i,\ i \in I \setminus J,\ |\chi_j(z)| = \rho_j,\ j \in J\}. \tag{2.9}$$

Рассматривая $\xi_p(j_0, \ldots, j_p)$ как альтернированную функцию от наборов $(j_0, \ldots, j_p) \in I^{p+1}$, получим последовательность $\mathfrak{U}$-цепей $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$, где $\xi_p \in C_{p,2n-p-1}$, причем $\partial \Pi = \varepsilon \xi_0$. Проверим, что $\delta \xi_p = \partial \xi_{p-1}$, $p = 1, \ldots, n-1$.

Достаточно проверить это свойство для произвольного набора $J = \{j_0, \ldots, j_{p-1}\} \subset I$, $j_0 < \ldots < j_{p-1}$. Имеем

$$(\delta \xi_p)(J) = \sum_{i \in I} \xi_p(i, j_1, \ldots, j_{p-1}) = \sum_{i \in I \setminus J} \xi_p(i, j_0, \ldots, j_{p-1}) = \sum_{i \in I \setminus J} (-1)^{(i,J)} \xi_p(i \cup J),$$

где $(i, J) = \#\{k \in J\colon k < i\}$. Для вычисления границы цепи $\partial \xi_{p-1}(J)$ заметим, что в упорядоченном списке параметров r_k, φ_k, задающих ориентацию этой цепи, параметр r_i для $i \in I \setminus J$ имеет номер $i - 1 + (i, I \setminus J)$ при нумерации с нуля. Следовательно,

$$\partial \xi_{p-1}(J) = \sum_{i \in I \setminus J} (-1)^{i-1+(i, I\setminus J)} \xi_p(i \cup J).$$

Но, как легко видеть, $i - 1 = (i, I \setminus J) + (i, J)$. Поэтому множители $(-1)^{(i,J)}$ и $(-1)^{i-1+(i,I\setminus J)}$ имеют одинаковый знак.

Построенная резольвента связывает границу $\partial \Pi$ полиэдра Π с его остовом

$$\sigma_n = \sigma_n(I) = \{z \in G\colon |\chi_i(z)| = \rho_i,\ i \in I\}. \tag{2.10}$$

Пусть отображение $f = (f_1, \ldots, f_n)$ голоморфно в замыкании окрестности U_a своего изолированного нуля a. Локальный цикл $\gamma^{(a)}$, заданный формулой (2.3) и участвующий в определении вычета Гротендика, является остовом полиэдра

$$\Pi_a = \{z \in U_a\colon |f_i(z)| < \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n\}. \tag{2.11}$$

Рассмотрим открытое покрытие $\mathfrak{U}$ области $U_a \setminus a$ множествами $U_i = \{z \in U_a\colon f_i(z) \neq 0\}$, $i = 1, \ldots, n$. Как частный случай сказанного выше, получаем следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Для границы $\partial \Pi_a$ специального аналитического полиэдра* (2.11) *существует $\mathfrak{U}$-резольвента $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$, конечным элементом которой является локальный цикл $\xi_{n-1}(1, \ldots, n) = \gamma^{(a)}$.*

Отметим, что резольвента для цикла $\partial \Pi_a$ в таком же виде выписана в [40] при доказательстве формулы, выражающей локальный вычет через интеграл по сфере, окружающей особую точку. Далее будет рассмотрена когомологическая резольвента, связанная с локальным циклом.

Резольвента для мероморфной формы.

Пусть G — область в $\mathbb{C}^n$ и задана мероморфная n-форма

$$\omega = \frac{h(z)\,dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n}{f_1(z)\ldots f_n(z)}, \quad h, f_1,\ldots,f_n \in \mathcal{O}(\overline{G}),$$

где $\mathcal{O}(\overline{G})$ — кольцо функций, голоморфных в $\overline{G}$. Обозначим

$$U_i = \{z\in G\colon f_i(z)\neq 0\},\ i\in I=\{1,\ldots,n\}, \quad \widetilde{G}=\bigcup_{i\in I} U_i.$$

Тогда множества U_i, $i\in I$, образуют открытое покрытие $\mathfrak{U}$ области $\widetilde{G}$.

Все построения, связанные с резольвентами, без значительных изменений переносятся на случай двойного комплекса $\mathfrak{U}$-коцепей кратности p и бистепени (n,q), который рассматривается в связи с когомологиями Дольбо. Так как в случае комплексных многообразий $d=\partial+\bar\partial$, то, учитывая максимальность размерности форм по голоморфным составляющим, в качестве кограничного оператора в нашем случае будет выступать $\bar\partial$.

В [40] описывается идея, позволяющая найти расширенную резольвенту мероморфной формы ω бистепени $(n,0)$. Обозначим

$$f=(f_1,\ldots,f_n), \quad \|f\|^2=|f_1|^2+\cdots+|f_n|^2$$

и рассмотрим бесконечно дифференцируемые в $\widetilde{G}$ функции

$$\rho_i=\frac{|f_i|^2}{\|f\|^2}=\frac{f_i\bar f_i}{\|f\|^2},\ i\in I,$$

образующие разбиение единицы для покрытия $\mathfrak{U}$ области $\widetilde{G}$:

$$\operatorname{supp}\rho_i\subset U_i, \quad \sum_{i\in I}\rho_i=1.$$

Пусть $J=\{j_0,\ldots,j_p\}\subset I$, $j_0<\ldots<j_p$, $p=0,\ldots,n-2$, и $I\setminus J=\{i_0,\ldots,i_{n-p-2}\}$, $i_0<\ldots<i_{n-p-2}$. Положим

$$\theta_p(J)=\hat\theta_p(I\setminus J)=(-1)^{(I\setminus J;I)}\cdot\begin{vmatrix}\rho_{i_0} & \bar\partial\rho_{i_0} & \ldots & \bar\partial\rho_{i_0}\\ \rho_{i_1} & \bar\partial\rho_{i_1} & \ldots & \bar\partial\rho_{i_1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \rho_{i_{n-p-2}} & \bar\partial\rho_{i_{n-p-2}} & \ldots & \bar\partial\rho_{i_{n-p-2}}\end{vmatrix}\wedge\omega, \tag{2.12}$$

где обозначено

$$(I \setminus J; I) = \sum_{i \in I \setminus J} (i, I),$$

и в определителе порядка $(n-p-1)$ произведение соответствующих элементов понимается как внешнее произведение. В частности, при $p = n-2$ получим

$$\theta_{n-2}(I \setminus i) = \hat{\theta}_{n-2}(i) = (-1)^{i-1} \rho_i \wedge \omega.$$

Обозначим

$$R(I \setminus J) = \begin{vmatrix} \rho_{i_0} & \bar\partial\rho_{i_0} & \dots & \bar\partial\rho_{i_0} \\ \rho_{i_1} & \bar\partial\rho_{i_1} & \dots & \bar\partial\rho_{i_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{i_{n-p-2}} & \bar\partial\rho_{i_{n-p-2}} & \dots & \bar\partial\rho_{i_{n-p-2}} \end{vmatrix}.$$

При этом

$$\bar\partial R(I \setminus J) = \begin{vmatrix} \bar\partial\rho_{i_0} & \bar\partial\rho_{i_0} & \dots & \bar\partial\rho_{i_0} \\ \bar\partial\rho_{i_1} & \bar\partial\rho_{i_1} & \dots & \bar\partial\rho_{i_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar\partial\rho_{i_{n-p-2}} & \bar\partial\rho_{i_{n-p-2}} & \dots & \bar\partial\rho_{i_{n-p-2}} \end{vmatrix}.$$

Для дальнейшего нам потребуется следующее равенство определителя $R(I \setminus J)$:

$$\sum_{j \in J} (-1)^{(j, I \setminus J)} R((I \setminus J) \cup j) = \bar\partial R(I \setminus J).$$

Действительно,

$$\sum_{j \in J} (-1)^{(j, I \setminus J)} R((I \setminus J) \cup j) = \sum_{j \in J} \begin{vmatrix} \rho_j & \bar\partial\rho_j & \dots & \bar\partial\rho_j \\ \rho_{i_0} & \bar\partial\rho_{i_0} & \dots & \bar\partial\rho_{i_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{i_{n-p-2}} & \bar\partial\rho_{i_{n-p-2}} & \dots & \bar\partial\rho_{i_{n-p-2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j \in J} \rho_j \bar\partial R(I \setminus J) - \sum_{j \in J} \sum_{i \in I \setminus J} \rho_i (-1)^{(i, I \setminus J)} \begin{vmatrix} \bar\partial\rho_j & \dots & \bar\partial\rho_j \\ \bar\partial\rho_{i_0} & \dots & \bar\partial\rho_{i_0} \\ & \dots & \\ \dots & [i] & \dots \\ & \dots & \\ \bar\partial\rho_{i_{n-p-2}} & \dots & \bar\partial\rho_{i_{n-p-2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j \in J} \rho_j \bar\partial R(I \setminus J) + \sum_{i \in I \setminus J} \rho_i (-1)^{(i, I \setminus J)} \begin{vmatrix} \dots & \bar\partial\left(-\sum_{j \in J} \rho_j\right) & \dots \\ \dots & [i] & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j \in J} \rho_j \bar\partial R(I \setminus J) + \sum_{i \in I \setminus J} \rho_i (-1)^{(i, I\setminus J)} \begin{vmatrix} \dots & \bar\partial \left(\sum\limits_{j \in I \setminus J} \rho_j \right) & \dots \\ \dots & [i] & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j \in J} \rho_j \bar\partial R(I \setminus J) + \sum_{i \in I \setminus J} \rho_i (-1)^{(i, I\setminus J)} \begin{vmatrix} \dots & \bar\partial \rho_i & \dots \\ \dots & [i] & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j \in J} \rho_j \bar\partial R(I \setminus J) + \sum_{i \in I \setminus J} \rho_i \bar\partial R(I \setminus J) = \left(\sum_{i \in I} \rho_i \right) \bar\partial R(I \setminus J) = \bar\partial R(I \setminus J).$$

Нетрудно заметить, что

$$\bar\partial R(I \setminus J) = (n-p-1)!\, \bar\partial \rho_{I \setminus J}. \tag{2.13}$$

Получим явное выражение для внешнего произведения вида

$$\bar\partial \rho_{I \setminus J} = \bigwedge_{k \in I \setminus J} \bar\partial \rho_k = \bar\partial \rho_{i_0} \wedge \ldots \wedge \bar\partial \rho_{i_{n-p-2}},$$

где $\# J = p+1$, $p = 0, \ldots, n-3$. Учитывая, что $d = \partial + \bar\partial$, получим

$$\bar\partial \rho_i = \frac{f_i\, d\bar f_i}{\|f\|^2} - \frac{|f_i|^2 \sum f_j\, d\bar f_j}{\|f\|^4}.$$

Имеем

$$\bar\partial \rho_{I \setminus J} = \bigwedge_{k \in I \setminus J} \left(\frac{f_k\, d\bar f_k}{\|f\|^2} - \frac{|f_k|^2 \sum f_j\, d\bar f_j}{\|f\|^4} \right) =$$

$$= \bigwedge_{k \in I \setminus J} \left(\frac{f_k\, d\bar f_k}{\|f\|^2} \right) - \sum_{i \in I \setminus J} (-1)^{(i, I \setminus J)} \frac{|f_i|^2}{\|f\|^4} \left(\sum_{j \in I} f_j d\bar f_j \right) \wedge \bigwedge_{\substack{k \in I \setminus J \\ k \neq i}} \left(\frac{f_k\, d\bar f_k}{\|f\|^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\|f\|^{2(n-p)}} \left[\sum_{i \in J} |f_i|^2 f_{I \setminus J} d\bar f_{I \setminus J} - \sum_{i \in I \setminus J} (-1)^{(i, I \setminus J)} |f_i|^2 \sum_{j \in J} f_j d\bar f_j \prod_{\substack{k \in I \setminus J \\ k \neq i}} f_k \wedge \bigwedge_{\substack{k \in I \setminus J \\ k \neq i}} d\bar f_k \right],$$

где обозначено

$$f_{I \setminus J} = \prod_{k \in I \setminus J} f_k, \quad d\bar f_{I \setminus J} = \bigwedge_{k \in I \setminus J} d\bar f_k.$$

Окончательно получаем

$$\bar\partial\rho_{I\setminus J} = \frac{f_{I\setminus J}}{\|f\|^{2(n-p)}}\left[\sum_{i\in J}|f_i|^2 d\bar f_{I\setminus J} - \sum_{i\in I\setminus J}\sum_{j\in J}(-1)^{(i,I\setminus J)}\bar f_i f_j df_j \wedge \bigwedge_{\substack{k\in I\setminus J\\ k\neq i}} d\bar f_k\right]. \tag{2.14}$$

Раскладывая определитель $R(I\setminus J)$ в (2.12) по первому столбцу и применяя формулу (2.13), запишем форму $\theta_p(J)$ следующим образом:

$$\theta_p(J) = (-1)^{(I\setminus J;I)}(n-p-2)!\sum_{i\in I\setminus J}(-1)^{(i,I\setminus J)}\rho_i\bar\partial\rho_{I\setminus(J\cup i)}\wedge\omega.$$

Из последнего, учитывая явный вид форм ρ_i, $\rho_{I\setminus(J\cup i)}$ и ω, следует, что

$$\operatorname{supp}\theta_p(J)\subset\bigcap_{k\in J}U_k,$$

поэтому равенство (2.12) задает последовательность $\mathfrak{U}$-коцепей $\theta_{n-2},\theta_{n-3},\dots,\theta_0$. Покажем, что $\delta\theta_{n-2}=\omega$. Действительно,

$$(\delta\theta_{n-2})(I) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\theta_{n-2}(j_0,\dots[j_k]\dots,j_{n-1}) = \sum_{i\in I}(-1)^{i-1}\hat\theta_{n-2}(i) = \sum_{i\in I}\rho_i\wedge\omega = \omega.$$

Теперь покажем, что $\delta\theta_{p-1}=\bar\partial\theta_p$, $p=1,\dots,n-2$. Имеем

$$\bar\partial\theta_p = (-1)^{(I\setminus J;I)}\,\bar\partial R(I\setminus J)\wedge\omega.$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}(\delta\theta_{p-1})(J) &= \sum_{j\in J}(-1)^{(j,J)}\theta_{p-1}(J\setminus j) =\\ &= \sum_{j\in J}(-1)^{(j,J)}(-1)^{(I\setminus J,I)+(j,I)}R((I\setminus J)\cup j)\wedge\omega =\\ &= \sum_{j\in J}(-1)^{(j,I\setminus J)}(-1)^{(I\setminus J,I)}R((I\setminus J)\cup j)\wedge\omega =\\ &= (-1)^{(I\setminus J,I)}\left(\sum_{j\in J}(-1)^{(j,I\setminus J)}R((I\setminus J)\cup j)\right)\wedge\omega =\\ &= (-1)^{(I\setminus J,I)}\bar\partial R(I\setminus J)\wedge\omega = (\bar\partial\theta_p)(J).\end{aligned}$$

Построенная резольвента $\theta_{n-2},\theta_{n-3},\dots,\theta_0$ формы ω дополняется $\bar\partial$-коциклом θ_{-1}, для которого $\rho\theta_{-1} = \bar{\partial}\theta_0$. Найдем явный вид $\mathfrak{U}$-цепи $\bar{\partial}\theta_0$:

$$\bar{\partial}\theta_0(s) = (-1)^{(I\setminus s;I)}\bar{\partial}R(I\setminus s)\wedge\omega = (-1)^{(I\setminus s;I)}(n-1)!\,\bar{\partial}\rho_{I\setminus s}\wedge\omega.$$

По формуле (2.14) при $J=\{s\}$, получим

$$\bar{\partial}\rho_{I\setminus s} = \frac{\prod\limits_{k\neq s} f_k}{\|f\|^{2n}}\left[|f_s|^2\bigwedge_{k\neq s} d\bar{f}_k - \sum_{i\neq s}(-1)^{(i,I\setminus s)}\bar{f}_i f_s df_s\,\wedge\bigwedge_{\substack{k\neq s\\ k\neq i}} d\bar{f}_k\right] =$$

$$= \frac{\prod f_k}{\|f\|^{2n}}\left[\bar{f}_s\bigwedge_{k\neq s} d\bar{f}_k + \sum_{i\neq s}(-1)^{i+s}\bar{f}_i\,\wedge\bigwedge_{k\neq i} d\bar{f}_k\right] = \frac{\prod f_k}{\|f\|^{2n}}(-1)^s\sum_{i\in I}(-1)^i\bar{f}_i\bigwedge_{k\neq i} d\bar{f}_k.$$

Отсюда, учитывая вид формы ω, имеем

$$\bar{\partial}\theta_0(s) = (-1)^{(I\setminus s;I)}(n-1)!\,\frac{\prod f_k}{\|f\|^{2n}}(-1)^s\sum_{i\in I}(-1)^i\bar{f}_i\bigwedge_{k\neq i} d\bar{f}_k\wedge\frac{h\,dz_I}{\prod f_k}.$$

Так как

$$(I\setminus s;I)+s = (I;I)+1 = 0+1+\cdots+(n-1)+1 = \frac{n(n-1)}{2}+1,$$

то окончательно получим

$$\bar{\partial}\theta_0(s) = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}(n-1)!\,\frac{h}{\|f\|^{2n}}\sum_{i\in I}(-1)^{i-1}\bar{f}_i d\bar{f}_{I\setminus i}\wedge dz_I.$$

Полученное явное выражение для $\mathfrak{U}$-цепи $\bar{\partial}\theta_0(s)$ кратности $p=0$ не зависит от $s\in I$ и должно совпадать с результатом сужения $\bar{\partial}$-коцикла θ_{-1} на U_s. Поэтому

$$\theta_{-1} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}(n-1)!\,\frac{h}{\|f\|^{2n}}\sum_{i\in I}(-1)^{i-1}\bar{f}_i d\bar{f}_{I\setminus i}\wedge dz_I,\quad z\in\widetilde{G}. \tag{2.15}$$

Замечание. При $f_i = z_i$ форма (2.15) имеет вид

$$(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}(n-1)!\,\frac{h}{\|z\|^{2n}}\sum_{i\in I}(-1)^{i-1}\bar{z}_i d\bar{z}_{I\setminus i}\wedge dz_I$$

и совпадает с формой $(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}(2\pi i)^n\beta(z)$, где $\beta(z)$ — ядро интегрального представления Мартинелли – Бохнера. Как отмечается в [1], появление множителя $(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$ согласуется с выбором ориентации объемлющего пространства $\mathbb{C}^n$, которая должна учитываться при интегрировании по границе области.

Пример 2.1. Применим найденную резольвенту мероморфной формы

$$\omega = \frac{h(z)\,dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f_1(z)\ldots f_n(z)}$$

для получения представления локального вычета через интеграл по сфере (см. [40], а также [1],[51]). Пусть отображение $f = (f_1, \ldots, f_n)$ голоморфно в замыкании окрестности U_a своего изолированного нуля a, $U_a \cap f^{-1}(0) = \{a\}$. Используя обозначение для спаривания из параграфа 1.4, имеем

$$\operatorname{res}_{f,a}\omega = \frac{1}{(2\pi i)^n}\left\langle \omega, \gamma^{(a)} \right\rangle = \frac{1}{(2\pi i)^n}\left\langle [\omega], [\gamma^{(a)}] \right\rangle.$$

По теореме 1.8 с учетом леммы 2.1 получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\left\langle [\omega], [\gamma^{(a)}] \right\rangle = \frac{1}{(2\pi i)^n}\left\langle [\theta_{-1}], [\partial \Pi_a] \right\rangle = \frac{1}{(2\pi i)^n}\left\langle [\theta_{-1}], [S_a] \right\rangle,$$

где S_a — это $(2n-1)$-мерная сфера малого радиуса с центром в точке a. Окончательно получаем

$$\operatorname{res}_{f,a}\omega = \frac{1}{(2\pi i)^n}\left\langle \theta_{-1}, S_a \right\rangle = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{S_a} \theta_{-1}.$$

2.3 Доказательство теоремы Циха

Одним из наиболее законченных результатов о связи локальных и разделяющих циклов является следующая теорема.

Теорема 2.1 (А.К. Цих, 1975). *Пусть X — многообразие Штейна размерности n, и $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ — набор гиперповерхностей в X. Тогда n-цикл Γ из $X \setminus F$ разделяет набор $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда Γ гомологичен линейной комбинации локальных циклов $\gamma^{(a)}$, $a \in Z_0$, где Z_0 — дискретная часть пересечения $F_1 \cap \ldots \cap F_n$.*

Замечание. Если дискретная часть пересечения $F_1 \cap \ldots \cap F_n$ пуста, то любой цикл Γ, разделяющий данный набор гиперповерхностей, гомологичен нулю.

Мы приводим здесь доказательство теоремы 2.1, использующее понятие резольвенты (гомологический вариант) и теорему 1.9. Полученное А.К. Цихом доказательство (см. [17], [51]), основанное на применении длинной точной последовательности Майера – Виеториса для гомологий объединения, на наш взгляд является технически более сложным.

Доказательство. Обозначим $Z = F_1 \cap \ldots \cap F_n$. По теореме 1.9 существует изоморфизм

$$\varphi\colon H_{2n-1}(\widetilde{X}) \to H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F),$$

где $\widetilde{X} = X \setminus Z$, а подгруппа $H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F) \subset H_n(X \setminus F)$ состоит из классов всех циклов, разделяющих набор $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$.

Предположим вначале, что Z дискретно (состоит только из изолированных точек) и $Z_0 = Z \neq \varnothing$.

Пусть Γ разделяет набор $\mathcal{F}$, то есть $[\Gamma] \in H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$. Так как $H_{2n-1}(X) \simeq 0$, то группа $H_{2n-1}(\widetilde{X})$ порождается классами циклов S_a, $a \in Z$, где S_a — это $(2n-1)$-мерная сфера малого радиуса с центром в точке a. Следовательно, класс $\varphi^{-1}[\Gamma]$ представляется в виде линейной комбинации классов таких сфер:

$$\varphi^{-1}[\Gamma] = \sum_{a \in Z} n^{(a)}[S_a].$$

Покажем, что цикл Γ гомологичен в $X \setminus F$ циклу Γ' вида

$$\Gamma' = \sum_{a \in Z} n^{(a)}\gamma^{(a)}.$$

В качестве представителя класса $[S_a]$ может быть взята граница $\partial\Pi_a$ специального аналитического полиэдра Π_a. По лемме 2.1 локальный цикл $\gamma^{(a)}$ можно рассматривать как конечный элемент ξ_{n-1} резольвенты $\{\xi_p\}$ цикла $\partial\Pi_a$. Отсюда следует, что цикл Γ' является конечным элементом резольвенты для цикла

$$\xi' = \sum_{a \in Z} n^{(a)}\partial\Pi_a,$$

Поэтому $\varphi[\xi'] = [\Gamma']$. С другой стороны, для цикла

$$\xi = \sum_{a \in Z} n^{(a)}S_a$$

имеем $\varphi[\xi] = [\Gamma]$. Но $[\xi] = [\xi']$, поэтому $[\Gamma] = [\Gamma']$, то есть

$$\Gamma \sim \sum_{a \in Z} n^{(a)}\gamma^{(a)}.$$

Если $Z = \varnothing$, то $\widetilde{X} = X$. Поэтому $H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F) \simeq H_{2n-1}(\widetilde{X}) \simeq 0$, то есть любой разделяющий цикл гомологичен нулю.

Если же пересечение $Z = F_1 \cap \ldots \cap F_n$ недискретно, то, как было замечено в [51], его можно представить в виде $Z = Z_0 \cup Z_1$, где Z_0 — дискретная часть Z, а Z_1 — аналитическое подмножество, состоящее из неприводимых компонент размерности $\geqslant 1$. Рассмотрим многообразие $X^{(1)} = X \setminus Z_1$ и набор гиперповерхностей $\mathcal{F}^{(1)} = \{F_1^{(1)}, \dots, F_n^{(1)}\}$, где $F_j^{(1)} = F_j \cap X^{(1)}$. Имеем $X^{(1)} \setminus F_j^{(1)} = X \setminus F_j$, поэтому цикл Γ, разделяющий набор $\mathcal{F}$ в X, разделяет и набор $\mathcal{F}^{(1)}$ в $X^{(1)}$. Так как по прежнему $H_{2n-1}(X^{(1)}) \simeq 0$, и $X^{(1)} \setminus F_j^{(1)}$ — многообразия Штейна, причем пересечение $Z_0 = F_1^{(1)} \cap \ldots \cap F_n^{(1)}$ дискретно, а утверждение о представимости цикла в виде линейной комбинации локальных циклов связано лишь с дискретной частью пересечения гиперповерхностей, то мы приходим к уже рассмотренному случаю. $\square$

Замечание 2.1. Из теоремы 1.9 и леммы 2.1 следует, что в общем случае имеют место следующие включения:

$$H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F) \subset \operatorname{im} \varphi \subset H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F). \tag{2.16}$$

Теорема 2.1 утверждает, что для многообразий Штейна все включения в (2.16) заменяются на равенства:

$$H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F) = \operatorname{im} \varphi = H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F).$$

2.4 О принципе разделяющих циклов

В данном параграфе приводится один из вариантов так называемого «принципа разделяющих циклов» А. К. Циха, разработанного в [18].

Рассмотрим специальный аналитический полиэдр

$$\Pi = \{z \in G \colon \chi_i(z) \in G_i,\ i = 1, \dots, n\}, \tag{2.17}$$

и набор гиперповерхностей $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$, где

$$F_i = \{z \in G \colon f_i(z) = 0\},\ f_i \in \mathcal{O}(G), \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть как и прежде $F = F_1 \cup \ldots\ldots F_n$ и Z_0 — дискретная часть пересечения $F_1 \cap \ldots \cap F_n$. Назовем (см. [18]) набор гиперповерхностей $\mathcal{F}$ *согласованным* с аналитическим полиэдром Π, если

$$F_i \cap \sigma^{(i)} = \varnothing \quad \text{для всех} \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.18}$$

где $\sigma^{(i)}$ — грани полиэдра Π.

Приведем принцип разделяющих циклов из [18] в следующей эквивалентной формулировке.

Предложение 2.1. *Если набор гиперповерхностей $\mathcal{F}$ согласован с полиэдром* Π, *то его остов σ_n допускает в $\overline{\Pi} \setminus F$ гомологическое представление*

$$\sigma_n \sim \sum_{a \in Z_0 \cap \Pi} \gamma^{(a)},$$

где $\gamma^{(a)}$ — локальный цикл в точке a для набора $\mathcal{F}$.

Приводимое ниже доказательство, как и доказательство теоремы 2.1 из прошлого параграфа, не только иллюстрирует применение теоремы 1.9, но и является, как нам представляется, технически более простым, чем доказательство А.К. Циха.

Доказательство. Обозначим $Z = F_1 \cap \ldots \cap F_n$. Пусть $\mathfrak{U}$ — покрытие области $G \setminus Z$ открытыми множествами $U_i = G \setminus F_i$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$. В параграфе 2.2 описано построение резольвенты для границы полиэдра (2.8). Аналогичным образом строится $\mathfrak{U}$-резольвента $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ для границы $\partial\Pi$ полиэдра (2.17) такая, что $\xi_{n-1} = \sigma_n$. При этом условие (2.18) гарантирует, что носитель цепи

$$\xi_p(J) = \sigma_{2n-p-1}(J) = \{z \in G \colon \chi_i(z) \in \overline{G}_i,\ i \in I \setminus J,\ \chi_j(z) \in \partial G_j,\ j \in J\}$$

лежит в $U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_p}$ для каждого подмножества $J = \{j_0, \ldots, j_p\} \subset I$, $p = 0, 1, \ldots, n-1$.

Из доказательства теоремы 2.1 следует, что достаточно рассмотреть случай, когда пересечение гиперповерхностей Z дискретно, то есть $Z = Z_0$. Заметим, что граница полиэдра имеет следующее гомологическое представление:

$$\partial\Pi \sim \sum_{a \in Z_0 \cap \Pi} \partial\Pi_a \quad \text{в} \quad G \setminus Z.$$

Но тогда, учитывая что разделяющий гомоморфизм $\varphi \colon [\xi] \mapsto [\xi_{n-1}]$ определен на гомологических классах, из теоремы 1.9, получим

$$[\sigma_n] = \varphi\,[\partial\Pi] = \varphi[\sum_{a \in Z_0 \cap \Pi} \partial\Pi_a] = \sum_{a \in Z_0 \cap \Pi} \varphi[\partial\Pi_a] = \sum_{a \in Z_0 \cap \Pi} [\gamma^{(a)}],$$

поэтому

$$\sigma_n \sim \sum_{a \in Z_0 \cap \Pi} \gamma^{(a)}.$$

$\square$

Замечание. Условие (2.18), как показано в [18], эквивалентно следующему условию:

$$(F_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup F_n) \cap \sigma(1, \ldots [j] \ldots, n) = \varnothing, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.19}$$

где $\sigma(1,\ldots[j]\ldots,n)=\sigma^{(1)}\cap\ldots[j]\ldots\cap\sigma^{(n)}$ — $(n+1)$-мерные ребра полиэдра. Поэтому, если набор $\mathcal{F}$ согласован с полиэдром Π, то σ_n разделяет $\mathcal{F}$. Действительно, из условия (2.19) следует, что $\sigma_n=\pm\partial\sigma(1,\ldots[j]\ldots,n)$ в $F_1\cup\ldots[j]\ldots\cup F_n$. Как отмечается в [18], полиэдр Π является областью голоморфности, поэтому по теореме 2.1 имеется гомологическое представление вида

$$\sigma_n\sim\sum_{a\in Z_0\cap\Pi}n^{(a)}\gamma^{(a)}.$$

Предложение 2.1 уточняет, что в этом разложении все коэффициенты $n^{(a)}=1$.

2.5 Примеры разделяющих циклов в теории узлов

В данном параграфе предлагается одно из возможных обобщений понятия разделяющего цикла, дающее возможность расширить область применения этого понятия, выходя за рамки комплексного анализа. Это обобщение связано со следующим хорошо известный примером из теории узлов. Нетривиальное зацепление называют *брунновым зацеплением*, если оно становится тривиальным при удалении любой своей компоненты. Наиболее простой пример бруннова зацепления из трех компонент дают известные *кольца Борромео*. Кольца Борромео — это нетривиальное зацепление трех колец (окружностей), которые попарно незацеплены. В данном случае, по аналогии с понятием цикла, разделяющего набор гиперповерхностей в комплексном многообразии, следует говорить, что каждая из окружностей как одномерный цикл разделяет набор двух других окружностей в $\mathbb{R}^3$.

Для того, чтобы смотреть на обе ситуации с одной точки зрения, дадим следующее определение. Пусть X — вещественное многообразие размерности d, и $\mathcal{Y}=\{Y_1,\ldots,Y_m\}$ — набор замкнутых подмножеств из X, где $2\leqslant m\leqslant d-1$. Обозначим $Y=Y_1\cup\ldots\cup Y_m$.

Определение 2.1. Будем говорить, что $(d-m)$-мерный цикл Γ в $X\setminus Y$ разделяет набор $\mathcal{Y}$, если Γ гомологичен нулю в $X\setminus(Y_1\cup\ldots[j]\ldots\cup Y_m)$ для всех $j\in I=\{1,\ldots,m\}$.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда цикл Γ разделяет набор двух замкнутых подмножеств $\mathcal{Y}=\{Y_1,Y_2\}$ многообразия X размерности $d\geqslant 2$. Предположим, что $(d-1)$-гомологии многообразия X тривиальны, а $Y_1\cap Y_2=\varnothing$. В частности, эти условия выполняются для колец Борромео и любых других брунновых зацеплений с тремя компонентами. Определена точная последовательность Майера — Виеториса:

$$\ldots\to H_{d-1}(U_1\cup U_2)\to H_{d-2}(U_1\cap U_2)\to H_{d-2}(U_1)\oplus H_{d-2}(U_2)\to\ldots,$$

где $U_i=X\setminus Y_i$, $i=1,2$. Так как цикл Γ из $X\setminus(Y_1\cup Y_2)=U_1\cap U_2$ разделяет набор $\mathcal{Y}$, то класс цикла Γ имеет нулевой образ в $H_{d-2}(U_1)\oplus H_{d-2}(U_2)$. Из точности последовательности следует, что класс цикла Γ имеет прообраз в $H_{d-1}(U_1\cup U_2)=H_{d-1}(X\setminus(Y_1\cap Y_2))=H_{d-1}(X)\simeq 0$, откуда следует, что разделяющий цикл Γ гомологичен нулю. Для брунновых зацеплений с тремя компонентами это означает, что на каждую топологическую окружность данного зацепления можно натянуть «пленку», лежащую в дополнении к другим двум окружностям (для колец Борромео можно в этом убедиться непосредственно).

Вернемся к общему случаю. Пусть $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$ — набор замкнутых множеств в d-мерном вещественном многообразии X. Обозначим

$$\widetilde{X} = X \setminus (Y_1 \cap \ldots \cap Y_n),$$

и рассмотрим открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, $U_i = X \setminus Y_i$, $i \in I$, многообразия $\widetilde{X}$. Как и в параграфе 1.5, будем обозначать через $H^{\text{sep}}_{d-m}(X \setminus Y)$ подгруппу группы гомологий $H_{d-m}(X \setminus Y)$, образованную классами всех $(d-m)$-циклов, разделяющих набор $\mathcal{Y}$. Повторяя практически дословно доказательство теоремы 1.9, получим следующий аналог этой теоремы.

Предложение 2.2. *Пусть $\xi \in Z_{d-1}(\widetilde{X})$, и $\xi_0, \ldots, \xi_{m-1}$ — $\mathfrak{U}$-резольвента произвольного цикла из $Z_{d-1}(S^{\mathfrak{U}}_*)$, представляющего класс $[\xi] \in H_{d-1}(\widetilde{X}) \simeq H_{d-1}(S^{\mathfrak{U}}_*)$. Тогда соответствие гомологических классов $[\xi] \mapsto [\xi_{m-1}]$ определяет гомоморфизм*

$$\varphi\colon H_{d-1}(\widetilde{X}) \to H^{sep}_{d-m}(X \setminus Y).$$

При этом для того, чтобы φ являлся эпиморфизмом, достаточно выполнения условия

$$H_{d-2}(C_{0,*}) \simeq H_{d-3}(C_{1,*}) \simeq \ldots \simeq H_{d-m+1}(C_{m-3,*}) \simeq 0, \tag{2.20}$$

а для того, чтобы φ являлся мономорфизмом, достаточно выполнения условия

$$H_{d-1}(C_{0,*}) \simeq H_{d-2}(C_{1,*}) \simeq \ldots \simeq H_{d-m+1}(C_{m-2,*}) \simeq 0. \tag{2.21}$$

При этом выполнение условий (2.20), (2.21) в случае теоремы 1.9 следует из штейновости многообразия X.

Рассмотрим один многомерный аналог бруннового зацепления с тремя компонентами.

Пример 2.2. Пусть $X = S^{2n+1}$, и $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_{n+2}\}$ — набор попарно непересекающихся поверхностей, гомеоморфных S^n, в котором каждая из поверхностей разделяет остальные. Зафиксируем одну из поверхностей Y_i, и рассмотрим набор $\mathcal{Y}_i = \{Y_1, \ldots [i] \ldots, Y_{n+2}\}$. Покажем, что для многообразия $X = S^{2n+1}$ и набора поверхностей $\mathcal{Y}_i$ выполняется условие (2.20). С учетом того, что в рассматриваемой ситуации $d = 2n+1$, и $m = n+1$, требуется убедиться в тривиальности групп гомологий $H_{2n-1}(C_{0,*}), H_{2n-2}(C_{1,*}), \ldots H_{n+1}(C_{n-2,*})$. Из двойственности Александера – Понтрягина следует, что при $p = 0, \ldots, n$ для любого набора индексов $\{j_0, \ldots, j_p\} \subset \{1, \ldots [i] \ldots, n+2\}$

$$H_q\left(S^{2n-1} \setminus (Y_{j_0} \cup \ldots \cup Y_{j_p})\right) \simeq H_{(2n+1)-q-1}\left(Y_{j_0} \cup \ldots \cup Y_{j_p}\right) \simeq$$
$$\simeq \bigoplus_{k=0}^{p} H_{2n-q}(Y_{j_k}) \simeq \bigoplus_{k=0}^{p} H_{2n-q}(S^n).$$

Учитывая, что, как известно, $H_{2n-q}(S^n) \simeq 0$ при $1 \leqslant 2n-q \leqslant n-1$, получим $H_q(C_{p,*}) \simeq 0$ для $p = 0, \ldots, n$ и $q = n+1, \ldots, 2n-1$.

Согласно предложению 2.2, имеется эпиморфизм

$$\varphi\colon H_{2n}(\widetilde{X}) \to H_n^{\mathrm{sep}}\left(X \setminus (Y_1 \cup \ldots [i] \ldots \cup Y_{n+2})\right).$$

Так как рассматривается набор попарно непересекающихся сфер, то

$$H_{2n}\left(X \setminus (Y_1 \cap \ldots [i] \ldots \cap Y_{n+2})\right) = H_{2n}(X) = H_{2n}(S^{2n+1}) \simeq 0,$$

следовательно, $H_n^{\mathrm{sep}}\left(X \setminus (Y_1 \cup \ldots [i] \ldots \cup Y_{n+2})\right) \simeq 0$. Тем самым доказан следующий результат, аналогичный сформулированному выше следствию из теоремы 2.1 о разделяющих циклах в многообразиях Штейна.

Предложение 2.3. *Пусть X — сфера S^{2n+1} размерности $2n+1$, $n \geqslant 1$, и $\mathcal{Y}$ — набор из $n+2$ попарно непересекающихся поверхностей, гомеоморфных S^n, в котором каждая из поверхностей разделяет остальные. Тогда каждая сфера из набора $\mathcal{Y}$ гомологически тривиальна в дополнении остальных сфер.*

Как показал Милнор в статье [44], существует бесконечно много неэквивалентных бруновых зацеплений с любым заданным числом компонент. В [43] отмечается, что для изучения инвариантов таких зацеплений успешно применяются тройное произведение Масси, а также произведения Масси высшего порядка. Вопрос о существовании многомерных бруновых зацеплений в S^{2n+1}, состоящих из $n+2$ топологических сфер S^n, мы не затрагиваем.

2.6 Разделение тропических гиперповерхностей и теорема Гельфонд – Хованского

В теории исключений систем алгебраических уравнений важную роль играют формулы для суммы значений заданного многочлена в корнях системы n уравнений с n неизвестными. Поскольку каждое значение выражается локальным (логарифмическим) вычетом, речь идет о вычислении глобального вычета в определенных пространствах. Первоначальные формулы касались суммы вычетов в аффинном пространстве $\mathbb{C}^n$ (см. [1], [2], [4]). Затем глобальные вычеты интенсивно изучались в торических многообразиях (см. [28], [29], [30]) (по поводу торических многообразий и уравнений см. [35], [16], [15]).

В настоящем разделе мы рассматриваем задачу о вычислении полной суммы вычетов Гротендика в комплексном алгебраическом торе $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C} \setminus 0)^n$. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — набор полиномов Лорана от n переменных: $f_j \in \mathbb{C}[z_1^{\pm}, \ldots, z_n^{\pm}]$. Речь идет о сумме локальных вычетов $\operatorname{res}_{f,a} \omega$ дифференциальной формы

$$\omega = \frac{h(z)}{f_1(z) \ldots f_n(z)} \frac{dz}{z}, \quad \text{где } \frac{dz}{z} = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n}, \tag{2.22}$$

в нулях $a \in \mathbb{T}^n$ отображения f. Рассматриваемый вопрос впервые был поставлен в работах А.Г. Хованского и О.А. Гельфонд [5], [37], и затем подробно изучался с различными приложениями в статьях И. Сопрунова [46], [47], [48], [41].

Одномерным прототипом этого вопроса является задача о вычислении суммы вычетов в конечных ненулевых корнях многочлена $z \cdot f(z)$. В соответствии с теоремой о полной сумме вычетов на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{CP}^1$, эта сумма выражается двумя слагаемыми:

$$\sum_{a \in f^{-1}(0) \cap \mathbb{T}^1} \operatorname{res}_a \omega = -(\operatorname{res}_0 \omega - \operatorname{res}_\infty \omega). \tag{2.23}$$

Каждый из вычетов в точках $z = 0$ и $z = \infty$ вычисляется разложением функции $h/z \cdot f$ в ряд Лорана с использованием формулы геометрической прогрессии, принимая в качестве мажорирующего члена для знаменателя $z \cdot f(z)$: моном $c_m z^{m+1}$ (вблизи $z = 0$) и моном $c_d z^d$ (вблизи $z = \infty$), где $c_m z^m$ и $c_d z^d$ — младший и старший мономы полинома f.

Приведем основной результат Гельфонд – Хованского в удобной для нас терминологии. Напомним следующее важное определение.

Определение 2.2. Многогранником Ньютона Δ_P полинома $P = P(z_1, \ldots, z_n)$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ всех показателей мономов, входящих в P с ненулевыми коэффициентами.

Напомним, что *суммой Минковского* выпуклых многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ в $\mathbb{R}^n$ называется множество

$$\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n = \{\nu_1 + \ldots + \nu_n \colon \nu_1 \in \Delta_1, \ldots, \nu_n \in \Delta_n\}.$$

При этом $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$ также является выпуклым многогранником. Пусть задан упорядоченный набор $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^n$ и Δ — их сумма Минковского. Грань $\sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n$ многогранника Δ называется *запертой* (см. [37]), если среди слагаемых $\sigma_j \subset \Delta_j$ имеется хотя бы одна вершина. Набор многогранников называется *развернутым*, если все грани многогранника-суммы заперты.

Пусть для многогранника-суммы $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$ развернутого набора дано непрерывное отображение $\kappa\colon \Delta \to \mathbb{R}^n$, $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$, у которого каждая компонента κ_j неотрицательна и равна нулю на тех и только тех гранях $\sigma \subset \Delta$, для которых слагаемое σ_j является вершиной многогранника Δ_j. Ограничение отображения κ на границу $\partial\Delta$ многогранника Δ переводит окрестность каждой его вершины ν в окрестность начала координат на границе положительного ортанта $\mathbb{R}^n_+$. Локальная степень ростка отображения

$$\kappa\,|_{\partial\Delta} : (\partial\Delta, \nu) \to (\partial\mathbb{R}^n_+, 0)$$

называется *комбинаторным коэффициентом* вершины ν многогранника Δ и обозначается через k_ν. Комбинаторный коэффициент не зависит от выбора отображения κ и имеет знак, зависящий от выбора ориентации многогранника и положительного ортанта.

На рисунке 2.1 изображен развернутый набор двух многоугольников в $\mathbb{R}^2$ и их сумма Минковского, а также отмечены комбинаторные коэффициенты вершин многогранника-суммы.

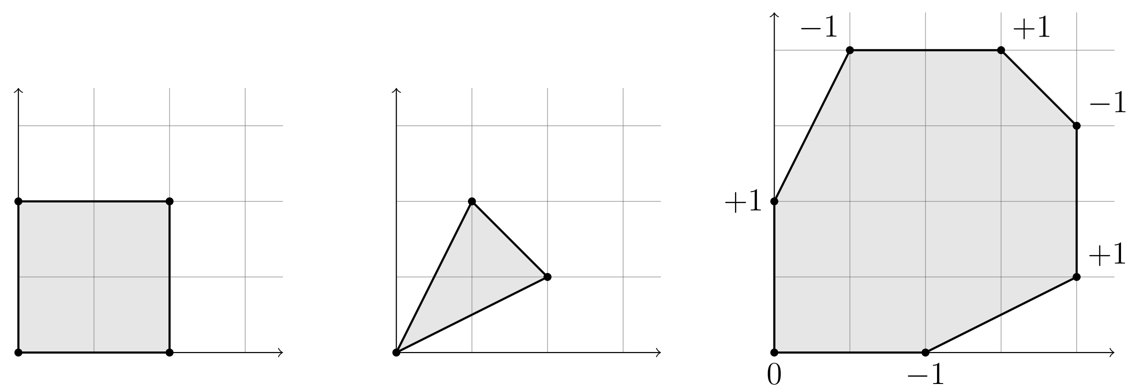


Рис. 2.1: Сумма Минковского и комбинаторные коэффициенты.

Многогранник $\Delta = \Delta_P$ кодирует определенную информацию о множестве нулей полинома P в торе $\mathbb{T}^n$, т. е. о гиперповерхности $V = \{z \in \mathbb{T}^n\colon P(z) = 0\}$. Эту информацию удобнее кодировать в логарифмической шкале, для чего рассматривается отображение $\mathrm{Log}\colon \mathbb{T}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$\mathrm{Log}\colon (z_1 \ldots, z_n) \to (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|). \tag{2.24}$$

Определение 2.3 (см.[36])**.** *Амебой* $\mathcal{A}_P$ *полинома* P *(или гиперповерхности* V*) называется образ* $\mathrm{Log}(V)$.

Известно [36], что дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_P$ состоит из конечного числа компонент связности $\{E\}$, каждая из которых открыта и выпукла. Кроме того, известна следующая информация о дополнении амебы. Чтобы сформулировать соответствующую теорему, напомним, что *конусом рецессии* выпуклого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называют максимальный конус K среди тех, которые подходящим сдвигом $x + K$ можно поместить в E. Также нам потребуется понятие двойственного конуса $C_\nu = C_\nu(\Delta)$ к многограннику Δ в точке $\nu \in \Delta$:

$$C_\nu = \{s \in \mathbb{R}^n \colon \langle s, \nu \rangle = \max_{\alpha \in \Delta} \langle s, \alpha \rangle\}.$$

Теорема 2.2. *Существует инъективная функция*

$$\nu \colon \{E\} \to \mathbb{Z}^n \cap \Delta_P,$$

которая каждой связной компоненте E дополнения амебы ставит в соответствие целочисленный вектор $\nu(E)$ из многогранника Ньютона Δ_P, причем двойственный конус $C_{\nu(E)}$ к Δ_P в точке $\nu(E)$ равен конусу рецессии компоненты E.

Отметим, что ввиду инъективности функции ν, связные компоненты $\{E\}$ можно нумеровать в виде E_ν точками (векторами) $\nu \in \Delta_P$. При этом функция ν принимает все значения из $\operatorname{Vert} \Delta_P$ — множества вершин многогранника Δ_P ([10], [36]). Иными словами, компоненты связности E_ν для $\nu \in \operatorname{Vert} \Delta_P$ всегда существуют, причем их конусы рецессии «большие» (имеют размерность n).

С каждой связной компонентой E_ν дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_P$ ассоциируется *торический n-мерный цикл*

$$T_\nu = \operatorname{Log}^{-1} p = \{|z_1| = e^{p_1}, \ldots, |z_1| = e^{p_n}\}, \tag{2.25}$$

где $p \in E_\nu$. При этом для всех $p \in E_\nu$ такие циклы принадлежат одному и тому же классу гомологий в группе $H_n(\mathbb{T}^n \setminus V)$.

На рисунке 2.2 изображены амёбы многочленов $f_1 = 1+z^2+w^2+z^2w^2$ и $f_2 = 1+z^2w+zw^2$ с многоугольниками Ньютона из рисунка 2.1. Вместе они составляют амёбу произведения $f_1 \cdot f_2$. Компоненты связности дополнения к этой амебе кодируются вершинами многоугольника Ньютона $\Delta_1 + \Delta_2$ (см. рисунок 2.1).

Рассмотрим набор $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ многогранников Ньютона полиномов $f_1, \ldots, f_n$ из (2.22) и обозначим Δ_f сумму Минковского для этого набора. Обозначим $\mathcal{A}_f$ амебу полинома $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$. Каждой компоненте E_ν дополнения амебы $\mathcal{A}_f$ полинома $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ сопоставляется разложение Лорана формы ω, сходящееся в области $\operatorname{Log}^{-1}(E_\nu)$. *Вычетом* $\operatorname{res}_\nu \omega$ *рациональной формы ω в вершине ν* многогранника Δ_f называется вычет ряда Лорана формы ω, сопоставленного компоненте E_ν.

Теперь мы можем сформулировать результат Гельфонд – Хованского.

Теорема 2.3. *Предположим, что набор многогранников Ньютона системы полиномов $f_1, \ldots, f_n$ развернут. Тогда сумма вычетов Гротендика рациональной формы* (2.22)*, ассо-*

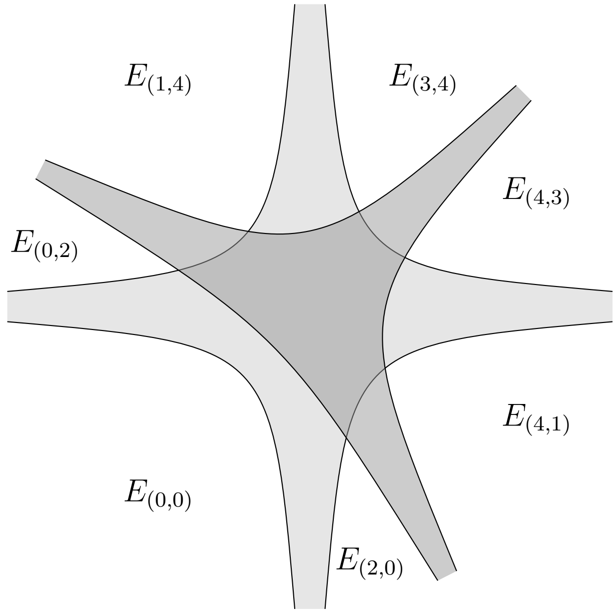


Рис. 2.2: Амёба произведения многочленов f_1 и f_2.

циированной с отображением $f = (f_1, \ldots, f_n)$, *вычисляется по формуле*

$$\sum_{a \in f^{-1}(0) \cap \mathbb{T}^n} \operatorname{res}_{f,a} \omega = (-1)^n \sum_{\nu \in \operatorname{Vert} \Delta_f} k_\nu \operatorname{res}_\nu \omega. \tag{2.26}$$

Напомним, что наряду с представлением локального вычета (2.4) в виде n-мерного интеграла, существует представление $(2n-1)$-мерным интегралом

$$\operatorname{res}_{f,a} \omega = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{S_a} \theta_{-1},$$

где θ_{-1} — дифференциальная форма (2.15) бистепени $(n, n-1)$ с изолированными особенностями в нулях a отображения f, а S_a — сфера (либо граница некоторого полиэдра), окружающая a. В силу точности формы θ_{-1} сумма вычетов Гротендика в произвольной области с кусочно-гладкой границей, представляется интегралом формы $(2\pi i)^{-n}\theta_{-1}$ по границе области.

Наша задача состоит в построении полиэдра $\Pi \subset \mathbb{T}^n$, содержащего все нули отображения f в торе $\mathbb{T}^n$ с последующим вычислением резольвенты для границы $\partial\Pi$. Продемонстрируем эти процедуры в случае $n = 2$.

Рассмотрим двойственный веер $\Sigma = \Sigma_\Delta$ к многоугольнику Ньютона $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, образованный лучами, направленными вдоль внешних нормалей к Δ. Пусть C — окружность большого радиуса R (размер радиуса уточним далее) с центров в вершине O веера Σ. В каждой точке пересечения окружности с одномерными образующими веера проведем касательную к C (перпендикуляр к образующей). Эти касательные ограничивают многоугольник M, с такими же нормалями, как и у многоугольника Δ (см. рисунок 2.3, а также рисунок 2.1). В силу развернутости, многоугольники Δ_1 и Δ_2 не могут иметь граней с одинаковыми внешними нормалями, иначе $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ имел бы ребро, представленное суммой по Минковскому двух граней.

Теперь представим себе, что плоскость, где располагаются веер и построенный многоугольник M с вершинами $t_1, \ldots, t_N$, является вещественным подпространством $\Re(\operatorname{Log} \mathbb{T}^2)$ в логарифмической шкале, т. е. плоскостью, где «живут» амебы $\mathcal{A}_{f_1}$, $\mathcal{A}_{f_2}$ и $\mathcal{A}_{f_1 f_2} = \mathcal{A}_{f_1} \cup \mathcal{A}_{f_2}$. Щупальца амеб $\mathcal{A}_{f_1}$ и $\mathcal{A}_{f_2}$ сонаправлены с образующими веера Σ, поэтому в силу развернутости Δ_1, Δ_2 каждый исходящий из O луч $\{re^{i\tau} \colon r \geqslant R\}$ при достаточно большом R может пересекать не более одной из амеб $\mathcal{A}_{f_1}$, $\mathcal{A}_{f_2}$. Следовательно $\mathcal{A}_{f_1} \cap \mathcal{A}_{f_2}$ — ограниченное множество. Теперь выберем радиус R настолько большим, чтобы окружность C содержала внутри себя пересечение амеб. Таким образом, все корни системы $f_1 = f_2 = 0$ лежат в полиэдре $\operatorname{Log}^{-1}(M)$. Его граница $\operatorname{Log}^{-1}(\partial M)$ разбивается на сумму цепей

$$\operatorname{Log}^{-1}[t_1, t_2], \ldots, \operatorname{Log}^{-1}[t_{N-1}, t_N], \operatorname{Log}^{-1}[t_N, t_1],$$

каждая из которых пересекает не более одной из комплексных кривых $F_j = \{f_j = 0\}$, $j = 1, 2$. Легко видеть, что «результирующий» элемент ξ_1 резольвенты ξ_0, ξ_1 цикла $\operatorname{Log}^{-1}(\partial M)$ равен

$$\sum_{j=1}^{N} k_j T_j, \text{ где } T_j = \operatorname{Log}^{-1}(t_j), \tag{2.27}$$

причем:

$k_j = 0$, если ребра $[t_{j-1}, t_j]$ и $[t_j, t_{j+1}]$ пересекают нормали лишь одного из многоугольников Δ_1, Δ_2;

$k_j = -1$, если ребро $[t_{j-1}, t_j]$ пересекает нормаль Δ_1, а $[t_j, t_{j+1}]$ пересекает нормаль Δ_2;

$k_j = 1$, если указанные ребра пересекают нормали Δ_2 и Δ_1.

Таким образом, можно сделать вывод, что коэффициенты k_j в (2.27) совпадают с комбинаторными коэффициентами в формуле (2.26) Гельфонд – Хованского.

В заключительной части настоящего параграфа проинтерпретируем сделанное нами наблюдение с точки зрения тропической геометрии. Двойственные вееры Σ_j к многоугольникам Δ_j представляют собой тропические кривые, определяемые уравнениями $f_j = 0$, $j = 1, 2$. Они являются так называемыми веерами Бергмана (см. [23], [24], [50]). Обратимся к предложению 2.2 из предыдущего параграфа. А именно, рассмотрим покрытие проколотой плоскости $\widetilde{X} = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ открытыми множествами $U_j = \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_j$ и разделяющий гомоморфизм

$$\varphi \colon H_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}) \to H_0^{\mathrm{sep}}(\mathbb{R}^2 \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)).$$

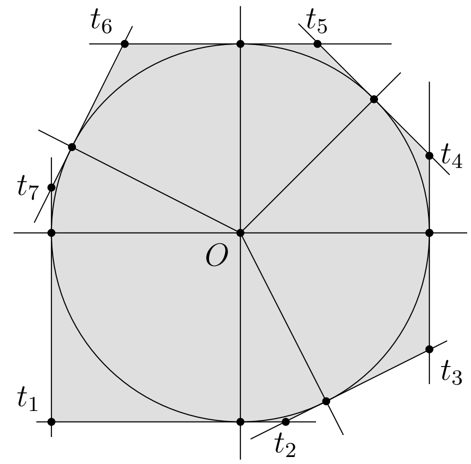


Рис. 2.3: Построение многоугольника M.

Пусть $\{t_j\}$ — набор точек, взятых из каждой связной компоненты $\mathbb{R}^2 \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$. Тогда наше наблюдение можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.4. *Пусть $[\gamma]$ — образующая группы $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, представленная замкнутой кривой γ, окружающей точку O и ориентированной против часовой стрелки. Тогда разложение образа $\varphi[\gamma]$ по базе $\{[t_j]\}$ группы $H_0(\mathbb{R}^2 \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2))$ имеет вид*

$$\varphi([\gamma]) = \sum_{j=1}^{N} k_j [t_j],$$

где k_j — комбинаторные коэффициенты Гельфонд – Хованского.

Замечание. По-видимому, утверждение этой теоремы верно в любой размерности n. Для доказательства последнего следует показать, что при условии развернутости многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ вееры Бергмана $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ пересекаются лишь в начале координат. Тогда в качестве разделяющего гомоморфизма будет выступать

$$\varphi\colon H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{O\}) \to H_0^{\mathrm{sep}}(\mathbb{R}^n \setminus (\Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_n)).$$

Глава 3

Гипотеза о разделяющих циклах в многообразиях Штейна

В данной главе понятие разделяющего цикла распространяется на случай наборов $m > n$ гиперповерхностей в комплексном аналитическом многообразии размерности n. Такие циклы естественно возникают при рассмотрении локальных вычетов в ситуации, когда мероморфная форма имеет особенности на более чем n гиперповерхностях. Как было показано в главе 2, для многообразий Штейна при $m = n$ любой цикл, разделяющий заданный набор гиперповерхностей, представляется в виде линейной комбинации локальных циклов. Согласно гипотезе Южакова – Циха, последнее утверждение можно обобщить на случай произвольных наборов гиперповерхностей в штейновых многообразиях. Глава посвящена исследованию данной гипотезы.

3.1 Гипотеза Южакова – Циха

Рассмотрим мероморфную форму ω в n-мерном комплексном аналитическом многообразии X, имеющую полярную гиперповерхность F. В параграфе 2.1 было отмечено, что если F представляется в виде объединения набора гиперповерхностей $\{F_1, \ldots, F_n\}$, то каждой изолированной точке a пересечения этих гиперповерхностей сопоставляется локальный вычет. Однако довольно часто на практике встречается ситуация, когда полярная гиперповерхность F естественным образом представляется в виде объединения $m > n$ гиперповерхностей (например, неприводимых). Следуя [51] и [22] подробно обсудим специфику этой ситуации.

Рассмотрим в качестве мотивирующего примера рациональную функцию в $\mathbb{C}^2$ вида

$$g(z, w) = \frac{h(z, w)}{zw(z - w)}, \tag{3.1}$$

где $h(z, w)$ — полином. Полярная гиперповерхность F в данном случае является объединением трех комплексных прямых (гиперплоскостей)

$$L_1 = \{z = 0\}, \quad L_2 = \{w = 0\}, \quad L_3 = \{z - w = 0\}.$$

Пусть U_0 — малая окрестность начала координат. Функция $g(z,w)$ допускает два различных лорановских разложения в $U_0 \setminus F$:

$$g(z,w) = -\frac{h(z,w)}{zw^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^k, \quad (z,w) \in U_1 = \{|w| > |z| > 0\}, \tag{3.2}$$

$$g(z,w) = \frac{h(z,w)}{z^2 w}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^k, \quad (z,w) \in U_2 = \{|z| > |w| > 0\}, \tag{3.3}$$

где функция $h(z,w)$ в обоих случаях представляется рядом

$$h(z,w) = \sum_{s,t=0}^{+\infty} \frac{1}{s!\,t!}\,\frac{\partial^{s+t}h}{\partial z^s \partial w^t}(0,0)\, z^s w^t.$$

При этом нетрудно найти коэффициент $c_{(-1,-1)}$ при $z^{-1}w^{-1}$ в этих разложениях:

$$c_{(-1,-1)} = \begin{cases} -h'_w(0,0), & (z,w) \in U_1; \\ \ \ h'_z(0,0), & (z,w) \in U_2. \end{cases}$$

Двумерные циклы

$$\gamma_1 = \{|z| = \delta_1,\ |w| = \varepsilon_1 > \delta_1\},$$
$$\gamma_2 = \{|z| = \delta_2,\ |w| = \varepsilon_2 < \delta_2\},$$

при достаточно малых $\varepsilon_i, \delta_i > 0$ лежат в $U_0 \setminus F$ и не гомологичны друг другу. Вычислим интегралы от функции (3.1) по циклам γ_1 и γ_2. Для этого заметим, что ряды Лорана (3.2), (3.3) сходятся равномерно в областях U_1 и U_2 соответственно. Интегрируя почленно, и учитывая, что

$$\int\limits_{\substack{|z|=\delta \\ |w|=\varepsilon}} z^s w^t \, dz \wedge dw = \begin{cases} (2\pi i)^2, & s = t = -1; \\ \ \ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

получим

$$(2\pi i)^{-2}\int\limits_{\gamma_1} g(z,w)\, dz \wedge dw = c_{(-1,-1)} = -h'_w(0,0); \tag{3.4}$$

$$(2\pi i)^{-2}\int\limits_{\gamma_2} g(z,w)\, dz \wedge dw = c_{(-1,-1)} = h'_z(0,0). \tag{3.5}$$

Следовательно, в данном случае началу координат сопоставлены два разных вычета. Это связано с тем, что окрестность U_0 содержит две области U_1 и U_2, в которых разложения в ряд Лорана функции $g(z,w)$ оказываются различными. В этих областях имеются гомологически независимые циклы γ_1 и γ_2 соответственно.

Для того, чтобы получить локальные вычеты в смысле определения из параграфа 2.1, разобьем F следующими тремя возможными способами:

$$\begin{aligned}
F = F_1^1 \cup F_2^1, &\quad F_1^1 = L_1,\ F_2^1 = L_2 \cup L_3;\\
F = F_1^2 \cup F_2^2, &\quad F_1^2 = L_1 \cup L_3,\ F_2^2 = L_2;\\
F = F_1^3 \cup F_2^3, &\quad F_1^3 = L_1 \cup L_2,\ F_2^3 = L_3.
\end{aligned}$$

Для каждого полученного набора $\{F_1^1, F_2^1\}$, $\{F_1^2, F_2^2\}$, $\{F_1^3, F_2^3\}$ начало координат является изолированной точкой пересечения входящих в него гиперповерхностей. С этими наборами связаны голоморфные отображения

$$f^{(1)} = (z, w(z-w)), \quad f^{(2)} = (z(z-w), w), \quad f^{(3)} = (zw, z-w),$$

имеющие, в свою очередь, изолированный нуль в начале координат. Следовательно, для функции g (для формы $g\,dz \wedge dw$) определены три локальных вычета, которые представляются интегралами по циклам

$$\begin{aligned}
\gamma_1' &= \{|z| = \delta_1,\ |w(z-w)| = \varepsilon_1\},\\
\gamma_2' &= \{|z(z-w)| = \delta_2,\ |w| = \varepsilon_2\},\\
\gamma_3' &= \{|zw| = \delta_3,\ |z-w| = \varepsilon_3\},
\end{aligned}$$

соответственно. Можно показать, что в $\mathbb{C}^2 \setminus F$ имеют место следующие гомологии циклов:

$$\gamma_1' \sim \gamma_1, \quad \gamma_2' \sim \gamma_2, \quad \gamma_3' \sim \gamma_1 - \gamma_2.$$

Таким образом, в данном случае локальные вычеты, ассоциированные с отображениями $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, совпадают с интегралами (3.4), (3.5) соответственно. Вычет, ассоциированный с отображением $f^{(3)}$, является разностью этих интегралов, из чего видно, что между локальными вычетами могут быть зависимости.

Пусть $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_m\}$ — произвольный набор гиперповерхностей (дивизоров) комплексного аналитического многообразия X, где $m \geqslant n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Обозначим

$$F = D_1 \cup \ldots \cup D_m.$$

Разбиением множества индексов $\{1, \ldots, m\}$ будем называть упорядоченный набор непустых попарно непересекающихся подмножеств $\mathcal{J} = (J_1, \ldots, J_n)$ таких, что

$$J_1 \cup \ldots \cup J_n = \{1, \ldots, m\}.$$

Каждое такое разбиение $\mathcal{J}$ определяет упорядоченный набор гиперповерхностей

$$\mathcal{F}_{\mathcal{J}} = (F_1, \ldots, F_n), \text{ где } F_i = \bigcup_{j \in J_i} D_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть $Z_{\mathcal{J}}$ — дискретная часть (множество всех изолированных точек) пересечения $F_1 \cap \ldots \cap F_n$. Для точки $a \in Z_{\mathcal{J}}$ рассмотрим локальный цикл

$$\Gamma_{\mathcal{J}}^{(a)} = \{z \in U_a \colon |f_i(z)| = \varepsilon_i, \ i = 1, \ldots, n\},$$

где U_a — достаточно малая окрестность точки a, не содержащая других точек из $Z_{\mathcal{J}}$, и

$$F_i\,|_{U_a} = \{z \in U_a \colon f_i(z) = 0\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если F — полярная гиперповерхность мероморфной формы, то каждый локальный цикл $\Gamma_{\mathcal{J}}^{(a)}$ определяет вычет, ассоциированный с голоморфным отображением

$$f = (f_1, \ldots, f_n).$$

В разобранном выше примере циклы γ_1', γ_2', γ_3' являются локальными циклами для набора прямых $\{L_1, L_2, L_3\}$ и определяются разбиениями

$$(\{1\}, \{2, 3\}), \quad (\{1, 3\}, \{2\}), \quad (\{1, 2\}, \{3\})$$

множества индексов $\{1, 2, 3\}$ соответственно. Эти разбиения, очевидно, связаны с представлением полярной гиперповерхности F в виде объединения двух гиперповерхностей различными способами.

Для заданного набора гиперповерхностей $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_m\}$ в X рассмотрим подгруппу $H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$ группы гомологий $H_n(X \setminus F)$, порожденную локальными циклами $\Gamma_{\mathcal{J}}^{(a)}$ по всем возможным разбиениям $\mathcal{J}$ множества индексов $\{1, \ldots, m\}$ и всем точкам $a \in Z_{\mathcal{J}}$. Принадлежность цикла Γ подгруппе $H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$ означает, что для мероморфной формы ω с полярным множеством F интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \omega$$

выражается через локальные вычеты.

Как и в случае $m = n$ локальные циклы $\Gamma_{\mathcal{J}}^{(a)}$ *разделяют* набор гиперповерхностей $\mathcal{D}$ в смысле следующего более общего определения (см. [22]).

Определение 3.1. Говорят, что n-мерный цикл $\Gamma \in Z_n(X \backslash F)$ разделяет гиперповерхности $D_1, \ldots, D_m$ $(m \geqslant n)$, если Γ удовлетворяет условию

$$\Gamma \sim 0 \text{ в } X \setminus (D_{\alpha_1} \cup \ldots \cup D_{\alpha_{n-1}}) \text{ для всех поднаборов } \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \ldots, m\}.$$

Будем применять (как и раньше при $m = n$) обозначение $H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$ для подгруппы, образованной всеми классами циклов, разделяющих набор $\mathcal{D}$. Нетрудно привести пример многообразия и набора гиперповерхностей, для которых имеются разделяющие этот набор циклы, классы которых не принадлежат подгруппе $H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$. Если в рассмотренном выше примере заменить многообразие $X = \mathbb{C}^2$ на $X = \mathbb{C}^2 \setminus 0$, то для набора прямых $\{L_1, L_2, L_3\}$ локальных циклов не будет ($Z_{\mathcal{J}} = \varnothing$ для любого разбиения $\mathcal{J}$), так что $H_2^{\mathrm{loc}}(X \setminus F) = 0$. Однако, как нетрудно проверить, гомологически нетривиальные циклы γ_1 и γ_2 разделяют данный набор прямых. Например, для γ_1 это следует из того, что $\gamma_1 = \pm\partial\,\{|z| = \delta_1, |w| \leqslant \varepsilon_1\}$ в $\mathbb{C}^2 \setminus L_1$, а также $\gamma_1 = \pm\partial\,\{|z| \leqslant \delta_1, |w| = \varepsilon_1\}$ в $\mathbb{C}^2 \setminus L_2$ и в $\mathbb{C}^2 \setminus L_3$.

Тем не менее, в ряде важных случаев условие разделения оказывается необходимым и достаточным условием для того, чтобы цикл был гомологичен линейной комбинации локальных циклов. Среди некомпактных многообразий в этом смысле наиболее исследован класс штейновых многообразий. В частности, как показано в главе 2, при $m = n$ верна теорема 2.1. В результате А. К. Цихом и А. П. Южаковым была сформулирована следующая гипотеза (далее: *гипотеза о разделяющих циклах*).

Гипотеза. *Пусть X — штейново многообразие и $\{D_1, \ldots, D_m\}$ — произвольный набор гиперповерхностей в X, $m \geqslant n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Тогда класс любого цикла Γ, разделяющего данный набор гиперповерхностей, принадлежит подгруппе $H_n^{loc}(X \setminus F)$.*

Далее будем рассматривать наборы гиперповерхностей $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_m\}$ при $m > n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Будем говорить, что набор $\mathcal{D}$ *имеет дискретные пересечения*, если для любого n-поднабора $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \{1, \ldots, m\}$ множество $D^\alpha = D_{\alpha_1} \cap \ldots \cap D_{\alpha_n}$ дискретно.

Сформулированная гипотеза была доказана Южаковым при некоторых дополнительных ограничениях:

Теорема 3.1 ([22], теорема 1)**.** *Утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо в каждом из следующих случаев:*

1) *Набор гиперповерхностей $\mathcal{D}$ имеет дискретные пересечения и $D^\alpha \cap D^\beta = \varnothing$ для любых n-поднаборов индексов $\alpha, \beta \subset \{1, \ldots, m\}$ при $\alpha \neq \beta$;*

2) *$X = U_a$ — достаточно малая штейнова окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n$ и $D^\alpha = \{a\}$ для любого n-поднабора индексов $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$.*

Отметим, что условие 1) теоремы 3.1 означает, что гиперповерхности из набора $\mathcal{D}$ находятся «в общем положении» (это условие сохраняется при малых «шевелениях» D_j). В рамках условия 2) рассматривается локальная ситуация и подразумевается, что речь идет о *центрированном* наборе $\mathcal{D}$ ростков гиперповерхностей в точке a. Условие $D^\alpha = \{a\}$ для любого n-поднабора индексов $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$ также выражает свойство «общего положения».

Еще одна важная ситуация, в которой выполняется утверждение гипотезы о разделяющих циклах, описывается следующей теоремой, доказанной в кандидатской диссертации Г. А. Московченко.

Теорема 3.2 ([11], теорема 2.3)**.** *Пусть $\{L_1, \ldots, L_m\}$ — произвольный набор гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$ и $F = L_1 \cup \ldots \cup L_m$. Тогда группы $H_n(X \setminus F)$, $H_n^{sep}(X \setminus F)$ и $H_n^{loc}(X \setminus F)$ совпадают.*

3.2 О разделении особенностей голоморфных функций

В данном параграфе излагаются вспомогательные утверждения, необходимые для доказательств основных теорем главы. Речь пойдет о разделении особенностей (сингулярностей) голоморфной функции $n \geqslant 1$ переменных. Одномерным прототипом ($n = 1$) процедуры разделения особенностей является теорема о разложении рациональной функции на простейшие дроби. В нашем случае роль простейших дробей будут играть функции, особые множества которых являются объединениями не более чем n гиперповерхностей.

Нам потребуются в дальнейшем следующие два утверждения о разделении особенностей, доказанные в работе А. П. Южакова [21]. Пусть задан набор гиперповерхностей $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_m\}$ в n-мерном комплексном многообразии X. Обозначим, как это было сделано в предыдущем параграфе, $F = D_1 \cup \ldots \cup D_m$. Для n-поднабора индексов $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$ обозначим $D_\alpha = D_{\alpha_1} \cup \ldots \cup D_{\alpha_n}$.

Лемма 3.1 (см. [21], теорема 1)**.** *Если X — некомпактное аналитическое многообразие, и $X \setminus D_i$ — многообразия Штейна, то всякую функцию f, голоморфную в $X \setminus F$, можно представить в виде*

$$f = \sum f_\alpha,$$

где функция f_α голоморфна в $X \setminus D_\alpha$, и суммирование ведется по всем n-поднаборам индексов $\alpha\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \{1, \ldots, m\}$ таким, что $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$.

Лемма 3.2 (см. [21], предложение 2)**.** *Пусть $D_0, D_1, \ldots, D_l$ — набор гиперповерхностей в аналитическом многообразии X. Если $X \setminus D_0$ — многообразие Штейна, и $D_1 \cap \ldots \cap D_l \subset D_0$,* *то всякую функцию f, голоморфную в $X \setminus (D_0 \cup D_1 \cup \ldots \cup D_l)$, можно представить в виде*

$$f = \sum_{k=1}^{l} f_k,$$

где функция f_k голоморфна в $X \setminus (D_0 \cup \ldots [k] \ldots \cup D_l)$, $k = 1, \ldots, l$.

Докажем следующую лемму, описывающую разделение особенностей в локальной ситуации.

Лемма 3.3. *Пусть $\{D_1, \ldots, D_m\}$ — набор гиперповерхностей в достаточно малой штейновой окрестности U_a точки $a \in \mathbb{C}^n$. Тогда всякую функцию f, голоморфную в $U_a \setminus F$, можно представить в виде*

$$f = \sum_{D^\alpha = \{a\}} \sum_{k=1}^{n} f_{\alpha[k],m} + \sum_{D^\alpha \neq \{a\}} \left(g_\alpha + \sum_{k=1}^{n} g_{\alpha[k],m} \right),$$

где $f_{\alpha[k],m} \in \mathcal{O}(U_a \setminus D_{\alpha[k],m})$, $g_{\alpha[k],m} \in \mathcal{O}(U_a \setminus D_{\alpha[k],m})$, $g_\alpha \in \mathcal{O}(U_a \setminus D_\alpha)$ и суммирование ведется по всевозможным поднаборам $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_n \leqslant m-1$.

Замечание. В формулировке леммы и далее используется обозначение $\alpha[k] = \alpha \setminus \alpha_k$.

Доказательство. Так как U_a — штейново многообразие, то U_a не компактно и $U_a \setminus D_j$ — штейновы для $j = 1, \ldots, m$. По лемме 3.1 функцию f можно представить в виде

$$f = \sum f_{\alpha,m},$$

$f_{\alpha,m} \in \mathcal{O}(U_a \setminus D_\alpha \cup D_m)$, где $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_n \leqslant m-1$. Если $D^\alpha = \{a\}$, то по лемме 3.2 для функции $f_{\alpha,m}$ справедливо разложение

$$f_{\alpha,m} = \sum_{k=1}^{n} f_{\alpha[k],m},$$

где $f_{\alpha[k],m} \in \mathcal{O}(U_a \setminus D_{\alpha[k],m})$. Если $D^\alpha \neq \{a\}$, то по лемме 3.1 получим

$$f_{\alpha,m} = g_\alpha + \sum_{k=1}^{n} g_{\alpha[k],m},$$

где $g_{\alpha[k],m} \in \mathcal{O}(U_a \setminus D_{\alpha[k],m})$, $g_\alpha \in \mathcal{O}(U_a \setminus D_\alpha)$. □

Мы воспользуемся также следующим утверждением, фактически доказанным А. П. Южаковым в [22], предложение 2.

Лемма 3.4. *Пусть U_a — достаточно малая окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n$, и $\{D_1, \dots, D_m\}$ — набор гиперповерхностей в U_a, где*

$$D_j = \{z \colon g_j(z) = 0\}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Предположим, что для фиксированного поднабора индексов

$$\alpha' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \dots, m-1\}$$

выполняется условие $D^{\alpha',k} = \{a\}$ для всех $k \in \{1, \dots [\alpha'] \dots, m\}$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $\delta/\varepsilon > 0$ цикл

$$\gamma^{(a)}_{\alpha',m} = \{z \in U_a \colon |g_{\alpha_1}(z)| = \dots = |g_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\ |g_m(z)| = \varepsilon\}$$

лежит в $X \setminus F$ и гомологичен там циклу

$$\Gamma^{(a)}_{\alpha'} = \{z \in U_a \colon |g_{\alpha_1}(z)| = \dots = |g_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\ |g_1(z) \cdot \ldots [\alpha'] \ldots \cdot g_m(z)| = \varepsilon\}.$$

В [22] фигурирует более ограничительное условие на набор гиперповерхностей, но делается более сильное заключение. Однако все этапы доказательства в интересующей нас формулировке леммы 3.4 полностью повторяют рассуждения из доказательства, представленного в статье [22].

3.3 Одно обобщение теоремы Южакова

Одним из основных результатов данной главы является следующая теорема.

Теорема 3.3. *Утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо при выполнении следующего условия: набор гиперповерхностей имеет дискретные пересечения, и для любых n-поднаборов индексов $\alpha, \beta \subset \{1, \dots, m\}$ множества D^α и D^β, имеющие хотя бы одну общую точку, полностью совпадают:*

$$D^\alpha \cap D^\beta \neq \varnothing \Rightarrow D^\alpha = D^\beta.$$

Доказательство. Пусть ω — произвольная замкнутая дифференциальная n-форма в $X \setminus F$. Так как X — многообразие Штейна, то по теореме Серра класс когомологий формы ω содержит некоторую форму φ, голоморфную в $X \setminus F$.

Предположим, что набор гиперповерхностей удовлетворяет условию теоремы 3.3. На множестве всех n-поднаборов

$$\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \{1, \ldots, m\}, \quad \alpha_1 < \ldots < \alpha_n,$$

определено отношение эквивалентности $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow D^\alpha = D^\beta$. Следовательно, это множество разбивается на непересекающиеся классы $A_1, \ldots, A_s$ эквивалентных поднаборов. Обозначим через $[A_i]$ множество всех индексов из $\{1, \ldots, m\}$, входящих в поднаборы из класса A_i. При этом каждый n-поднабор $\alpha \subset [A_i]$ входит в класс A_i (это может быть неверно только для класса, состоящего из наборов α, для которых $D^\alpha = \varnothing$; будем обозначать такой класс $A_\varnothing$).

Рассмотрим для каждого класса A_i ($A_i \neq A_\varnothing$) множество A'_i всех n-поднаборов вида $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, m_i\}$, где

$$m_i = \max[A_i], \quad \alpha' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \ldots, m\} \setminus m_i.$$

В частности, если A_i состоит из единственного поднабора, то $A'_i = A_i$. Для $A_i = A_\varnothing$ также положим $A'_i = A_\varnothing$. Построенные множества поднаборов $A'_1, \ldots, A'_s$ обладают следующими свойствами:

- $A'_i \subset A_i$,
- $[A'_i] = [A_i]$,
- для любого $\alpha \in A'_i$ и любой точки $a \in D^\alpha$ найдется достаточно малая окрестность U_a точки a, не имеющая общих точек с гиперповерхностями D_k при $k \notin [A'_i]$

Обозначим $A = A'_1 \cup \ldots \cup A'_s$. Покажем, что форму φ можно представить в виде

$$\varphi = \sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha, \tag{3.6}$$

где φ_α голоморфна в $X \setminus D_\alpha$. Действительно, по лемме 3.1 для формы φ, голоморфной в $X \setminus F$, имеем

$$\psi = \sum_{\alpha} \psi_\alpha,$$

где суммирование ведется по всем n-поднаборам индексов $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$ таким, что $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$, и форма ψ_α голоморфна в $X \setminus D_\alpha$. Рассмотрим фиксированную форму ψ_α из этого разложения. Пусть поднабор $\alpha \in A_i$. Если $\alpha_n = m_i$, то $\alpha \in A$. Если же $\alpha_n \neq m_i$, то $D^\alpha \subset D_{m_i}$, поэтому по лемме 3.2 будем иметь

$$\psi_\alpha = \sum_{k=1}^{n} \psi_k,$$

где форма ψ_k голоморфна в $X \setminus (D_{\alpha_1} \cup \ldots [k] \ldots \cup D_{\alpha_n} \cup D_{m_i})$. При этом набор индексов $\{\alpha_1, \ldots [k] \ldots \alpha_n, m_i\} \in A$. Поступая так с каждой формой ψ_α при $\alpha \notin A$, получим нужное разложение 3.6 для формы φ.

Каждый цикл Γ, разделяющий набор гиперповерхностей $\{D_1, \ldots, D_m\}$, разделяет также набор $\{D_{\alpha_1}, \ldots, D_{\alpha_n}\}$, где $\alpha \in A$. По теореме 2.1 имеем

$$\Gamma \sim \sum_{a \in D^\alpha} n_\alpha^{(a)} \gamma_\alpha^{(a)}, \tag{3.7}$$

в $X \setminus D_\alpha$, где $\gamma_\alpha^{(a)}$ — локальный цикл в точке $a \in D^\alpha$, соответствующий набору гиперповерхностей $\{D_{\alpha_1}, \ldots, D_{\alpha_n}\}$. В частности, если $D^\alpha = \varnothing$, то $\Gamma \sim 0$.

В соответствии со свойствами множеств A_i', при фиксированных $\alpha \in A_i'$ и $a \in D^\alpha$ можно считать, что набор гиперповерхностей $\{D_k \colon k \in [A_i]\}$ в U_a — центрированный, и $D_k \cap U_a = \varnothing$ при $k \notin [A_i]$. Пусть $D_k = \{g_k = 0\}$, $k \in [A_i]$. Из леммы 3.4 следует, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $\delta/\varepsilon > 0$ цикл

$$\gamma_\alpha^{(a)} = \{z \in U_a \colon |g_{\alpha_1}(z)| = \cdots = |g_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\ |g_{m_i}(z)| = \varepsilon\}$$

лежит в $X \setminus F$ и гомологичен там циклу

$$\Gamma_\alpha^{(a)} = \left\{ z \in U_a \colon |g_{\alpha_1}(z)| = \cdots = |g_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\ \left| g_{m_i}(z) \cdot \prod_{k \in [A_i] \setminus \alpha} g_k(z) \right| = \varepsilon \right\}.$$

Учитывая (3.6), (3.7), имеем

$$\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_\Gamma \varphi = \sum_{\alpha \in A} \int\limits_\Gamma \varphi_\alpha = \sum_{\alpha \in A} \sum_{a \in D^\alpha} n_\alpha^{(a)} \int\limits_{\gamma_\alpha^{(a)}} \varphi_\alpha = \sum_{\alpha \in A} \sum_{a \in D^\alpha} n_\alpha^{(a)} \int\limits_{\Gamma_\alpha^{(a)}} \varphi_\alpha. \tag{3.8}$$

Рассмотрим цикл

$$\Gamma' = \sum_{\alpha \in A} \sum_{a \in D^\alpha} n_\alpha^{(a)} \Gamma_\alpha^{(a)}. \tag{3.9}$$

По построению $[\Gamma'] \in H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$. Покажем, что

$$\int\limits_{\Gamma'} \omega = \int\limits_\Gamma \omega. \tag{3.10}$$

Действительно, пользуясь разложением (3.6) для формы φ, получим

$$\int\limits_{\Gamma'} \omega = \int\limits_{\Gamma'} \varphi = \sum_{\alpha \in A} \sum_{a \in D^\alpha} \sum_{\beta \in A} n_\alpha^{(a)} \int\limits_{\Gamma_\alpha^{(a)}} \varphi_\beta = \sum_{\alpha \in A} \sum_{a \in D^\alpha} n_\alpha^{(a)} \int\limits_{\Gamma_\alpha^{(a)}} \varphi_\alpha, \tag{3.11}$$

так как при $\alpha \neq \beta$ цикл $\Gamma_\alpha^{(a)} \sim 0$ в $U_p \setminus D_\beta$. Последнее следует из того, что $\Gamma_\alpha^{(a)} = \pm\partial\sigma$ для цепи σ из $U_p \setminus D_\beta$ вида

$$\{z \in U_a \colon |g_{\alpha_1}(z)| = \cdots [\alpha_s] \cdots = |g_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\ |g_{\alpha_s}(z)| \leqslant \delta,\ |g_{m_i}(z)| = \varepsilon\},$$

где $\alpha_s \in \alpha \setminus \beta$. По теореме де Рама из равенства интегралов (3.10) заключаем, что $\Gamma' \sim \Gamma$ в $X \setminus F$. Тем самым показано, что $[\Gamma] \in H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$. $\square$

Замечание. Доказанная теорема обобщает теорему 3.1. Действительно, при выполнении условия 1) теоремы 3.1 из $D^\alpha \cap D^\beta \neq \varnothing$ следует, что $\alpha = \beta$, откуда тривиальным образом $D^\alpha = D^\beta$. Если же выполняется условие 2), то множества D^α совпадают для всех n-поднаборов $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$.

3.4 Случай центрированного $(n+1)$-набора

В данном параграфе рассматривается локальная ситуация, то есть предполагается, что X — достаточно малая (штейнова) окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n$ и рассматривается центрированный набор гиперповерхностей. В этом случае для разбиения $\mathcal{J} = (J_1, \ldots, J_n)$ множества $\{1, \ldots, m\}$ возможны две ситуации: либо $Z_\mathcal{J} = \{a\}$, либо $Z_\mathcal{J} \neq \{a\}$ (то есть $Z_\mathcal{J} = \varnothing$). При $Z_\mathcal{J} = \{a\}$ разбиению $\mathcal{J}$ соответствует локальный цикл $\Gamma_\mathcal{J}^{(a)}$. В этом случае будем говорить, что разбиение $\mathcal{J}$ *определяет* локальный цикл $\Gamma_\mathcal{J}^{(a)}$. Таким образом, разбиение $\mathcal{J}$ определяет локальный цикл $\Gamma_\mathcal{J}^{(a)}$, если $F_1 \cap \ldots \cap F_n = \{a\}$, где $F_k = \bigcup_{j \in J_k} D_j$. Последнее означает, что $D_{\alpha_1} \cap \ldots \cap D_{\alpha_n} = \{a\}$ для всех $\alpha_1 \in J_1, \ldots, \alpha_n \in J_n$.

Предложение 3.1. *Пусть $X = U_a$ — достаточно малая штейнова окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n$. Пусть среди гиперповерхностей из набора $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_m\}$ в X найдется такая гиперповерхность F_q, что для любого поднабора $\alpha' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \ldots [q] \ldots, m\}$ выполняется одно из двух условий:*

1) *либо $D_{\alpha_1} \cap \ldots \cap D_{\alpha_{n-1}} \cap D_q \neq \{a\}$,*
2) *либо $D_{\alpha_1} \cap \ldots \cap D_{\alpha_{n-1}} \cap D_{\alpha_n} = \{a\}$ для всех $\alpha_n \in \{1, \ldots [\alpha'] \ldots, m\}$.*

Тогда для набора $\mathcal{D}$ группы $H_n^{sep}(X \setminus F)$ и $H_n^{loc}(X \setminus F)$ совпадают. Если при этом для всех поднаборов α' выполняется условие 1)*, то $H_n^{sep}(X \setminus F) \simeq 0$.*

Доказательство. Предположим для определенности, что условие теоремы выполняется при $q = m$. Это означает, что для любого $\alpha' \subset \{1, \ldots, m-1\}$ из дискретности пересечения $D^{\alpha', m}$ следует дискретность пересечения D^{α', α_n} для всех $\alpha_n \in \{1, \ldots [\alpha'] \ldots, m\}$.

Так как рассматривается локальная ситуация, то будем обозначать локальные циклы через $\Gamma_\mathcal{J}$, опуская в обозначении точку a. Покажем, что в условиях предложения любой цикл Γ, разделяющий набор $\mathcal{D}$, представляется в виде

$$\Gamma \sim \sum n_{\mathcal{J}} \Gamma_{\mathcal{J}}.$$

Путь цикл Γ разделяет набор $\mathcal{D}$. Тогда для любого $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \{1, \ldots, m\}$ этот цикл разделяет набор гиперповерхностей $\{D_{\alpha_1}, \ldots, D_{\alpha_n}\}$. Если при этом $D^\alpha = \{a\}$, то по теореме 2.1 получим $\Gamma \sim n_\alpha \gamma_\alpha$ в $X \setminus D_\alpha$, где

$$\gamma_\alpha = \{z \in U_a \colon |g_{\alpha_1}(z)| = \varepsilon_1, \ldots, |g_{\alpha_n}(z)| = \varepsilon_n\}, \quad D_j = \{z \in U_a \colon g_j(z) = 0\}.$$

Если же $D^\alpha \neq \{a\}$, то в силу замечания к теореме 2.1 получим $\Gamma \sim 0$ в $X \setminus D_\alpha$.

Пусть ω — произвольная замкнутая дифференциальная n-форма в $X \setminus F$. Так как многообразие X — штейново , то по теореме Серра форма ω когомологична некоторой n-форме φ, голоморфной в $X \setminus F$. Рассмотрим интеграл $\int_\Gamma \varphi$ и используем предложение 3.3 для разделения особенностей формы φ. Пусть $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_n \leqslant m-1$. При $D^\alpha = \{a\}$ и $D^{\alpha[k]} \cap D_m = \{a\}$ согласно лемме 3.4 имеем $\gamma_{\alpha[k],m} \sim \Gamma_{\alpha[k]}$ в $X \setminus F$ (см. обозначения леммы 3.4), где $\Gamma_{\alpha[k]} = \Gamma_{\mathcal{J}(\alpha[k])}$ — локальный цикл, соответствующий разбиению

$$\mathcal{J}(\alpha[k]) = \big\{\{\alpha_1\}, \ldots [k] \ldots, \{\alpha_n\}, \{1, \ldots [\alpha \setminus \alpha_k] \ldots, m\}\big\}.$$

Следовательно, $\Gamma \sim n_{\alpha[k],m} \Gamma_{\alpha[k]}$ в $X \setminus D_{\alpha[k],m}$. При $D^\alpha = \{a\}$ и $D^{\alpha[k]} \cap D_m \neq \{a\}$ будем иметь $\Gamma \sim 0$ в $X \setminus D_{\alpha[k],m}$. Пусть теперь $D^\alpha \neq \{a\}$. Тогда $\Gamma \sim 0$ в $X \setminus D_\alpha$. Покажем, что и $D^{\alpha[k],m} \neq \{a\}$, $k = 1, \ldots, n$. Действительно, если $D^{\alpha[k],m} = \{a\}$, то по условию теоремы $D^{\alpha[k]} \cap D_{\alpha_k} = D^\alpha = \{a\}$. Следовательно, $D^{\alpha[k],m} \neq \{a\}$. Отсюда $\Gamma \sim 0$ в $X \setminus D_{\alpha[k],m}$. Учитывая тривиальность цикла Γ в областях, на которых формы $\varphi_{\alpha[k],m}$, ψ_α и $\psi_{\alpha[k],m}$ голоморфны, получим

$$\int\limits_\Gamma \varphi = \sum_{\substack{D^\alpha = \{a\} \\ k \colon D^{\alpha[k],m} = \{a\}}} n_{\alpha[k],m} \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha[k])}} \varphi_{\alpha[k],m}.$$

Рассмотрим теперь цикл Γ' в $X \setminus F$, определяемый следующим образом:

$$\Gamma' = \sum_{\substack{D^\alpha = \{a\} \\ k \colon D^{\alpha[k],m} = \{a\}}} n_{\alpha[k],m} \Gamma_{\mathcal{J}(\alpha[k])}. \tag{3.12}$$

Очевидно $[\Gamma'] \in H_n^*(X \setminus F)$. Интеграл $\int_{\Gamma'} \varphi$ представим в виде суммы двух слагаемых: $\int_{\Gamma'} \varphi = I_1 + I_2$. Первое слагаемое имеет следующий вид:

$$I_1 = \sum_{\substack{D^\alpha = \{a\} \\ k \colon D^{\alpha[k],m} = \{a\}}} n_{\alpha[k],m} \sum_{D^\beta = \{a\}} \sum_{s=1}^n \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha[k])}} \varphi_{\beta[s],m}.$$

Если $\beta[s] \neq \alpha[k]$, то для $t \in \alpha[k] \setminus \beta[s]$ будет $\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha[k])} \sim \gamma_{\alpha[k],m} = \pm\partial c$, где носитель цепи

$$c = \{z \in U_a \colon |f_{\alpha_1}(z)| = \delta, \dots [\alpha_k, \alpha_t] \dots, |f_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\ |f_{\alpha_t}(z)| \leqslant \delta, |f_m(z)| = \varepsilon\}$$

лежит в $X \setminus D_{\beta[s],m}$. Следовательно, $\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha[k])} \sim 0$ в $X \setminus D_{\beta[s],m}$ и $\int_{\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha[k])}} \varphi_{\beta[s],m} = 0$ при $\beta[s] \neq \alpha[k]$. Таким образом

$$I_1 = \sum_{\substack{D^\alpha = \{a\} \\ k\colon D^{\alpha[k],m} = \{a\}}} n_{\alpha[k],m} \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha[k])}} \varphi_{\alpha[k],m}.$$

Рассмотрим второе слагаемое для интеграла $\int_{\Gamma'} \varphi$, имеющее следующий вид:

$$I_2 = \sum_{\substack{D^\alpha = \{a\} \\ k\colon D^{\alpha[k],m} = \{a\}}} n_{\alpha[k],m} \sum_{D^\beta \neq \{a\}} \left(\int\limits_{\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha[k])}} \psi_\beta + \sum_{k=s}^{n} \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha[k])}} \psi_{\beta[s],m} \right).$$

Предположим, что $\alpha[k] \setminus \beta = \varnothing$. Тогда для $t \in \beta \setminus \alpha[k]$ имеем $D^{\beta[t]} = D^{\alpha[k]}$. Следовательно, $D^{\beta[t]} \cap D_m = \{a\}$. Тогда по условию предложения $D^{\beta[t]} \cap D_{\beta_t} = \{a\}$. Но $D^\beta \neq \{a\}$. Отсюда $\alpha[k] \setminus \beta$ не пусто. Тем более непусто будет и множество $\alpha[k] \setminus \beta[s]$. Повторяя рассуждения, проводимые для слагаемого I_1, получим $\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha[k])} \sim 0$ в $X \setminus D_\beta$, а также в $X \setminus D_{\beta[s],m}$. Следовательно, все интегралы в слагаемом I_2 равны нулю. Таким образом, $I_2 = 0$. Окончательно получим

$$\int\limits_{\Gamma'} \varphi = I_1 + I_2 = \sum_{\substack{D^\alpha = \{a\} \\ k\colon D^{\alpha[k],m} = \{a\}}} n_{\alpha[k],m} \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{J}(\alpha[k])}} \varphi_{\alpha[k],m}.$$

Итак, было показано, что $\int_\Gamma = \int_{\Gamma'}$ для любой голоморфной n-формы φ в $X \setminus F$. По теореме де Рама $\Gamma \sim \Gamma'$ в $X \setminus F$. Следовательно, $[\Gamma] \in H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$. В частности, равенство (3.12) позволяет выразить разделяющий цикл Γ через локальные циклы. Если при этом для всех поднаборов α в (3.12) выполняется условие $D^{\alpha[k],m} \neq \{a\}$, то $\Gamma \sim 0$. $\square$

Следующая теорема является простым следствием предыдущего предложения и служит одним из основных результатов главы 3. По сравнению с условием 2) теоремы 3.1 здесь в одном важном частном случае удается избавиться от предположения «общего положения» элементов набора гиперповерхностей.

Теорема 3.4. *Пусть X — достаточно малая штейнова окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n$. Тогда утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо для любого набора, состоящего из $m = n + 1$ гиперповерхностей.*

Доказательство. Пусть $\{D_1, \dots, D_{n+1}\}$ — произвольный центрированный набор в достаточно малой (штейновой) окрестности $X = U_a$ точки $a \in \mathbb{C}^n$. Обозначим

$$D^{[k]} = D_1 \cap \ldots [k] \ldots \cap D_{n+1},\ k = 1, \ldots, n+1.$$

Предположим вначале, что найдутся отличные друг от друга $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$ такие, что $D^{[i]} = \{a\}$ и $D^{[j]} = \{a\}$. Изменяя если нужно нумерацию гиперповерхностей, можно считать, что $i = n$, $j = n+1$. Покажем, что в этом случае выполняются условия предложения 3.1. Действительно, положим $q = n+1$ и проверим, что для любого поднабора $\alpha' = \{1, \ldots [k] \ldots, n\}$, $k = 1, \ldots, n$, выполняется одно из условий 1) или 2). Для $\alpha' = \{1, \ldots, n-1\}$ выполняется условие 2), так как $D^{[n]} = \{a\}$ и $D^{[n+1]} = \{a\}$. Пусть $\alpha' = \{1, \ldots [k] \ldots, n\}$ при $k < n$. Если $D^{[k]} \neq \{a\}$, то выполняется условие 1). Если же $D^{[k]} = \{a\}$, то, учитывая что $D^{[n+1]} = \{a\}$, выполняется условие 2).

Пусть теперь дискретно лишь одно пересечение $D^{[q]}$. Тогда для любого поднабора $\alpha' = \{1, \ldots [j, q] \ldots, n+1\}$, $j \neq q$, выполняется условие 1). Действительно, $D_{\alpha_1} \cap \ldots \cap D_{\alpha_{n-1}} \cap D_q = D^{[j]} \neq \{a\}$. При этом $H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F) \simeq 0$.

Осталось рассмотреть случай, когда для всех $k = 1, \ldots, n+1$ пересечения $D^{[k]}$ недискретны. Выбирая $q \in \{1, \ldots, n+1\}$ произвольным образом, получим, что условие 1) выполняется для любых $(n-1)$-поднаборов α' из $\{1, \ldots [q] \ldots, n+1\}$, при этом снова $H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F) \simeq 0$.

Таким образом, было показано, что условия предложения 3.1 выполняются в каждом случае. Следовательно, $H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F) = H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$. $\square$

Пример 3.1. Рассмотрим два примера, иллюстрирующие условия применимости теорем 3.1 и 3.4 (предложения 3.1). Пусть $X = \mathbb{C}^3$ и гиперповерхности из набора $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ заданы глобально.

1. Для набора гиперповерхностей

$$D_j = \{z_j = 0\},\ j = 1, 2, 3,$$
$$D_4 = \{z_3^2 - z_1 z_2 = 0\}.$$

имеем $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 = \{0\}$, то есть рассматривается центрированный набор гиперповерхностей в точке $a = 0$. Условия теоремы 3.1 не выполняются, так как, например, для поднабора $\{1, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ пересечение $D_1 \cap D_3 \cap D_4$ недискретно. Тем не менее, теорема 3.4 может быть применена. В обозначениях предложения 3.1 положим $q = 4$. Тогда нетрудно видеть, что для поднаборов $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ выполняется условие 1), а для поднабора $\{1, 2\}$ выполняется условие 2). При этом из доказательства предложения 3.1 видно, что подгруппа $H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F) = H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$ порождается локальным циклом

$$\{|z_1| = \varepsilon_1,\ |z_2| = \varepsilon_2,\ |z_3(z_3^2 - z_1 z_2)| = \varepsilon_3\}.$$

2. Рассмотрим другой пример. Пусть гиперповерхности D_1, D_2 и D_3 набора $\mathcal{D}$ определяются как в предыдущем примере, а

$$D_4 = \{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = 0\}.$$

Тогда снова $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 = \{0\}$. Так как, например, пересечение $D_1 \cap D_3 \cap D_4$ не дискретно, то условия теоремы 3.1 не выполняются. Применяя предложение 3.1 при $q = 4$ видим, что для всех возможных 2-поднаборов $\alpha' \subset \{1, 2, 3\}$ выполняется условие 1). Поэтому $H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F) = H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F) \simeq 0$.

3.5 Другие примеры, подтверждающие гипотезу

Следующая теорема дает примеры частных случаев, в которых также выполняется утверждение гипотезы Южакова – Циха. Формулируемые достаточные условия сходны с условиями $1), 2)$ из предложения 3.1, однако рассматриваются наборы $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_m\}$, в частности при $m = n + 1$, для произвольного комплексного аналитического многообразия X (не обязательно в локальном случае).

Теорема 3.5. *Утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо при выполнении любого из следующих условий:*

1) *Для любого n-поднабора индексов $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$ множество D^α дискретно и содержится в D_m;*

2) *$m = n + 1$, причем $D_1 \cap \ldots \cap D_n$ дискретно и содержится в D_{n+1};*

3) *$m = n + 1$, причем $D_1 \cap \ldots \cap D_n \cap D_{n+1} = \varnothing$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную замкнутую дифференциальную n-форму ω в $X \setminus F$ и когомологичную ей форму φ, голоморфную в $X \setminus F$.

Если выполняется условие 1) теоремы, то используя леммы 3.1, 3.2 получим разложение вида (3.6), в котором в качестве множества A выступает множество всех n-поднаборов вида $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, m\}$, где $1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1} \leqslant m - 1$.

По теореме 2.1 для цикла Γ, разделяющего заданный набор гиперповерхностей, и поднабора $\alpha \in A$ имеется разложение вида (3.7), в котором

$$\gamma_\alpha^{(a)} = \{z \in U_a\colon |g_{\alpha_1}(z)| = \cdots = |g_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\ |g_m(z)| = \varepsilon\},$$

где $D_j\big|_{U_p} = \{g_j = 0\}$.

Рассмотрим множество $P = \{a \in D^\alpha\colon \alpha \in A\} \subset D_m$. Для каждой точки $a \in P$ рассмотрим центрированный набор гиперповерхностей $\{D_k\colon a \in D_k\}$ в U_a. Обозначим через $[a]$ множество номеров всех гиперповерхностей из такого центрированного набора. По лемме

3.4 при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $\delta/\varepsilon > 0$, цикл $\gamma_\alpha^{(a)}$ лежит в $X \setminus F$, и гомологичен там циклу

$$\Gamma_\alpha^{(a)} = \left\{ z \in U_a \colon |g_{\alpha_1}(z)| = \ldots = |g_{\alpha_{n-1}}(z)| = \delta,\ \left| g_m(z) \cdot \prod_{k \in [a] \setminus \alpha} g_k(z) \right| = \varepsilon \right\}.$$

Зададим цикл Γ' формулой (3.9).

При выполнении условия 2) представим форму φ в виде

$$\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n,$$

где форма φ_k голоморфна в $X \setminus F[k]$, $F[k] = D_1 \cup \ldots [k] \ldots \cup D_{n+1}$, $k = 1, \ldots, n$. Если цикл Γ разделяет набор $\{D_1, \ldots, D_{n+1}\}$, то он разделяет также каждый набор $\{D_1, \ldots [k] \ldots, D_{n+1}\}$, $k = 1, \ldots, n$. По теореме 2.1 получим

$$\Gamma \sim \sum_{a \in Z_k} n_k^{(a)} \gamma_k^{(a)} \tag{3.13}$$

в $X \setminus F[k]$, где Z_k — дискретная часть (множество всех изолированных точек) пересечения $D_1 \cap \ldots [k] \ldots \cap D_{n+1}$ и

$$\gamma_k^{(a)} = \{ z \in U_a \colon |g_1(z)| = \ldots [k] \ldots = |g_n(z)| = \delta,\ |g_{n+1}(z)| = \varepsilon \}.$$

По условию пересечение $D_1 \cap \ldots \cap D_n$ дискретно. Поэтому, если при фиксированных k и $a \in Z_k$ точка $a \in D_1 \cap \ldots \cap D_n$, то по лемме 3.4 при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $\delta/\varepsilon > 0$ цикл $\gamma_k^{(a)}$ лежит в $X \setminus F$ и гомологичен там циклу

$$\Gamma_k^{(a)} = \{ z \in U_a \colon |g_1(z)| = \ldots [k] \ldots = |g_n(z)| = \delta,\ |g_k(z) g_{n+1}(z)| = \varepsilon \}.$$

Если же $a \notin D_1 \cap \cdots \cap D_n$, то можно считать, что $\gamma_k^{(a)}$ лежит в $X \setminus F$. В этом случае цикл $\gamma_k^{(a)}$ также будем обозначать через $\Gamma_k^{(a)}$. Имеем

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \varphi = \sum_{k=1}^n \int_\Gamma \varphi_k = \sum_{k=1}^n \sum_{a \in Z_k} n_k^{(a)} \int_{\gamma_k^{(a)}} \varphi_k = \sum_{k=1}^n \sum_{a \in Z_k} n_k^{(a)} \int_{\Gamma_k^{(a)}} \varphi_k.$$

Пусть

$$\Gamma' = \sum_{k=1}^n \sum_{a \in Z_k} n_k^{(a)} \Gamma_k^{(a)}.$$

Наконец, если выполнено условие 3), то по лемме 3.1 имеет место разложение вида

$$\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n + \varphi_{n+1},$$

где форма φ_k голоморфна в $X \setminus F[k]$, $k = 1, \ldots, n+1$. Если цикл Γ разделяет набор $\{D_1, \ldots, D_{n+1}\}$, то он разделяет также каждый набор $\{D_1, \ldots [k] \ldots, D_{n+1}\}$, $k = 1, \ldots, n+1$. По теореме 2.1 получим разложение вида (3.13) в $X \setminus F[k]$, где

$$\gamma_k^{(a)} = \{z \in U_a \colon |g_1(z)| = \ldots [k] \ldots = |g_{n+1}(z)| = \varepsilon\}.$$

Так как условию $D_1 \cap \ldots \cap D_n \cap D_{n+1} = \varnothing$, то можно считать, что $\gamma_k^{(a)}$ лежит в $X \setminus F$, $k = 1, \ldots, n+1$. Положим

$$\Gamma' = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{a \in Z_k} n_k^{(a)} \gamma_k^{(a)}.$$

В точности также, как в рассмотренном выше доказательстве теоремы 3.3, показывается, что в каждом из трех разобранных случаев построенный цикл Γ' гомологичен циклу Γ в $X \setminus F$, причем $[\Gamma'] \in H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$. $\square$

Пример 3.2. Рассмотрим набор гиперповерхностей $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ в $\mathbb{C}^3$, где

$$\begin{gathered} D_1 = \{g_1 := xyz = 0\}, \\ D_2 = \{g_2 := xy + yz + zx = 0\}, \\ D_3 = \{g_3 := x + y + z - 1 = 0\}, \\ D_4 = \{g_4 := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}. \end{gathered}$$

Пусть Z_k — дискретная часть пересечения $D_1 \cap \ldots [k] \ldots \cap D_4$, $k = 1, 2, 3, 4$. Имеем

$$\begin{gathered} Z_1 = \varnothing \text{ (так как } D_2 \cap D_3 \cap D_4 \text{ не содержит изолированных точек)}, \\ Z_2 = Z_4 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}, \\ Z_3 = \{(\pm 1,0,0), (0,\pm 1,0), (0,0,\pm 1)\}. \end{gathered}$$

Данный набор, следовательно, не удовлетворяет условиям теорем 3.1, 3.4, но удовлетворяет условию 2) теоремы 3.5. Действительно, для дискретного пересечения $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ выполняется условие

$$D_1 \cap D_2 \cap D_3 \subset D_4.$$

Выясним, какие локальные циклы будут участвовать в разложении произвольного цикла Γ, разделяющего набор гиперповерхностей $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$. Для этого рассмотрим мероморфную форму вида

$$\frac{dx \wedge dy \wedge dz}{g_1 g_2 g_3 g_4}.$$

Так как $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \subset D_4$, то полином g_4 лежит в радикале идеала, порожденного полиномами g_1, g_2 и g_3. Действительно, в нашем случае нетрудно видеть, что

$$g_4 = -2g_2 + g_3^2 + 2g_3.$$

Отсюда следует (см. [9], [21]) возможность разделения особенностей данной формы:

$$\frac{dx \wedge dy \wedge dz}{g_1 g_2 g_3 g_4} = \frac{-2\, dx \wedge dy \wedge dz}{g_1 g_3 g_4^2} + \frac{(x+y+z+1)\, dx \wedge dy \wedge dz}{g_1 g_2 g_4^2}.$$

Аналогично для любой формы φ, голоморфной в $\mathbb{C}^3 \setminus F$, $F = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$, можно получить разложение вида

$$\varphi = \varphi_2 + \varphi_3,$$

где формы φ_2 и φ_3 голоморфны в $\mathbb{C}^3 \setminus (D_1 \cup D_3 \cup D_4)$ и в $\mathbb{C}^3 \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_4)$ соответственно.

Всего имеется 12 различных (классов) локальных циклов, определенных для данного набора гиперповерхностей:

$$\begin{aligned}
\Gamma_2^{(a)} &= \{(x,y,z) \in U_a \colon |g_1| = |g_3| = \delta,\ |g_2 g_4| = \varepsilon\},\\
\Gamma_3^{(a)} &= \{(x,y,z) \in U_a \colon |g_1| = |g_2| = \delta,\ |g_3 g_4| = \varepsilon\},\\
\Gamma_3^{(-a)} &= \{(x,y,z) \in U_{-a} \colon |g_1| = |g_2| = \delta,\ |g_4| = \varepsilon\},\\
\Gamma_0^{(a)} &= \{(x,y,z) \in U_a \colon |g_1| = |g_4| = \delta,\ |g_2 g_3| = \varepsilon\},
\end{aligned}$$

где $a \in Z := \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Следуя доказательству теоремы 3.5, представление разделяющего цикла Γ в виде линейной комбинации локальных циклов будет иметь следующий вид:

$$\Gamma \sim \sum_{a\in Z} n_2^{(a)} \Gamma_2^{(a)} + \sum_{a\in Z} n_3^{(a)} \Gamma_3^{(a)} + \sum_{a\in Z} n_3^{(-a)} \Gamma_3^{(-a)}.$$

В частности, так как все локальные циклы являются разделяющими, циклы $\Gamma_0^{(a)}$, $a \in Z$, будут выражаться через циклы $\Gamma_2^{(a)}$, $\Gamma_3^{(a)}$, $\Gamma_3^{(-a)}$, $a \in Z$.

Аналогично можно применить теорему 3.5, беря в качестве D_{n+1} гиперповерхность D_2, в соответствии с тем, что пересечение $D_1 \cap D_3 \cap D_4$ дискретно и $D_1 \cap D_3 \cap D_4 \subset D_2$. При этом все рассуждения и выводы повторятся без значительных изменений.

Список литературы

[1] Айзенберг, Л.А. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе / Л.А. Айзенберг, А.П. Южаков. - Новосибирск: Наука, 1979.

[2] Айзенберг, Л.А. О применении многомерного логарифмического вычета к системам нелинейных алгебраических уравнений / Л.А. Айзенберг, А.К. Цих. - Сиб. матем. журн. - 1979. - Т. 20. - №4. - С. 699–703.

[3] Арнольд, В.И. Особенности дифференцируемых отображений / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде. - 2-е изд. - М.: МЦНМО, 2004.

[4] Быков, В.И. Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов / В.И. Быков, А.М. Кытманов, М.З. Лазман. - Новосибирск: Наука, 1991.

[5] Гельфонд, О.А. Комбинаторные коэффициенты и смешанный объем многогранников / О.А. Гельфонд // Функц. анализ и его прил. - 1996. - Т. 30. - №3. - С. 77–79.

[6] Егорычев, Г.П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм / Г.П. Егорычев. - Новосибирск: Наука, 1977.

[7] Жданов, О.Н. Исследование кратных интегралов Меллина – Барнса с помощью многомерных вычетов / О.Н. Жданов , А.К. Цих // Сиб. матем. журн. - 1998. - Т. 39. - №2. - С. 281–298.

[8] Кытманов, А.М. Интеграл Бохнера – Мартинелли и его применения / А.М. Кытманов. - Новосибирск: Наука, 1992.

[9] Лейнартас, Е.К. О разложении рациональных функций многих переменных на простейшие дроби / Е.К. Лейнартас // Изв. вузов. Матем. - 1978. - №10. - С. 47–51.

[10] Мкртчан, М.А. Многогранник Ньютона и ряды Лорана рациональной функции n переменных / М.А. Мкртчан, А.П. Южаков // Изв. АН Армянской ССР - 1982. - Т. 17. - №2. - С. 99–105.

[11] Московченко Г.А. О топологии наборов гиперплоскостей и многомерных вычетах: дис. ...канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 / Московченко Галина Александровна. - Курган, 2003.

[12] Пассаре, М. Кратные интегралы Меллина – Барнса как периоды многообразий Калаби – Яу с несколькими модулями / М. Пассаре, А.К. Цих, А.А. Чешель // ТМФ - 1996. - Т. 109. - №3. - С. 381–394.

[13] Почекутов, Д.Ю. Диагонали рядов Лорана рациональных функций / Д.Ю. Почекутов // Сиб. матем. журн. - 2009. - Т. 50. - №6. - С. 1370–1383.

[14] Сафонов, К.В. Об особенностях параметрического вычета Гротендика и диагонали двойного степенного ряда / К.В. Сафонов, А.К. Цих // Изв. вузов. Матем. - 1984. - №4. - С. 65–74.

[15] Тиморин, В.А. Многогранники и уравнения / В.А. Тиморин, А.Г. Хованский // Матем. просв., сер.3. - 2010. - №14. - С. 30–57.

[16] Хованский, А.Г. Многогранники Ньютона (разрешение особенностей) / А.Г. Хованский // Итоги науки и техн. Сер. пробл. мат. - М.: ВИНИТИ, 1983. - Т. 22. - С. 207–239.

[17] Цих, А.К. О циклах, разделяющих нули аналитических функций в $\mathbb{C}^n$ / А.К. Цих // Сиб. матем. журн. - 1975. - Т. 16. - №5. - С. 1118–1121.

[18] Цих, А.К. Методы теории многомерных вычетов: дис. ...д-ра физ.-мат. наук: 01.01.01 / Цих Август Карлович. - Красноярск, 1989.

[19] Южаков, А.П. Одно условие кограницы по Лере и его применение к логарифмическому вычету / А.П. Южаков // Сиб. матем. журн. - 1970. - Т. 11. - №3. - С. 708–711.

[20] Южаков, А.П. О применении кратного логарифмического вычета для разложения неявных функций в степенные ряды / А.П. Южаков // Матем. сборник - 1975. - Т. 97(139). - №2(6). - С. 177–192.

[21] Южаков, А.П. О разделении аналитических особенностей и разложении на простейшие дроби голоморфных функций n переменных / А.П. Южаков // Многомерный комплексный анализ. - Красноярск: ИФ СО АН СССР, 1986. - С. 210–220.

[22] Южаков, А.П. Разделяющая подгруппа и локальные вычеты / А.П. Южаков // Сиб. матем. журн. - 1988. - Т. 29. - №6. - С. 197–203.

[23] Bergman, G.M. The logarithmic limit-set of an algebraic variety / G.M. Bergman // Trans. Amer. Math. Soc. - 1971. - V. 157. - P. 459-469.

[24] Bieri, R. The geometry of the set of characters induced by valuations / R. Bieri, J.R.J. Groves // J. Reine Angew. Math. - 1984. - V. 347. - P. 168-195.

[25] Bott, R. A residue formula for holomorphic fields / R. Bott// J. Different. Geom. - 1967. - V. 1. - №4. - P. 311–330.

[26] Bott, R. Differential Forms in Algebraic Topology / R. Bott, L.W. Tu. - New York: Springer–Verlag, 1982.

[27] Brown, K. S. Cohomology of groups / K.S. Brown. - New York: Springer–Verlag, 1982.

[28] Cattani, E. Residues in toric varieties / E. Cattani, D. Cox, A. Dickenstein // Compositio Math. - 1997. - V. 108. - №1. - P. 35–76.

[29] Cattani, E. A global view of residues in the torus / E. Cattani, A. Dickenstein // J. Pure Appl. Algebra - 1997. - V. 117/118. - P. 119–144.

[30] Cattani, E. Residues and Resultants / E. Cattani, A. Dickenstein, B. Sturmfels // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. - 1998. - V. 5. - P. 119–148.

[31] Charles, J. The Mellin–Barnes approach to hadronic vacuum polarization and $g_\mu - 2$ / J. Charles, D. Greynat, E. de Rafael // Physical Review D - 2018. - V. 97. - 076014.

[32] Fantappiè, L. I funzionali delle funzioni de due variabili / L. Fantappiè // Mem. Rend. Acad. Ital. - 1931. - V. 2. - P. 1–172.

[33] Forsberg, M. Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas / M. Forsberg, M Passare, A. Tsikh // Adv. Math. - 2000. - V. 151. - P. 45–70.

[34] Friot, S. On convergent series representation of Mellin–Barnes integrals / S. Friot, D. Greynat // Journal of Mathematical Physics - 2012. - V. 53. - №2. - 023508.

[35] Fulton, W. Introduction to toric varieties / W. Fulton. - Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.

[36] Gelfand, I.M. Discriminants, resultants and multidimensional determinants / I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky. - Boston: Birkhäuser, 1994.

[37] Gelfond, O.A. Toric geometry and Grothendieck residues / O.A. Gelfond, A.G. Khovanskii // Mosc. Math. J. - 2002. - V. 2. - №1. - P. 99-112.

[38] Gleason, A.M. The Cauchy–Weil theorem / A.M. Gleason // J. Math. Mech. - 1963. - V. 12. - №3, P. 429–444.

[39] Griffiths, P. On the periods of certain rational integrals / P. Griffiths // Ann. Math. -1969. - V. 90. - №3. - P. 460–541.

[40] Griffiths, P. Principles of algebraic geometry / P. Griffiths, J. Harris. - New York: John Wiley and Sons, 1978.

[41] Khetan, A. Combinatorial construction of toric residue / A. Khetan, I. Soprounov // Ann. Inst. Fourier, Grenoble - 2005. - V. 55. - №2. - P. 511–548.

[42] Martinelli, E. Contributi alia teoria dei residue per le funzioni di due variabili complesse / E. Martinelli // Ann. Math. Pure Appl. - 1955. - V. 39. - №4. - P. 335–343.

[43] McCleary, J. A user's guide to spectral sequences / J. McCleary. - Ed.2. - Cambridge: Camb. Univ. Press, 2001.

[44] Milnor, J. Link groups / J. Milnor // Ann. Math. - 1954. - V. 59. - №2. - P. 177–195.

[45] Picard, E. Traité d'analyse / E. Picard - Paris: Gauthier-Villars, 1926. - V.II.

[46] Soprounov, I. On combinatorial coefficients and the Gelfond – Khovanskii residue formula / I. Soprounov // Topics in algebraic geometry and geometric modeling. - Contemp. Math., 2003. - V. 334. - P. 343–349.

[47] Soprounov, I. Residues and tame symbols on toroidal varieties / I. Soprounov // Compositio Math. - 2004. - V. 140. - №6. - P. 1593–1613.

[48] Soprounov, I. Toric residue and combinatorial degree / I. Soprounov // Trans. Amer. Math. - 2005. - V. 357. - №5. - P. 1963–1975.

[49] Sorani, G. Sull'indicatore logaritmico pere funzioni di piu variabili complesse / G. Sorani // Rend. Mat. Appl. - 1960. - V. 19. - №1–2. - P. 130–142.

[50] Speyer, D. The tropical Grassmannians / D. Speyer, B. Sturmfels // Adv. Geom. - 2004. - V. 4. - №3. - P. 389–411.

[51] Tsikh, A.K. Multidimensional Residues and their Applications / A.K. Tsikh. - Providence: AMS, 1992.

[52] Vick, J.W. Homology Theory / J.W. Vick. - New York: Springer–Verlag, 1982.

Работы автора в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций:

[53] Ульверт, Р.В. О циклах, разделяющих систему m гиперповерхностей в окрестности точки из $\mathbb{C}^n$ / Р.В. Ульверт // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и Физика. - 2012. - Т. 5. - №2. - С. 276–282.

[54] Ульверт, Р.В. Гомологические резольвенты в задачах о разделяющих циклах / Р.В. Ульверт // Сиб. матем. журн. - 2018. - Т. 59. - №3. - С. 684–695.

[55] Ульверт, Р.В. О вычислимости кратных интегралов суммой локальных вычетов / Р.В. Ульверт // Сиб. электрон. матем. изв. - 2018. - Т. 15. - С. 996–1010.

Работы автора в сборниках материалов и тезисов докладов конференций:

[56] Ульверт, Р.В. О циклах, разделяющих ростки комплексных гиперповерхностей / Р.В. Ульверт // Четвертое российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам: тезисы докладов, Красноярск - 2012. - С. 72–74.

[57] Ульверт, Р.В. Об одном условии представимости цикла, разделяющего набор гиперповерхностей, в виде суммы локальных циклов / Р.В. Ульверт // Решетневские чтения: материалы XVIII Междунар. науч. конф., Красноярск - 2014. – Ч. 2. - С. 158–159.

[58] Ульверт, Р.В. О циклах, разделяющих набор поверхностей [электронный ресурс] / Р.В. Ульверт // Материалы VI Российско-Армянского совещания по математическому анализу, математической физике и аналитической механике, Ростов н/Д - 2016. - С. 21. - Режим доступа: http://rusarm.sfedu.ru/thethis.pdf.ISBN 978-5-7890-1160-7.