

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



Тимофеев Иван Алексеевич

ПОРОЖДАЮЩИЕ МУЛЬТИПЛЕТЫ ИНВОЛЮЦИЙ  
ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук, профессор

Нужин Яков Нифантьевич

Красноярск – 2017

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1. Линейные группы малых размерностей над кольцами</b>	<b>12</b>
1.1. Обозначения и известные результаты . . . . .	12
1.2. Линейные группы размерности 2 над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ . . . . .	14
1.3. Линейные группы размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ . . . . .	19
<b>2. Группы Шевалле исключительных типов над кольцом целых чисел</b>	<b>25</b>
2.1. Обозначения и предварительные результаты . . . . .	25
2.2. Порождаемость группы Шевалле $G_2(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны. . . . .	30
2.3. Порождаемость группы Шевалле $E_l(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны. . . . .	34
<b>3. Группы <math>SL_6(\mathbb{Z})</math> и <math>SL_{10}(p)</math></b>	<b>47</b>
3.1. Обозначения и известные результаты . . . . .	47
3.2. Порождаемость группы $SL_6(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями . . . . .	48
3.3. Порождаемость группы $SL_{10}(p)$ тремя инволюциями . . . . .	60
<b>Заключение</b>	<b>67</b>
<b>Список литературы</b>	<b>68</b>
<b>Приложение А. Программа для <math>E_l(\mathbb{Z})</math></b>	<b>73</b>

# Введение

## Постановка задачи и актуальность темы исследования

Диссертация посвящена нахождению порождающих множеств инволюций с различными свойствами для матричных групп и групп Шевале над кольцом целых чисел и кольцом целых гауссовых чисел.

Вопрос о минимальном количестве и порядках порождающих элементов группы постоянно вызывал большой интерес и изучался для разнообразных классов групп: конечных и бесконечных, абстрактных, групп подстановок, матричных групп и других. Порождающие тройки инволюций конечных групп используются при нахождении гамильтоновых циклов в графах Кели [27], при описании групп автоморфизмов карт на плоскости [22], а также при решении обратной задачи Галуа [2].

Еще в 1890 году Ф. Клейн и Р. Фрике доказали [21], что гомоморфные образы модулярной группы  $PSL_2(\mathbb{Z})$ , за исключением трех циклических групп  $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ , — это в точности  $(2, 3)$ -порожденные группы (то есть группы порожденные двумя элементами порядка 2 и 3). Этим в определенной степени объясняется важность изучения  $(2, 3)$ -порожденных групп.

Хорошо известно, что классические группы порождаются своими простейшими элементами. Например, симметрические группы порождаются транспозициями, а простые классические линейные группы или более обобщенно — простые группы лиева типа — порождаются корневыми элементами (см. [5, 6, 19, 23]). В обоих случаях мощность порождающего множества растет вместе с ростом мощности самой группы. Особый интерес вызывают порождающие множества минимальной мощности относительно некоторых свойств.

Л. Диксон в 1901 г. доказал, что для любого нечетного  $q \neq 9$ , являющегося степенью простого числа, группа  $SL_2(q)$  порождается двумя матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

если  $t$  порождает основное поле [20].

В XX веке вопрос о  $(2, 3)$ -порождении удалось положительно решить

для многих конечных простых групп и классических матричных групп над конечно порожденными коммутативными кольцами.

Еще в 1901г. Дж. Миллер доказал в работе [25], что знакопеременные группы  $A_n$ , за исключением  $A_1, A_2, A_3, A_6, A_7, A_8$ , могут быть порождены инволюцией  $\alpha$  и элементом  $\beta$  порядка 3. Для простых знакопеременных групп, то есть групп  $A_n$  при  $n \geq 5$ , из  $(2, 3)$  — следует и порождаемость тремя инволюциями так как  $\langle \alpha, \alpha^\beta, \alpha^{\beta^2} \rangle \triangleleft \langle \alpha, \beta \rangle$ . В действительности, этот факт справедлив для любой конечной неабелевой простой группы.

Вопрос о  $(2, 3)$ -порождаемости групп  $GL_n(\mathbb{Z}), SL_n(\mathbb{Z})$  и их фактор-групп активно исследовался М. Всемировичем [34, 35, 36] и М. Тамбурини [29, 30, 31]. В результате удалось показать [33], что среди вышеупомянутых групп  $(2, 3)$ -порожденными группами являются только группы

- $PSL_2(\mathbb{Z})$ ,
- $PSL_n(\mathbb{Z}), PGL_n(\mathbb{Z}), SL_n(\mathbb{Z}), GL_n(\mathbb{Z})$ , если  $n \geq 5$ .

Отметим, что в общем случае из  $(2, 3)$ -порождаемости конкретной группы не следует ее порождаемость тремя инволюциями.

В 1980 году В.Д. Мазуров поставил следующий вопрос [10, в. 7.30]

*Какие конечные простые группы порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?*

Для знакопеременных групп и групп лиева типа над конечными полями ответ на вопрос 7.30 дал Я. Н. Нужин [12],[13],[14], [15], [26]. Спорадические группы рассматривались рядом авторов различными методами см. работу В.Д. Мазурова [9], где единообразно методами теории характеров получен ответ на вопрос 7.30 для всех спорадических групп. Ниже приведен ответ на вопрос 7.30.

*Конечная простая группа  $G$  порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, тогда и только тогда, когда она отлична от следующих групп:*

1) *знакопеременные группы:*

$$A_6, A_7, A_8;$$

2) *группы лиева типа над полем характеристики 2:*

$$PSL_3(q), PSU_3(q), PSL_4(q), PSU_4(q), PSU_5(2^2);$$

3) группы лева типа над полем нечетной характеристики:

$$PSL_3(q), PSU_3(q), PSL_2(7), PSL_2(9), PSp_4(3), PSU_4(3^2);$$

4) спорадические группы:

$$M_{11}, M_{22}, M_{23}, McL.$$

В 1999 году Я.Н. Нужин записал в Коуровскую тетрадь следующий вопрос вопрос [10, в. 14.69].

*Для каждой простой неабелевой группы  $G$  найти минимум числа (сопряженных) порождающих инволюций  $n(G)$  (соответственно  $n_c(G)$ ) таких, что их произведение равно 1.*

В диссертации Дж. М. Уорда 2009 года [37] (см. так же [10, примечания к вопросу 14.69]) число  $n_c(G)$  найдено для знакопеременных, спорадических групп и для групп  $PSL_n(q)$  при нечетном  $q$ , а для  $n \geq 4$  при дополнительном ограничении  $q \neq 9$ , кроме того, для  $n = 6$  при  $q \not\equiv 3 \pmod{4}$ .

Сформулируем результаты Уорда.

*Число  $n_c$  равно 6 для групп  $M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, McL$ , для остальных спорадических групп оно равно 5.*

*Число  $n_c$  равно 6 для групп  $A_7, A_8, A_{12}$ , для остальных знакопеременных групп  $A_n$  при  $n \geq 5$  оно равно 5.*

*Число  $n(G)$  среди знакопеременных и спорадических групп количество групп, для которых число  $n_c(G)$  равно 6, увеличилось на два; это группы  $A_{12}$  и  $M_{12}$ .*

*Число  $n_c$  равно 5 для групп  $PSL_n(q)$  при  $n \geq 4$ ,  $n \neq 6$  и нечетном  $q \neq 9$ .*

*Если  $q$  нечетно, то  $n_c(PSL_3(q)) = 5$  при  $n \equiv 1 \pmod{3}$  и  $n_c(PSL_3(q)) = 6$  при  $n \equiv 0$  или  $2 \pmod{3}$ .*

В группах  $PSL_2(q)$  один класс сопряженных инволюций, поэтому для них  $n(G) = n_c(G) = 5$  при  $q \neq 7, 9$ , а если  $q = 7, 9$ , то  $n(G) = n_c(G) = 6$  в силу изоморфизмов  $PSL_2(7) \simeq PSL_3(2)$ ,  $PSL_2(9) \simeq A_6$  и указанных выше результатов.

В 2001 г. Т.В. Моисеенкова доказала [4]: если  $G = PSL_3(2^m), PSU_3(2^{2^m})$ , то  $n(G) = n_c(G) = 6$ . В работе [11] Т.В. Моисеенкова также нашла число  $n(G)$  для групп  $PSL_n(\mathbb{Z}), SL_n(\mathbb{Z})$ . Позже Я.Н. Нужин поставил вопрос [10, в. 15.67]

*Какие присоединённые группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?*

Для групп Шевалле классических типов по вопросу 15.67 ранее были получены следующие результаты.

В работе [32] М. С. Тамбурини и П. Цукка установлено, что специальная линейная группа  $SL_n(\mathbb{Z})$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$  при  $n \geq 14$  порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Следовательно, и проективная специальная линейная группа  $PSL_n(\mathbb{Z})$  при  $n \geq 14$  обладает такой тройкой порождающих инволюций. Более того, Я. Н. Нужин доказал, что  $PSL_n(\mathbb{Z})$  порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, тогда и только тогда, когда  $n \geq 5$  [16]. На самом деле, в этой работе при  $n \neq 4k + 2$  порождающие тройки инволюций выбирались из  $SL_n(\mathbb{Z})$ , поэтому для группы  $SL_n(\mathbb{Z})$  ответ на аналог вопроса 15.67 неизвестен только для  $n = 6, 10$ .

В силу гомоморфизма  $PSp_n(\mathbb{Z}) \rightarrow PSp_n(\mathbb{Z}_p)$  из непорождаемости тремя инволюциями, две из которых перестановочны, проективной симплектической группы  $PSp_4(\mathbb{Z}_3)$  [15] следует непорождаемость тремя инволюциями, две из которых перестановочны, для группы  $PSp_4(\mathbb{Z})$ , которая изоморфна присоединенной группе Шевалле  $B_2(\mathbb{Z})$ . Отметим также, что в работах [8, 24] установлена  $(2, 2 \times 2)$ -порождаемость групп  $PSL_n(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ , при  $n \geq 7$ .

### Основные результаты диссертации

- а) Решены задачи о порождаемости тремя инволюциями и тремя инволюциями, две из которых перестановочны, для линейных групп степени два  $GL_2, SL_2, PGL_2, PSL_2$  над кольцами целых чисел  $\mathbb{Z}$  и целых гауссовых чисел  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ , исключая группу  $PSL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ . Для групп  $GL_2(\mathbb{Z}), PGL_2(\mathbb{Z})$  найдено минимальное число  $n(G)$  порождающих группы  $G$  инволюций, произведение которых равно 1.

- б) Доказана порождаемость тремя инволюциями, две из которых перестановочны, групп Шевалле типа  $G_2$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  над кольцом целых чисел. Все инволюции найдены в явном виде.

### **Методы исследования**

В работе используются методы линейной алгебры, методы теории групп. Для проверки выкладок, вычисляемых в группах Шевалле применялась программа, составленная автором в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

### **Новизна и научная значимость работы**

Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми и снабжены подробными доказательствами. Результаты работы [40] (Теоремы 1) получены в неразделимом соавторстве с научным руководителем Я. Н. Нужиным.

### **Публикации**

Результаты диссертации опубликованы в работах [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47], две из которых [38, 39], входят в перечень ВАК рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук.

### **Апробация работы**

Результаты работы докладывались на:

- 43-й Международной молодежной школе-конференции "Современные проблемы математики и ее приложений" (Екатеринбург, 2012)
- Второй ежегодной конференции для обмена математическими идеями (Iowa, USA, 2013)
- Международной научной конференции "Алгебра и Логика, Теория и Приложения" (Красноярск, 2013)
- 45-ой Международной молодежной школе-конференции "Современные проблемы математики и ее приложений" (Екатеринбург, 2014)

- Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 2016)
- Международной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения В.М. Левчука "Алгебра и логика: теория и приложения" (Красноярск, 2016)
- Международной конференции серии "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2016)

### **Благодарности**

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Я. Н. Нужину за поставленные задачи, неоценимую помощь в работе и всестороннюю поддержку. Автор благодарен всему коллективу кафедры алгебры и математической логики ИМиФИ СФУ за сотрудничество и атмосферу, в которой была выполнена данная работа.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения, списка литературы и приложения. Она изложена на 108 страницах, включает 8 таблиц и 4 рисунка. Главы диссертации подразделяются на параграфы. Основные результаты сформулированы в виде теорем и имеют сквозную нумерацию. Вспомогательные утверждения (леммы, предложения) имеют тройную нумерацию: первая цифра означает номер главы, вторая — номер параграфа в главе, третья — номер утверждения в текущем параграфе. Формулы имеют двойную нумерацию: номер главы и номер формулы внутри главы. Список литературы содержит 47 наименований. Работы автора по теме диссертации приведены отдельным списком.

### **Содержание диссертации**

Глава 1 содержит исследование следующих задач для линейных групп размерности 2 над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$ :

А) *Порождается ли данная группа  $G$  тремя инволюциями?*



Б) Порождается ли данная группа  $G$  тремя инволюциями, две из которых перестановочны?

В) Каково минимальное число  $n(G)$  порождающих инволюций группы  $G$ , произведение которых равно 1.

Кроме того, исследованы вопросы А), Б) для линейных групп размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ . В параграфе 1.1 приведены предварительные сведения, известные результаты и используемые обозначения. Далее в параграфе 1.2 представлено решение задач А), Б), В) для групп  $SL_2$ ,  $PSL_2$ ,  $GL_2$ ,  $PGL_2$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$ .

**Теорема 1.** Группа  $GL_2(\mathbb{Z})$  порождается тремя инволюциями, но не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны,  $n(GL_2(\mathbb{Z})) = 6$ . Группа  $PGL_2(\mathbb{Z})$  порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны,  $n(PGL_2(\mathbb{Z})) = 5$ . Группы  $SL_2(\mathbb{Z})$  и  $PSL_2(\mathbb{Z})$  не порождаются никаким множеством инволюций.

Результаты теоремы 1 представлены в таблице 1, где  $+$  ( $-$ ) означает положительное (отрицательное) решение соответствующей задачи. В случае положительного ответа инволюции найдены явно.

Таблица 1 — Ответы А), Б), В)

	$SL_2(\mathbb{Z})$	$PSL_2(\mathbb{Z})$	$GL_2(\mathbb{Z})$	$PGL_2(\mathbb{Z})$
А) (2, 2, 2)	—	—	+	+
Б) $(2 \times 2, 2)$	—	—	—	+
В) $n(G)$	0	0	6	5

Теорема 1 получена в неразделимом соавторстве с научным руководителем. Её доказательство существенно опирается на следующую лемму, которая представляет и самостоятельный интерес

**Лемма 1.2.7.** Любая подгруппа  $M$ , порожденная тремя нецентральными инволюциями из группы  $GL_2(\mathbb{C})$  над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ , две из которых перестановочны, имеет следующую структуру:

$$M = \langle \gamma, \delta \rangle \cdot \langle \alpha, \beta \rangle,$$

где

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \delta^2 = (\alpha\beta)^2 = \alpha\gamma\alpha\delta = \beta\gamma\beta\delta = 1.$$

Более того, группа  $M$  либо конечна, либо  $M = \langle \gamma, \delta \rangle \rtimes \langle \alpha, \beta \rangle$ .

В разделе 1.3 решены задачи А) и Б) для линейных групп размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел. Решения задачи А) для групп  $SL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ ,  $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ ,  $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  представлены соответственно предложениями 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3. Задача Б) решена для групп  $SL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ ,  $PSL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ ,  $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ ,  $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  в предложениях 1.3.1, 1.3.7, 1.3.2, 1.3.6 соответственно. В предложении 1.3.8 показано, что группа  $SL_2^\pm(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  порождается тремя инволюциями.

Доказательство этих результатов опирается на аналог леммы 1.2.7 для группы  $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  — лемму 1.3.5.

Глава 2 содержит решение следующего вопроса для групп Шевалле исключительных типов  $G_2(\mathbb{Z})$ ,  $E_6(\mathbb{Z})$ ,  $E_7(\mathbb{Z})$ ,  $E_8(\mathbb{Z})$ .

Г) *Какие присоединённые группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?*

В параграфе 2.1 представлены необходимые определения и вспомогательные результаты. Раздел 2.2 содержит доказательство факта, который устанавливает

**Теорема 2.** *Группа Шевалле  $G_2(\mathbb{Z})$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$  порождается инволюциями*

$$\begin{aligned}\alpha &= x_a(1)h_b(-1), \\ \beta &= x_{-b}(1)h_a(-1), \\ \gamma &= n_a n_{3a+2b} h_b(-1),\end{aligned}$$

*первые две из которых перестановочны.*

В разделе 2.3 доказана

**Теорема 3.** *Присоединённые группы Шевалле типа  $E_l$  над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

Порождающие инволюции групп  $E_l(\mathbb{Z})$  над кольцом целых чисел представлены в таблице 3,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  перестановочны.

Таблица 3 — Инволюции в  $E_l(\mathbb{Z})$ 

Группа	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$E_6(\mathbb{Z})$	$x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}h_{r_3}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}h_{r_2}h_{r_4}h_{r_6}$
$E_7(\mathbb{Z})$	$x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}h_{r_3}h_{r_5}h_{r_7}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6}$
$E_8(\mathbb{Z})$	$x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}n_{r_8}h_{r_5}h_{r_1}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6}h_{r_2}$

Для выбора инволюций в теоремах 2 и 3 используется метод, разработанный Я. Н. Нужиным для нахождения порождающих троек инволюций в простых группах лиева типа над конечными полями [12].

В главе 3 исследован вопрос А) для групп  $SL_6(\mathbb{Z})$  и  $SL_{10}(p)$ , где  $p$  — простое число. Предложения 3.2.1 и 3.3.1 указывают явно порождающие тройки инволюций групп  $SL_6(\mathbb{Z})$  и соответственно  $SL_{10}(p)$ .

В приложении содержится с комментариями код программы на языке Wolfram Mathematica. Данная программа использовалась для проверки доказательств теоремы 3.

# 1. Линейные группы малых размерностей над кольцами

Эта глава содержит исследование следующих задач для линейных групп размерности 2 над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$ .

А) Порождается ли данная группа  $G$  тремя инволюциями?

Б) Порождается ли данная группа  $G$  тремя инволюциями, две из которых перестановочны?

В) Каково минимальное число порождающих инволюций  $n(G)$  группы  $G$ , произведение которых равно 1?

Кроме того, исследованы вопросы А), Б) для линейных групп размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ . В разделе 1.1 приведены предварительные сведения, известные результаты и используемые обозначения. Далее в разделе 1.2 представлено решение задач А), Б), В) для групп  $SL_2$ ,  $PSL_2$ ,  $GL_2$ ,  $PGL_2$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$ .

## § 1.1. Обозначения и известные результаты

Пусть  $G$  – группа. Элемент  $\alpha \in G$  такой, что  $\alpha \neq 1$  и  $\alpha^2 = 1$  будем называть инволюцией.

Будем писать  $G = \langle M \rangle$ , где  $M \subseteq G$ , когда группа  $G$  порождается элементами множества  $M$ :

$$G = \{a_1^{\varepsilon_1} \dots a_m^{\varepsilon_m} \mid a_i \in M, \varepsilon_i = \pm 1, m = 1, 2, \dots\}.$$

Пусть  $n(G)$  – минимальное число порождающих группу  $G$  инволюций, произведение которых равно 1.

За  $n_c(G)$  обозначим минимальное число сопряженных в  $G$  и порождающих  $G$  инволюций, произведение которых равно 1.

Очевидно,  $n(G) \leq n_c(G)$  и если группа порождается тремя (сопряженными) инволюциями, то  $n(G) \leq 6$  (соответственно  $n_c(G) \leq 6$ ). С другой

стороны, из простоты группы  $G$  легко следует, что  $n(G) \geq 5$ . Известно, что любая конечная простая группа, за исключением  $PSL_3(9)$  порождается тремя инволюциями. Таким образом, для любой конечной простой неабелевой группы  $G$

$$5 \leq n(G) \leq 6, \quad \text{при } G \neq PSU_3(9).$$

Действительно, если группа  $G$  порождается тремя (сопряженными) инволюциями  $\alpha, \beta, \gamma$ , такими, что  $\alpha\beta = \beta\alpha$ , то в качестве пятерки порождающих инволюций, произведение которых равно 1, можно взять следующие  $\alpha\beta, \gamma, \gamma, \beta, \alpha$ , и тогда  $n(G) = 5$  (соответственно  $n_c(G) = 5$ ).

Пусть  $K$  – коммутативное кольцо с единицей. Далее, как обычно,  $GL_n(K)$  – группа обратимых  $(n \times n)$ -матриц над кольцом  $K$ ,  $SL_n(K)$  – ее подгруппа матриц с определителем, равным 1,  $PGL_n(K)$  и  $PSL_n(K)$  – соответственно их фактор-группы по подгруппам скалярных матриц. При  $K = GF(q)$ , указанные выше группы обозначаются более компактно, а именно  $GL_n(q), SL_n(q)$  и т.д.

Группу  $G$  будем называть  $(2, 2, 2)$ -порожденной ( $(2 \times 2, 2)$ -порожденной), если она порождается тремя инволюциями (соответственно тремя инволюциями, две из которых перестановочны).

Через  $t_{ij}(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $i \neq j$ , будем обозначать трансвекции, т. е. матрицы  $E_n + ke_{ij}$ , где  $E_n$  – единичная  $(n \times n)$ -матрица, а  $e_{ij}$  – матричные единицы.

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [17, с. 107]).

**Лемма 1.1.1.** *Группа  $SL_n(\mathbb{Z})$  порождается трансвекциями  $t_{ij}(1)$   $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .*

М. Тамбурини и П. Цука [32] показали, что группа  $SL_n(\mathbb{Z})$  при  $n \geq 14$  является  $(2 \times 2, 2)$ -порожденной. Я. Н. Нужин [16] доказал, что группа  $PSL_n(\mathbb{Z})$  тогда и только тогда  $(2 \times 2, 2)$ -порождена, когда  $n \geq 5$ . В [1] методом работы [16] установлен аналогичный результат и для группы  $GL_n(\mathbb{Z})$ . Порождающие множества инволюций линейных групп размерности 3 и 4 рассматривались в работе [11].

## § 1.2. Линейные группы размерности 2 над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$

В данном разделе для каждой группы  $SL_2$ ,  $PSL_2$ ,  $GL_2$ ,  $PGL_2$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$  рассматриваются следующие задачи.

А) Порождается ли данная группа  $G$  тремя инволюциями?

Б) Порождается ли данная группа  $G$  тремя инволюциями, две из которых перестановочны?

В) Каково минимальное число порождающих инволюций  $n(G)$  группы  $G$ , произведение которых равно 1?

В группе  $SL_2(\mathbb{Z})$  единственная инволюция, а группа  $PSL_2(\mathbb{Z})$  является свободным произведением двух циклических групп порядка 2 и 3 [21]. Поэтому эти группы не порождаются никаким множеством инволюций и для них вопросы А), Б), В) закрыты.

Для группы  $G = PGL_2(\mathbb{Z})$  получен положительный ответ на вопрос В) и доказано, что  $n(G) = 5$ .

Для группы  $G = GL_2(\mathbb{Z})$  на вопрос А) получен положительный ответ, а на вопрос Б) — отрицательный и доказано, что  $n(G) = 6$ .

Из леммы 1.1.1 следует, что  $SL_2(\mathbb{Z})$  порождается двумя матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В действительности лемма 1.1.1 справедлива для любого евклидова кольца. Из леммы 1.1.1 легко следует

**Лемма 1.2.1.** *Группа  $GL_n(\mathbb{Z})$  порождается трансвекциями  $t_{ij}(1)$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  и любой другой матрицей с определителем  $-1$ .*

**Предложение 1.2.2.** *Группа  $GL_2(\mathbb{Z})$  порождается тремя инволюциями*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.* Так как определитель матрицы  $\alpha$  равен  $-1$  (как впрочем

и двух других) и

$$\beta\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha\beta\gamma\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

то по лемме 1.2.1 инволюции  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  порождают группу  $GL_2(\mathbb{Z})$ .  $\square$

Конечно, группа  $PGL_2(\mathbb{Z})$  порождается образами инволюций  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  из предложения 1.2.2 при естественном гомоморфизме  $GL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow PGL_2(\mathbb{Z})$ , поэтому справедливо

**Предложение 1.2.3.** *Группа  $PGL_2(\mathbb{Z})$  порождается тремя инволюциями.*

В группе  $SL_2(\mathbb{Z})$  всего лишь одна инволюция, поэтому справедливо

**Предложение 1.2.4.** *Группа  $SL_2(\mathbb{Z})$  не порождается никаким множеством инволюций.*

В 1890 г. Р.Фрике и Ф.Клейн [21] доказали, что группа  $PSL_2(\mathbb{Z})$  является свободным произведением групп порядка 2 и 3. В действительности, они установили равенство

$$PSL_2(\mathbb{Z}) = \langle \bar{\alpha} \rangle * \langle \bar{\beta} \rangle,$$

где  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  являются образами в  $PSL_2(\mathbb{Z})$  соответственно матриц

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, справедливо

**Предложение 1.2.5.** *Группа  $PSL_2(\mathbb{Z})$  не порождается никаким множеством инволюций.*

В следующем предложении для элементов группы  $PGL_2(\mathbb{Z})$  используется матричная запись, при этом два элемента считаются равными, если они различаются лишь умножением на скалярную матрицу.

**Предложение 1.2.6.** *Группа  $PGL_2(\mathbb{Z})$  порождается тремя инволюциями*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем первые две из них перестановочны.

*Доказательство.* Заметим, что инволюции  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  такие же, как и в предложении 1.2.2, поэтому они порождают  $PGL_2(\mathbb{Z})$ . Отличие лишь в том, что в группе  $PGL_2(\mathbb{Z})$  инволюции  $\alpha$ ,  $\beta$  перестановочны, так как квадрат их произведения является скалярной матрицей.  $\square$

**Лемма 1.2.7.** *Любая подгруппа  $M$ , порожденная тремя нецентральными инволюциями из группы  $GL_2(\mathbb{C})$  над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ , две из которых перестановочны, имеет следующую структуру:*

$$M = \langle \gamma, \delta \rangle \cdot \langle \alpha, \beta \rangle, \quad (1.1)$$

где

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \delta^2 = (\alpha\beta)^2 = \alpha\gamma\alpha\delta = \beta\gamma\beta\delta = 1. \quad (1.2)$$

Более того, группа  $M$  либо конечна, либо  $M = \langle \gamma, \delta \rangle \rtimes \langle \alpha, \beta \rangle$ .

*Доказательство.* Пусть три различные нецентральные инволюции  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  из группы  $GL_2(\mathbb{C})$  порождают подгруппу  $M$ , причем инволюции  $\alpha$ ,  $\beta$  перестановочны. С точностью до сопряжения в  $GL_2(\mathbb{C})$  можно считать, что

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Так как инволюции  $\alpha$ ,  $\beta$  перестановочны, то

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = \beta\alpha.$$

Отсюда  $b = c = 0$  и, следовательно,  $ad = -1$ , а так как инволюции  $\alpha$ ,  $\beta$  различны, то  $a = 1$ ,  $b = -1$ . Таким образом,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть для некоторых  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\delta = \alpha\gamma\alpha = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = \beta\gamma\beta.$$



Тогда равенства 1.2 выполняются, и любое слово из подгруппы  $M$  имеет один из четырех следующих видов:

$$\begin{aligned} \alpha\delta & \dots \alpha\delta\varepsilon, \\ \alpha\delta & \dots \alpha\delta\alpha\varepsilon, \\ \delta\alpha\delta & \dots \alpha\delta\varepsilon, \\ \delta\alpha\delta & \dots \alpha\delta\alpha\varepsilon, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon = 1, \alpha, \beta, \alpha\beta$ . Следовательно, выполняется и равенство 1.1 и, более того, подгруппа

$$\langle \gamma, \delta \rangle = \langle \gamma\delta \rangle \lambda \langle \gamma \rangle$$

нормальна в  $M$ . Покажем, что группа  $M$  либо конечна, либо  $M = \langle \gamma, \delta \rangle \lambda \langle \alpha, \beta \rangle$ .

Любой элемент из подгруппы  $\langle \gamma, \delta \rangle$  имеет вид  $(\gamma\delta)^k$  или  $(\gamma\delta)^k\gamma$ .

Если  $(\gamma\delta)^k \in \langle \alpha, \beta \rangle$ , то  $(\gamma\delta)^{2k} = 1$ , и, следовательно, группа  $M$  конечна.

Пусть  $(\gamma\delta)^k\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle$ . Тогда  $(\gamma\delta)^k\gamma = \alpha, \beta, \alpha\beta$  или  $1$ .

Если  $(\gamma\delta)^k\gamma = \alpha$ , то в силу тождества  $\delta = \alpha\gamma\alpha$  получаем равенство  $(\delta\gamma)^k\delta = \alpha$ . Отсюда  $(\gamma\delta)^{2k+1} = 1$  и, следовательно, группа  $M$  конечна. Случай  $(\gamma\delta)^k\gamma = \beta$  подобен.

Определитель матрицы  $(\gamma\delta)^k\gamma$  равен  $-1$ , поэтому матрица  $(\gamma\delta)^k\gamma$  не может совпадать с матрицами  $\alpha\beta$  или  $1$ , так как определитель последних двух равен  $1$ .  $\square$

**Предложение 1.2.8.** *Группа  $GL_2(\mathbb{Z})$  не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

*Доказательство.* Ясно, что в любой порождающей тройке инволюций группы  $GL_2(\mathbb{Z})$  не может быть центральной инволюции, поэтому в силу леммы 1.2.7 она не может порождаться тремя инволюциями, две из которых перестановочны.  $\square$

Для группы  $G$  через  $n(G)$  обозначим минимальное число порождающих инволюций, произведение которых равно  $1$ . Ясно, что если  $G'$  — гомоморфный образ группы  $G$ , то  $n(G') \leq n(G)$ . Доказательство следующей леммы является легким упражнением.

**Лемма 1.2.9.** *Если  $n(G) = 4$ , то в  $G$  найдется нетривиальная циклическая нормальная подгруппа.*

**Лемма 1.2.10.**  $n(PGL_2(\mathbb{Z})) = 5$ .

*Доказательство.* В силу предложения 1.2.6 группа  $PGL_2(\mathbb{Z})$  порождается некоторыми тремя инволюциями  $\alpha, \beta, \gamma$ , первые две из которых перестановочны. Тогда, очевидно, она порождается и пятью инволюциями  $\alpha, \beta, \gamma, \gamma, \beta\alpha$ , произведение которых равно 1. Таким образом,  $n(PGL_2(\mathbb{Z})) \leq 5$ . Для любого простого числа  $p$  существует гомоморфизм  $PGL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow PGL_2(p)$  и при  $p \geq 5$  в группе  $PGL_2(p)$  нет нетривиальных циклических нормальных подгрупп, поэтому по лемме 1.2.9 справедливо  $n(PGL_2(\mathbb{Z})) = 5$ .  $\square$

**Лемма 1.2.11.**  $n(GL_2(\mathbb{Z})) = 6$ .

*Доказательство.* В силу предложения 1.2.2 группа  $GL_2(\mathbb{Z})$  порождается тремя инволюциями, поэтому  $n(GL_2(\mathbb{Z})) \leq 6$ .

Предположим, что  $n(GL_2(\mathbb{Z})) = 5$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_5$  — порождающие инволюции, произведение которых равно 1. В группе  $GL_2(\mathbb{Z})$  определитель любой нецентральной инволюции равен  $-1$ . Поэтому среди инволюций  $\alpha_1 \dots \alpha_5$  найдется центральная инволюция (иначе получим равенство  $(-1)^5 = 1$ ). Но тогда  $n(PGL_2(\mathbb{Z})) = 4$ , и мы получаем противоречие с предложением 1.2.10.  $\square$

Ответы на вопросы А), Б), В) дает

**Теорема 1.** *Группа  $GL_2(\mathbb{Z})$  порождается тремя инволюциями, но не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, число  $n(GL_2(\mathbb{Z})) = 6$ . Группа  $PGL_2(\mathbb{Z})$  порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны,  $n(PGL_2(\mathbb{Z})) = 5$ . Группы  $SL_2(\mathbb{Z})$  и  $PSL_2(\mathbb{Z})$  не порождаются никаким множеством инволюций.*

Результаты теоремы 1 представлены в таблице 1, где  $+$  ( $-$ ) означает положительное (отрицательное) решение соответствующей задачи. В случае положительного ответа инволюции найдены явно.

Таблица 1. Ответы А), Б), В)

	$SL_2(\mathbb{Z})$	$PSL_2(\mathbb{Z})$	$GL_2(\mathbb{Z})$	$PGL_2(\mathbb{Z})$
$(2, 2, 2)$	—	—	+	+
$(2 \times 2, 2)$	—	—	—	+
$n(G)$	0	0	6	5

### § 1.3. Линейные группы размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$

В данном разделе рассматриваются вопросы А) и Б) для групп  $SL_n$ ,  $PSL_n$ ,  $GL_n$ ,  $PGL_n$  над кольцом целых гауссовых чисел  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ :

А) Порождается ли данная группа  $G$  тремя инволюциями?

Б) Порождается ли данная группа  $G$  тремя инволюциями, две из которых перестановочны?

В группе  $SL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  единственная инволюция, поэтому справедливо

**Предложение 1.3.1.** *Группа  $SL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  не порождается никаким множеством инволюций.*

В группе  $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  у любой инволюции определитель может быть равен только  $\pm 1$ . Но в  $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  есть матрица, определитель которой равен  $i$ , например,  $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Значит, справедливо

**Предложение 1.3.2.** *Группа  $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  не порождается никаким множеством инволюций.*

В следующих предложениях для элементов группы  $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  используется матричная запись, при этом два элемента считаются равными, если они различаются лишь умножением на скалярную матрицу, (а скалярная матрица является инволюцией, если её квадрат равен скалярной матрице).

**Предложение 1.3.3.** *Группа  $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  порождается тремя инволюциями*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Доказательство. Элементы*

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\alpha\beta)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(\beta\alpha)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

порождают диаганальную подгруппу  $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ , а элементы

$$\gamma(\alpha\beta)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha\gamma(\alpha\beta)^2\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\beta\alpha)^{-1}\gamma\beta\alpha(\alpha\beta)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha(\beta\alpha)^{-1}\gamma\beta\alpha(\alpha\beta)^2\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

порождают все трансвекции. Осталось заметить, что  $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  порождается своими трансвекциями и диагональными элементами.  $\square$

**Лемма 1.3.4.** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  — три любых нецентральных элемента из  $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ , которые удовлетворяют условиям

1)  $\alpha\beta = \beta\alpha$ ,

2) элементы  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$  лежат в центре  $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ . Тогда справедливо равенство

$$\alpha^{-1}\gamma\alpha = \beta^{-1}\gamma\beta. \tag{1.3}$$

*Доказательство.* Из теоремы о жордановой нормальной форме следует, что любая матрица из группы  $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  с точностью до сопряжения либо вида  $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ , либо  $\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ , где  $t, u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ . Заметим, что групповой порядок матрицы  $\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$  бесконечен, а любой элемент из центра  $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  имеет конечный порядок. Поэтому с точностью до сопряжения в  $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  можно считать, что

$$\alpha = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где  $a, b, c, d \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ , причем  $t \neq u$  в силу нецентральности элемента  $\alpha$ . Причем, в силу перестановочности первых двух элементов,

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} at & bt \\ cu & du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at & bu \\ ct & du \end{pmatrix} = \beta\alpha.$$

То есть

$$\begin{cases} bt = bu, \\ cu = ct, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(t - u) = 0, \\ c(t - u) = 0. \end{cases}$$

Возможны два варианта:

$$1) t = u,$$

$$2) b = c = 0.$$

Вариант 1) не подходит, т.к. элемент  $\alpha$  нецентральный ( $t \neq u$ ). Следовательно,  $\beta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ,  $a \neq d$ . Из условия 2) леммы следует, что

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, v \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i.$$

Отсюда  $t^2 = u^2$ , значит,  $t = -u$ , поэтому

$$\alpha = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}.$$

Аналогично  $\beta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ . Пусть  $\gamma = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ , тогда

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}\gamma\alpha &= \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & (-t)^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & -x \\ -y & z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & (-a)^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \beta^{-1}\gamma\beta. \end{aligned}$$

□

**Лемма 1.3.5.** *Любая подгруппа  $M$ , порожденная тремя инволюциями из группы  $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  над кольцом целых гауссовых чисел  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ , две из которых перестановочны, имеет следующую структуру:*

$$M = \langle \gamma, \delta \rangle \cdot \langle \alpha, \beta \rangle, \quad (1.4)$$

где

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \delta^2 = (\alpha\beta)^2 = \alpha\gamma\alpha\delta = \beta\gamma\beta\delta = 1. \quad (1.5)$$

Более того, подгруппа  $\langle \gamma, \delta \rangle \triangleleft M$  и группа  $M$  либо конечна, либо  $M = \langle \gamma, \delta \rangle \rtimes \langle \alpha, \beta \rangle$ .

*Доказательство.* Рассмотрим три инволюции  $\alpha, \beta, \gamma$  группы  $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ , первые две из которых перестановочны. Тогда их прообразы при гомоморфизме  $\theta : GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i) \rightarrow PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  удовлетворяют условиям из леммы 1.3.4. Следовательно, верно равенство 1.3, которое при гомоморфизме  $\theta$  переходит в равенство  $\alpha\gamma\alpha = \beta\gamma\beta$ . Положив  $\delta = \alpha\gamma\alpha$ , получим равенства 1.5.

В силу равенств  $\alpha\gamma = \delta\alpha, \alpha\delta = \gamma\alpha, \beta\gamma = \delta\beta, \beta\delta = \gamma\beta$  любое слово из подгруппы  $M$  имеет один из следующих четырех видов:

$$\begin{aligned} \gamma\delta &\dots \gamma\delta\varepsilon, \\ \gamma\delta &\dots \gamma\delta\gamma\varepsilon, \\ \delta\gamma\delta &\dots \gamma\delta\varepsilon, \\ \delta\gamma\delta &\dots \gamma\delta\gamma\varepsilon, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon = 1, \alpha, \beta, \alpha\beta$ . Следовательно, выполняется и равенство 1.4 и, более того, подгруппа

$$\langle \gamma, \delta \rangle = \langle \gamma\delta \rangle \rtimes \langle \gamma \rangle$$

нормальна в  $M$ . Покажем, что группа  $M$  либо конечна, либо  $M = \langle \gamma, \delta \rangle \rtimes \langle \alpha, \beta \rangle$ . Любой элемент из подгруппы  $\langle \gamma, \delta \rangle$  имеет вид  $(\gamma\delta)^k$  или  $(\gamma\delta)^k\gamma$ .

Если  $(\gamma\delta)^k \in \langle \alpha, \beta \rangle$ , то  $(\gamma\delta)^{2k} = 1$  и, следовательно, группа  $M$  конечна.

Пусть  $(\gamma\delta)^k\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle$ . Тогда  $(\gamma\delta)^k\gamma = \alpha, \beta, \alpha\beta$  или  $1$ . Если  $(\gamma\delta)^k\gamma = \alpha$ , то в силу тождества  $\delta = \alpha\gamma\alpha$  получаем равенство  $(\delta\gamma)^k\delta = \alpha(\gamma\delta)^k\gamma\alpha = \alpha$ . Отсюда  $(\gamma\delta)^{2k+1} = (\gamma\delta)^k\gamma(\delta\gamma)^k\delta = \alpha\alpha = 1$  и, следовательно, группа  $M$  конечна. Случай  $(\gamma\delta)^k\gamma = \beta$  подобен. Если  $(\gamma\delta)^k\gamma = \alpha\beta$ , то  $(\gamma\delta)^k = \alpha\beta\gamma \Rightarrow (\gamma\delta)^{2k} = \alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma = \beta\alpha\gamma\alpha\beta\gamma = \beta\delta\beta\gamma = \beta\beta\gamma\beta\beta\gamma = \gamma\gamma = 1$ , следовательно, группа  $M$  конечна.  $\square$

**Предложение 1.3.6.** *Группа  $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

*Доказательство.* Для любого простого  $p \equiv 3 \pmod{4}$  существует гомоморфизм  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i \rightarrow GF(p^2)$ . Этот гомоморфизм индуцирует групповой гомоморфизм  $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i) \rightarrow GL_2(p^2)$ . Известно, что  $PSL_2(9)$  не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, так как существует гомоморфизм  $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i) \rightarrow PSL_2(9)$ , то  $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.  $\square$

**Предложение 1.3.7.** *Группа  $PSL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

*Доказательство.* В силу существования гомоморфизма

$$PSL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i) \rightarrow PSL_2(9),$$

группа  $PSL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.  $\square$

Пусть  $SL_2^\pm(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  – подгруппа матриц с определителем  $\pm 1$  группы  $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ .

**Предложение 1.3.8.** *Группа  $SL_2^\pm(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$  порождается тремя следующими инволюциями:*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.* Так как

$$\gamma\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \alpha\gamma\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \det(\alpha) = -1,$$

то  $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \geq \langle \alpha, \gamma\beta, \alpha\gamma\beta\alpha \rangle = GL_2(\mathbb{Z})$ . Следовательно,

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \ni \delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а так как

$$\delta\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \alpha\delta\gamma\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то  $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle = SL_2^\pm(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ . □



## 2. Группы Шевалле исключительных типов над кольцом целых чисел

Данная глава содержит решение следующего вопроса для групп Шевалле исключительных типов  $G_2(\mathbb{Z})$ ,  $E_6(\mathbb{Z})$ ,  $E_7(\mathbb{Z})$ ,  $E_8(\mathbb{Z})$ .

Г) *Какие присоединённые группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?*

### § 2.1. Обозначения и предварительные результаты

Пусть  $\Phi$  — приведенная неразложимая система корней. Через  $\Phi(K)$  обозначим присоединенную группу Шевалле над полем  $K$ . Она порождается корневыми подгруппами  $X_r = \{x_r(t) \mid t \in K\}$ ,  $r \in \Phi$ . Далее  $SL_2(K)$  — специальная линейная группа над полем  $K$  и  $\langle M \rangle$  — подгруппа, порожденная подмножеством  $M$ .

**Лемма 2.1.1.** *[18, теорема 6.3.1., с. 88] Существует гомоморфизм группы  $SL_2(K)$  на группу  $\langle X_r, X_{-r} \rangle$ , при котором*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\longrightarrow x_r(t), \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} &\longrightarrow x_{-r}(t). \end{aligned}$$

Придерживаясь обозначений из книги Р. Картера [18], определим мономиальные и диагональные элементы соответственно

$$n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t),$$

$$h_r(t) = n_r(t)n_r(-1), \quad r \in \Phi, \quad t \in K^*,$$

где  $K^*$  — мультипликативная группа поля  $K$ . Далее  $H$  — диагональная подгруппа группы  $\Phi(K)$ , порожденная элементами  $h_r(t)$ ,  $r \in \Phi$ ,  $t \in K^*$ , а  $N$

— её мономиальная подгруппа, порожденная  $H$  и элементами  $n_r(1)$ ,  $r \in \Phi$ . Положим также для сокращения записи

$$n_r = n_r(1),$$

$$h_r = h_r(-1)$$

и отметим часто используемое далее свойство

$$(n_r(t))^2 = h_r, \quad r \in \Phi, \quad t \in K^*. \quad (2.6)$$

Диагональные элементы действуют на корневых элементах сопряжениями следующим образом

$$h_r(t)^{-1}x_s(u)h_r(t) = x_s(t^{A_{rs}}u), \quad r, s \in \Phi, \quad t \in K^*, \quad (2.7)$$

где  $A_{rs} = 2(r, s)/(r, r)$ , а  $(x, y)$  — скалярное произведение векторов  $x, y$ . [18, п. 7.1]. Из (2.7) в силу билинейности скалярного произведения вытекает свойство

$$h_{r+s}(t) = h_r(t)h_s(t), \quad t \in K^*, \quad s, r, s+r \in \Phi. \quad (2.8)$$

Действие сопряжением мономиальными элементами на корневых подгруппах эквивалентно действию группы Вейля  $W$  на корнях в силу следующего равенства

$$n_w X_s n_w^{-1} = X_{w(s)}, \quad s \in \Phi, \quad (2.9)$$

где  $n_w$  — прообраз элемента  $w \in W$  при гомоморфизме  $N$  на  $W$ , ядром которого является диагональная подгруппа  $H$ . Более того, если  $w_r$  — отражение относительно гиперплоскости, перпендикулярной вектору  $r$ , то

$$n_r x_s(t) n_r^{-1} = x_{w_r(s)}(\eta_{r,s} t), \quad r, s \in \Phi, \quad t \in K, \quad (2.10)$$

где константы  $\eta_{r,s}$  равны  $\pm 1$  [18, 7.2.1].

Если  $r \neq -s$ , то коммутаторная формула Шевалле в группе  $E_l(\mathbb{Z})$  принимает следующий вид

$$[x_r(t), x_s(u)] = \begin{cases} 1, & \text{если } r+s \notin \Phi; \\ x_{r+s}(\pm tu), & \text{если } r+s \in \Phi, r, s \in \Phi, \end{cases} \quad (2.11)$$

где  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ .

**Лемма 2.1.2.** *Группа Шевалле  $\Phi(\mathbb{Z})$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$  порождается корневыми элементами  $x_r(1)$ ,  $r \in \pm\Pi$ , где  $\Pi$  — фундаментальная система корней для  $\Phi$ .*

*Доказательство.* Пусть  $G = \langle x_r(1) \mid r \in \pm\Pi \rangle$ , тогда  $n_r \in G$  для  $r \in \pm\Pi$ . Фундаментальные отражения  $w_r$ ,  $r \in \pm\Pi$ , являются образами элементов  $n_r$ ,  $r \in \pm\Pi$ , при гомоморфизме  $N$  на  $W$ . В силу [18, Предложения 2.1.8, с.17] элементы  $w_r$ ,  $r \in \pm\Pi$ , порождают всю группу  $W$ . Значит  $n_s \in G$  для всех  $s \in \Phi$ . Так как

$$n_s x_r(t) n_s^{-1} = x_{w_s(r)}(\pm t)$$

и группа  $W$  действует транзитивно на корнях одинаковой длины, то  $x_r(1) \in G$ , для всех  $r \in \Phi$ . В силу следствия 3 из [17, с. 107] группа  $\Phi(K)$  порождается корневыми элементами  $x_r(1)$ ,  $r \in \Phi$ , значит  $G = \Phi(K)$ .  $\square$

Пусть  $\Pi = \{r_1, r_2, \dots, r_l\}$  — фундаментальная система корней для  $\Phi$ , причем, если  $\Phi$  типа  $E_l$ , то  $r_i + r_j$ ,  $i < j$ , является корнем тогда и только тогда, когда  $(i, j) = (l-3, l)$  или  $(i, i+1)$ ,  $1 \leq i \leq l-2$ . Тогда на графе Кокстера корни будут расположены как на рисунке 1.

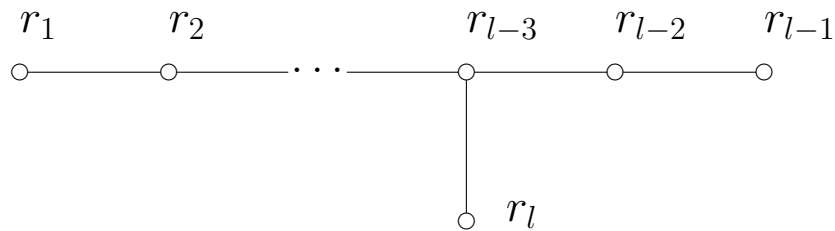


Рис. 1. Граф Кокстера системы корней типа  $E_l$

В [28] указаны порождающие множества для группы Вейля  $W$  типа  $\Phi$ , один из элементов которых является элемент Кокстера

$$w_c = w_{r_1} w_{r_2} \dots w_{r_l}.$$

Нам потребуется следующий частный случай этого результата для типов  $E_l$ .

**Лемма 2.1.3.** [28] *Если  $\Phi = E_l$ , то  $W = \langle w_{r_1}, w_c \rangle$ .*

**Лемма 2.1.4.** [3, таблицы VI-VIII] Пусть  $n = 9$  или  $15$ , если  $\Phi$  типа  $E_7$  или  $E_8$  соответственно. Тогда  $w_c^n(r) = -r$  для любого  $r \in \Phi$ .

Далее  $\Phi(\mathbb{Z})$  — присоединенная группа Шевалле типа  $\Phi$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$ . Она состоит из элементов группы Шевалле  $\Phi(\mathbb{Q})$  над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ , коэффициенты которых относительно решетки корней  $\mathbb{Z}(\Phi)$  лежат в  $\mathbb{Z}$ . Через  $H(\mathbb{Z})$  обозначим диагональную подгруппу группы  $\Phi(\mathbb{Z})$ . Подгруппа  $H(\mathbb{Z})$  порождается элементами  $h_r = h_r(-1)$ ,  $r \in \Phi$ .

**Лемма 2.1.5.** [17, с. 107]. Группа  $\Phi(\mathbb{Z})$  порождается элементами  $x_r(1)$ ,  $r \in \Phi$ .

Мультипликативная группа кольца целых чисел  $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$ , поэтому диагональная подгруппа  $H < \Phi(\mathbb{Z})$  порождается элементами  $h_r = h_r(-1)$ ,  $r \in \Phi$ .

**Лемма 2.1.6.** Пусть  $\mu = n_{r_1} n_{r_2} \dots n_{r_1} h$  для некоторого диагонального элемента  $h \in H < \Phi(\mathbb{Z})$ . Тогда:

- а)  $\Phi(\mathbb{Z}) = \langle \mu, x_{r_1}(1) \rangle$ , если  $\Phi$  типа  $E_7$  или  $E_8$ ;
- б)  $\Phi(\mathbb{Z}) = \langle \mu, x_{r_1}(1), x_{-r_1}(1) \rangle$ , если  $\Phi$  типа  $E_6$ .

*Доказательство.* Положим  $M = \langle \mu, x_{r_1}(1), x_{-r_1}(1) \rangle$ , если  $\Phi$  типа  $E_6$  и  $M = \langle \mu, x_{r_1}(1) \rangle$ , если  $\Phi$  типа  $E_7$  или  $E_8$ . Для  $\Phi$  типа  $E_7, E_8$ , элемент  $x_{-r_1}(1)$  лежит в  $M$  по лемме 2.1.4. Для  $\Phi$  типа  $E_6$ , по определению  $x_{-r_1}(1) \in M$ . Таким образом, в любом случае  $n_{r_1} = x_{r_1}(1)x_{-r_1}(-1)x_{r_1}(1) \in M$ . Отсюда и в силу леммы 2.1.3 все мономиальные элементы  $n_r$ ,  $r \in \Phi$ , лежат в  $M$ , а так как группа Вейля действует транзитивно на корнях одинаковой длины, то в силу (2.10) получаем включения  $x_r(1) \in M$  для всех  $r \in \Phi$ . Сейчас по лемме 2.1.5 получаем равенство  $\Phi(\mathbb{Z}) = M$ .  $\square$

Для любой системы корней множество её фундаментальных корней  $\Pi$  можно единственным образом разбить на два непересекающихся подмножества  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  попарно ортогональных корней. Далее всегда  $r_1 \in \Pi_1$ , а  $w_{\Pi_i}$  есть произведение всех  $w_{r_j}$ ,  $r_j \in \Pi_i$ ,  $i = 1, 2$ . Заметим, что элементы  $w_{\Pi_i}$  определены однозначно и имеют порядок 2, так как являются произведением отражений относительно попарно ортогональных корней.

Произведение всех фундаментальных отражений в некотором порядке называется элементом Кокстера. Хорошо известно, что элементы Кокстера

сопряжены в группе Вейля. Следующая лемма является частным случаем леммы 1 из [12] для типов  $E_l$  и дает явный вид сопрягающего элемента с определенными свойствами для двух конкретных элементов Кокстера:

$$w_c = w_{r_1} w_{r_2} \dots w_{r_l},$$

$$w_{c_1} = w_{\Pi_1} w_{\Pi_2}.$$

**Лемма 2.1.7.** Пусть  $\Phi$  типа  $E_l$ . Тогда существует такой элемент  $w$  из группы  $W$  типа  $\Phi$ , что

$$w_{c_1}^w = w w_{c_1} w^{-1} = w_c,$$

и выполняются следующие три равенства:

$$w(r_1) = r_1,$$

$$w(r_2) = r_2 + \dots + r_l,$$

$$w(r_3) = -r_3 - \dots - r_l.$$

Более того, элемент  $w$  явно указан в таблице 2 для каждого из типов  $E_l$ .

Таблица 2. Элемент  $w$  для групп Вейля типа  $E_l$

$\Phi$	$w$
$E_6$	$w_{r_5} w_{r_6} w_{r_4} w_{r_5} w_{r_3}$
$E_7$	$w_{r_6} w_{r_7} w_{r_5} w_{r_6} w_{r_4} w_{r_7} w_{r_5} w_{r_3}$
$E_8$	$w_{r_7} w_{r_8} w_{r_6} w_{r_7} w_{r_5} w_{r_8} w_{r_6} w_{r_4} w_{r_7} w_{r_5} w_{r_3}$

**Лемма 2.1.8.** [14, лемма 8] Пусть  $\{r, s\}$  — фундаментальная система корней типа  $A_2$ . Тогда

$$n_r x_s(t) x_{r+s}(t) n_r^{-1} = x_s(\varepsilon_1 t) x_{r+s}(\varepsilon_2 t),$$

где  $\varepsilon_i = \pm 1$ , и знаки у структурной константы  $N_{r,s}$ , можно выбрать так, что либо  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = -1$ , либо  $\varepsilon_1 = -1$ ,  $\varepsilon_2 = 1$ , причем оба случая реализуются.

**§ 2.2. Порождаемость группы Шевалле  $G_2(\mathbb{Z})$  тремя инволюциями, две из которых перестановочны.**

**Теорема 2.** *Группа Шевалле  $G_2(\mathbb{Z})$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$  порождается инволюциями*

$$\begin{aligned}\alpha &= x_a(1)h_b(-1), \\ \beta &= x_{-b}(1)h_a(-1), \\ \gamma &= n_a n_{3a+2b} h_b(-1),\end{aligned}$$

причем первые две из них перестановочны.

*Доказательство.* Наша цель — показать, что  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  является искомой тройкой инволюций порождающих группу  $G_2(\mathbb{Z})$ , причем  $\alpha\beta = \beta\alpha$ .

Покажем, что  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — инволюции. Применяя равенство (2.7) получаем

$$\alpha^2 = x_a(1)h_b(-1)x_a(1)h_b(-1) = x_a(1)x_a((-1)^{A_{ba}}) = 1,$$

так как

$$A_{ba} = \frac{2(b, a)}{(b, b)} = \frac{-2\sqrt{3}|b||a|}{2|b||b|} = 1.$$

Аналогично

$$\beta^2 = x_{-b}(1)h_a(-1)x_{-b}(1)h_a(-1) = x_{-b}(1)x_{-b}((-1)^{A_{a,-b}}) = 1,$$

так как

$$A_{a,-b} = \frac{2(a, -b)}{(a, a)} = \frac{2\sqrt{3}|a||b|}{2|a||a|} = 3.$$

Элементы  $n_a$  и  $n_{3a+2b}$  коммутируют, так как  $a \pm (3a+2b)$  не является корнем, отсюда

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= n_a n_{3a+2b} h_b(-1) n_a n_{3a+2b} h_b(-1) = \\ &= n_{3a+2b} n_a h_b(-1) n_a n_{3a+2b} h_b(-1) = \\ &= n_{3a+2b} h_{3a+b}(-1) h_a(-1) n_{3a+2b} h_b(-1) = \\ &= h_b(-1) h_a(-1) h_{3a+2b}(-1) h_b(-1) = 1.\end{aligned}$$

Последнее равенство верно в силу того, что диагональные элементы  $h_a(-1)$  и  $h_{3a+2b}(-1)$  действуют сопряжениями (2.7) одинаково на порождающих элементах  $x_{\pm a}(1)$  и  $x_{\pm b}(1)$  группы  $G_2(\mathbb{Z})$ . Отметим также, что в матричном представлении группы  $G_2(K)$  элементы  $h_a(-1)$  и  $h_{3a+2b}(-1)$  представляются матрицей  $\text{diag}(-1, -1, 1, 1, 1, -1, -1)$ .

Теперь покажем, что  $\alpha\beta = \beta\alpha$ . Последнее равенство, очевидно, эквивалентно равенству  $(\alpha\beta)^2 = 1$ . Применяя формулу (2.7), получаем

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)^2 &= x_a(1)h_b(-1)x_{-b}(1)h_a(-1)x_a(1)h_b(-1)x_{-b}(1)h_a(-1) = \\ &= h_b(1)h_a(1)x_a(-1)x_{-b}(-1)x_a(1)x_{-b}(1)h_b(-1)h_a(-1) = \\ &= h_b(1)h_a(1)x_a(-1)x_a(1)x_{-b}(-1)x_{-b}(1)h_b(-1)h_a(-1) = \\ &= h_b(1)h_a(1)h_b(-1)h_a(-1) = \\ &= h_b(1)h_b(-1)h_a(1)h_a(-1) = 1. \end{aligned}$$

Пусть  $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ . Покажем, что  $M = G_2(\mathbb{Z})$ .

$$\begin{aligned} \alpha^\gamma &= n_a n_{3a+2b} h_b(-1) x_a(1) h_b(-1) n_a n_{3a+2b} h_b(-1) = \\ &= n_a n_{3a+2b} x_a((-1)^{\frac{2(b,a)}{(b,b)}}) n_a n_{3a+2b} h_b(-1) = \\ &= n_a n_{3a+2b} x_a((-1)^{\frac{2\sqrt{3}|a||b|}{2|a||a|}}) n_a n_{3a+2b} h_b(-1) = \\ &= n_a n_{3a+2b} x_a((-1)^1) n_a n_{3a+2b} h_b(-1) = \\ &= n_{3a+2b} n_a x_a(-1) n_a n_{3a+2b} h_b(-1). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Далее нам потребуется 7-мерное матричное представление группы Шевалле  $G_2(K)$  из [7]. Зафиксируем фундаментальную систему корней  $\{a, b\}$  типа  $G_2$  с коротким корнем  $a$ . Тогда корневые элементы имеют следующее представление

$$\begin{aligned} x_a(t) &= e + t(e_{67} + 2e_{45} - e_{34} - e_{12}) - t^2 e_{35}, \\ x_{-a}(t) &= e + t(e_{76} + e_{54} - 2e_{43} - e_{21}) - t^2 e_{53}, \\ x_{a+b}(t) &= e + t(e_{13} - e_{24} + 2e_{46} - e_{57}) - t^2 e_{26}, \\ x_{-a-b}(t) &= e + t(e_{31} - 2e_{42} + e_{64} - e_{75}) - t^2 e_{62}, \\ x_{2a+b}(t) &= e + t(e_{47} + e_{36} - e_{25} - 2e_{14}) - t^2 e_{17}, \\ x_{-2a-b}(t) &= e + t(e_{74} + e_{63} - e_{52} - 2e_{41}) - t^2 e_{71}, \\ x_b(t) &= e + t(e_{56} - e_{23}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{-b}(t) &= e + t(e_{65} - e_{32}), \\
x_{3a+b}(t) &= e + t(e_{15} - e_{37}), \\
x_{-3a-b}(t) &= e + t(e_{51} - e_{73}), \\
x_{3a+2b}(t) &= e + t(e_{27} - e_{16}), \\
x_{-3a-2b}(t) &= e + t(e_{72} - e_{61}),
\end{aligned}$$

где  $e$  — единичная матрица,  $e_{ij}$  — матричные единицы.

В этом матричном представлении группы  $G_2(\mathbb{Z})$  элементы  $n_a$ ,  $n_{3a+2b}$  и  $x_a(-1)$  записываются следующими матрицами:

$$n_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$n_{3a+2b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x_a(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Вычисления показывают, что

$$n_{3a+2b}n_a x_a(-1)n_a n_{3a+2b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = x_{-a}(1).$$

Таким образом, в силу (2.12)

$$\alpha^\gamma = x_{-a}(1)h_b(-1).$$

Положим

$$\theta = \alpha\alpha^\gamma = x_a(1)x_{-a}(-1)$$

и покажем, что  $\theta^3 = h_a(-1)$ . В силу того, что отображение  $\psi$  из леммы 2.1.1 является изоморфизмом, перейдем к матричному виду элементов из подгруппы  $\langle X_a, X_{-a} \rangle$ . Тогда прямые вычисления с матрицами второго порядка дают следующие равенства

$$\begin{aligned} \theta^3 &= (x_a(1)x_{-a}(-1))^3 = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)^3 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = h_a(-1). \end{aligned}$$

Отсюда

$$h_a(-1) \in M. \tag{2.13}$$

Далее

$$\beta^\gamma = x_b(\pm 1)h_a(-1). \tag{2.14}$$

Из (2.14) следует, что  $x_b(\pm 1) = \beta^\gamma h_a(-1)$ . Принимая во внимание (2.13), получаем, что и

$$x_b(\pm 1) \in M.$$

По определению  $n_b = x_b(1)x_{-b}(-1)x_b(1)$  и так как  $x_{-b}(\pm 1) = (x_b(1))^\gamma$ , то  $n_b \in M$ . Отсюда

$$n_b^2 = h_b(-1) \in M. \quad (2.15)$$

Из включения (2.15) и равенства  $x_a(1) = \alpha h_b(-1)$  получаем

$$x_a(1) \in M.$$

Кольцо целых чисел  $\mathbb{Z}$  является евклидовым кольцом, поэтому в силу леммы 2.1.2 и полученных выше включений

$$x_{\pm a}(1), x_{\pm b}(1) \in M$$

получаем равенство

$$M = G_2(\mathbb{Z}).$$

Таким образом, группа  $G_2(\mathbb{Z})$  порождается тремя инволюциями  $\alpha, \beta, \gamma$ , первые две из которых перестановочны.  $\square$

### § 2.3. Порождаемость групп Шевалле $E_l(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны.

**Теорема 3.** *Присоединенные группы Шевалле типа  $E_l$  над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

*Доказательство.* Инволюции представлены в таблице 3,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  перестановочны. Пусть при  $s = r_1$  и  $r = r_2$  из леммы 2.1.8 знаки у структурных констант выбраны так, что  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$ . Положим  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  в каждой группе типа  $E_l$  в соответствие с таблицей 3.

Покажем, что  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_3$  — инволюции. Для системы корней типа  $\Phi = E_l$   $A_{r,s} = \pm 1$ , если  $s + r$  или  $s - r$  — корень, поэтому, применяя равенство (2.7), получаем

$$\alpha_1^2 = x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2} =$$

Таблица 3. Инволюции в  $E_l(\mathbb{Z})$ 

Группа	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$E_6(\mathbb{Z})$	$x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}h_{r_3}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}h_{r_2}h_{r_4}h_{r_6}$
$E_7(\mathbb{Z})$	$x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}h_{r_3}h_{r_5}h_{r_7}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6}$
$E_8(\mathbb{Z})$	$x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}n_{r_8}h_{r_5}h_{r_1}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6}h_{r_2}$

$$\begin{aligned}
&= x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}x_{r_1}(1)h_{r_2}h_{r_2}x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2} = \\
&= x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)x_{r_1}((-1)^{Ar_2r_1})x_{r_1+r_2}((-1)^{Ar_2r_1+r_2}) = 1.
\end{aligned}$$

Равенства  $\alpha_2^2 = 1$ ,  $\alpha_3^2 = 1$  устанавливают леммы 10 и 12 из [14]. В связи с замечанием в конце параграфа проверим еще раз равенство  $\alpha_3^2 = 1$  для группы  $E_7(\mathbb{Z})$ . Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}
\alpha_3^2 &= (n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6})^2 = \\
&= n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6}n_{r_7}n_{r_5}n_{r_3}n_{r_1}h_{r_6} = \\
&= n_{r_5}h_{r_6}n_{r_5}h_{r_6} = \\
&= h_{r_6}^{n_{r_5}}n_{r_5}^2n_{r_7}^2n_{r_3}^2n_{r_1}^2h_{r_6} = \\
&= h_{r_5+r_6}h_{r_5}h_{r_7}h_{r_3}h_{r_1}h_{r_6} = \\
&= h_{r_1}h_{r_3}h_{r_7}.
\end{aligned}$$

Элемент  $h_{r_1}h_{r_3}h_{r_7}$  централизует каждый корневой элемент из группы  $E_7(\mathbb{Z})$ , следовательно, равен единице в присоединенной группе Шевалле  $E_7(\mathbb{Z})$ .

Проверим равенство  $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1$  для типа  $E_6$ . Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}
(\alpha_1\alpha_2)^2 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_2^{-1} = \\
&= x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}h_{r_3}x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_3}^{-1}n_{r_6}^{-1}n_{r_4}^{-1}n_{r_2}^{-1} = \\
&= x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)n_{r_2}x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(-1)n_{r_2}^{-1} = 1.
\end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу леммы 2.1.8. Аналогично получаем, что  $(\alpha_1\alpha_2)^2 = 1$  в группах  $E_7(\mathbb{Z})$  и  $E_8(\mathbb{Z})$ .  $\square$

Таким образом, показано, что элементы  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_3$  являются инволюциями, причем  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  перестановочны. Теперь покажем, что эти элементы порождают группы  $E_l$ .

В силу леммы 2.1.7 в группе  $E_l(\mathbb{Z})$  существуют такие элементы  $w \in W$  и  $h \in H$ , что

$$\begin{aligned} (\alpha_2\alpha_3)^{n_w} &= n_{r_1}n_{r_2}\dots n_{r_l}h, \\ \alpha_1^{n_w} &= x_{r_1}\left(\prod \eta_{r_i,s_j}\right)x_{r_1+\dots+r_l}\left(\prod \eta_{r_k,s_m}\right)h_{r_2+\dots+r_l} = \\ &= x_{r_1}(\pm 1)x_{r_1+\dots+r_l}(\pm 1)h_{r_2+\dots+r_l}. \end{aligned}$$

Произведения вида  $\prod \eta_{r_i,s_j}$  далее будем записывать как  $\pm 1$ , так как эти произведения определяются заданием структурных констант для экстраспециальных пар системы корней.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1^{n_w}, \\ \mu &= (\alpha_2\alpha_3)^{n_w}, \\ M &= \langle \alpha, \mu \rangle \end{aligned}$$

и покажем, что  $M = E_l(\mathbb{Z})$ . В силу равенств

$$\begin{aligned} (x_s(t))^{\mu^n} &= x_{w_c^n(s)}(\pm t), \\ (h_s)^{\mu^n} &= h_{w_c^n(s)}, \end{aligned}$$

для доказательства нам потребуются орбиты при действии элементом Кокстера  $w_c$  на корнях из систем корней типа  $E_l$ , указанные в таблицах 4-8.

Далее рассмотрим каждый из типов  $E_6, E_7, E_8$  по очереди.

**Тип  $E_6$ .** В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \alpha^\mu &= x_{r_2}(\pm 1)x_{-r_1}(\pm 1)h_{-r_1-r_2} \in M, \\ \alpha^{\mu^2} &= x_{r_3}(\pm 1)x_{-r_2}(\pm 1)h_{-r_2-r_3} \in M, \\ \alpha^{\mu^3} &= x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_6}(\pm 1)x_{-r_3}(\pm 1)h_{-r_1-r_2-2r_3-r_4-r_6} \in M, \\ \alpha^{\mu^5} &= x_{r_3+r_6}(\pm 1)x_{-r_2-r_3-r_4-r_5}(\pm 1)h_{-r_2-2r_3-r_4-r_5-r_6} \in M, \\ \alpha^{\mu^7} &= x_{r_5}(\pm 1)x_{-r_4}(\pm 1)h_{-r_4-r_5} \in M, \end{aligned}$$

$$\alpha^{\mu^9} = x_{-r_2-r_3-r_6}(\pm 1)x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}(\pm 1)h_{r_1+2r_2+2r_3+r_4+r_5+r_6} \in M.$$

Далее

$$[\alpha, \alpha^{\mu^3}] = x_{r_1}(\pm 2)x_{-r_3}(\pm 2) \in M,$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^7}] = x_{r_1+\dots+r_6}(\pm 2)x_{r_5}(\pm 2) \in M,$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^9}] = x_{r_1+\dots+r_6}(\pm 2)x_{-r_2-r_3-r_6}(\pm 2) \in M,$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^7}] \times [\alpha, \alpha^{\mu^9}] = x_{-r_2-r_3-r_6}(\pm 2)x_{r_5}(\pm 2) \in M,$$

$$[x_{-r_2-r_3-r_6}(\pm 2)x_{r_5}(\pm 2), \alpha^{\mu^2}] = x_{-r_2-r_3-r_6}(\pm 4) \in M,$$

$$x_{-r_2-r_3-r_6}^{\mu^3}(\pm 4) = x_{r_1}(\pm 4) \in M, \quad (2.16)$$

$$(x_{-r_2-r_3-r_6}(\pm 4)\alpha^{\mu^5})^2 = x_{-r_2}(\pm 4) \in M,$$

$$x_{-r_2}^{\mu}(\pm 4) = x_{-r_3}(\pm 4) \in M, \quad (2.17)$$

$$[\alpha^{\mu}, [\alpha, \alpha^{\mu^3}]] = x_{r_1}(\pm 4)x_{-r_3}(\pm 4)x_{r_1+r_2}(\pm 2) \in M. \quad (2.18)$$

Элемент  $x_{r_1+r_2}(\pm 2)$  лежит в  $M$  в силу включений (2.16), (2.17) и (2.18). Вычисления показывают, что

$$[\alpha^{\mu}, x_{r_1+r_2}(\pm 2)] = x_{r_2}(\pm 2) \in M,$$

$$x_{r_2}^{\mu^6}(\pm 2) = x_{r_5}(\pm 2) \in M,$$

$$x_{r_2}^{\mu^{11}}(\pm 2) = x_{r_1}(\pm 2) \in M, \quad (2.19)$$

$$x_{r_2}^\mu(\pm 2) = x_{r_3}(\pm 2) \in M, \quad (2.20)$$

$$(x_{r_1+r_2}(\pm 2)\alpha^{\mu^5})^2 = x_{r_1+r_2+r_3+r_6}(\pm 2) \in M,$$

$$x_{r_1+r_2+r_3+r_6}^{\mu^5}(\pm 2) = x_{r_6}(\pm 2) \in M,$$

$$x_{r_3}^{\mu^{11}}(\pm 2) = x_{-r_2}(\pm 2) \in M, \quad (2.21)$$

$$x_{r_3}^{\mu^9}(\pm 2) = x_{r_1+\dots+r_6}(\pm 2) \in M, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} [\alpha, \alpha^{\mu^2}] &= x_{r_1}(\pm 2)x_{r_1+r_2+2r_3+r_4+r_5+r_6}(\pm 1) \times \\ &\times x_{r_3}(\pm 2)x_{r_1+\dots+r_6}(\pm 2)x_{-r_2}(\pm 2) \in M. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Из включений (2.19), (2.20), (2.21), (2.22) и (2.23) получаем

$$x_{r_1+r_2+2r_3+r_4+r_5+r_6}(\pm 1) \in M.$$

Поэтому последовательно получаем, что в  $M$  лежат и следующие элементы

$$x_{r_1+r_2+2r_3+r_4+r_5+r_6}^{\mu^3}(\pm 1) = x_{r_6}(\pm 1),$$

$$(x_{r_6}(\pm 1)\alpha^{\mu^2})^2 = x_{r_3+r_6}(\pm 1),$$

$$x_{r_3+r_6}^{\mu^7}(\pm 1) = x_{r_1}(\pm 1), \quad (2.24)$$

$$x_{r_1}^{\mu^7}(\pm 1) = x_{r_5}(\pm 1),$$

$$(x_{r_5}(\pm 1), \alpha^{\mu^3})^2 = x_{r_1+\dots+r_6}(\pm 1),$$

$$x_{r_1+\dots+r_6}^\mu(\pm 1) = x_{-r_1}(\pm 1). \quad (2.25)$$

Таблица 4. Орбиты при действии элементом Кокстера  $w_c$  на корнях системы типа  $E_6$

$s$	$r_1$	$r_1 + r_2$
$w_c(s)$	$r_2$	$r_2 + r_3$
$w_c^2(s)$	$r_3$	$r_1 + r_2 + 2r_3 + r_4 + r_6$
$w_c^3(s)$	$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_6$	$r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 2r_4 + r_5 + r_6$
$w_c^4(s)$	$r_2 + r_3 + r_4 + r_5$	$r_2 + 2r_3 + r_4 + r_5 + r_6$
$w_c^5(s)$	$r_3 + r_6$	$r_3 + r_4 + r_6$
$w_c^6(s)$	$r_4$	$r_4 + r_5$
$w_c^7(s)$	$r_5$	$-r_1 - r_2 - r_3 - r_4$
$w_c^8(s)$	$-r_1 - r_2 - r_3 - r_4 - r_5$	$-r_1 - 2r_2 - 2r_3 - r_4 - r_5 - r_6$
$w_c^9(s)$	$-r_2 - r_3 - r_6$	$-r_2 - 2r_3 - r_4 - r_6$
$w_c^{10}(s)$	$-r_3 - r_4$	$-r_1 - r_2 - 2r_3 - 2r_4 - r_5 - r_6$
$w_c^{11}(s)$	$-r_1 - r_2 - r_3 - r_4 - r_5 - r_6$	$-r_2 - r_3 - r_4 - r_5 - r_6$
$w_c^{12}(s)$	$r_1$	$r_1 + r_2$

Таблица 5. Орбиты при действии элементом Кокстера  $w_c$  на корнях системы типа  $E_6$

$s$	$-r_1$	$r_6$
$w_c(s)$	$-r_2$	$-r_1 - r_2 - r_3 - r_6$
$w_c^2(s)$	$-r_3$	$-r_2 - r_3 - r_4$
$w_c^3(s)$	$-r_1 - r_2 - r_3 - r_4 - r_6$	$-r_1 - r_2 - 2r_3 - r_4 - r_5 - r_6$
$w_c^4(s)$	$-r_2 - r_3 - r_4 - r_5$	$-r_2 - r_3 - r_4 - r_6$
$w_c^5(s)$	$-r_3 - r_6$	$-r_3 - r_4 - r_5$
$w_c^6(s)$	$-r_4$	$-r_6$
$w_c^7(s)$	$-r_5$	$r_1 + r_2 + r_3 + r_6$
$w_c^8(s)$	$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5$	$r_2 + r_3 + r_4$
$w_c^9(s)$	$r_2 + r_3 + r_6$	$r_1 + r_2 + 2r_3 + r_4 + r_5 + r_6$
$w_c^{10}(s)$	$r_3 + r_4$	$r_2 + r_3 + r_4 + r_6$
$w_c^{11}(s)$	$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6$	$r_3 + r_4 + r_5$
$w_c^{12}(s)$	$-r_1$	$r_6$

Таким образом, элементы  $x_{-r_1}(\pm 1)$ ,  $x_{r_1}(\pm 1)$  и  $\mu$  лежат в  $M$ , то есть  $M$  удовлетворяет условиям леммы 2.1.6 и, следовательно, совпадает с  $E_6(\mathbb{Z})$ .

**Тип  $E_7$ .** В этом случае имеем

$$\alpha^{\mu^2} = x_{r_3}(\pm 1)x_{-r_2}(\pm 1)h_{r_2+r_3} \in M,$$

$$\alpha^{\mu^3} = x_{r_4}(\pm 1)x_{-r_3}(\pm 1)h_{r_3+r_4} \in M,$$

$$\alpha^{\mu^4} = x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_7}(\pm 1)x_{-r_4}(\pm 1)h_{-r_1-r_2-r_3-2r_4-r_5-r_7} \in M,$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^2}] = x_{r_1}(\pm 2)x_{-r_2}(\pm 2) \in M,$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^2}]^{\mu^9} = x_{-r_1}(\pm 2)x_{r_2}(\pm 2) \in M,$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^2}]^{\mu} = x_{r_2}(\pm 2)x_{-r_3}(\pm 2) \in M.$$

Положим

$$\gamma = [\alpha, \alpha^{\mu^2}]^{\mu^9} \times [\alpha, \alpha^{\mu^2}]^{\mu} = x_{-r_1}(\pm 2)x_{-r_3}(\pm 2) \in M.$$

Тогда элементы

$$\gamma^{\mu^9} = x_{r_1}(\pm 2)x_{r_3}(\pm 2),$$

$$[\alpha, \gamma^{\mu^9}] = x_{r_1}(\pm 4),$$

$$[\alpha^{\mu}, \alpha^{\mu^2}] = x_{r_2}(\pm 2)x_{-r_3}(\pm 2)$$

также лежат в подгруппе  $M$ . Вычисления показывают, что

$$[[\alpha, \alpha^{\mu^2}], \alpha^{\mu^3}] = x_{-r_2-r_3}(\pm 2)x_{-r_2}(\pm 4) \in M, \quad (2.26)$$

$$x_{r_1}^{\mu^{10}}(\pm 4) = x_{-r_2}(\pm 4) \in M. \quad (2.27)$$



В силу (2.26) и (2.27) имеем  $x_{-r_2-r_3}(\pm 2) \in M$ . Далее

$$[x_{-r_2-r_3}(\pm 2), \alpha^{\mu^2}] = x_{-r_2}(\pm 2) \in M,$$

$$x_{-r_2}^{\mu^{11}}(\pm 2) = x_{r_4}(\pm 2) \in M, \quad (2.28)$$

$$x_{r_4}^{\mu^5}(\pm 2) = x_{r_1+\dots+r_7}(\pm 2) \in M, \quad (2.29)$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^3}] = x_{r_1+r_2+r_3+2r_4+r_5+r_6+r_7}(\pm 1)x_{r_1+\dots+r_7}(\pm 2)x_{r_4}(\pm 2) \in M. \quad (2.30)$$

Элемент  $x_{r_1+r_2+r_3+2r_4+r_5+r_6+r_7}(\pm 1)$  лежит в  $M$  в силу (2.28), (2.29) и (2.30).

Значит, элементы

$$x_{r_6}(\pm 1) = x_{r_1+r_2+r_3+2r_4+r_5+r_6+r_7}^{\mu^3}(\pm 1),$$

$$(x_{r_6}(\pm 1)\alpha^{\mu^4})^2 = x_{r_1+\dots+r_7}(\pm 1),$$

$$x_{r_1+\dots+r_7}^{\mu^{10}}(\pm 1) = x_{r_1}(\pm 1) \quad (2.31)$$

также лежат в  $M$ . Таким образом, в силу (2.31) подгруппа  $M$  удовлетворяет требованиям леммы 2.1.6, и, следовательно, совпадает с  $E_7(\mathbb{Z})$ .

**Тип  $E_8$ .** В этом случае имеем

$$\alpha^{\mu^2} = x_{r_3}(\pm 1)x_{-r_2}(\pm 1)h_{r_2+r_3} \in M,$$

$$\alpha^{\mu^4} = x_{r_5}(\pm 1)x_{-r_4}(\pm 1)h_{r_4+r_5} \in M.$$

Отсюда

$$[\alpha, \alpha^{\mu^2}] = x_{r_1}(\pm 2)x_{-r_2}(\pm 2) \in M.$$

Таблица 6. Половины орбит при действии элементом Кокстера  $w_c$  на на корнях системы типа  $E_7$

$s$	$r_1$	$r_1 + r_2$
$w_c(s)$	$r_2$	$r_2 + r_3$
$w_c^2(s)$	$r_3$	$r_3 + r_4$
$w_c^3(s)$	$r_4$	$r_1 + r_2 + r_3 + 2r_4 + r_5 + r_7$
$w_c^4(s)$	$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_7$	$r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 2r_4 + 2r_5 + r_6 + r_7$
$w_c^5(s)$	$r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6$	$r_2 + 2r_3 + 2r_4 + r_5 + r_6 + r_7$
$w_c^6(s)$	$r_3 + r_4 + r_7$	$r_3 + 2r_4 + r_5 + r_7$
$w_c^7(s)$	$r_4 + r_5$	$r_1 + r_2 + r_3 + 2r_4 + 2r_5 + r_6 + r_7$
$w_c^8(s)$	$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7$	$r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7$
$w_c^9(s)$	$-r_1$	$-r_1 - r_2$

Из леммы 2.1.5 следует, что  $x_r(t)^{\mu^{15}} = x_{-r}(t)$ , поэтому половины орбит, не указанные в таблицах 7-8, можно найти, применив это равенство. Положим

$$\gamma = x_{-r_1}(\pm 2)x_{-r_3}(\pm 2).$$

Тогда

$$[\alpha, \alpha^{\mu^2}]^{\mu^{15}} = x_{-r_1}(\pm 2)x_{r_2}(\pm 2) \in M,$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^2}]^{\mu} = x_{r_2}(\pm 2)x_{-r_3}(\pm 2) \in M.$$

Далее

$$[\alpha^{\mu^4}, \gamma] = x_{-r_4}(\pm 4)x_{-r_3-r_4}(\pm 2) \in M,$$

$$\gamma^n = x_{r_1}(\pm 2)x_{r_3}(\pm 2) \in M,$$

$$[\alpha, \gamma^{\mu^{15}}] = x_{r_1}(\pm 4) \in M.$$

Очевидно

$$x_{r_1}^{\mu^{15}}(\pm 4) = x_{-r_1}(\pm 4) \in M,$$

$$x_{-r_1}(\pm 4)^{\mu^3} = x_{-r_4}(\pm 4) \in M$$

и, следовательно,

$$x_{-r_4}(\pm 4)[\alpha^{\mu^4}, \gamma] = x_{-r_3-r_4}(\pm 2) \in M.$$

Используя последние включения, получаем

$$[x_{-r_3-r_4}(\pm 2), \alpha^{\mu^3}] = x_{-r_3}(\pm 2) \in M,$$

$$x_{-r_3}^{\mu^{-3}}(\pm 2) = x_{r_1+r_2+\dots+r_8}(\pm 2) \in M, \quad (2.32)$$

$$[\alpha, \alpha^{\mu^4}] = x_{r_1+\dots+r_8}(\pm 2)x_{r_1+r_2+r_3+r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8}(\pm 1)x_{r_5}(\pm 2) \in M, \quad (2.33)$$

$$x_{-r_3}^{\mu^{15}}(\pm 2) = x_{r_3}(\pm 2) \in M,$$

$$x_{r_3}(\pm 2)^{\mu^2} = x_{r_5}(\pm 2) \in M. \quad (2.34)$$

Элемент  $x_{r_1+r_2+r_3+r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8}(\pm 1)$  лежит в  $M$  в силу (2.33), (2.32) и (2.34).

Поэтому

$$x_{r_1+r_2+r_3+r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8}^{\mu^{-9}}(\pm 1) = x_{r_1}(\pm 1) \in M.$$

Таким образом, подгруппа  $M$  удовлетворяет условиям леммы 2.1.6 и, следовательно,  $M = E_8(\mathbb{Z})$ . □

**Замечание.** Над кольцом  $\mathbb{Z}$  каждая присоединенная группа Шевалле исключительного типа, отличного от  $E_7$ , совпадает с универсальной. Выше порождающие тройки инволюций для типа  $E_7$  выбираются именно в присоединенной группе. Таким образом, ответ на аналог вопроса (А) для универсальной группы Шевалле типа  $E_7$  остается открытым. Более того, следующая лемма показывает, что, если для универсальной группы Шевалле типа

Таблица 7. Половина орбиты при действии элементом Кокстера  $w_c$  на корнях системы типа  $E_8$

$s$	$r_1$
$w_c(s)$	$r_2$
$w_c^2(s)$	$r_3$
$w_c^3(s)$	$r_4$
$w_c^4(s)$	$r_5$
$w_c^5(s)$	$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_8$
$w_c^6(s)$	$r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7$
$w_c^7(s)$	$r_3 + r_4 + r_5 + r_8$
$w_c^8(s)$	$r_4 + r_5 + r_6$
$w_c^9(s)$	$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 2r_5 + r_6 + r_7 + r_8$
$w_c^{10}(s)$	$r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_8$
$w_c^{11}(s)$	$r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7$
$w_c^{12}(s)$	$r_4 + r_5 + r_8$
$w_c^{13}(s)$	$r_5 + r_6$
$w_c^{14}(s)$	$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7 + r_8$
$w_c^{15}(s)$	$-r_1$

$E_7$  вопрос (А) решается положительно, то необходимые порождающие тройки инволюций нельзя выбрать указанным выше способом.

**Лемма 2.3.1.** Пусть  $\tilde{E}_7(\mathbb{Z})$  – универсальная группа Шевалле типа  $E_7$ . Тогда не существует такого диагонального элемента  $h$  из  $\tilde{E}_7(\mathbb{Z})$ , что

$$(n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h)^2 = 1.$$

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что прообраз элемента  $\alpha_3$  из таблицы 2 для типа  $E_7$  в универсальной группе  $\tilde{E}_7(\mathbb{Z})$  имеет порядок 4. Предположим, что существует такой диагональный элемент  $h \in \tilde{E}_7(\mathbb{Z})$ , что  $(n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h)^2 = 1$ . Тогда в силу (2.8) элемент  $h$  можно представить в виде

$$h_{r_1}(\varepsilon_1)h_{r_2}(\varepsilon_2)h_{r_3}(\varepsilon_3)h_{r_4}(\varepsilon_4)h_{r_5}(\varepsilon_5)h_{r_6}(\varepsilon_6)h_{r_7}(\varepsilon_7), \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Вычисления показывают, что

$$(n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_1}(\varepsilon_1)h_{r_2}(\varepsilon_2)h_{r_3}(\varepsilon_3)h_{r_4}(\varepsilon_4)h_{r_5}(\varepsilon_5)h_{r_6}(\varepsilon_6)h_{r_7}(\varepsilon_7))^2 =$$

Таблица 8. Половина орбиты при действии элементом Кокстера  $w_c$  на корнях системы типа  $E_8$

$s$	$r_1 + r_2$
$w_c(s)$	$r_2 + r_3$
$w_c^2(s)$	$r_3 + r_4$
$w_c^3(s)$	$r_4 + r_5$
$w_c^4(s)$	$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 2r_5 + r_6 + r_8$
$w_c^5(s)$	$r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 2r_4 + 2r_5 + 2r_6 + r_7 + r_8$
$w_c^6(s)$	$r_2 + 2r_3 + 2r_4 + 2r_5 + r_6 + r_7 + r_8$
$w_c^7(s)$	$r_3 + 2r_4 + 2r_5 + r_6 + r_8$
$w_c^8(s)$	$r_1 + r_2 + r_3 + 2r_4 + 3r_5 + 2r_6 + r_7 + r_8$
$w_c^9(s)$	$r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 2r_4 + 3r_5 + 2r_6 + r_7 + 2r_8$
$w_c^{10}(s)$	$r_2 + 2r_3 + 2r_4 + 2r_5 + 2r_6 + r_7 + r_8$
$w_c^{11}(s)$	$r_3 + 2r_4 + 2r_5 + r_6 + r_7 + r_8$
$w_c^{12}(s)$	$r_4 + 2r_5 + r_6 + r_8$
$w_c^{13}(s)$	$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 2r_5 + 2r_6 + r_7 + r_8$
$w_c^{14}(s)$	$r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7 + r_8$
$w_c^{15}(s)$	$-r_1 - r_2$

$$\begin{aligned}
& n_{r_1} n_{r_3} n_{r_5} n_{r_7} h_{r_1}(\varepsilon_1) h_{r_2}(\varepsilon_2) h_{r_3}(\varepsilon_3) h_{r_4}(\varepsilon_4) h_{r_5}(\varepsilon_5) h_{r_6}(\varepsilon_6) h_{r_7}(\varepsilon_7) n_{r_7} n_{r_5} n_{r_3} n_{r_1} \times \\
& \quad \times h_{r_1}(\varepsilon_1) h_{r_2}(\varepsilon_2) h_{r_3}(\varepsilon_3) h_{r_4}(\varepsilon_4) h_{r_5}(\varepsilon_5) h_{r_6}(\varepsilon_6) h_{r_7}(\varepsilon_7) = \\
& = n_{r_1} n_{r_3} n_{r_5} h_{r_1}^{n_{r_7}}(\varepsilon_1) h_{r_2}^{n_{r_7}}(\varepsilon_2) h_{r_3}^{n_{r_7}}(\varepsilon_3) h_{r_4}^{n_{r_7}}(\varepsilon_4) h_{r_5}^{n_{r_7}}(\varepsilon_5) h_{r_6}^{n_{r_7}}(\varepsilon_6) h_{r_7}^{n_{r_7}}(\varepsilon_7) n_{r_7}^2 n_{r_5} n_{r_3} n_{r_1} \times \\
& \quad \times h_{r_1}(\varepsilon_1) h_{r_2}(\varepsilon_2) h_{r_3}(\varepsilon_3) h_{r_4}(\varepsilon_4) h_{r_5}(\varepsilon_5) h_{r_6}(\varepsilon_6) h_{r_7}(\varepsilon_7) = \\
& = n_{r_1} n_{r_3} n_{r_5} h_{r_1}(\varepsilon_1) h_{r_2}(\varepsilon_2) h_{r_3}(\varepsilon_3) h_{r_4+r_7}(\varepsilon_4) h_{r_5}(\varepsilon_5) h_{r_6+r_7}(\varepsilon_6) h_{r_7}(\varepsilon_7) n_{r_7}^2 n_{r_5} n_{r_3} n_{r_1} \times \\
& \quad \times h_{r_1}(\varepsilon_1) h_{r_2}(\varepsilon_2) h_{r_3}(\varepsilon_3) h_{r_4}(\varepsilon_4) h_{r_5}(\varepsilon_5) h_{r_6}(\varepsilon_6) h_{r_7}(\varepsilon_7).
\end{aligned}$$

Аналогично сопрягаем элементами  $n_{r_5}$ ,  $n_{r_3}$ ,  $n_{r_1}$  и, используя свойство (2.6), последнее произведение преобразуется в

$$\begin{aligned}
& h_{r_1}(\varepsilon_1) h_{r_1+r_2+r_3}(\varepsilon_2) h_{r_3}(\varepsilon_3) h_{r_3+r_4+r_5+r_7}(\varepsilon_4) h_{r_5}(\varepsilon_5) h_{r_5+r_6}(\varepsilon_6) h_{r_7}(\varepsilon_7) h_{r_7} h_{r_5} h_{r_3} h_{r_1} \times \\
& \quad \times h_{r_1}(\varepsilon_1) h_{r_2}(\varepsilon_2) h_{r_3}(\varepsilon_3) h_{r_4}(\varepsilon_4) h_{r_5}(\varepsilon_5) h_{r_6}(\varepsilon_6) h_{r_7}(\varepsilon_7).
\end{aligned}$$

Используя (2.8), приведем подобные и получим

$$h_{r_1}(-\varepsilon_1^2\varepsilon_2)h_{r_2}(\varepsilon_2^2)h_{r_3}(-\varepsilon_2\varepsilon_3^2\varepsilon_4)h_{r_4}(\varepsilon_4^2)h_{r_5}(-\varepsilon_4\varepsilon_5^2\varepsilon_6)h_{r_6}(\varepsilon_6^2)h_{r_7}(-\varepsilon_4\varepsilon_7^2).$$

Последнее произведение равно 1, тогда и только тогда, когда

$$-\varepsilon_1^2\varepsilon_2 = \varepsilon_2^2 = -\varepsilon_2\varepsilon_3^2\varepsilon_4 = \varepsilon_4^2 = -\varepsilon_4\varepsilon_5^2\varepsilon_6 = \varepsilon_6^2 = -\varepsilon_4\varepsilon_7^2 = 1.$$

Используя равенство  $\varepsilon_i^2 = 1$ , получим серию противоречивых равенств

$$-\varepsilon_2 = -\varepsilon_2\varepsilon_4 = -\varepsilon_4\varepsilon_6 = -\varepsilon_4 = 1.$$

□

### 3. Группы $SL_6(\mathbb{Z})$ и $SL_{10}(p)$

В этой главе исследован вопрос А) для групп  $SL_6(\mathbb{Z})$  и  $SL_{10}(p)$ , где  $p$  — простое число. Теоремы 3.2.1 и 3.3.1 указывают явно порождающие тройки инволюций групп  $SL_6(\mathbb{Z})$  и соответственно  $SL_{10}(p)$ .

#### § 3.1. Обозначения и известные результаты

Наряду с матричной записью элементов из группы  $SL_n(\mathbb{Z})$ , будем использовать терминологию групп Шевалле, рассматривая  $SL_n(\mathbb{Z})$  как группу Шевалле типа  $A_{n-1}$ .

Пусть  $\Phi$  — система корней типа  $A_l$  с базой  $\Pi = \{r_1, r_2, \dots, r_l\}$ ,  $l = n - 1$ . Группа Шевалле  $A_l(\mathbb{Z})$  типа  $A_l$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$  порождается своими корневыми элементами  $x_r(1)$ ,  $r \in \Phi$ .

Для любого  $r \in \Phi$  и  $t \neq 0$  положим

$$n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t),$$

$$n_r = n_r(-1),$$

$$h_r = n_r^2.$$

Отображение

$$t_{i-1i}(t) \rightarrow x_{r_i}(t), \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad t \in \mathbb{Z},$$

продолжается до изоморфизма группы  $SL_n(\mathbb{Z})$  на универсальную группу Шевалле  $A_l(\mathbb{Z})$

**Лемма 3.1.1.** *Группа Шевалле  $A_l(\mathbb{Z})$  порождается любым корневым элементом*

$$x_{\pm r_i}(\pm 1), r_i \in \Pi$$

*и мономиальными элементами  $n_{r_i}$   $i = 1, \dots, l$ .*

*Доказательство.* Фактор-группа группы по своему центру, порожденной мономиальными элементами  $n_{r_i}$   $i = 1, \dots, l$  изоморфна группе Вейля, которая действует транзитивно на корнях одинаковой длины.  $\square$

### § 3.2. Порождаемость группы $SL_6(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями

В этом разделе рассматривается вопрос о  $(2, 2, 2)$ -порождаемости группы  $SL_6(\mathbb{Z})$ .

**Предложение 3.2.1.** *Группа  $SL_6(\mathbb{Z})$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$  порождается тремя следующими инволюциями:*

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.* На языке групп Шевалле эти элементы имеют вид

$$\alpha = x_{r_1}(1)h_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}n_{r_5},$$

$$\beta = n'_{r_1}n'_{r_3},$$

$$\gamma = n'_{r_2}n'_{r_4}.$$





Далее

$$\theta = \gamma\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = n'_{r_2} n'_{r_5},$$

$$\alpha_2 = \beta^{-1}\delta^{-1}\alpha\delta\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{-r_1}(1)h_{r_2}n'_{r_3+r_4},$$

$$\rho = \chi\delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{-r_1}(2)x_{r_2}(-1).$$

Затем

$$\chi_2 = \rho^{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{-r_1}(-2)x_{r_2+r_3+r_4}(1),$$

$$\chi_3 = \chi_2^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{r_1}(-2)x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(1),$$

$$\chi_4 = \chi_3^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{r_1}(2)x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}(1),$$

$$\chi_5 = \chi_4^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{r_1+r_2}(2)x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}(-1).$$

Теперь

$$\eta = \chi_2\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{r_2}(-1)x_{r_2+r_3+r_4}(1),$$

$$\eta_2 = \eta^\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{r_2}(-1)x_{r_2} + r_3(1),$$

$$\eta_3 = \eta_2^\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{-r_2}(-1)x_{r_3}(1),$$

$$\eta_4 = \eta_3^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{-r_2}(-1)x_{r_3+r_4}(1),$$

$$\xi = [\eta_4, \chi_5] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{r_1}(-2)x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(2).$$

Получаем первый корневой элемент

$$x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(-1) = \chi_3 \xi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем  $n_{r_2}$ :

$$x_{r_1+r_2+r_3}(-1) = x_{r_1+r_2+r_3+r_4}^\gamma(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{r_2}(-1) = x_{r_1+r_2+r_3}^\beta(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{-r_2}(-1) = x_{r_2}^\gamma(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{r_2}(1) = x_{r_2}^{-1}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$n_{r_2} = x_{r_2}(1)x_{-r_2}(-1)x_{r_2}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем  $n_{r_3}$ :

$$x_{r_2+r_3+r_4}(-1) = x_{r_1+r_2+r_3+r_4}^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{r_3}(-1) = x_{r_2+r_3+r_4}^\gamma(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{-r_3}(-1) = x_{r_3}^\beta(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{r_3}(1) = x_{r_3}^{-1}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$n_{r_3} = x_{r_3}(1)x_{-r_3}(-1)x_{r_3}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем  $n_{r_4}$ :

$$x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}(-1) = x_{r_1+r_2+r_3+r_4}^\theta(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{r_2+r_3+r_4+r_5}(-1) = x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}^\beta(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{r_3+r_4+r_5}(-1) = x_{r_2+r_3+r_4+r_5}^\gamma(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{r_4+r_5}(-1) = x_{r_3+r_4+r_5}^\beta(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{r_4}(-1) = x_{r_4+r_5}^\theta(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$



$$\begin{aligned}
x_{r_4}(1) = x_{r_4}^{-1}(-1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
x_{-r_4}(-1) = x_{r_4}^\gamma(-1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
n_{r_4} = x_{r_4}(1)x_{-r_4}(-1)x_{r_4}(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Получаем  $n_{r_5}$ :

$$x_{-r_5}(-1) = x_{r_4+r_5}^\delta(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{r_5}(-1) = x_{-r_5}^\theta(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{r_5}(1) = x_{r_5}^{-1}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$n_{r_5} = x_{r_5}(1)x_{-r_5}(-1)x_{r_5}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем  $n_{r_1}$ :

$$x_{r_3+r_4}(1) = x_{r_4}^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{r_2+r_3}(1) = x_{r_3+r_4}^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{r_1+r_2}(1) = x_{r_2+r_3}^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{r_1}(1) = x_{r_1+r_2}^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{-r_1}(1) = x_{r_1}^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{-r_1}(-1) = x_{-r_1}^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$n_{r_1} = x_{r_1}(1)x_{-r_1}(-1)x_{r_1}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как мономиальная подгруппа

$$N = \{n_r | r \in \Phi\}$$

порождается элементами  $n_{r_1}, \dots, n_{r_5}$  и действует сопряжениями транзитивно на корневых подгруппах, то элементы  $x_r(1)$  лежат в подгруппе  $M$  для всех  $r \in \Phi$ , которые в силу леммы 3.2.1 порождают всю группу  $SL_6(\mathbb{Z})$ .  $\square$

### § 3.3. Порождаемость группы $SL_{10}(p)$ тремя инволюциями

В данном разделе рассматривается вопрос о  $(2, 2, 2)$ -порождаемости специальных линейных групп  $SL_{10}(p)$  над полем характеристики  $p$ , где  $p$  — простое число.

**Предложение 3.3.1.** *Группа  $SL_{10}(p)$  над полем характеристики  $p$  по-*

рождается тремя следующими инволюциями:

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.* На языке групп Шевалле эти элементы имеют вид

$$\alpha = x_{r_1}(-1)h_{r_1+\dots+r_9}n_{r_9},$$

$$\beta = n_1n_3n_5n_7,$$

$$\gamma = n_2n_4n_6n_8.$$

Далее  $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$  – группа порожденная элементами  $\alpha, \beta, \gamma$ . Положим  $\mu = \beta\gamma$ .





$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \beta^{-1}\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}\rho_4\rho_2\rho_1\beta = x_{-r_1}(-1)x_{-r_8}(-1)h_{r_2+\dots+r_7}, \\
\phi_2 &= \phi_1^\beta = x_{r_1}(-1)x_{-r_7-r_8}(-1)h_{r_1+\dots+r_6}, \\
\phi_3 &= \phi_2^\alpha = h_{r_1+\dots+r_6}x_{r_1}(1)x_{-r_7-r_8-r_9}(-1), \\
\phi_4 &= \phi_3\phi_2 = x_{-r_7-r_8}(1)x_{-r_7-r_8-r_9}(-1), \\
\phi_5 &= \phi_4^\beta = x_{-r_8}(1)x_{-r_8-r_9}(-1), \\
\phi_6 &= \phi_5^\gamma = x_{r_8}(1)x_{-r_9}(-1), \\
\phi_7 &= [\phi_4, \phi_6] = x_{-r_7-r_8-r_9}(-1)x_{-r_7}(1), \\
\phi_8 &= \phi_7^{-1}\phi_3 = x_{-r_7}(-1)x_{-r_7-r_8}(1), \\
\phi_9 &= (\phi_6^{-1}\rho_3)^2 = h_{r_8}(-1)x_{-r_9}(-2)x_{-r_8-r_9}(1), \\
\phi_{10} &= \phi_7^{\phi_9} = x_{r_7-r_8-r_9}(-2)x_{-r_7}(-1), \\
\phi_{11} &= \phi_7^{-2}\phi_{10} = x_{-r_7}(-3) =
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

То есть получили, что  $\phi_{11} = x_{-r_7}(-3)$ . Заметим, что для любого простого  $p \neq 3$  существует такое  $m$ , что либо

$$x_{-r_7}^m(-3) \equiv x_{-r_7}(1) \pmod{p},$$

либо

$$x_{-r_7}^{-m}(-3) \equiv x_{-r_7}(1) \pmod{p}.$$

Таким образом в группе  $M$  мы нашли корневой элемент  $x_{-r_7}(1)$ .

Теперь для соответствия условиям леммы 3.1.1, необходимо найти порождающие  $n_{r_1}, \dots, n_{r_9}$  мономиальной подгруппы.



Покажем, что  $n_{r_7} \in M$ :

$$x_{-r_7}(-1) = x_{-r_7}^{-1}(1),$$

$$x_{r_7}(1) = x_{-r_7}^\beta(1),$$

$$n_{r_7} = x_{r_7}(1)x_{-r_7}(-1)x_{r_7}(1).$$

Покажем, что  $n_{r_8} \in M$ :

$$x_{-r_7-r_8}(1) = x_{-r_7}(1)\phi_8,$$

$$x_{-r_8}(-1) = [x_{-r_7-r_8}(1), x_{r_7}(1)],$$

$$x_{r_8}(1) = x_{-r_8}^{-\gamma}(-1),$$

$$n_{r_8} = x_{r_8}(1)x_{-r_8}(-1)x_{r_8}(1).$$

Покажем, что  $n_{r_9} \in M$ :

$$x_{-r_8-r_9}(-1) = x_{-r_8}(-1)\phi_5,$$

$$x_{-r_9}(-1) = [x_{-r_8-r_9}(-1), x_{r_8}(-1)],$$

$$x_{r_9}(1) = x_{-r_9}^{-\alpha}(-1),$$

$$n_{r_9} = x_{r_9}x_{-r_9}(-1)(1)x_{r_9}(1).$$

Покажем, что  $n_{r_6} \in M$ :

$$\gamma' = \gamma^{n_{r_8}},$$

$$x_{r_6+r_7+r_8}(-1) = x_{r_7}^{\gamma'}(1),$$

$$x_{r_6+r_7}(-1) = [x_{r_6+r_7+r_8}(-1), x_{-r_8}(-1)],$$

$$x_{r_6}(-1) = [x_{r_6+r_7}(-1), x_{-r_7}(-1)],$$

$$x_{-r_6}(-1) = x_{r_6}^\gamma(-1),$$

$$x_{r_6}(1) = x_{r_6}^{-1}(-1),$$

$$n_{r_6} = x_{r_6}(1)x_{-r_6}(-1)x_{r_6}(1).$$

Покажем, что  $n_{r_5} \in M$ :

$$\beta' = \beta^{n_{r_7}},$$

$$x_{r_5+r_6+r_7}(-1) = x_{r_6}^{\beta'}(1),$$

$$x_{r_5+r_6}(-1) = [x_{r_5+r_6+r_7}(-1), x_{-r_7}(-1)],$$

$$x_{r_5}(-1) = [x_{r_5+r_6}(-1), x_{-r_6}(-1)],$$

$$x_{-r_5}(-1) = x_{r_5}^\beta(-1),$$

$$x_{r_5}(1) = x_{r_5}^{-1}(-1),$$

$$n_{r_5} = x_{r_5}(1)x_{-r_5}(-1)x_{r_5}(1).$$

Покажем, что  $n_{r_4} \in M$ :

$$\gamma'' = (\gamma')^{n_{r_6}},$$

$$x_{r_4+r_5+r_6}(-1) = x_{r_5}^{\gamma''}(1),$$

$$x_{r_4+r_5}(-1) = [x_{r_4+r_5+r_6}(-1), x_{-r_6}(-1)],$$

$$x_{r_4}(-1) = [x_{r_4+r_5}(-1), x_{-r_5}(-1)],$$

$$x_{-r_4}(-1) = x_{r_4}^\gamma(-1),$$

$$x_{r_4}(1) = x_{r_4}^{-1}(-1),$$

$$n_{r_4} = x_{r_4}(1)x_{-r_4}(-1)x_{r_4}(1).$$

Покажем, что  $n_{r_3} \in M$ :

$$\beta'' = (\beta')^{n_{r_5}},$$

$$x_{r_3+r_4+r_5}(-1) = x_{r_4}^{\beta''}(1),$$

$$x_{r_3+r_4}(-1) = [x_{r_3+r_4+r_5}(-1), x_{-r_5}(-1)],$$

$$x_{r_3}(-1) = [x_{r_3+r_4}(-1), x_{-r_4}(-1)],$$

$$x_{-r_3}(-1) = x_{r_3}^\beta(-1),$$

$$x_{r_3}(1) = x_{r_3}^{-1}(-1),$$

$$n_{r_3} = x_{r_3}(1)x_{-r_3}(-1)x_{r_3}(1).$$

Покажем, что  $n_{r_2} \in M$ :

$$\gamma''' = (\gamma'')^{n_{r_4}},$$

$$x_{r_2+r_3+r_4}(-1) = x_{r_3}^{\gamma'''}(1),$$

$$x_{r_2+r_3}(-1) = [x_{r_2+r_3+r_4}(-1), x_{-r_4}(-1)],$$

$$x_{r_2}(-1) = [x_{r_2+r_3}(-1), x_{-r_3}(-1)],$$

$$x_{-r_2}(-1) = x_{r_2}^\gamma(-1),$$

$$x_{r_2}(1) = x_{r_2}^{-1}(-1),$$

$$n_{r_2} = x_{r_2}(1)x_{-r_2}(-1)x_{r_2}(1).$$

Покажем, что  $n_{r_1} \in M$ :

$$\beta''' = (\beta'')^{n_{r_3}},$$

$$x_{r_1+r_2+r_3}(-1) = x_{r_2}^{\beta'''}(1),$$

$$x_{r_1+r_2}(-1) = [x_{r_1+r_2+r_3}(-1), x_{-r_3}(-1)],$$

$$x_{r_1}(-1) = [x_{r_1+r_2}(-1), x_{-r_2}(-1)],$$

$$x_{-r_1}(-1) = x_{r_1}^\beta(-1),$$

$$x_{r_1}(1) = x_{r_1}^{-1}(-1),$$

$$n_{r_1} = x_{r_1}(1)x_{-r_1}(-1)x_{r_1}(1).$$

Таким образом, мы показали, что все мономиальные элементы  $n_{r_1}, \dots, n_{r_9}$  и корневой элемент  $x_{-r_7}(1)$  лежат в  $M$ , а значит, по лемме 3.1.1,  $M = SL_{10}(p)$ ,  $p \neq 3$ . Для  $p = 3$  результат был получен с помощью системы компьютерной алгебры GAP. Для  $p = 2$  результат получен в работе [12].  $\square$

## Заключение

В заключении сформулируем результаты диссертационной работы:

- а) Решены задачи о порождаемости тремя инволюциями и тремя инволюциями, две из которых перестановочны, для линейных групп степени два  $GL_2$ ,  $SL_2$ ,  $PGL_2$ ,  $PSL_2$  над кольцами целых чисел  $\mathbb{Z}$  и целых гауссовых чисел  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ , исключая группу  $PSL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ .
- б) Найдено минимальное число  $n(G)$  порождающих инволюций, произведение которых равно 1 для групп  $GL_2(\mathbb{Z})$ ,  $PGL_2(\mathbb{Z})$ .
- в) Доказана порождаемость тремя инволюциями, две из которых перестановочны, групп Шевалле типа  $G_2$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  над кольцом целых чисел. Все инволюции найдены в явном виде.
- г) Найдены порождающие тройки инволюций в группах  $SL_6(\mathbb{Z})$  и  $SL_{10}(p)$ , где  $p$  — простое число.

## Список литературы

- [1] Ахмедова Ш. А., Нужин Я. Н. Порождающие мультиплеты группы  $GL_n(\mathbb{Z})$  // Алгебра, логика и приложения. Красноярск, 2010. — С. 70.
- [2] Белый Г. В. О расширениях Галуа, максимального циклотомического поля // Известия АН СССР, Сер. матем. — 1979. — Т. 43. — С. 267–276.
- [3] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М: Мир, 1972.
- [4] Дубинкина Т. В. Об одном свойстве групп  $SL_3(2^n)$ ,  $SU_3(2^{2^n})$  // Вестник КГТУ — 2001. — С. 19–34.
- [5] Дьедонне Ж. Геометрия классических групп— М:Мир, 1974.
- [6] Кокстер Г. С. М., Мозер, У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп // Наука — 2003. — Т. 44, № 2. — С. 241–255.
- [7] Левчук В. М., Нужин Я. Н. Структура групп Ри // Алгебра и логика — 1985. — Т. 24. — С. 26–41.
- [8] Левчук Д. В. О порождаемости группы  $PSL_7(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$  тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Вестник НГУ — 2009. — Т. 1. — С. 35–38.
- [9] Мазуров В. Д. О порождении спорадических простых групп тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Сиб. мат. журн. — 2003. — Т. 44, № 1. — С. 193–198.
- [10] Мазуров В. Д., Хухро Е. И. Коуровская тетрадь. — Новосибирск: Институт математики Сибирского отделения РАН, 2014.
- [11] Моисеенкова Т. В. Порождающие мультиплеты инволюций групп  $SL_n(\mathbb{Z})$  и  $PSL_n(\mathbb{Z})$  // Труды института математики и механики УрО РАН — 2010. — Т. 16. — С. 195–198.

- [12] Нужин Я. Н. Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем характеристики 2 // Алгебра и логика — 1990. — Т. 29, № 2. — С. 192–206.
- [13] Нужин Я. Н. Порождающие тройки инволюций знакопеременных групп // Математические заметки — 1990. — Т. 51, № 4. — С. 91–95.
- [14] Нужин Я. Н. Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики, I // Алгебра и логика — 1997. — Т. 36, № 1. — С. 77–96.
- [15] Нужин Я. Н. Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики, II // Алгебра и логика — 1997. — Т. 36, № 4. — С. 422–440.
- [16] Нужин Я. Н. О порождаемости группы  $PSL_n(\mathbb{Z})$  тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Владикавказский матем. журнал — 2008. — Т. 10, № 1. — С. 68–74.
- [17] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. — М: Мир, 1975.
- [18] Carter R. W. Simple Groups of Lie Type. — John Wiley and Sons, 1972.
- [19] Chevalley C. Sur certain groupes simples // Tohoku Mathematical Journal — 1955. — Т. 7, № 1-2. — С. 14–66.
- [20] Dickson L. E. Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory. — Leipzig: Teuber, 1901.
- [21] Fricke R., Klein F. Vorlesungen uber die Theorie der Elliptischen Modulunktionen — Leipzig: Teubner, 1890.
- [22] Jones G. A. Automorphism groups of edge-transitive maps // arXiv — 2016. — Т. 1605.09461v1.
- [23] Jordan C. Traite des substitutions et des equations algebriques. — Paris: Gauthier-Villars, 1870.

- [24] Levchuk D. V., Nuzhin Ya. N. On the generation of the group  $PSL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$  by three involutions, two of which commute // Journal of Siberian Federal University, Math and Physics — 2008. — T. 1, № 2. — C. 133–139.
- [25] Miller G. A. On the groups generated by two operators // Bull. Amer. Math. Soc. — 1901. — T. 7. — C. 424–426.
- [26] Nuzhin Ya. N. Generating elements of simple groups and their applications // Proceedings of III International Conference on algebra of memory M.I.Kargapolov. — Berlin: Walter de Gruyter, Apr. 1996. — P. 101–120.
- [27] Pak I., Radoicic R. Hamiltonian paths in Cayley graphs // Discrete Mathematics — 2009. — T. 309, № 17. — C. 5501–5508.
- [28] Steinberg R. Generators for simple groups // Canad. J. Math. — 1962. — C. 277–283.
- [29] Tamburini M. C. Generation of certain simple groups by elements of small order // Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. — 1987. — T. 121. — C. 21–27.
- [30] Tamburini M. C., Wilson J. S., Gavioli N. On the  $(2, 3)$ -generation of some classical groups, I // Journal of Algebra — 1994. — T. 168, № 1. — C. 353–370.
- [31] Tamburini M. C., Zucca P. On a question of M. Conder // Journal of Algebra — 2000. — T. 11, № 1. — C. 5–7.
- [32] Tamburini M. C., Zucca P. Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute // J. of Algebra — 1997. — T. 195, № 2. — C. 650–661.
- [33] Tamburini M. C. The  $(2, 3)$ -generation of matrix groups over the integers // ISCHIA GROUP THEORY 2008/ ed. by B. Margrazia. — World Scientific Publishing, Apr. 2008. — P. 276–282.
- [34] Vsemirnov M. A. Is the group  $SL_6(\mathbb{Z})$   $(2, 3)$  generated? // J. Math. Sci. (N. Y.) — 2007. — T. 140, № 5. — C. 101–130.

- [35] Vsemirnov M. A. The group  $GL_6(\mathbb{Z})$  is  $(2, 3)$  generated // J. Group Theory — 2007. — Т. 10, № 4. — С. 425–430.
- [36] Vsemirnov M. A. On  $(2,3)$ -generation of matrix groups over the ring of integers // St. Petersburg Math. J. — 2008. — Т. 19, № 6. — С. 883–910.
- [37] Ward J. M. Generation of simple groups by conjugate involutions. — University of London: Queen Mary college, 2009. — Thesis P.D.

## Работы автора по теме диссертации

- [38] Тимофеев И. А. Generation of the Chevalley group of type  $G_2$  over the ring of integers by three involutions two of which commute // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. — 2015. — Т. 8, № 1. — С. 104–108.
- [39] Тимофеев И. А. Порождаемость групп Шевалле типа  $E_l$  над кольцом целых чисел тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Сибирский электронный математический журнал — Новосибирск, 2017. — Т. 14, — С. 807–820. Режим доступа: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p807-820.pdf>
- [40] Нужин Я. Н., Тимофеев И. А. Порождающие тройки инволюций линейных групп размерности 2 над кольцом целых чисел // Владикавказский математический журнал — 2009. — Т. 11, № 4. — С. 59–62.
- [41] Тимофеев И. А. Порождающие тройки инволюций линейных групп размерности 2 над кольцом целых чисел // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева — 2012. — Т. 94, № 1. — С. 342–349.
- [42] Тимофеев И. А. Порождающие тройки инволюций групп линейных групп размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел // Тезисы 43-ей международной молодежной школы-конференции Современные проблемы математики и ее приложений, 29 января — 5 февраля 2012 г.. — Екатеринбург, 2012. — С. 98–100.

- [43] Тимофеев И. А. О порождаемости тремя инволюциями группы  $SL_6(\mathbb{Z})$  // Молодежь и наука: сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярск. — Красноярск, 2013, Режим доступа: <http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2013/section061.html> —
- [44] Тимофеев И. А. Порождающие тройки инволюций групп Шевалле типа  $G_2$  // Труды 45-ой Международной молодежной школы-конференции Современные проблемы математики и ее приложений, 2014 г. — Екатеринбург, 2014. — С. 53–54.
- [45] Тимофеев И. А. Порождающие тройки инволюций групп Шевалле типа  $E_6, E_7, E_8$  над кольцом целых чисел // Материалы международной конференции по алгебре анализу и геометрии, 26 июня — 2 июля 2016 г. — Казань, 2016. — С. 332.
- [46] Тимофеев И. А. Порождаемость групп Шевалле типа  $E_l$  над кольцом целых чисел тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию А. Ю. Ольшанского, 27 июля — 2 августа 2016 г. — Красноярск, 2016. — С. 62–63.
- [47] Тимофеев И. А. Порождаемость групп Шевалле исключительных типов над кольцом целых чисел тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Международная конференция «Мальцевские чтения», тезисы докладов. Новосибирск, 21-25 ноября 2016 г. (электронное издание). — Новосибирск, 2016. Режим доступа: <http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/16/malmeet16.pdf>. — С. 109–110.



## Приложение А. Программа для $E_l(\mathbb{Z})$

Данное приложение содержит код программы на языке Mathematica для проверки вычислений, проводимых при доказательстве теоремы 3. Программа позволяет находить орбиты при действии элементом Кокстера на корни из системы  $E_l$  и вычислять коммутаторы элементов групп  $E_l(\mathbb{Z})$ , которые представлены корневыми элементами  $x_r(k)$ ,  $r \in \Phi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , диагональными элементами  $h_r(k)$   $r \in \Phi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , или произведением не более 3-х диагональных или корневых элементов.

Рассмотрим код программы для вычислений в группе  $E_8(\mathbb{Z})$ . Пусть  $\Pi_{E_8} = \{r_1, r_2, \dots, r_8\}$  — фундаментальная система корней для  $E_8$ , то  $r_i + r_j$ ,  $i < j$ , является корнем тогда и только тогда, когда  $(i, j) = (5, 8)$  или  $(i, i + 1)$ ,  $1 \leq i \leq 6$ . Тогда на графе Кокстера корни будут расположены как на рисунке 2.

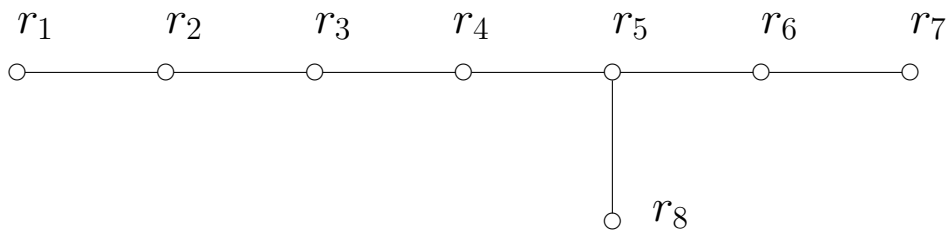


Рис. 2. Граф Кокстера системы корней типа  $E_8$

Пусть  $r$  — корень системы корней типа  $E_8$ ,

$$r = ar_1 + br_2 + cr_3 + dr_4 + er_5 + fr_6 + gr_7 + hr_8,$$

где  $r_i \in \Pi_{E_8}$ ,  $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}$  — коэффициенты его разложения по фундаментальным корням. Тогда данный корень представляется в программе в виде списка  $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ .

Список E8 содержит корни системы  $E_8$ . Данные разложения взяты из [3, таблицы VI-VIII], но нумерация корней на графе Кокстера другая, в соответствии с рисунком 2.

$\ln[1]:= \text{E8} := \{ \{0,0,0,0,0,0,1,0\}, \{0,0,0,0,0,1,0,0\},$   
 $\{0,0,0,0,0,1,1,0\}, \{0,0,0,0,1,0,0,0\}, \{0,0,0,0,1,0,0,1\},$   
 $\{0,0,0,0,1,1,0,0\}, \{0,0,0,0,1,1,0,1\}, \{0,0,0,0,1,1,1,0\},$   
 $\{0,0,0,0,1,1,1,1\}, \{0,0,0,1,0,0,0,0\}, \{0,0,0,1,1,0,0,0\},$   
 $\{0,0,0,1,1,0,0,1\}, \{0,0,0,1,1,1,0,0\}, \{0,0,0,1,1,1,0,1\},$   
 $\{0,0,0,1,1,1,1,0\}, \{0,0,0,1,1,1,1,1\}, \{0,0,1,0,0,0,0,0\},$   
 $\{0,0,1,1,0,0,0,0\}, \{0,0,1,1,1,0,0,0\}, \{0,0,1,1,1,0,0,1\},$   
 $\{0,0,1,1,1,1,0,0\}, \{0,0,1,1,1,1,0,1\}, \{0,0,1,1,1,1,1,0\},$   
 $\{0,0,1,1,1,1,1,1\}, \{0,1,0,0,0,0,0,0\}, \{0,1,1,0,0,0,0,0\},$   
 $\{0,1,1,1,0,0,0,0\}, \{0,1,1,1,1,0,0,0\}, \{0,1,1,1,1,0,0,1\},$   
 $\{0,1,1,1,1,1,0,0\}, \{0,1,1,1,1,1,0,1\}, \{0,1,1,1,1,1,1,0\},$   
 $\{0,1,1,1,1,1,1,1\}, \{1,0,0,0,0,0,0,0\}, \{1,1,0,0,0,0,0,0\},$   
 $\{1,1,1,0,0,0,0,0\}, \{1,1,1,1,0,0,0,0\}, \{1,1,1,1,1,0,0,0\},$   
 $\{1,1,1,1,1,0,0,1\}, \{1,1,1,1,1,1,0,0\}, \{1,1,1,1,1,1,0,1\},$   
 $\{1,1,1,1,1,1,1,0\}, \{1,1,1,1,1,1,1,1\}, \{0,0,0,0,0,0,0,1\},$   
 $\{0,0,0,1,2,1,0,1\}, \{0,0,0,1,2,1,1,1\}, \{0,0,1,1,2,1,0,1\},$   
 $\{0,0,0,1,2,2,1,1\}, \{0,0,1,1,2,1,1,1\}, \{0,0,1,2,2,1,0,1\},$   
 $\{0,0,1,1,2,2,1,1\}, \{0,0,1,2,2,1,1,1\}, \{0,0,1,2,2,2,1,1\},$   
 $\{0,0,1,2,3,2,1,1\}, \{0,0,1,2,3,2,1,2\}, \{1,1,1,1,2,1,0,1\},$   
 $\{1,1,1,2,2,1,0,1\}, \{1,1,1,1,2,1,1,1\}, \{1,1,2,2,2,1,0,1\},$   
 $\{1,1,1,1,2,2,1,1\}, \{1,1,1,2,2,1,1,1\}, \{1,1,1,2,2,2,1,1\},$   
 $\{1,1,2,2,2,1,1,1\}, \{1,2,2,2,2,1,0,1\}, \{1,1,1,2,3,2,1,1\},$   
 $\{1,1,2,2,2,2,1,1\}, \{1,2,2,2,2,1,1,1\}, \{1,1,1,2,3,2,1,2\},$   
 $\{1,1,2,2,3,2,1,1\}, \{1,2,2,2,2,2,1,1\}, \{1,1,2,2,3,2,1,2\},$   
 $\{1,1,2,3,3,2,1,1\}, \{1,2,2,2,3,2,1,1\}, \{1,1,2,3,3,2,1,2\},$   
 $\{1,2,2,2,3,2,1,2\}, \{1,2,2,3,3,2,1,1\}, \{1,1,2,3,4,2,1,2\},$   
 $\{1,2,2,3,3,2,1,2\}, \{1,2,3,3,3,2,1,1\}, \{1,1,2,3,4,3,1,2\},$   
 $\{1,2,2,3,4,2,1,2\}, \{1,2,3,3,3,2,1,2\}, \{1,1,2,3,4,3,2,2\},$   
 $\{1,2,2,3,4,3,1,2\}, \{1,2,3,3,4,2,1,2\}, \{1,2,2,3,4,3,2,2\},$   
 $\{1,2,3,3,4,3,1,2\}, \{1,2,3,4,4,2,1,2\}, \{1,2,3,3,4,3,2,2\},$   
 $\{1,2,3,4,4,3,1,2\}, \{1,2,3,4,5,3,1,2\}, \{1,2,3,4,4,3,2,2\},$   
 $\{1,2,3,4,5,3,1,3\}, \{1,2,3,4,5,3,2,2\}, \{1,2,3,4,5,3,2,3\},$   
 $\{1,2,3,4,5,4,2,2\}, \{1,2,3,4,5,4,2,3\}, \{1,2,3,4,6,4,2,3\},$   
 $\{1,2,3,5,6,4,2,3\}, \{1,2,4,5,6,4,2,3\}, \{1,3,4,5,6,4,2,3\},$

$\{2,3,4,5,6,4,2,3\}, \{0,1,1,1,2,1,0,1\}, \{0,1,1,1,2,1,1,1\},$   
 $\{0,1,1,2,2,1,0,1\}, \{0,1,1,1,2,2,1,1\}, \{0,1,1,2,2,1,1,1\},$   
 $\{0,1,2,2,2,1,0,1\}, \{0,1,1,2,2,2,1,1\}, \{0,1,2,2,2,1,1,1\},$   
 $\{0,1,2,2,2,2,1,1\}, \{0,1,1,2,3,2,1,1\}, \{0,1,2,2,3,2,1,1\},$   
 $\{0,1,1,2,3,2,1,2\}, \{0,1,2,3,3,2,1,1\}, \{0,1,2,2,3,2,1,2\},$   
 $\{0,1,2,3,3,2,1,2\}, \{0,1,2,3,4,2,1,2\}, \{0,1,2,3,4,3,1,2\},$   
 $\{0,1,2,3,4,3,2,2\}, \{0,0,0,0,0,0,-1,0\},$   
 $\{0,0,0,0,0,-1,0,0\}, \{0,0,0,0,0,-1,-1,0\},$   
 $\{0,0,0,0,-1,0,0,0\}, \{0,0,0,0,-1,0,0,-1\},$   
 $\{0,0,0,0,-1,-1,0,0\}, \{0,0,0,0,-1,-1,0,-1\},$   
 $\{0,0,0,0,-1,-1,-1,0\}, \{0,0,0,0,-1,-1,-1,-1\},$   
 $\{0,0,0,-1,0,0,0,0\}, \{0,0,0,-1,-1,0,0,0\},$   
 $\{0,0,0,-1,-1,0,0,-1\}, \{0,0,0,-1,-1,-1,0,0\},$   
 $\{0,0,0,-1,-1,-1,0,-1\}, \{0,0,0,-1,-1,-1,-1,0\},$   
 $\{0,0,0,-1,-1,-1,-1,-1\}, \{0,0,-1,0,0,0,0,0\},$   
 $\{0,0,-1,-1,0,0,0,0\}, \{0,0,-1,-1,-1,0,0,0\},$   
 $\{0,0,-1,-1,-1,0,0,-1\}, \{0,0,-1,-1,-1,-1,0,0\},$   
 $\{0,0,-1,-1,-1,-1,0,-1\}, \{0,0,-1,-1,-1,-1,-1,0\},$   
 $\{0,0,-1,-1,-1,-1,-1,-1\}, \{0,-1,0,0,0,0,0,0\},$   
 $\{0,-1,-1,0,0,0,0,0\}, \{0,-1,-1,-1,0,0,0,0\},$   
 $\{0,-1,-1,-1,-1,0,0,0\}, \{0,-1,-1,-1,-1,0,0,-1\},$   
 $\{0,-1,-1,-1,-1,-1,0,0\}, \{0,-1,-1,-1,-1,-1,0,-1\},$   
 $\{0,-1,-1,-1,-1,-1,-1,0\}, \{0,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1\},$   
 $\{-1,0,0,0,0,0,0,0\}, \{-1,-1,0,0,0,0,0,0\},$   
 $\{-1,-1,-1,0,0,0,0,0\}, \{-1,-1,-1,-1,0,0,0,0\},$   
 $\{-1,-1,-1,-1,-1,0,0,0\}, \{-1,-1,-1,-1,-1,0,0,-1\},$   
 $\{-1,-1,-1,-1,-1,-1,0,0\}, \{-1,-1,-1,-1,-1,-1,0,-1\},$   
 $\{-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,0\}, \{-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1\},$   
 $\{0,0,0,0,0,0,0,-1\}, \{0,0,0,-1,-2,-1,0,-1\},$   
 $\{0,0,0,-1,-2,-1,-1,-1\}, \{0,0,-1,-1,-2,-1,0,-1\},$   
 $\{0,0,0,-1,-2,-2,-1,-1\}, \{0,0,-1,-1,-2,-1,-1,-1\},$   
 $\{0,0,-1,-2,-2,-1,0,-1\}, \{0,0,-1,-1,-2,-2,-1,-1\},$   
 $\{0,0,-1,-2,-2,-1,-1,-1\}, \{0,0,-1,-2,-2,-2,-1,-1\},$   
 $\{0,0,-1,-2,-3,-2,-1,-1\}, \{0,0,-1,-2,-3,-2,-1,-2\},$

$\{-1, -1, -1, -1, -2, -1, 0, -1\}, \{-1, -1, -1, -2, -2, -1, 0, -1\},$   
 $\{-1, -1, -1, -1, -2, -1, -1, -1\}, \{-1, -1, -2, -2, -2, -1, 0, -1\},$   
 $\{-1, -1, -1, -1, -2, -2, -1, -1\}, \{-1, -1, -1, -2, -2, -1, -1, -1\},$   
 $\{-1, -1, -1, -2, -2, -2, -1, -1\}, \{-1, -1, -2, -2, -2, -1, -1, -1\},$   
 $\{-1, -2, -2, -2, -2, -1, 0, -1\}, \{-1, -1, -1, -2, -3, -2, -1, -1\},$   
 $\{-1, -1, -2, -2, -2, -2, -1, -1\}, \{-1, -2, -2, -2, -2, -1, -1, -1\},$   
 $\{-1, -1, -1, -2, -3, -2, -1, -2\}, \{-1, -1, -2, -2, -3, -2, -1, -1\},$   
 $\{-1, -2, -2, -2, -2, -2, -1, -1\}, \{-1, -1, -2, -2, -3, -2, -1, -2\},$   
 $\{-1, -1, -2, -3, -3, -2, -1, -1\}, \{-1, -2, -2, -2, -3, -2, -1, -1\},$   
 $\{-1, -1, -2, -3, -3, -2, -1, -2\}, \{-1, -2, -2, -2, -3, -2, -1, -2\},$   
 $\{-1, -2, -2, -3, -3, -2, -1, -1\}, \{-1, -1, -2, -3, -4, -2, -1, -2\},$   
 $\{-1, -2, -2, -3, -3, -2, -1, -2\}, \{-1, -2, -3, -3, -3, -2, -1, -1\},$   
 $\{-1, -1, -2, -3, -4, -3, -1, -2\}, \{-1, -2, -2, -3, -4, -2, -1, -2\},$   
 $\{-1, -2, -2, -3, -3, -2, -1, -2\}, \{-1, -2, -3, -3, -3, -2, -1, -1\},$   
 $\{-1, -2, -3, -4, -4, -2, -1, -2\}, \{-1, -2, -3, -3, -4, -3, -2, -2\},$   
 $\{-1, -2, -3, -4, -4, -3, -1, -2\}, \{-1, -2, -3, -4, -5, -3, -1, -2\},$   
 $\{-1, -2, -3, -4, -4, -3, -2, -2\}, \{-1, -2, -3, -4, -5, -3, -1, -3\},$   
 $\{-1, -2, -3, -4, -5, -3, -2, -2\}, \{-1, -2, -3, -4, -5, -3, -2, -3\},$   
 $\{-1, -2, -3, -4, -5, -4, -2, -2\}, \{-1, -2, -3, -4, -5, -4, -2, -3\},$   
 $\{-1, -2, -3, -4, -6, -4, -2, -3\}, \{-1, -2, -3, -5, -6, -4, -2, -3\},$   
 $\{-1, -2, -4, -5, -6, -4, -2, -3\}, \{-1, -3, -4, -5, -6, -4, -2, -3\},$   
 $\{-2, -3, -4, -5, -6, -4, -2, -3\}, \{0, -1, -1, -1, -2, -1, 0, -1\},$   
 $\{0, -1, -1, -1, -2, -1, -1, -1\}, \{0, -1, -1, -2, -2, -1, 0, -1\},$   
 $\{0, -1, -1, -1, -2, -2, -1, -1\}, \{0, -1, -1, -2, -2, -1, -1, -1\},$   
 $\{0, -1, -2, -2, -2, -1, 0, -1\}, \{0, -1, -1, -2, -2, -2, -1, -1\},$   
 $\{0, -1, -2, -2, -2, -1, -1, -1\}, \{0, -1, -2, -2, -2, -2, -1, -1\},$   
 $\{0, -1, -1, -2, -3, -2, -1, -1\}, \{0, -1, -2, -2, -3, -2, -1, -1\},$   
 $\{0, -1, -1, -2, -3, -2, -1, -2\}, \{0, -1, -2, -3, -3, -2, -1, -1\},$   
 $\{0, -1, -2, -2, -3, -2, -1, -2\}, \{0, -1, -2, -3, -3, -2, -1, -2\},$   
 $\{0, -1, -2, -3, -4, -2, -1, -2\}, \{0, -1, -2, -3, -4, -3, -1, -2\},$   
 $\{0, -1, -2, -3, -4, -3, -2, -2\}$

Функции  $nr_i$ ,  $i = 1 \dots 8$  находят результат действия на заданный корень из  $E_8$  соответствующим элементом  $w_i$ ,  $i = 1 \dots 8$  из группы Вейля.

```

In[2]:= nr1[{r1_,r2_,r3_,r4_,r5_,r6_,r7_,r8_}] :=
  If [MemberQ [E8, {r1+1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8}],
    {r1+1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8},
    If [MemberQ [E8, {r1-1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8}],
      {r1-1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8},
      If [(r1+1==0 || r1-1==0)&& r2==0&& r3==0&& r4==0&&
        r5==0&& r6==0&& r7==0&& r8==0,
        {-r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8},
        {r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8}
      ]
    ]
  ]
]

```

```

In[3]:= nr2[{r1_,r2_,r3_,r4_,r5_,r6_,r7_,r8_}] :=
  If [MemberQ [E8, {r1,r2+1,r3,r4,r5,r6,r7,r8}],
    {r1,r2+1,r3,r4,r5,r6,r7,r8},
    If [MemberQ [E8, {r1,r2-1,r3,r4,r5,r6,r7,r8}],
      {r1,r2-1,r3,r4,r5,r6,r7,r8},
      If [(r2+1==0 || r2-1==0)&& r1==0&& r3==0&& r4==0&&
        r5==0&& r6==0&& r7==0&& r8==0,
        {r1,-r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8},
        {r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8}
      ]
    ]
  ]
]

```

```

In[4]:= nr3[{r1_,r2_,r3_,r4_,r5_,r6_,r7_,r8_}] :=
  If [MemberQ [E8, {r1,r2,r3+1,r4,r5,r6,r7,r8}],
    {r1,r2,r3+1,r4,r5,r6,r7,r8},
    If [MemberQ [E8, {r1,r2,r3-1,r4,r5,r6,r7,r8}],
      {r1,r2,r3-1,r4,r5,r6,r7,r8},

```

```

If [(r3+1==0 || r3-1==0)&&r1==0&&r2==0&&r4==0&&
    r5==0&&r6==0&&r7==0&&r8==0,
    {r1,r2,-r3,r4,r5,r6,r7,r8},
    {r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8}
]
]
]
]

```

```

In[5]:= nr4[{r1_,r2_,r3_,r4_,r5_,r6_,r7_,r8_}] :=
If [MemberQ[E8,{r1,r2,r3,r4+1,r5,r6,r7,r8}],
    {r1,r2,r3,r4+1,r5,r6,r7,r8},
If [MemberQ[E8,{r1,r2,r3,r4-1,r5,r6,r7,r8}],
    {r1,r2,r3,r4-1,r5,r6,r7,r8},
If [(r4+1==0 || r4-1==0)&&r1==0&&r3==0&&r2==0&&
    r5==0&&r6==0&&r7==0&&r8==0,
    {r1,r2,r3,-r4,r5,r6,r7,r8},
    {r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8}
]
]
]
]

```

```

In[6]:= nr5[{r1_,r2_,r3_,r4_,r5_,r6_,r7_,r8_}] :=
If [MemberQ[E8,{r1,r2,r3,r4,r5+1,r6,r7,r8}],
    {r1,r2,r3,r4,r5+1,r6,r7,r8},
If [MemberQ[E8,{r1,r2,r3,r4,r5-1,r6,r7,r8}],
    {r1,r2,r3,r4,r5-1,r6,r7,r8},
If [(r5+1==0 || r5-1==0)&&r1==0&&r3==0&&r4==0&&
    r2==0&&r6==0&&r7==0&&r8==0,
    {r1,r2,r3,r4,-r5,r6,r7,r8},
    {r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8}
]
]
]
]

```

```

In[7]:= nr6[{r1_,r2_,r3_,r4_,r5_,r6_,r7_,r8_}] :=

```

```

If [MemberQ[E8, {r1, r2, r3, r4, r5, r6+1, r7, r8}],
  {r1, r2, r3, r4, r5, r6+1, r7, r8},
  If [MemberQ[E8, {r1, r2, r3, r4, r5, r6-1, r7, r8}],
    {r1, r2, r3, r4, r5, r6-1, r7, r8},
    If [(r6+1==0 || r6-1==0) && r1==0 && r3==0 && r4==0 &&
      r5==0 && r2==0 && r7==0 && r8==0,
      {r1, r2, r3, r4, r5, -r6, r7, r8},
      {r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7, r8}
    ]
  ]
]
]

```

```

In[8]:= nr7[{r1_, r2_, r3_, r4_, r5_, r6_, r7_, r8_}] :=
  If [MemberQ[E8, {r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7+1, r8}],
    {r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7+1, r8},
    If [MemberQ[E8, {r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7-1, r8}],
      {r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7-1, r8},
      If [(r7+1==0 || r7-1==0) && r1==0 && r3==0 && r4==0 &&
        r5==0 && r6==0 && r2==0 && r8==0,
        {r1, r2, r3, r4, r5, r6, -r7, r8},
        {r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7, r8}
      ]
    ]
  ]
]

```

```

In[9]:= nr8[{r1_, r2_, r3_, r4_, r5_, r6_, r7_, r8_}] :=
  If [MemberQ[E8, {r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7, r8+1}],
    {r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7, r8+1},
    If [MemberQ[E8, {r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7, r8-1}],
      {r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7, r8-1},
      If [(r8+1==0 || r8-1==0) && r1==0 && r3==0 && r4==0 &&
        r5==0 && r6==0 && r7==0 && r2==0,
        {r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7, -r8},
        {r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7, r8}
      ]
    ]
]

```

```

]
]

```

Элемент  $x_r(k)$  или  $h_r(k)$  группы  $E_8(\mathbb{Z})$  задается в программе в виде списка  $\{t, \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8\}, k\}$ , где  $t$  принимает символьное значение "x" или "h" соответственно,  $\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8\}$  — коэффициенты разложения корня  $r$  по фундаментальной системе, а  $k$  — соответствующая переменная, принимающая целочисленное значение.

Функция *mu* находит результат действия сопряжением элементом Кокстера

$$w_c = w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_6 w_7 w_8$$

на заданный корень.

```

ln[10]:= mu[{t1_,{r1_,r2_,r3_,r4_,r5_,r6_,r7_,r8_},k1_]}:=
  {t1,nr1[nr2[nr3[nr4[nr5[nr6[nr7[nr8[
    {r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8}]]]]]]],k1}

```

Функция *Index* получает запись корня данного корневого или диагонального элемента в виде линейной комбинации фундаментальных корней. Она служит для удобства восприятия человеком получаемых элементов группы и корней.

```

ln[11]:= Index[{t1_,{r1_,r2_,r3_,r4_,r5_,r6_,r7_,r8_},k1_]}:=
  (d="";
  If[r1>0&&r1≠0,d=d<>"+";If[Abs[r1]>1,
    d=d<>ToString[Abs[r1]]];d=d<>"r1",
  If[r1<0&&r1≠0,d=d<>"-";If[Abs[r1]>1,
    d=d<>ToString[Abs[r1]]]; d=d<>"r1"
  ]
  ];
  If[r2>0&&r2≠0,d=d<>"+";If[Abs[r2]>1,
    d=d<>ToString[Abs[r2]]];d=d<>"r2",
  If[r2<0&&r2≠0,d=d<>"-";If[Abs[r2]>1,
    d=d<>ToString[Abs[r2]]]; d=d<>"r2"
  ]
  ]

```



```

];
If [r3>0&&r3≠0,d=d<>"+";If [Abs [r3]>1,
    d=d<>ToString[Abs [r3]]];d=d<>"r3",
    If [r3<0&&r3≠0,d=d<>"-";If [Abs [r3]>1,
        d=d<>ToString[Abs [r3]]]; d=d<>"r3"
    ]
];
If [r4>0&&r4≠0,d=d<>"+";If [Abs [r4]>1,
    d=d<>ToString[Abs [r4]]];d=d<>"r4",
    If [r4<0&&r4≠0,d=d<>"-";If [Abs [r4]>1,
        d=d<>ToString[Abs [r4]]]; d=d<>"r4"
    ]
];
If [r5>0&&r5≠0,d=d<>"+";If [Abs [r5]>1,
    d=d<>ToString[Abs [r5]]];d=d<>"r5",
    If [r5<0&&r5≠0,d=d<>"-";If [Abs [r5]>1,
        d=d<>ToString[Abs [r5]]]; d=d<>"r5"
    ]
];
If [r6>0&&r6≠0,d=d<>"+";If [Abs [r6]>1,
    d=d<>ToString[Abs [r6]]];d=d<>"r6",
    If [r6<0&&r6≠0,d=d<>"-";If [Abs [r6]>1,
        d=d<>ToString[Abs [r6]]]; d=d<>"r6"
    ]
];
If [r7>0&&r7≠0,d=d<>"+";If [Abs [r7]>1,
    d=d<>ToString[Abs [r7]]];d=d<>"r7",
    If [r7<0&&r7≠0,d=d<>"-";If [Abs [r7]>1,
        d=d<>ToString[Abs [r7]]]; d=d<>"r7"
    ]
];
If [r8>0&&r8≠0,d=d<>"+";If [Abs [r8]>1,
    d=d<>ToString[Abs [r8]]];d=d<>"r8",
    If [r8<0&&r8≠0,d=d<>"-";If [Abs [r8]>1,

```

```

        d=d<>ToString[Abs[r8]]]; d=d<>"r8"
    ]
];
If[StringTake[d,1]=="+",d=StringDrop[d,1]];
Return[d];
)

```

Пример использования функции Index.

```
In[12]:= Index[{"x",{1,0,0,0,3,0,0,1}},1]
```

```
Out[12]= r1+3r5+r8
```

Функция *Orbit* находит половину орбиты данного корня при действии на него элементом Кокстера  $w_c$ .

```
In[13]:= Orbit[{t1_,{r1_,r2_,r3_,r4_,r5_,r6_,r7_,r8_},k1_] :=
  MatrixForm[Thread[List[Range[0,15,1],
  Map[Index,NestList[mu,{t1,{r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8},
  k1},15]]]]]
```

Пример действия функции Orbit на корень  $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5$ .

```
In[14]:= Orbit[{"x",{1,1,1,1,1,0,0,0}},1]
```

```
Out[14]= (0      r1+r2+r3+r4+r5
1      r1+2r2+2r3+2r4+2r5+r6+r8
2      r1+2r2+3r3+3r4+3r5+2r6+r7+r8
3      r1+2r2+3r3+4r4+4r5+2r6+r7+2r8
4      r1+2r2+3r3+4r4+5r5+3r6+r7+2r8
5      2r1+3r2+4r3+5r4+6r5+4r6+2r7+3r8
6      r1+3r2+4r3+5r4+6r5+4r6+2r7+3r8
7      r1+2r2+4r3+5r4+6r5+4r6+2r7+3r8
8      r1+2r2+3r3+5r4+6r5+4r6+2r7+3r8
9      r1+2r2+3r3+4r4+6r5+4r6+2r7+3r8)
```

```

10      r1+2r2+3r3+4r4+5r5+4r6+2r7+3r8
11      r2+2r3+3r4+4r5+3r6+2r7+2r8
12      r3+2r4+3r5+2r6+r7+2r8
13      r4+2r5+2r6+r7+r8
14      r5+r6+r7+r8
15      -r1-r2-r3-r4-r5)

```

Функция *Textt* переводит элемент группы в текстовый, привычный для человека формат.

```

In[15]:= Textt[{t1_,{r1_,r2_,r3_,r4_,r5_,r6_,r7_,r8_},k1_}] :=
      Return[StringJoin[ToString[t1,StandardForm], "_",
      ToString[Index[{t1,{r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8}},k1]],
      StandardForm], "(" ,ToString[k1,StandardForm], ")"]

```

Пример использования функции *Textt*.

```

In[16]:= Textt[{"x",{1,1,0,0,3,0,0,1}},-1]

Out[16]= x_r1+r2+3r5+r8(-1)

```

Функция *Km* определяет коммутируют ли данные 2 корневых или диагональных или корневой и диагональный элементы группы и возвращает значение *True*, если не коммутируют.

```

In[17]:= Km[{t1_,{l1_,l2_,l3_,l4_,l5_,l6_,l7_,l8_},k1_},
      {tr_,{r1_,r2_,r3_,r4_,r5_,r6_,r7_,r8_},kr_}] :=
      Switch[
      {t1,tr},
      {"x","x"},
      MemberQ[E8,{l1,l2,l3,l4,l5,l6,l7,l8}+
      {r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8}],
      {"x","h"},
      MemberQ[E8,{l1,l2,l3,l4,l5,l6,l7,l8}+
      {r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8}] ||
      MemberQ[E8,{l1,l2,l3,l4,l5,l6,l7,l8}-

```

```

    {r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8}],
    {"h","x"},
    MemberQ[E8,{l1,l2,l3,l4,l5,l6,l7,l8}+
    {r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8}]||
    MemberQ[E8,{l1,l2,l3,l4,l5,l6,l7,l8}-
    {r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8}]
]

```

Функция *RootS* находит коммутатор двух элементов, используется только в функциях *Kmt33*, *Kmt32*, *Kmt31*.

```

In[18]:= RootS[{t1_,{l1_,l2_,l3_,l4_,l5_,l6_,l7_,l8_},k1_},
  {tr_,{r1_,r2_,r3_,r4_,r5_,r6_,r7_,r8_},kr_}] :=
  {"x",{l1,l2,l3,l4,l5,l6,l7,l8}+
  {r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8},k1 kr}

```

Функции нахождения коммутатора в программе реализованы только для элементов, каждый из корней которых лежит в положительной системе относительно некоторой фундаментальной системы.

Функция *Kmt33* находит коммутатор двух элементов, каждый из которых является произведением ровно трех корневых, диагональных элементов или их комбинаций. Групповое произведение корневых или диагональных элементов группы представляется в программе в виде списка. Например, произведение  $x_r(t)h_s(k)$  будет иметь вид

$$\{\{x, \{r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7, r8\}, t\}, \{h, \{s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7, s8\}, k\}\}.$$

```

In[19]:= Kmt33[{{t11_,{l11_,l12_,l13_,l14_,l15_,l16_,l17_,l18_},
  k11_},
  {t12_,{l121_,l122_,l123_,l124_,l125_,l126_,l127_,l128_},k12_},
  {t13_,{l131_,l132_,l133_,l134_,l135_,l136_,l137_,l138_},k13_}},
  {{tr1_,{r11_,r12_,r13_,r14_,r15_,r16_,r17_,r18_},kr1_},
  {tr2_,{r21_,r22_,r23_,r24_,r25_,r26_,r27_,r28_},kr2_},
  {tr3_,{r31_,r32_,r33_,r34_,r35_,r36_,r37_,r38_},kr3_}}] :=
  (
    kt=<|l1 →{t11,{l11,l12,l13,l14,l15,l16,l17,l18},k11},

```

```

12 →{t12, {121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128}, k12},
13 →{t13, {131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138}, k13},
r1 →{tr1, {r11, r12, r13, r14, r15, r16, r17, r18}, kr1},
r2 →{tr2, {r21, r22, r23, r24, r25, r26, r27, r28}, kr2},
r3→{tr3, {r31, r32, r33, r34, r35, r36, r37, r38}, kr3}|>;

```

```
s:={};
```

```

If [Km[kt [11], kt [r3]],
  s=AppendTo[s,
    {t11, {111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118}, 2k11}], 0
];

```

```

If [Km[kt [12], kt [r3]],
  s=AppendTo[s,
    {t12, {121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128}, 2k12}], 0
];

```

```

If [Km[kt [r1], kt [13]],
  s=AppendTo[s,
    {tr1, {r11, r12, r13, r14, r15, r16, r17, r18}, 2kr1}], 0
];

```

```

If [Km[kt [r2], kt [13]],
  s=AppendTo[s,
    {tr2, {r21, r22, r23, r24, r25, r26, r27, r28}, 2kr2}], 0
];

```

```

If [Km[kt [r1], kt [11]],
  (a:=RootS[kt [r1], kt [11]];
  s=AppendTo[s, a]), 0
];

```

```

If [Km[kt [r1], kt [12]],

```

```

(a:=RootS[kt[r1],kt[l2]];
  s=AppendTo[s,a]),0
];

If[Km[kt[l1],kt[r2]],
  (a:=RootS[kt[l1],kt[r2]];
  s=AppendTo[s,a]),0
];

If[Km[kt[r2],kt[l2]],
  (a:=RootS[kt[r2],kt[l2]];
  s=AppendTo[s,a]),0
];

Return[s];
)

```

Пример действия функции *Kmt33* на элементах *a* и *b*. Сперва задаем элементы.

```

In[20]:= a:={{"x",{1,0,0,0,0,0,0,0},1},{"x",{1,1,1,1,1,1,1,1},1},
  {"h",{0,1,1,1,1,1,1,1},-1}}
b:={{"x",{0,0,1,0,0,0,0,0},1},{"x",{0,-1,0,0,0,0,0,0},1},
  {"h",{0,-1,-1,0,0,0,0,0},-1}}

```

Выводим элемент *a* в текстовом виде.

```

In[21]:= Textt /@ a

```

```

Out[21]= {x_r1(1),x_r1+r2+r3+r4+r5+r6+r7+r8(1),
  h_r2+r3+r4+r5+r6+r7+r8(-1)}

```

Выводим элемент *b* в текстовом виде.

```

In[22]:= Textt /@ b

```

```

Out[22]= {x_r3(1),x_-r2(1),h_-r2-r3(-1)}

```

Вычисляем коммутатор и результат записываем в переменную *c*.

```
In[23]:= c:=Kmt33[a,b]
```

Выводим результат в текстовом виде.

```
In[24]:= Textt /@ c
```

```
Out[24]= {x_r1(2), x_-r2(2)}
```

Функция *Kmt32* позволяет находить коммутатор двух элементов, один из которых является произведением ровно трех, а другой ровно двух корневых, диагональных элементов группы или их комбинаций.

```
In[25]:= Kmt32[{{t11_,{l11_,l12_,l13_,l14_,l15_,l16_,l17_,l18_},
k11_},
{t12_,{l21_,l22_,l23_,l24_,l25_,l26_,l27_,l28_},k12_},
{t13_,{l31_,l32_,l33_,l34_,l35_,l36_,l37_,l38_},k13_}},
{{tr1_,{r11_,r12_,r13_,r14_,r15_,r16_,r17_,r18_},kr1_},
{tr2_,{r21_,r22_,r23_,r24_,r25_,r26_,r27_,r28_},kr2_}}]:=
(
  kt=<|11 →{t11,{l11,l12,l13,l14,l15,l16,l17,l18},k11},
  12 →{t12,{l21,l22,l23,l24,l25,l26,l27,l28},k12},
  13 →{t13,{l31,l32,l33,l34,l35,l36,l37,l38},k13},
  r1 →{tr1,{r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18},kr1},
  r2 →{tr2,{r21,r22,r23,r24,r25,r26,r27,r28},kr2}|>;

  s:={};

  If [Km [kt [r1] ,kt [13] ] ,
    s=AppendTo [s,
      {tr1 ,{r11 ,r12 ,r13 ,r14 ,r15 ,r16 ,r17 ,r18 } ,2kr1 } ] ,0
  ];

  If [Km [kt [r2] ,kt [13] ] ,
    s=AppendTo [s,
```

```

    {tr2,{r21,r22,r23,r24,r25,r26,r27,r28},2kr2}],0
];

If [Km[kt[r1],kt[l1]],
(a:=RootS[kt[r1],kt[l1]]);
s=AppendTo[s,a]),0
];

If [Km[kt[r1],kt[l2]],
(a:=RootS[kt[r1],kt[l2]]);
s=AppendTo[s,a]),0
];

If [Km[kt[l1],kt[r2]],
(a:=RootS[kt[l1],kt[r2]]);
s=AppendTo[s,a]),0
];

If [Km[kt[r2],kt[l2]],
(a:=RootS[kt[r2],kt[l2]]);
s=AppendTo[s,a]),0
];

Return[s];)

```

Функция *Kmt31* вычисляет коммутатор двух элементов, один из которых является произведением ровно трех корневых, диагональных элементов или их комбинации, а другой является корневым или диагональным.

```

ln[26]:= Kmt31[{{t11_,{l11_,l12_,l13_,l14_,l15_,l16_,l17_,l18_},
k11_},
{t12_,{l21_,l22_,l23_,l24_,l25_,l26_,l27_,l28_},k12_},
{t13_,{l31_,l32_,l33_,l34_,l35_,l36_,l37_,l38_},k13_}},
{{tr1_,{r11_,r12_,r13_,r14_,r15_,r16_,r17_,r18_},
kr1_}}]:=

```



```

(kt=<|11 →{t11,{l11,l12,l13,l14,l15,l16,l17,l18},k11},
12 →{t12,{l21,l22,l23,l24,l25,l26,l27,l28},k12},
13 →{t13,{l31,l32,l33,l34,l35,l36,l37,l38},k13},
r1 →{tr1,{r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18},kr1}|>;

s:={};

If [Km[kt[r1],kt[13]],
  s=AppendTo[s,
    {tr1,{r11,r12,r13,r14,r15,r16,r17,r18},2kr1}],0
];

If [Km[kt[r1],kt[11]],
  (a:=RootS[kt[r1],kt[11]]);
  s=AppendTo[s,a]),0
];

If [Km[kt[r1],kt[12]],
  (a:=RootS[kt[r1],kt[12]]);
  s=AppendTo[s,a]),0
];

Return[s];)

```

### Проверка доказательства теоремы 3 для группы $E_8(\mathbb{Z})$

Для дальнейших расчетов очень удобно видеть все половины орбит. Ниже получаем их.

```
In[27]:= Orbit[{"x",{1,0,0,0,0,0,0,0},1}]
```

```
Out[27]= 0      r1
         1      r2
```

```

2      r3
3      r4
4      r5
5      r1+r2+r3+r4+r 5+r6+r8
6      r2+r3+r4+r5+r 6+r7
7      r3+r4+r5+r8
8      r4+r5+r6
9      r1+r2+r3+r4+2r5+r6+r7+r8
10     r2+r3+r4+r5+r6+r8
11     r3+r4+r5+r6+r7
12     r4+r5+r8
13     r5+r6
14     r1+r2+r3+r4+r5+r6+r7+r8
15     -r1)

```

```
In[28]:= Orbit[{"x",{0,0,0,0,0,0,1},1]
```

```

Out[28]= 0      r6
1      r7
2      -r1-r2-r3-r4-r5-r6-r7
3      -r2-r3-r4-r5-r8
4      -r3-r4-r5-r6
5      -r1-r2-r3-2r4-2r5-r6-r7-r8
6      -r2-r3-r4-2r5-r6-r8
7      -r1-r2-2r3-2r4-2r5-2r6-r7-r8
8      -r2-r3-2r4-2r5-r6-r7-r8
9      -r3-r4-2r5-r6-r8
10     -r1-r2-r3-2r4-2r5-2r6-r7-r8
11     -r2-r3-r4-2r5-r6-r7-r8
12     -r3-r4-r5-r6-r8
13     -r4-r5-r6-r7
14     -r5-r8
15     -r6)

```

```
In[29]:= Orbit[{"x",{0,0,0,0,0,1,0,0},1]
```

```

Out[29]= 0      r8
          1      -r1-r2-r3-r4-r5-r8
          2      -r2-r3-r4-r5-r6
          3      -r1-r2-2r3-2r4-2r5-r6-r7-r8
          4      -r2-r3-2r4-2r5-r6-r8
          5      -r1-r2-2r3-2r4-3r5-2r6-r7-r8
          6      -r1-2r2-2r3-3r4-3r5-2r6-r7-2r8
          7      -r2-2r3-2r4-3r5-2r6-r7-r8
          8      -r1-r2-2r3-3r4-3r5-2r6-r7-2r8
          9      -r2-r3-2r4-3r5-2r6-r7-r8
          10     -r1-r2-2r3-2r4-3r5-2r6-r7-2r8
          11     -r2-r3-2r4-2r5-2r6-r7-r8
          12     -r3-r4-2r5-r6-r7-r8
          13     -r4-r5-r6-r8
          14     -r5-r6-r7
          15     -r8)

```

```

In[30]:= Orbit[{"x", {1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, 1]

```

```

Out[30]= (0      r1+r2
          1      r2+r3
          2      r3+r4
          3      r4+r5
          4      r1+r2+r3+r4+2r5+r6+r8
          5      r1+2r2+2r3+2r4+2r5+2r6+r7+r8
          6      r2+2r3+2r4+2r5+r6+r7+r8
          7      r3+2r4+2r5+r6+r8
          8      r1+r2+r3+2r4+3r5+2r6+r7+r8
          9      r1+2r2+2r3+2r4+3r5+2r6+r7+2r8
          10     r2+2r3+2r4+2r5+2r6+r7+r8
          11     r3+2r4+2r5+r6+r7+r8
          12     r4+2r5+r6+r8
          13     r1+r2+r3+r4+2r5+2r6+r7+r8
          14     r2+r3+r4+r5+r6+r7+r8
          15     -r1-r2)

```

```
In[31]:= Orbit[{"x",{1,1,1,0,0,0,0,0},1]]
```

```
Out[31]= 0      r1+r2+r3
          1      r2+r3+r4
          2      r3+r4+r5
          3      r1+r2+r3+2r4+2r5+r6+r8
          4      r1+2r2+2r3+2r4+3r5+2r6+r7+r8
          5      r1+2r2+3r3+3r4+3r5+2r6+r7+2r8
          6      r2+2r3+3r4+3r5+2r6+r7+r8
          7      r1+r2+2r3+3r4+4r5+2r6+r7+2r8
          8      r1+2r2+2r3+3r4+4r5+3r6+r7+2r8
          9      r1+2r2+3r3+3r4+4r5+3r6+2r7+2r8
          10     r2+2r3+3r4+3r5+2r6+r7+2r8
          11     r3+2r4+3r5+2r6+r7+r8
          12     r1+r2+r3+2r4+3r5+2r6+r7+2r8
          13     r2+r3+r4+2r5+2r6+r7+r8
          14     r3+r4+r5+r6+r7+r8
          15     -r1-r2-r3)
```

```
In[32]:= Orbit[{"x",{1,1,1,1,0,0,0,0},1]]
```

```
Out[32]= 0      r1+r2+r3+r4
          1      r2+r3+r4+r5
          2      r1+r2+2r3+2r4+2r5+r6+r8
          3      r1+2r2+2r3+3r4+3r5+2r6+r7+r8
          4      r1+2r2+3r3+3r4+4r5+2r6+r7+2r8
          5      r1+2r2+3r3+4r4+4r5+3r6+r7+2r8
          6      r1+2r2+3r3+4r4+5r5+3r6+2r7+2r8
          7      r1+2r2+3r3+4r4+5r5+3r6+r7+3r8
          8      r1+2r2+3r3+4r4+5r5+4r6+2r7+2r8
          9      r1+2r2+3r3+4r4+5r5+3r6+2r7+3r8
          10     r2+2r3+3r4+4r5+3r6+r7+2r8
          11     r1+r2+2r3+3r4+4r5+3r6+2r7+2r8
          12     r2+r3+2r4+3r5+2r6+r7+2r8
          13     r3+r4+2r5+2r6+r7+r8
```

14  $r_4+r_5+r_6+r_7+r_8$   
 15  $-r_1-r_2-r_3-r_4)$

In[33]:= Orbit[{"x", {1, 1, 1, 1, 1, 0, 0}, 1]

Out[33]= 0  $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5$   
 1  $r_1+2r_2+2r_3+2r_4+2r_5+r_6+r_8$   
 2  $r_1+2r_2+3r_3+3r_4+3r_5+2r_6+r_7+r_8$   
 3  $r_1+2r_2+3r_3+4r_4+4r_5+2r_6+r_7+2r_8$   
 4  $r_1+2r_2+3r_3+4r_4+5r_5+3r_6+r_7+2r_8$   
 5  $2r_1+3r_2+4r_3+5r_4+6r_5+4r_6+2r_7+3r_8$   
 6  $r_1+3r_2+4r_3+5r_4+6r_5+4r_6+2r_7+3r_8$   
 7  $r_1+2r_2+4r_3+5r_4+6r_5+4r_6+2r_7+3r_8$   
 8  $r_1+2r_2+3r_3+5r_4+6r_5+4r_6+2r_7+3r_8$   
 9  $r_1+2r_2+3r_3+4r_4+6r_5+4r_6+2r_7+3r_8$   
 10  $r_1+2r_2+3r_3+4r_4+5r_5+4r_6+2r_7+3r_8$   
 11  $r_2+2r_3+3r_4+4r_5+3r_6+2r_7+2r_8$   
 12  $r_3+2r_4+3r_5+2r_6+r_7+2r_8$   
 13  $r_4+2r_5+2r_6+r_7+r_8$   
 14  $r_5+r_6+r_7+r_8$   
 15  $-r_1-r_2-r_3-r_4-r_5)$

In[34]:= Orbit[{"x", {1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0}, 1]

Out[34]= (0  $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6$   
 1  $r_1+2r_2+2r_3+2r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8$   
 2  $r_2+2r_3+2r_4+2r_5+r_6+r_8$   
 3  $r_1+r_2+2r_3+3r_4+3r_5+2r_6+r_7+r_8$   
 4  $r_1+2r_2+2r_3+3r_4+4r_5+2r_6+r_7+2r_8$   
 5  $r_1+2r_2+3r_3+3r_4+4r_5+3r_6+r_7+2r_8$   
 6  $r_1+2r_2+3r_3+4r_4+4r_5+3r_6+2r_7+2r_8$   
 7  $r_2+2r_3+3r_4+4r_5+2r_6+r_7+2r_8$   
 8  $r_1+r_2+2r_3+3r_4+4r_5+3r_6+r_7+2r_8$   
 9  $r_1+2r_2+2r_3+3r_4+4r_5+3r_6+2r_7+2r_8$   
 10  $r_2+2r_3+2r_4+3r_5+2r_6+r_7+2r_8$

```

11      r3+2r4+2r5+2r6+r7+r8
12      r4+2r5+r6+r7+r8
13      r5+r6+r8
14      r6+r7
15      -r1-r2-r3-r4-r5-r6)

```

```

In[35]:= AlphaMu:={{{"x",{1,0,0,0,0,0,0,0},1},
{"x",{1,1,1,1,1,1,1,1},1},{"h",{0,1,1,1,1,1,1,1},-1}}};

```

Найдем половину орбиты элемента  $\alpha$ .

Далее проверяются все коммутирования и сопряжения, которые описаны в доказательстве теоремы 3 для типа  $E_8$ .

```

In[36]:= For[i=1,i<30,i++,AlphaMu=
Append[AlphaMu,mu/@AlphaMu[[i]]]
];

```

```

In[37]:= MatrixForm[Map[Textt,AlphaMu,{2}]]

```

```

In[38]:= Textt/@(KmAAm2=Kmt33[AlphaMu[[1]],AlphaMu[[3]])

```

```

Out[38]= {x_r1(2),x_-r2(2)}

```

```

In[39]:= Textt/@(KmAAm4=Kmt33[AlphaMu[[1]],AlphaMu[[5]])

```

```

Out[39]= {x_r1+r2+r3+r4+r5+r6+r7+r8(2),x_r5(2),
x_r1+r2+r3+r4+2r5+r6+r7+r8(1)}

```

```

In[40]:= Textt/@(gamma={{{"x",{-1,0,0,0,0,0,0,0},2},
{"x",{0,0,-1,0,0,0,0,0},2}})

```

```

Out[40]= {x_-r1(2),x_-r3(2)}

```

```

In[41]:= Textt[Nest[mu,gamma[[1]],15]]

```

```

Out[41]= x_r1(2)

```

$x_{r_1}(1)$	$x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8}(1)$	$h_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8}(-1)$
$x_{r_2}(1)$	$x_{-r_1}(1)$	$h_{-r_1-r_2}(-1)$
$x_{r_3}(1)$	$x_{-r_2}(1)$	$h_{-r_2-r_3}(-1)$
$x_{r_4}(1)$	$x_{-r_3}(1)$	$h_{-r_3-r_4}(-1)$
$x_{r_5}(1)$	$x_{-r_4}(1)$	$h_{-r_4-r_5}(-1)$
$x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8}(1)$	$x_{-r_5}(1)$	$h_{-r_1-r_2-r_3-r_4-2r_5-r_6-r_7-r_8}(-1)$
$x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7}(1)$	$x_{-r_1-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7-r_8}(1)$	$h_{-r_1-2r_2-2r_3-2r_4-2r_5-2r_6-r_7-r_8}(-1)$
$x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(1)$	$x_{-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7}(1)$	$h_{-r_2-2r_3-2r_4-2r_5-r_6-r_7-r_8}(-1)$
$x_{r_4+r_5+r_6}(1)$	$x_{-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7-r_8}(1)$	$h_{-r_3-2r_4-2r_5-r_6-r_7-r_8}(-1)$
$x_{r_1+r_2+r_3+r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8}(1)$	$x_{-r_4-r_5-r_6}(1)$	$h_{-r_1-r_2-r_3-2r_4-3r_5-2r_6-r_7-r_8}(-1)$
$x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8}(1)$	$x_{-r_1-r_2-r_3-r_4-2r_5-r_6-r_7-r_8}(1)$	$h_{-r_1-2r_2-2r_3-2r_4-3r_5-2r_6-r_7-2r_8}(-1)$
$x_{r_3+r_4+r_5+r_6+r_7}(1)$	$x_{-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7-r_8}(1)$	$h_{-r_2-2r_3-2r_4-2r_5-2r_6-r_7-r_8}(-1)$
$x_{r_4+r_5+r_6+r_7}(1)$	$x_{-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7}(1)$	$h_{-r_3-2r_4-2r_5-r_6-r_7-r_8}(-1)$
$x_{r_5+r_6+r_7}(1)$	$x_{-r_4-r_5-r_6-r_7-r_8}(1)$	$h_{-r_4-2r_5-r_6-r_7-r_8}(-1)$
$x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8}(1)$	$x_{-r_5-r_6}(1)$	$h_{-r_1-r_2-r_3-r_4-2r_5-2r_6-r_7-r_8}(-1)$
$x_{-r_1}(1)$	$x_{-r_1-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7-r_8}(1)$	$h_{-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7-r_8}(-1)$
$x_{-r_2}(1)$	$x_{r_1}(1)$	$h_{r_1+r_2}(-1)$
$x_{-r_3}(1)$	$x_{r_2}(1)$	$h_{r_2+r_3}(-1)$
$x_{-r_4}(1)$	$x_{r_3}(1)$	$h_{r_3+r_4}(-1)$
$x_{-r_5}(1)$	$x_{r_4}(1)$	$h_{r_4+r_5}(-1)$
$x_{-r_1-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7-r_8}(1)$	$x_{r_5}(1)$	$h_{r_1+r_2+r_3+r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8}(-1)$
$x_{-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7}(1)$	$x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8}(1)$	$h_{r_1+2r_2+2r_3+2r_4+2r_5+2r_6+r_7+r_8}(-1)$
$x_{-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7-r_8}(1)$	$x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7}(1)$	$h_{r_2+2r_3+2r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8}(-1)$
$x_{-r_4-r_5-r_6}(1)$	$x_{r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8}(1)$	$h_{r_3+2r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8}(-1)$
$x_{-r_1-r_2-r_3-r_4-2r_5-r_6-r_7-r_8}(1)$	$x_{r_4+r_5+r_6}(1)$	$h_{r_1+r_2+r_3+2r_4+3r_5+2r_6+r_7+r_8}(-1)$
$x_{-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7-r_8}(1)$	$x_{r_1+r_2+r_3+r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8}(1)$	$h_{r_1+2r_2+2r_3+2r_4+3r_5+2r_6+r_7+2r_8}(-1)$
$x_{-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7}(1)$	$x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8}(1)$	$h_{r_2+2r_3+2r_4+2r_5+2r_6+r_7+r_8}(-1)$
$x_{-r_4-r_5-r_6-r_7-r_8}(1)$	$x_{r_3+r_4+r_5+r_6+r_7}(1)$	$h_{r_3+2r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8}(-1)$
$x_{-r_5-r_6}(1)$	$x_{r_4+r_5+r_6+r_7+r_8}(1)$	$h_{r_4+2r_5+r_6+r_7+r_8}(-1)$
$x_{-r_1-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7-r_8}(1)$	$x_{r_5+r_6}(1)$	$h_{r_1+r_2+r_3+r_4+2r_5+2r_6+r_7+r_8}(-1)$

Рис. 3. Out[37]: Орбита элемента  $\alpha$  при действии на него сопряжением элементом  $\mu$

```
In[42]:= Texttt/@(gammaeta={Nest[mu,gamma[[1]],15],
Nest[mu,gamma[[2]],15]})
```

```
Out[42]= {x_r1(2),x_r3(2)}
```

```
In[43]:= Texttt/@(xr14=Kmt32[AlphaMu[[1]],gammaeta])
```

```
Out[43]= {x_r1(4)}
```

```
In[44]:= Texttt/@(KmAm4Gamma=Kmt32[AlphaMu[[5]],gamma])
```

```
Out[44]= {x_-r3(4),x_-r3-r4(2)}
```

```
In[45]:= Texttt/@(xmr3r42={{"x",{0,0,-1,-1,0,0,0,0}},2})
```

```
Out[45]= {x_-r3-r4(2)}
```

```
In[46]:= Texttt/@(xmr32=Kmt31[AlphaMu[[4]],xmr3r42])
```

Out[46]= {x\_<sub>r3</sub>(2)}

In[47]:= Texttt/@(xr1r82={Nest[mu,xmr32[[1]],27]})

Out[47]= {x\_<sub>r1+r2+r3+r4+r5+r6+r7+r8</sub>(2)}

In[48]:= Texttt/@(xr52={Nest[mu,xmr32[[1]],17]})

Out[48]= {x\_<sub>r5</sub>(2)}

In[49]:= Texttt[(xr12r5r8={"x",{1,1,1,1,2,1,1,1},1})]

Out[49]= x\_<sub>r1+r2+r3+r4+2r5+r6+r7+r8</sub>(1)

In[50]:= Texttt[Nest[mu,xr12r5r8,21]]

Out[50]= x\_<sub>r1</sub>(1)

## Проверка доказательства теоремы 3 для группы $E_6(\mathbb{Z})$

В программе для группы  $E_6(\mathbb{Z})$  применяются функции аналогичные тем, которые используются в программе  $E_8(\mathbb{Z})$ . Опустим их перечисление. Элемент группы  $x_r(t)$  задается списком {"x", {0, 0, r1, r2, r3, r4, r5, r6}, k}, где r1, r2, r3, r4, r5, r6 — коэффициенты разложения корня по фундаментальной системе корней.

Для удобства проверки рассчитаем все орбиты, образующиеся при действии элементом Кокстера на корни системы корней  $E_6$ .

In[51]:= Orbit[{"x",{0,0,1,0,0,0,0},1]]

Out[51]=

0	r <sub>1</sub>
1	r <sub>2</sub>
2	r <sub>3</sub>
3	r <sub>1</sub> +r <sub>2</sub> +r <sub>3</sub> +r <sub>4</sub> +r <sub>6</sub>
4	r <sub>2</sub> +r <sub>3</sub> +r <sub>4</sub> +r <sub>5</sub>
5	r <sub>3</sub> +r <sub>6</sub>
6	r <sub>4</sub>



```

7      r5
8      -r1-r2-r3-r4- r5
9      -r2-r3-r6
10     -r3-r4
11     -r1-r2-r3-r4- r5-r6
12     r1)

```

```
In[52]:= Orbit[{"x",{0,0,1,1,0,0,0,0},1]]
```

```

Out[52]= (0      r1+r2
1      r2+r3
2      r1+r2+2r3+r4+r6
3      r1+2r2+2r3+2r4+r5+r6
4      r2+2r3+r4+r5+r6
5      r3+r4+r6
6      r4+r5
7      -r1-r2-r3-r4
8      -r1-2r2-2r3-r4-r5-r6
9      -r2-2r3-r4-r6
10     -r1-r2-2r3-2r4-r5-r6
11     -r2-r3-r4-r5-r6
12     r1+r2)

```

```
In[53]:= Orbit[{"x",{0,0,0,0,0,0,0,1},1]]
```

```

Out[53]= (0      r6
1      -r1-r2-r3-r6
2      -r2-r3-r4
3      -r1-r2-2r3-r4-r5-r6
4      -r2-r3-r4-r6
5      -r3-r4-r5
6      -r6
7      r1+r2+r3+r6
8      r2+r3+r4
9      r1+r2+2r3+r4+r5+r6

```

```

10      r2+r3+r4+r6
11      r3+r4+r5
12      r6)

```

```
In[54]:= Orbit[{"x", {0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0}, 1]
```

```

Out[54]= (0      -r1
1         -r2
2         -r3
3         -r1-r2-r3-r4-r6
4         -r2-r3-r4-r5
5         -r3-r6
6         -r4
7         -r5
8         r1+r2+r3+r4+r5
9         r2+r3+r6
10        r3+r4
11        r1+r2+r3+r4+r5+r6
12        -r1)

```

```
In[55]:= Orbit[{"x", {0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 0}, 1]
```

```

Out[55]= (0      -r1-r2
1         -r2-r3
2         -r1-r2-2r3-r4-r6
3         -r1-2r2-2r3-2r4-r5-r6
4         -r2-2r3-r4-r5-r6
5         -r3-r4-r6
6         -r4-r5
7         r1+r2+r3+r4
8         r1+2r2+2r3+r4+r5+r6
9         r2+2r3+r4+r6
10        r1+r2+2r3+2r4+r5+r6
11        r2+r3+r4+r5+r6
12        -r1-r2)

```

```
In[56]:= Orbit[{"x", {0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0}}, 1]
```

```
Out[56]= (0      r1+r2+r3
1      r1+2r2+2r3+r4+r6
2      r1+2r2+3r3+2r4+r5+r6
3      r1+2r2+3r3+2r4+r5+2r6
4      r2+2r3+2r4+r5+r6
5      r3+r4+r5+r6
6      -r1-r2-r3
7      -r1-2r2-2r3-r4-r6
8      -r1-2r2-3r3-2r4-r5-r6
9      -r1-2r2-3r3-2r4-r5-2r6
10     -r2-2r3-2r4-r5-r6
11     -r3-r4-r5-r6
12     r1+r2+r3)
```

Вычислим орбиту элемента  $\alpha$  при действии сопряжением элементом  $\mu$ .

```
In[57]:= AlphaMu:={{{"x", {0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}}, 1},
{"x", {0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1}}, 1}, {"h", {0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1}}, -1}}};
For[i=1, i<13, i++, AlphaMu=
Append[AlphaMu, mu/@AlphaMu[[i]]]];
MatrixForm[Map[Textt, AlphaMu, {2}]]
```

Далее следует проверка вычислений, выполненных в доказательстве теоремы 3.

```
In[58]:= Textt/@(KmAAm2=Kmt33[AlphaMu[[1]], AlphaMu[[3]]])
```

```
Out[58]= {xr1(2), xr1+r2+r3+r4+r5+r6(2), xr3(2),
x-r2(2), xr1+r2+2r3+r4+r5+r6(1)}
```

```
In[59]:= Textt/@(KmAAm3=Kmt33[AlphaMu[[1]], AlphaMu[[4]]])
```

```
Out[59]= {xr1(2), x-r3(2)}
```

```
In[60]:= Textt/@(KmAAm7=Kmt33[AlphaMu[[1]], AlphaMu[[8]]])
```

$$\begin{pmatrix}
 \mathbf{x}_{r_1}(1) & \mathbf{x}_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(1) & \mathbf{h}_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(-1) \\
 \mathbf{x}_{r_2}(1) & \mathbf{x}_{-r_1}(1) & \mathbf{h}_{-r_1-r_2}(-1) \\
 \mathbf{x}_{r_3}(1) & \mathbf{x}_{-r_2}(1) & \mathbf{h}_{-r_2-r_3}(-1) \\
 \mathbf{x}_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_6}(1) & \mathbf{x}_{-r_3}(1) & \mathbf{h}_{-r_1-r_2-2r_3-r_4-r_6}(-1) \\
 \mathbf{x}_{r_2+r_3+r_4+r_5}(1) & \mathbf{x}_{-r_1-r_2-r_3-r_4-r_6}(1) & \mathbf{h}_{-r_1-2r_2-2r_3-2r_4-r_5-r_6}(-1) \\
 \mathbf{x}_{r_3+r_6}(1) & \mathbf{x}_{-r_2-r_3-r_4-r_5}(1) & \mathbf{h}_{-r_2-2r_3-r_4-r_5-r_6}(-1) \\
 \mathbf{x}_{r_4}(1) & \mathbf{x}_{-r_3-r_6}(1) & \mathbf{h}_{-r_3-r_4-r_6}(-1) \\
 \mathbf{x}_{r_5}(1) & \mathbf{x}_{-r_4}(1) & \mathbf{h}_{-r_4-r_5}(-1) \\
 \mathbf{x}_{-r_1-r_2-r_3-r_4-r_5}(1) & \mathbf{x}_{-r_5}(1) & \mathbf{h}_{r_1+r_2+r_3+r_4}(-1) \\
 \mathbf{x}_{-r_2-r_3-r_6}(1) & \mathbf{x}_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}(1) & \mathbf{h}_{r_1+2r_2+2r_3+r_4+r_5+r_6}(-1) \\
 \mathbf{x}_{-r_3-r_4}(1) & \mathbf{x}_{r_2+r_3+r_6}(1) & \mathbf{h}_{r_2+2r_3+r_4+r_6}(-1) \\
 \mathbf{x}_{-r_1-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6}(1) & \mathbf{x}_{r_3+r_4}(1) & \mathbf{h}_{r_1+r_2+2r_3+2r_4+r_5+r_6}(-1) \\
 \mathbf{x}_{r_1}(1) & \mathbf{x}_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(1) & \mathbf{h}_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(-1)
 \end{pmatrix}$$

Рис. 4.  $\text{Out}[57]$ : Орбита элемента  $\alpha$  при действии на него сопряжением элементом  $\mu$

$$\text{Out}[60]= \{\mathbf{x}_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(2), \mathbf{x}_{r_5}(2)\}$$

$$\text{In}[61]:= \text{Textt}/@(\text{KmAAm9}=\text{Kmt33}[\text{AlphaMu}[[1]], \text{AlphaMu}[[10]]])$$

$$\text{Out}[61]= \{\mathbf{x}_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(2), \mathbf{x}_{-r_2-r_3-r_6}(2)\}$$

$$\text{In}[62]:= \text{Xmr2r3r62xmr52}=\{\{\text{"x"}, \{0, 0, 0, -1, -1, 0, 0, -1\}, 2\}, \\ \{\text{"x"}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0\}, 2\}\}$$

$$\text{Out}[62]= \{\{\mathbf{x}, \{0, 0, 0, -1, -1, 0, 0, -1\}, 2\}, \{\mathbf{x}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0\}, 2\}\}$$

$$\text{In}[63]:= \text{Textt}/@(\text{Xmr2r3r64}=\text{Kmt32}[\text{AlphaMu}[[3]], \text{Xmr2r3r62xmr52}])$$

$$\text{Out}[63]= \{\mathbf{x}_{-r_2-r_3-r_6}(4)\}$$

$$\text{In}[64]:= \text{Textt}/@(\text{Xmr2r3r68Xmr24}=\text{Kmt31}[\text{AlphaMu}[[6]], \text{Xmr2r3r64}])$$

$$\text{Out}[64]= \{\mathbf{x}_{-r_2-r_3-r_6}(8), \mathbf{x}_{-r_2}(4)\}$$

$$\text{In}[65]:= \text{Xmr24}=\{\{\text{"x"}, \{0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0\}, 4\}\}$$

$$\text{Out}[65]= \{\{\mathbf{x}, \{0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0\}, 4\}\}$$

$$\text{In}[66]:= \text{Textt}/@(\text{KmKmAam3Am1}=\text{Kmt32}[\text{AlphaMu}[[2]], \text{KmAAm3}])$$

Out[66]=  $\{x_{r_1}(4), x_{-r_3}(4), x_{r_1+r_2}(2)\}$

In[67]:= Texttt/@(Xr14={Nest[mu,Xmr2r3r64[[1]],3]})

Out[67]=  $\{x_{r_1}(4)\}$

In[68]:= Texttt/@(Xmr34={Nest[mu,Xmr24[[1]],1]})

Out[68]=  $\{x_{-r_3}(4)\}$

In[69]:= Xr1r22={{ "x", {0,0,1,1,0,0,0,0}, 2}}

Out[69]=  $\{\{x, \{0,0,1,1,0,0,0,0\}, 2\}\}$

In[70]:= Texttt/@(Xr22=Kmt31[AlphaMu[[2]],Xr1r22])

Out[70]=  $\{x_{r_2}(2)\}$

In[71]:= Texttt/@(Xr1r24Xr1r2r3r62=Kmt31[AlphaMu[[6]],Xr1r22])

Out[71]=  $\{x_{r_1+r_2}(4), x_{r_1+r_2+r_3+r_6}(2)\}$

In[72]:= Texttt/@(Xr1r2r3r6={{ "x", {0,0,1,1,1,0,0,1}, 2}}

Out[72]=  $\{x_{r_1+r_2+r_3+r_6}(2)\}$

In[73]:= Texttt/@(Xr62={Nest[mu,Xr1r2r3r6[[1]],5]})

Out[73]=  $\{x_{r_6}(2)\}$

In[74]:= Texttt/@(Xr52={Nest[mu,Xr22[[1]],6]})

Out[74]=  $\{x_{r_5}(2)\}$

In[75]:= Texttt/@(Xmr1r2r3r4r5r62=Kmt31[AlphaMu[[7]],Xr62])

Out[75]=  $\{x_{r_6}(4), x_{-r_3}(2)\}$

In[76]:= Texttt/@(Xmr32={{"x",{0,0,0,0,-1,0,0,0},2}})

Out[76]= {x<sub>-r<sub>3</sub></sub>(2)}

In[77]:= Texttt/@(Xr12={Nest[mu,Xr22[[1]],11]})

Out[77]= {x<sub>r<sub>1</sub></sub>(2)}

In[78]:= Texttt/@(Xr32={Nest[mu,Xr22[[1]],1]})

Out[78]= {x<sub>r<sub>3</sub></sub>(2)}

In[79]:= Texttt/@(Xmr22={Nest[mu,Xmr32[[1]],11]})

Out[79]= {x<sub>-r<sub>2</sub></sub>(2)}

In[80]:= Texttt/@(Xr1r2r3r4r5r62={Nest[mu,Xmr32[[1]],9]})

Out[80]= {x<sub>r<sub>1</sub>+r<sub>2</sub>+r<sub>3</sub>+r<sub>4</sub>+r<sub>5</sub>+r<sub>6</sub></sub>(2)}

In[81]:= Texttt/@(Xr1r22r3r4r5r61={{"x",{0,0,1,1,2,1,1,1},1}})

Out[81]= {x<sub>r<sub>1</sub>+r<sub>2</sub>+2r<sub>3</sub>+r<sub>4</sub>+r<sub>5</sub>+r<sub>6</sub></sub>(1)}

In[82]:= Texttt/@(Xr61={Nest[mu,Xr1r22r3r4r5r61[[1]],3]})

Out[82]= {x<sub>r<sub>6</sub></sub>(1)}

In[83]:= Texttt/@(Xr62Xr3r61=Kmt31[AlphaMu[[3]],Xr61])

Out[83]= {x<sub>r<sub>6</sub></sub>(2),x<sub>r<sub>3</sub>+r<sub>6</sub></sub>(1)}

In[84]:= Texttt/@(Xr3r61={{"x",{0,0,0,0,1,0,0,1},1}})

Out[84]= {x<sub>r<sub>3</sub>+r<sub>6</sub></sub>(1)}

In[85]:= Texttt/@(Xr11={Nest[mu,Xr3r61[[1]],7]})

Out[85]= {x<sub>r<sub>1</sub></sub>(1)}

## Проверка доказательства теоремы 3 для группы $E_7(\mathbb{Z})$

В программе для группы  $E_7(\mathbb{Z})$  применяются функции аналогичные тем, которые используются в программе для  $E_8(\mathbb{Z})$ . Опустим их перечисление. Элемент группы  $x_r(t)$  задается списком  $\{ "x", \{0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7\}, k \}$ , где  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7$  — коэффициенты разложения корня по фундаментальной системе корней.

Для удобства проверки рассчитаем все орбиты, образуемые при действии элементом Кокстера на корни системы корней  $E_7$ .

```
In[86]:= Orbit [{"x", {0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}}, 1]
```

```
Out[86]= (0      r1
          1      r2
          2      r3
          3      r4
          4      r1+r2+r3+r4+r5+r7
          5      r2+r3+r4+r5+r6
          6      r3+r4+r7
          7      r4+r5
          8      r1+r2+r3+r4+r5+r6+r7
          9      -r1)
```

```
In[87]:= Orbit [{"x", {0, 1, 1, 0, 0, 0, 0}}, 1]
```

```
Out[87]= (0      r1+r2
          1      r2+r3
          2      r3+r4
          3      r1+r2+r3+2r4+r5+r7
          4      r1+2r2+2r3+2r4+2r5+r6+r7
          5      r2+2r3+2r4+r5+r6+r7
          6      r3+2r4+r5+r7
          7      r1+r2+r3+2r4+2r5+r6+r7
          8      r2+r3+r4+r5+r6+r7
          9      -r1-r2)
```

```
In[88]:= Orbit[{"x", {0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0}, 1]
```

```
Out[88]= (0      r1+r2+r3
          1      r2+r3+r4
          2      r1+r2+2r3+2r4+r5+r7
          3      r1+2r2+2r3+3r4+2r5+r6+r7
          4      r1+2r2+3r3+3r4+2r5+r6+2r7
          5      r2+2r3+3r4+2r5+r6+r7
          6      r1+r2+2r3+3r4+2r5+r6+2r7
          7      r2+r3+2r4+2r5+r6+r7
          8      r3+r4+r5+r6+r7
          9      -r1-r2-r3)
```

```
In[89]:= Orbit[{"x", {0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0}, 1]
```

```
Out[89]= (0      r1+r2+r3+r4
          1      r1+2r2+2r3+2r4+r5+r7
          2      r1+2r2+3r3+3r4+2r5+r6+r7
          3      r1+2r2+3r3+4r4+2r5+r6+2r7
          4      r1+2r2+3r3+4r4+3r5+r6+2r7
          5      r1+2r2+3r3+4r4+3r5+2r6+2r7
          6      r2+2r3+3r4+2r5+r6+2r7
          7      r3+2r4+2r5+r6+r7
          8      r4+r5+r6+r7
          9      -r1-r2-r3-r4)
```

```
In[90]:= Orbit[{"x", {0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0}, 1]
```

```
Out[90]= (0      r1+r2+r3+r4+r5
          1      r1+2r2+2r3+2r4+r5+r6+r7
          2      r2+2r3+2r4+r5+r7
          3      r1+r2+2r3+3r4+2r5+r6+r7
          4      r1+2r2+2r3+3r4+2r5+r6+2r7
          5      r2+2r3+2r4+2r5+r6+r7
          6      r3+2r4+r5+r6+r7
          7      r4+r5+r7)
```



```

8      r5+r6
9      -r1-r2-r3-r4-r5)

```

```
In[91]:= Orbit[{"x",{0,1,1,1,1,1,1,0},1}]
```

```

Out[91]= (0      r1+r2+r3+r4+r5+r6
1      r2+r3+r4+r7
2      r3+r4+r5
3      r1+r2+r3+2r4+r5+r6+r7
4      r2+r3+r4+r5+r7
5      r3+r4+r5+r6
6      r4+r7
7      r5
8      r6
9      -r1-r2-r3-r4-r5-r6)

```

```
In[92]:= Orbit[{"x",{0,0,0,0,0,0,0,1},1}]
```

```

Out[92]= (0      r7
1      -r1-r2-r3-r4-r7
2      -r2-r3-r4-r5
3      -r1-r2-2r3-2r4-r5-r6-r7
4      -r2-r3-2r4-r5-r7
5      -r1-r2-2r3-2r4-2r5-r6-r7
6      -r2-r3-2r4-r5-r6-r7
7      -r3-r4-r5-r7
8      -r4-r5-r6
9      -r7)

```

Вычислим орбиту элемента  $\alpha$  при действии сопряжением элементом  $\mu$ .

```
In[93]:= AlphaMu:={{{"x",{0,1,0,0,0,0,0,0},1},
{"x",{0,1,1,1,1,1,1,1},1},{"h",{0,0,1,1,1,1,1,1},-1}}};
```

```
In[94]:= For[i=1,i<18,i++,AlphaMu=
Append[AlphaMu,mu/@AlphaMu[[i]]]
];
```

```
In[95]:= MatrixForm[Map[Texttt, AlphaMu, {2}]]
```

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{r_1}(1) & \mathbf{x}_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7}(1) & \mathbf{h}_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7}(-1) \\ \mathbf{x}_{r_2}(1) & \mathbf{x}_{-r_1}(1) & \mathbf{h}_{-r_1-r_2}(-1) \\ \mathbf{x}_{r_3}(1) & \mathbf{x}_{-r_2}(1) & \mathbf{h}_{-r_2-r_3}(-1) \\ \mathbf{x}_{r_4}(1) & \mathbf{x}_{-r_3}(1) & \mathbf{h}_{-r_3-r_4}(-1) \\ \mathbf{x}_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_7}(1) & \mathbf{x}_{-r_4}(1) & \mathbf{h}_{-r_1-r_2-r_3-2r_4-r_5-r_7}(-1) \\ \mathbf{x}_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(1) & \mathbf{x}_{-r_1-r_2-r_3-r_4-r_5-r_7}(1) & \mathbf{h}_{-r_1-2r_2-2r_3-2r_4-2r_5-r_6-r_7}(-1) \\ \mathbf{x}_{r_3+r_4+r_7}(1) & \mathbf{x}_{-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6}(1) & \mathbf{h}_{-r_2-2r_3-2r_4-r_5-r_6-r_7}(-1) \\ \mathbf{x}_{r_4+r_5}(1) & \mathbf{x}_{-r_3-r_4-r_7}(1) & \mathbf{h}_{-r_3-2r_4-r_5-r_7}(-1) \\ \mathbf{x}_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7}(1) & \mathbf{x}_{-r_4-r_5}(1) & \mathbf{h}_{-r_1-r_2-r_3-2r_4-2r_5-r_6-r_7}(-1) \\ \mathbf{x}_{-r_1}(1) & \mathbf{x}_{-r_1-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7}(1) & \mathbf{h}_{-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7}(-1) \\ \mathbf{x}_{-r_2}(1) & \mathbf{x}_{r_1}(1) & \mathbf{h}_{r_1+r_2}(-1) \\ \mathbf{x}_{-r_3}(1) & \mathbf{x}_{r_2}(1) & \mathbf{h}_{r_2+r_3}(-1) \\ \mathbf{x}_{-r_4}(1) & \mathbf{x}_{r_3}(1) & \mathbf{h}_{r_3+r_4}(-1) \\ \mathbf{x}_{-r_1-r_2-r_3-r_4-r_5-r_7}(1) & \mathbf{x}_{r_4}(1) & \mathbf{h}_{r_1+r_2+r_3+2r_4+r_5+r_7}(-1) \\ \mathbf{x}_{-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6}(1) & \mathbf{x}_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_7}(1) & \mathbf{h}_{r_1+2r_2+2r_3+2r_4+2r_5+r_6+r_7}(-1) \\ \mathbf{x}_{-r_3-r_4-r_7}(1) & \mathbf{x}_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(1) & \mathbf{h}_{r_2+2r_3+2r_4+r_5+r_6+r_7}(-1) \\ \mathbf{x}_{-r_4-r_5}(1) & \mathbf{x}_{r_3+r_4+r_7}(1) & \mathbf{h}_{r_3+2r_4+r_5+r_7}(-1) \\ \mathbf{x}_{-r_1-r_2-r_3-r_4-r_5-r_6-r_7}(1) & \mathbf{x}_{r_4+r_5}(1) & \mathbf{h}_{r_1+r_2+r_3+2r_4+2r_5+r_6+r_7}(-1) \end{pmatrix}$$

Рис. 5. Out[95]: Орбита элемента  $\alpha$  при действии на него сопряжением элементом  $\mu$

Далее следует проверка вычислений, выполненных в доказательстве теоремы 3.

```
In[96]:= Texttt/@(KmAAm2=Kmt33[AlphaMu[[1]], AlphaMu[[3]])
```

```
Out[96]= {x_r1(2), x_-r2(2)}
```

```
In[97]:= Texttt/@(d2={Nest[mu, KmAAm2[[1]], 9],
Nest[mu, KmAAm2[[2]], 9]})
```

```
Out[97]= {x_-r1(2), x_r2(2)}
```

```
In[98]:= Texttt/@(d3={Nest[mu, KmAAm2[[1]], 1],
Nest[mu, KmAAm2[[2]], 1]})
```

```
Out[98]= {x_r2(2), x_-r3(2)}
```

```
In[99]:= gamma={{x", {0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, 2},
{x", {0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0}, 2}}
```

```

Out[99]= {{x,{0,-1,0,0,0,0,0,0},2},{x,{0,0,0,-1,0,0,0,0},2}}

In[100]:= Textt/@(gammaMu9={Nest[mu,gamma[[1]],9],
    Nest[mu,gamma[[2]],9]})

Out[100]= {x_r1(2),x_r3(2)}

In[101]:= Textt/@xr14=Kmt32[AlphaMu[[1]],gammaMu9]

Out[101]= {{x,{0,1,0,0,0,0,0,0},4}}

In[102]:= Textt/@(KmAm1Am2=Kmt33[AlphaMu[[2]],AlphaMu[[4]])

Out[102]= {x_r2(2),x_-r3(2)}

In[103]:= Textt/@(KmAAm3=Kmt33[AlphaMu[[1]],AlphaMu[[4]])

Out[103]= {x_r1+r2+r3+r4+r5+r6+r7(2),x_r4(2),
    x_r1+r2+r3+2r4+r5+r6+r7(1)}

In[104]:= Textt/@(delta=Kmt32[AlphaMu[[4]],KmAAm2])

Out[104]= {x_-r2(4),x_-r2-r3(2)}

In[105]:= Textt/@(xmr2r32={{x},{0,0,-1,-1,0,0,0,0},2})

Out[105]= {x_-r2-r3(2)}

In[106]:= Textt/@(xmr22=Kmt31[AlphaMu[[3]],xmr2r32])

Out[106]= {x_-r2(2)}

In[107]:= Textt/@(xr42={Nest[mu,xmr22[[1]],11]})

Out[107]= {x_r4(2)}

In[108]:= Textt/@(xr1r2r3r4r5r6r72={Nest[mu,xr42[[1]],5]})

Out[108]= {x_r1+r2+r3+r4+r5+r6+r7(2)}

```

```
In[109]:= Texttt/@(xr1r2r32r4r5r6r7={{"x",{0,1,1,1,2,1,1,1},1}})
```

```
Out[109]= {x_r1+r2+r3+2r4+r5+r6+r7(1)}
```

```
In[110]:= Texttt/@(xr61={Nest[mu,xr1r2r32r4r5r6r7[[1]],5]})
```

```
Out[110]= {x_r6(1)}
```

```
In[111]:= Texttt/@Kmt31[AlphaMu[[5]],xr61]
```

```
Out[111]= {x_r6(2),x_r1+r2+r3+r4+r5+r6+r7(1)}
```

```
In[112]:=
```

```
Texttt[Nest[mu,{"x",{0,1,1,1,1,1,1,1},1},10]]
```

```
Out[112]= x_r1(1)
```