ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

ТАРАСОВ ЮРИЙ СЕРГЕЕВИЧ

ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК С КОНЕЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ РАССЕИВАНИЯ

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
профессор Сучков Н.М.

Красноярск-2018

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

По теореме Кэли любая группа изоморфна некоторой группе подстановок. Одним из направлений исследования бесконечных групп подстановок является наложение на подстановки "условий конечности". Наиболее известное из этих условий - финитарность подстановок.

Пусть $S(M)$ - группа всех подстановок непустого множества M. Подстановка $g \in S(M)$ называется финитарной, если её носитель $\{\lambda | \lambda \in M, \lambda^g \neq \lambda\}$ конечен. Множество $Fin(M)$ всех финитарных подстановок множества M образует нормальную в $S(M)$ локально конечную подгруппу. Любая подгруппа из $Fin(M)$ называется группой финитарных подстановок. Эти группы изучались многими авторами. Приведём несколько результатов.

И. Д. Адо [1] показала, что группа финитарных подстановок с условием минимальности для подгрупп конечна. В частности, $Fin(M)$ не содержит квазициклических подгрупп C_{p^∞} для любого простого p. Д. А. Супруненко [7,8] открыл ряд специфических свойств локально нильпотентных групп финитарных подстановок и поставил вопрос о строении локально конечных групп, изоморфно вложимых в группы $Fin(M)$. Из работ П. Ноймана [16], Д. Уигольда [17] и Ф. Холла [15] следует, что счетная финитарно аппроксимируемая группа X имеет точное финитарное подстановочное представление тогда и только тогда, когда X - локально нормальная группа.

В работе В. В. Беляева [2] доказано, что простая локально конечная группа имеет точное финитарное подстановочное представление тогда и только тогда, когда любая её финитно аппроксимируемая подгруппа локально нормальна. Аналогичный результат для полупростых локально конечных групп получен В.В. Беляевым и Д.А. Шведом [3].

В дальнейшем предполагаем, что M либо множество целых чисел Z, либо множество натуральных чисел N. В работе Н.М. Сучкова [10] подстановка $g \in S(M)$ названа ограниченной, если

$$w(g) = \max_{\alpha \in M} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Множество $Lim(M)$ всех таких подстановок образует группу, которая является естественным расширением группы $Fin(M)$. В работе [9] впервые был построен пример смешанной группы $C = AB$, где A, B - периодические (и даже локально конечные) подгруппы, а в [10,11] установлено, что $C = \langle h | h \in Lim(Z),\, |h| < \infty \rangle$, любая счетная свободная группа и 2-группа Алёшина изоморфно вложимы в C. При этом $Lim(Z) = C \leftthreetimes \langle d \rangle$, где d - сдвиг, $\alpha^d = \alpha + 1$ для любого $\alpha \in Z$.

Факторизация всей смешанной группы $Lim(N)$ двумя локально конечными подгруппами доказана в [12]. Там же установлено, что группа $Lim(M)$ порождается подстановками $x \in S(M)$, для которых параметр ограниченности $w(x) = 1$. Эти порождающие являются либо инволюциями, в разложении которых на независимые циклы участвуют только транспозиции вида $(\alpha\, \alpha+1)$, $\alpha \in M$, либо $M = Z$ и $x \in \{d, d^{-1}\}$. В работах [13,14] начато изучение нормального строения группы $Lim(N)$. Получено описание локально конечного радикала этой группы.

В работе [18] для любой подстановки $g \in S(M)$ определен её параметр рассеивания $\lambda(g)$ следующим образом. Для каждого $\alpha \in M$ обозначим

$$M_\alpha(g) = \{\beta | \beta \in M,\, \beta \leqslant \alpha < \beta^g\},\; L_\alpha(g) = \{\beta | \beta \in M,\, \beta^g \leqslant \alpha < \beta\}.$$

Полагаем теперь

$$t(g) = \max_{\alpha \in M} |M_\alpha(g)|,\; s(g) = \max_{\alpha \in M} |L_\alpha(g)|,\; \lambda(g) = \max(t(g),\, s(g))/.$$

Множество $Disp(M) = \{g | g \in S(M), \lambda(g) < \infty\}$ образует группу. Из легко проверяемого неравенства $\lambda(g) \leqslant w(g)$ следует, что $Lim(M)$ - подгруппа группы $Disp(M)$. При этом подстановки группы $Disp(M)$ уже не связаны с расстоянием между точками и их образами, а связаны лишь с естественным упорядочением множества M. Если, например, $x = (3\,4)(5\,8)...(2^n + 1\,2^{n+1})...$, то $\lambda(x) = 1$, $w(x) = \infty$, а значит, $x \in Disp(M)$, $x \notin Lim(M)$. Поэтому группа $Disp(M)$ существенно шире группы $Lim(M)$.

В этой же работе подстановка $g \in S(Z)$ названа равномерной, если $|M_\alpha(g)| = |L_\alpha(g)| < \infty$ при любом $\alpha \in Z$. Множество R всех таких подстановок образует группу.

Настоящая диссертация посвящена изучению групп $Lim(N)$ и $Disp(M)$. Получены следующие основные результаты:

1. Изучены нормальные замыкания в группе $Lim(N)$ подстановок g с параметром ограниченности $w(g) = 1$.

2. Доказано, что в группах $Disp(N)$ и $Disp(Z) \cap R$ любое конечное множество элементов содержится в подгруппе вида $Q = AB$, где A, B - локально финитно аппроксимируемые подгруппы из Q.

3. Найдена связь между группами $Disp(Z)$ и $Disp(N)$.

4. Доказано, что группы $Disp(M)$ порождаются подстановками g множества M с параметром рассеивания $\lambda(g) = 1$. Дано описание этих порождающих.

Теперь подробно о содержании диссертации. Она состоит из введения, трех глав и списка литературы. Главы делятся на параграфы. Нумерация формул, определений, лемм, предложений, теорем сквозная в пределах каждой главы и имеет вид $n.m$, где n - номер текущей главы. Все обозначения либо стандартны [4,5], либо оговариваются.

В §1.1 Главы 1 приводятся определения и известные факты, используемые в дальнейшем. Для понимания точной формулировки основного результата этой главы (теорема 1.1) нам потребуется понятие (вполне) рассеянного подмножества множества N, введеного в работе [13]. Пусть

$$L = \{\mu_1,\, \mu_2,\, ...,\, \mu_n,\, ...\} -$$

бесконечное подмножество множества N, где $\mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_n < ...$; m - фиксированное натуральное число. По определению элементы μ_i, μ_j множества L эквивалентны, если либо $i = j$, либо $i < j (j < i)$ и выполняются все неравенства $\mu_{k+1} - \mu_k \leqslant m$; $i \leqslant k \leqslant j-1$ $(j \leqslant k \leqslant i-1)$. Это отношение эквивалентности индуцирует разбиение L на классы эквивалентности. Пусть $B_m(L)$ - множество всех этих классов.

Определение 1.3. Множество L называется m - рассеянным, если все классы множества $B_m(L)$ конечны и вполне m - рассеянным, если

$$\max_{A \in B_m(L)} |A| < \infty.$$

Множество L называется (вполне) рассеянным, если оно (вполне) m - рассеянное при любом натуральном m.

Пусть для элементов множества L выполняются неравенства $\mu_n + 1 < \mu_{n+1}$ $(n = 1, 2, ...)$. Рассмотрим инволюцию

$$a = (\mu_1\, \mu_1 + 1)...(\mu_n\, \mu_n + 1)...$$

группы $Lim(N)$. Очевидно, $w(a) = 1$. В [13] доказано, что нормальное замыкание инволюции a в группе $Lim(N)$ тогда и только тогда локально конечно, когда L - вполне рассеянное множество.

Теорема 1.1. Нормальное замыкание T инволюции a в группе $Lim(N)$ тогда и только тогда является собственной подгруппой группы

$Lim(N)$, когда L - рассеянное множество. Если L - рассеянное, но не вполне рассеянное множество, то T - смешанная группа.

Данная теорема доказывает одну из гипотез о нормальных замыканиях элементов группы $Lim(N)$ [13]. Доказательство теоремы 1.1. начато §1.2 и закончено в §1.3.

Результаты главы 1 получены автором лично и опубликованы в работе [21].

В главе 2 начато изучение групп $Disp(M)$. В §2.1, 2.2 доказано, что множество R всех равномерных подстановок множества Z образуют группу и устанавливают связь между группами $G = Disp(N)$ и $H = Disp(Z)$. Предполагая, что подстановки группы G действуют тождественно на множестве $Z \backslash N$, мы получим естественное вложение $G < H$. Через t обозначена подстановка группы $S(Z)$, для которой $\alpha^t = -\alpha$ $(\alpha \in Z)$.

Теорема 2.1. $H \cap R = Fin(Z) \cdot (G \times G^t)$.

Теорема 2.2. $H = (H \cap R) \leftthreetimes < d >$.

Группа X называется локально финитно аппроксимируемой, если каждая её конечно порожденная подгруппа изоморфно вложима в декартово произведение конечных групп. Основным результатом §2.3 является

Теорема 2.3. В группах G и $H \cap R$ любое конечное подмножество содержится в группе вида $Q = AB$, где A, B - локально финитно аппроксимируемые подгруппы из Q.

Доказательство этой теоремы конструктивное и даёт ясное представление элементов конечно порожденных подгрупп из G и $H \cap R$.

Теорема 2.2 и теорема 2.3 для групп $H \cap R$ доказаны автором лично; теорема 2.1 доказана в нераздельном соавторстве с А.А. Маньковым, а теорема 2.3 для группы G - в нераздельном соавторстве с Н.М. Сучковым. Результаты главы 2 опубликованы в работах [18, 19].

В §3.1 Главы 3 изучены подстановки g множества M с параметром рассеивания $\lambda(g) = 1$. Основным результатом этой главы является

Теорема 3.1. Группа $Disp(M)$ порождается подстановками g множества M, для которых параметр рассеивания $\lambda(g) = 1$.

Для случая $M = N$ получено некоторое усиление этой теоремы.

Теорема 3.2. Группа $Disp(N)$ порождается подстановками множества N, которые имеют параметры рассевания 1 и разлагаются в произведение конечных независимых циклов.

Следствием этой теоремы и теорем 2.1, 2.2 является

Теорема 3.3. Группа $Disp(Z)$ порождается подстановками g, g^t $(g \in G, \lambda(g) = 1)$ и сдвигом d.

Теоремы 3.1-3.3 доказаны автором лично. Леммы 3.1-3.5 из §3.1 доказаны в нераздельном соавторстве с Н.М. Сучковым. Результаты главы 3 опубликованы в работе [20].

Результаты диссертации являются новыми. Работа носит теоретический характер.

Основные результаты, представленные в диссертации, опубликованы в работах [18]-[25] и включают статьи [18]-[21] в изданиях из перечня ВАК. Они докладывались на Красноярском алгебраическом семинаре при СФУ и на международных конференциях "Алгебра и геометрия"(Екатеринбург, 2011), "Алгебра и линейная оптимизация"(Екатеринбург, 2012), "XI Школа-конференция по теории групп, посвященная 70-летию А.Ю. Ольшанскому"(Красноярск, 2016).

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Н.М. Сучкову за постановку задач и внимание к работе.

Глава 1

Нормальные замыкания инволюций в группе $Lim(N)$

Главным результатом этой главы является теорема 1.1, которая доказывает гипотезу из работ [13] о нормальных замыканиях инволюций a с параметром $w(a) = 1$ в группе $Lim(N)$. Теорема 1.1 сформулирована в начале §1.2 после необходимых определений. Там же начато её доказательство, которое завершается в §1.3

1.1. Определения. Используемые результаты

Пусть дано непустое множество Ω, элементы которого будем называть точками. Отображение $g : \Omega \to \Omega$ называется подстанновкой множества Ω если $\Omega^g = \Omega$ и $\alpha^g \neq \beta^g$ для различных точек $\alpha, \beta \in \Omega$. Обозначим через $S(\Omega)$ совокупность всех подстановок множества Ω. В качестве умножения на $S(\Omega)$ берется последовательное выполнение отображений, т.е. если $g, h \in S(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$, то $\alpha^{gh} = (\alpha^g)^h$. Относительно этой операции $S(\Omega)$-группа. Любая подгруппа G этой группы называется группой подстановок множества Ω.

Подстановка

$$h = (\alpha_1\, \alpha_2\, ... \alpha_m)$$

из Ω, для которой $\alpha_1^h = \alpha_2$, ..., $\alpha_{m-1}^h = \alpha_m$, $\alpha_m^h = h_1$ и $\beta^h = \beta$ для каждой точки β из разности $\Omega \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ называется конечным циклом длины m. Цикл длины 2 называется транспозицией. Бесконечным циклом

$$g = (... \, \alpha_{-n} \, ... \, \alpha_{-1} \, \alpha_0 \, \alpha_1 \, ... \, \alpha_n \, ...)$$

называется такая подстановка из $S(\Omega)$, для которой $\alpha_j^g = \alpha_{j+1}$ для любого целого j, а на множестве $\Omega \setminus \{\alpha_j | j \in Z\}$ подстановка g действует тождественно.

Если $t \in S(\Omega)$, то Ω можно разбить на такие попарно непересекающиеся подмножества $\Omega_k (k \in K)$, что на каждом из них t индуцирует цикл t_k. Подстановка t записывается в виде произведения в любом порядке этих циклов t_k (разложение подстановки t на независимые циклы). Если $|K| < \infty$, то это обычное произведение циклов. Подстановка $t \in S(\Omega)$ тогда и только тогда имеет конечный порядок, когда в её разложении на независимые циклы отсутствуют бесконечные циклы, а длины конечных циклов ограничены. В этом случае $|t|$ есть наименьшее общее кратное длин её циклов.

Предложение 1.1.([5], стр 35). Пусть

$$g = ... \, (... \, y_1 y_2 \, ...) \, ... -$$

разложение подстановки $g \in S(\Omega)$ на независимые циклы. Тогда

$$h^{-1} g h = ... \, (... \, y_1^h y_2^h \, ...) \, ...$$

для любой подстановки $h \in S(\Omega)$.

Если $|\Omega| = n$, то $S(\Omega)$ называется симметрической группой степени n и обозначается S_n. Множество A_n всех четных подстановок из S_n, т.е. подстановок, представимых произведением четного числа транспозиций, является подгруппой индекса 2 группы S_n и называется знакопеременной группой степени n. Следующее утверждение доказано Э. Галуа.

Предложение 1.2.([5], стр. 115). A_n - простая неабелева группа при $n \geqslant 5$.

Определение 1.1. Пусть $|\Omega| = \infty$. Подстановка $g \in S(\Omega)$ называется финитарной, если множество $\{\alpha | \alpha \in \Omega, \alpha^g \neq \alpha\}$ конечно.

Очевидно, множество $Fin(\Omega)$ всех финитарных подстановок множества Ω образует локально конечную нормальную в группе $S(\Omega)$ подгруппу. Путь $\Omega = N$ - множество всех натуральных чисел, $T_n = \{g | g \in S(N), \alpha^g = \alpha$ при $\alpha > n\}$. Ясно, что T_n изоморфна группе S_n и $Fin(N)$ есть объединение возрастающей цепочки подгрупп

$$T_1 < T_2 < \dots T_n < \dots .$$

Из предложения 1.2 следует

Предложение 1.3. Группа $Fin(N)$ содержит единственную собственную неединичную нормальную подгруппу, состоящую из всех четных подстановок.

Предложение 1.4. ([13], лемма 7). Пусть $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ - подмножество множестсва N и $\alpha_i + 1 < \alpha_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Если

$$b = (\alpha_1 \;\; \alpha_1 + 1)(\alpha_2 \;\; \alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k \;\; \alpha_k + 1) -$$

разложение инволютивной подстановки $b \in Fin(N)$ на независимые транспозиции,

$$u = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k \; \alpha_k + 1 \; \alpha_{k-1} + 1 \dots \alpha_2 + 1 \; \alpha_1 + 1) -$$

цикл, то подстановка bb^u имеет порядок k.

Определение 1.2. Подстановка $g \in S(N)$ называется ограниченной, если

$$w(g) = \max_{\alpha \in N} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Если g, h - ограниченные подстановки, то таковыми являются подстановки g^{-1} и gh, так как $w(g^{-1}) = w(g)$, $w(gh) \leqslant w(g) + w(h)$. Поэтому множество

$$Lim(N) = \{x | x \in S(N),\, w(x) < \infty\}$$

образуют группу, которая является естественным расширением группы $Fim(N)$. Заметим, что группа $Lim(N)$ является смешанной. Действительно, пусть

$$z = (\dots 2k \dots 4\,2\,1\,3 \dots 2k-1 \dots) -$$

бесконечный цикл. Так как $w(z) = 2$, то $w \in Lim(N)$.

Пусть

$$L = \{\mu_1, \mu_2,\, \dots,\, \mu_n,\, \dots\} -$$

бесконечное подмножество множества N, где $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$; m - фиксированное натуральное число. По определению элементы μ_i и μ_j эквивалентны, если либо $i = j$, либо $i < j (j < i)$ и выполняются все неравенства $\mu_{k+1} - \mu_k \leqslant m$; $i \leqslant k \leqslant j-1$ $(j \leqslant k \leqslant i-1)$. Нетрудно понять, что данное отношение действительно является отношением эквивалентности, а значит, оно индуцирует разбиение множества L на классы эквивалентности. Это разбиение называется m - разбиением. Пусть $B_m(L)$ - множество всех классов эквивалентности элементов множества L.

Определение 1.3. Множество L называется m - рассеянным, если все классы множества $B_m(L)$ конечны и вполне m - рассеянным если

$$c_m = \max_{A \in B_m(L)} |A| < \infty.$$

Множество L называется (вполне) рассеянным, если оно (вполне) m - рассеянное при любом натуральном m.

Примером вполне рассеяннного множества служит любое множество L, для элементов которого выполняется неравенства

$$\mu_2 - \mu_1 < \mu_3 - \mu_2 < \dots < \mu_n - \mu_{n-1} < \mu_{n+1} - \mu_n < \dots .$$

Пусть $k \in N$ и

$$L_k = \{2^k, 2^k + 1, \ ..., 2^k + k\}.$$

Нетрудно понять, что

$$L = \bigcup_{k \in N} L_k$$

является рассеянным, но не вполне рассеянным множеством.

Если m - фиксированное натуральное число, то множество $L = \{km | k \in N\}$ не является рассеянным, так как $B_m(L) = \{L\}$.

1.2. Основная теорема. Предварительные леммы

Пусть $L = \{\mu_1, \mu_2, \ ..., \ \mu_n, \ ...\}$ - подмножество множества N, для элементов которого выполняется неравенства $\mu_n + 1 < \mu_{n+1}$ $(n = 1, 2, ...)$. Рассмотрим инволюцию

$$a = (\mu_1 \, \mu_1 + 1)(\mu_2 \, \mu_2 + 1)...(\mu_n \, \mu_n + 1)...$$

Группы $Lim(N)$. Очевидно, $w(a) = 1$. В [12] установлено, что такие инволюции порождают группу $Lim(N)$. В работе [13] начато изучение нормального строения группы $Lim(N)$. В частности, доказано, что нормальное замыкание инволюции a в группе $Lim(N)$ тогда и только тогда локально конечно, когда L - вполне рассеяное множество. Там же приведены гипотезы о нормальных замыканиях элементов группы $Lim(N)$.

Основной результат настоящей главы доказывает одну из этих гипотез, а именно, установлена следующая

Теорема 1.1. Нормальное замыкание T инволюции a в группе $Lim(N)$ тогда и только тогда является собственной подгруппой группы $Lim(N)$, когда L - рассеянное множество. Если L - рассеянное, но не вполне рассеянное множество, то T - смешанная группа.

Приступим к доказательству данной теоремы. Начнем с определения. Пусть γ, ε - целые числа и $\gamma \leqslant \varepsilon$. Множество

$$U_\gamma^\varepsilon = \{\beta | \beta \in Z,\, \gamma \leqslant \beta \leqslant \varepsilon\}$$

будем называть отрезком целых чисел; γ - левый конец отрезка, ε - правый. В частности, $U_\gamma^\gamma = \{\gamma\}$.

Для каждых $m \in N$, $\alpha \in L$ положим

$$V_\alpha^m = U_{\alpha-m}^{\alpha+m} \bigcap N,\; E_m = \bigcup_{\alpha \in L} V_\alpha^m.$$

Лемма 1.1. *Если множество L рассеянное, то множество E_m является 1-рассеянным при любом натуральном m.*

Доказательство. Если лемма неверна, то найдутся такие натуральные числа m и γ, что 1-разбиение множества E_m содержит бесконечный класс $U_\gamma = \{\beta | \beta \in N,\, \beta \geqslant \gamma\}$. Пусть $\mu_i > \gamma$, тогда объединение $V_{\mu_i}^m \bigcup V_{\mu_{i+1}}^m$ включает в себя отрезок целых чисел с концами μ_i, μ_{i+1}. Следовательно, $2m$ - разбиение множества L содержит бесконечный класс эквивалентности с представителем μ_i. Получили противоречие с рассеянностью множества L. Лемма доказана.

Обозначим для краткости $G = Lim(N)$ и для каждого рассеянного множества L определим подгруппу $Q = Q(L)$. В силу леммы 1.1 каждое множество E_m разбивается на отрезки

$$W_{m1},\, W_{m2},\, ...,\, W_{mn},\, ...$$

натуральных чисел и при этом если β_{mn} - правый конец отрезка W_{mn}, а α_{mn+1} - левый конец отрезка W_{mn+1}, то $\alpha_{mn+1} > \beta_{mn} + 1 (n = 1, 2, ...)$; каждый отрезок W_{mn} содержится в некотором отрезке $W_{m+1\,s}$. Полагаем

$$Q_m = \{x | x \in G;\, W_{mn}^x = W_{mn} (n = 1, 2, ...);\, \beta^x = \beta (\beta \in N \setminus E_m)\}.$$

Очевидно, Q_m является подгруппой группы G и $Q_m \leqslant Q_{m+1}$, $m = 1, 2, ...$. Пусть, наконец,

$$Q = Q(L) = \bigcup_{m \in N} Q_m$$

Лемма 1.2. *Q - собственная нормальная в группе G подгруппа.*

Доказательство. Пусть $1 \neq h \in Q$; $g \in G$ и $w(g) = k$. Из определения группы Q следует, что найдется такое натуральное m, что элемент h содержится в подгруппе Q_m. Мы утверждаем, что $h^g \in Q_t$, где $t = m+k+1$. Действительно, рассмотрим разложение подстановки h на независимые циклы. Поскольку h оставляет на месте отрезки $W_{mn} (n = 1, 2, ...)$ и действует тождественно на числах не содержащихся в этих отрезках, то все эти циклы конечны. Если $x = (\gamma_1 ... \gamma_s)$ один из этих циклов $(s > 1)$, то γ_1, ..., γ_s содержатся в некотором отрезке W_{mn}, который совпадает с объединением нескольких отрезков

$$V^m_{\mu_q}, V^m_{\mu_{q+1}}, ..., V^m_{\mu_e}.$$

Фиксируем любое число γ_i множества $\{\gamma_1, ..., \gamma_s\}$. Тогда $\gamma_i \in V^m_{\mu_j}$ для некоторого индекса j, $q \leqslant j \leqslant e$; а поскольку $\gamma_i^x = \gamma_i^g$ и $|\gamma_i - \gamma_i^g| \leqslant w(g) = k$, то $\gamma_i^g \in V^t_{\mu_j}$. Далее, отрезок W_{mn} есть часть отрезка

$$V^t_{\mu_q} \bigcup V^t_{\mu_{q+1}} \bigcup ... \bigcup V^t_{\mu_e}.$$

В свою очередь, этот отрезок содержится в некотором отрезке W_{td}, $d \in N$. Следовательно, все элементы цикла $x^g = (\gamma_1^g ... \gamma_s^g)$ принадлежит W_{td}, откуда в силу определения группы Q_t выводим, что $x^g \in Q_t$ и $h^g \in Q_t$. Таким образом, Q - нормальная подгруппа группы G.

Остается показать, что Q - собственная подгруппа группы G. В самом деле, по ходу доказательства мы убедились, что любая подстановка подгруппы Q разлагается на конечные независимые циклы. Поэтому бесконечный цикл

$$y = (... 2n ... 4\,2\,1\,3 ... 2n-1 ...)$$

не содержится в Q, но так как $w(y) = 2$, то $y \in G$. Итак,$Q \neq G$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Если z - инволюция, а f - тройной цикл знакопеременной группы A_4, то $zz^f z^{f^2} = 1$.*

Доказательство. Мы имеем $A_4 = (\langle z\rangle \times \langle u\rangle) \leftthreetimes \langle f\rangle$, где $|u| = 2$. При этом f транзитивно переставляет инволюции z, u, zu, произведение которых равно 1. Поэтому лемма верна.

Лемма 1.4. *Пусть $y = (\varepsilon_1\,\varepsilon_2)(\varepsilon_3\,\varepsilon_4)(\varepsilon_5\,\varepsilon_6)$ - разложение подстановки y на независимые транспозиции, $f = (\varepsilon_3\,\varepsilon_4\,\varepsilon_5)$. Тогда $yy^f y^{f^2} = (\varepsilon_1\,\varepsilon_2)$.*

Доказательство. Элементы $z = (\varepsilon_3\,\varepsilon_4)(\varepsilon_5\,\varepsilon_6)$, f порождают группу, изоморфную знакопеременной группе A_4, все элементы которой перестановочны с транспозицией $(\varepsilon_1\,\varepsilon_2)$. Поэтому с учетом леммы 1.3 мы имеем

$$y = (\varepsilon_1\,\varepsilon_2)z,\ y^f = (\varepsilon_1\,\varepsilon_2)z^f,\ y^{f^2} = (\varepsilon_1\,\varepsilon_2)z^{f^2}$$

$$yy^f y^{f^2} = (\varepsilon_1\,\varepsilon_2)^3 zz^f z^{f^2} = (\varepsilon_1\,\varepsilon_2).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Пусть*

$$c = (\beta_1\beta_1 + 1)(\beta_2\beta_2 + 1)...(\beta_n\beta_n + 1)... -$$

разложение подстановки c группы G на независимые транспозиции. Если выполняются все неравенства

$$6 \leqslant \beta_{n+1} - \beta_n \leqslant m\,(n = 1, 2, ...),$$

где m - некоторое фиксированное натуральное число, то нормальное замыкание $B(c) = \langle c^g | g \in G\rangle$ инволюции c в группе G содержит группу $Fin(N)$ всех финитарных подстановок множества N.

Доказательство. Поскольку группа $Fin(N)$ совпадает с нормальным замыканием любой своей транспозиции, то для доказательства леммы достаточно показать, что $B(c)$ содержит транспозицию $(\beta_1\,\beta_1+1)$ из разложения подстановки c. В самом деле, так как $\beta_{n+1}-\beta_n \geqslant 6$ при всех натуральных n, то транспозиции из разложения подстановки

$$l = (\beta_1\,\beta_1{+}2)(\beta_1{+}1\,\beta_1{+}3)(\beta_2\,\beta_2{+}2)(\beta_2{+}1\,\beta_2{+}3)...(\beta_n\,\beta_n{+}2)(\beta_n{+}1\,\beta_n{+}3)...$$

независимы и при этом $w(l)=2$, в частности, $l \in G$. Поэтому группа $B(c)$ содержит инволюцию c^e. С помощью предложения 1.1 получаем

$$c_1 = c^e = (\beta_1+2\,\beta_1+3)(\beta_2+2\,\beta_2+3)...(\beta_n+2\,\beta_n+3)....$$

Пусть теперь

$$s = (\beta_1{+}2\,\beta_2)(\beta_1{+}3\,\beta_2{+}1)(\beta_2{+}2\,\beta_3)(\beta_2{+}3\,\beta_3{+}1)...(\beta_n{+}2\,\beta_{n+1})(\beta_n{+}3\,\beta_{n+1}{+}1)....$$

По условию леммы $\beta_{n+1}-\beta_n \leqslant m\,(n=1,2,...)$, следовательно, $w(s)<m$. Таким образом, $c_1^s \in B(c)$ и мы имеем

$$c_1^s = (\beta_2\,\beta_2+1)(\beta_3\,\beta_3+1)...(\beta_{n+1}\,\beta_{n+1}+1)....$$

Итак, $cc_1^s = (\beta_1\,\beta_1+1)$ содержится в $B(c)$. Лемма доказана.

1.3. Завершение доказательства теоремы

Предположим, что L - рассеянное множество. Тогда из построения в предыдущем параграфе группы

$$Q = Q(L) = \bigcup_n Q_n$$

и леммы 1.2 следует, что инволюция a принадлежит подгруппе Q_1, которая содержится в собственной нормальной в G подгруппе Q.

Обратно, пусть a содержится в собственной номальной в $G = Lim(N)$ подгруппе. Очевидно, что это равносильно тому, что подгруппа

$B(a) = \langle a^g | g \in G \rangle$ является собственной в группе G. Допустим, что множество L не является рассеянным. Это означает, что найдется такое натуральное число m_0, что множество $B_{m_0}(L)$ содержит бесконечный класс A. Тогда если μ_γ - наименьшее число множества A, то из определения следует, что $\mu_{i+1} - \mu_i \leqslant m_0$ при всех $i \geqslant \gamma$. Отсюда выводим, что $B_m(L)$ состоит из единственного класса $\{L\}$, если $m > \max(m_0, \mu_\gamma)$. Фиксируем некоторое такое m_1. Итак,

$$\mu_{n+1} - \mu_n \leqslant m_1 \, (n = 1, 2, ...) \, .$$

Покажем теперь, что $B(a) = G$. Тогда мы получим противоречие с нашим предположением $B(a) \neq G$ и первая часть теоремы будет доказана. Заметим вначале, что в группе $B(a)$ найдется такая подстановка

$$c = (\beta_1 \, \beta_1 + 1)(\beta_2 \, \beta_2 + 1)...(\beta_n \, \beta_n + 1)... \, ,$$

что для некоторого натурального m выполняются все неравенства

$$6 \leqslant \beta_{n+1} - \beta_n \leqslant m \, (n = 1, 2, ...). \tag{1.1}$$

Действительно, разобъем транспозиции из разложения a на тройки:

$$a = (\mu_1 \, \mu_1 + 1)(\mu_2 \, \mu_2 + 1)(\mu_3 \, \mu_3 + 1)...(\mu_{3k+1} \, \mu_{3k+1} + 1)(\mu_{3k+2} \, \mu_{3k+2} + 1)$$
$$(\mu_{3k+3} \, \mu_{3k+3} + 1)...$$

и положим

$$t = (\mu_2 \, \mu_2 + 1 \, \mu_3)...(\mu_{3k+2} \, \mu_{3k+2} + 1 \, \mu_{3k+3})... \, .$$

Так как $\mu_{n+1} - \mu_n \leqslant m_1$, то $w(t) \leqslant m_1$, а значит, $t \in G$. Следовательно, если $c = a \, a^t \, a^{t^2}$, то $c \in B(a)$ и согласно лемме 1.4

$$c = (\mu_1 \, \mu_1 + 1)...(\mu_{3k+1} \, \mu_{3k+1} + 1)... \, .$$

При этом из неравенств $2 \leqslant \mu_{n+1} - \mu_n \leqslant m_1$ легко вытекает, что $6 \leqslant \mu_{3k+4} - \mu_{3k+1} \leqslant 3m_1 = m$. Полагая $\beta_1 = \mu_1$, $\beta_2 = \mu_4$, ..., $\beta_n = \mu_{3n-2}$, ..., мы получим, что подстановка c искомая.

Заметим, что из включения $c \in B(a)$ немедленно следует, что $B(c) \leqslant B(a)$, а потому для доказательства первой части теоремы нам достаточно установить равенство $B(c) = G$. Во введении отмечалось, что группа G порождается инволюциями, в разложении которых на независимые транспозиции участвуют только транспозиции вида $(\alpha\,\alpha+1)$. Так как $Fin(N) < B(c)$ по лемме 1.5, то для доказательства равенства $B(c) = G$ достаточно показать, чтот если

$$x = (\gamma_1\,\gamma_1 + 1)...(\gamma_n\,\gamma_n + 1)...,$$

где $\gamma_{n+1} > \gamma_n + 1$ $(n = 1, 2, ...)$, то $x \in B(c)$. Поскольку $B(c)$ содержит любую финитарную подствновку $x_n = (\gamma_1\,\gamma_1 + 1)...(\gamma_n\,\gamma_n + 1)$, то без ограничения общности можно предполагать, что $\gamma_1 > \beta_1$.

Обозначим $L_x = \{\gamma_n | n \in N\}$ и рассмотрим случай, когда для элементов этого множества выполняются неравенства

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n > 5m\,(n = 1, 2, ...). \tag{1.2}$$

Разобъем множество $N \setminus \{1, 2, ..., \beta_1\}$ на отрезки целых чисел

$$\Delta_1 = U_{\beta_1+1}^{\beta_3},\ ...,\ \Delta_n = U_{\beta_2 n+1}^{\beta_{2n+1}},\ \Delta_{n+1} = U_{\beta_{2n+1}+1}^{\beta_{2n+3}}, ...$$

В силу неравенств (1.1)

$$|\Delta_n| = \beta_{2n+1} - \beta_{2n-1} = (\beta_{2n+1} - \beta_{2n}) + (\beta_{2n} - \beta_{2n-1)} \leqslant 2m\,.$$

Из неравенств (1.2) и $\gamma_1 > \beta_1$ отсюда вытекает, что

$$L_x \subset \bigcup_{n \in N} \Delta_n;$$

пересечение $\Delta_n \cap L_x$ при любом n либо пусто, либо содержит не более одного элемента; γ_i, γ_j не содержаться в соседних отрезках для каждых $i \neq j$. Таким образом, найдется такая последовательность $j_1, j_2, ..., j_n, ...$, что $j_{n+1} - j_n > 1\,(n = 1, 2, ...)$ и

$$\gamma_1 \in \Delta_{j_1},\ \gamma_2 \in \Delta_{j_2},\ ...,\ \gamma_n \in \Delta_{j_n},\ ... .$$

Определим подстановку $\psi \in S(N)$ следующим образом. Для $n = 1, 2, ...$ полагаем

$$\gamma_n^{\psi} = \beta_{2j_n},\ \beta_{2j_n}^{\psi} = \gamma_n,\ (\gamma_n + 1)^{\psi} = \beta_{2j_n} + 1,\ (\beta_{2j_n} + 1)^{\psi} = \gamma_n + 1;$$

$$\gamma^{\psi} = \gamma,\ \text{если}\ \gamma \notin \bigcup_{n \in N} \left(\{\gamma_n, \gamma_n + 1\} \cup \{\beta_{2j_n}, \beta_{2j_n} + 1\}\right).$$

Так как элементы γ_n, β_{2j_n} принадлежат отрезку Δ_n и $|\Delta_n| \leqslant 2m$, то $w(\psi) < 2m$, т.е. $\psi \in G$. В силу предложения 1.1 мы имеем

$$x^{\psi} = (\beta_{2j_1}\, \beta_{2j_1} + 1)...(\beta_{2j_n}\, \beta_{2j_n} + 1)... .$$

Пусть теперь

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n,\ ... -$$

элементы множества $\{\beta_1, ..., \beta_n, ...\} \setminus \{\beta_{2j_1}, ..., \beta_{2j_n}, ...\}$, расположенные в порядке возрастания. Из вышеизложенного следует, что если $\alpha_i = \beta_k$, то α_{i+1} - элемент множества $\{\beta_{k+1},\ \beta_{k+2}\}$, а потому $\alpha_{i+1} - \alpha_i \leqslant \beta_{k+2} - \beta_k \leqslant 2m$. Здесь i - любое натуральное число, $k = k(i)$. Отсюда легко выводим, что подстановка

$$f = (\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_2 + 1)...(\alpha_{2n-1}\, \alpha_{2n}\, \alpha_{2n} + 1)...$$

является элементом группы G. Применяя леммы 1.3, 1.4 мы получим равенство $cc^f c^{f^2} = x^{\psi}$, из которого сразу следует что, $x \in B(c)$.

Докажем, наконец, что это включение выполняется в общем случае (без дополнительного предположения, что для элементов множества L_x выполняются неравенства (1.2)). Для этого фиксируем любое натуральное $s > 5m$, а подстановку x представим в виде произведения

$$x = x_1\, x_2 \dots x_s\,,$$

где

$$x_i = (\gamma_i\, \gamma_i + 1)(\gamma_{i+s}\, \gamma_{i+s} + 1)...(\gamma_{i+ks}\, \gamma_{i+ks} + 1)...\,,$$

$1 \leqslant i \leqslant s$. Из определения подстановки x следует, что если $L_{x_i} = \{\gamma_{i+ks} | k = 1, 2, ...\}$, то для соседних элементов этого множества выполняется неравенство

$$\gamma_{i+(k+1)s} - \gamma_{i+ks} > s > 5m\,,$$

которое совпадает с неравенством (1.2) для соседних элементов множества L_x. Но тогда по доказанному выше $x_i \in B(c)$, $1 \leqslant i \leqslant s$, а потому $x \in B(c)$. Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть. Пусть L - рассеянное, но не вполне рассеянное множество. Нам надо показать, что нормальное замыкание $B(a)$ инволюции a в группе G содержит элемент бесконечного порядка. Действительно, в силу определения для некоторого натурального числа r найдутся такие попарно непересекающиеся подмножества

$$L_n = \{\mu_{\alpha_n},\, \mu_{\alpha_n+1},\, ...\, \mu_{\beta_n}\},$$

$n = 1, 2, ...$ множества L, что $|L_n| > n$ и $\mu_{i+1} - \mu_i \leqslant r$ $(\alpha_n \leqslant i \leqslant \beta_n - 1)$. Определим подстановку u множества N её разложением на независимые циклы $u_n (n = 1, 2, ...)$. Полагаем

$$u_n = (\mu_{\alpha_n}\, \mu_{\alpha_n+1} \dots \mu_{\beta_n}\, \mu_{\beta_n} + 1\, \mu_{\beta_n} + 1\, \mu_{\beta_n - 1} + 1 \dots \mu_{\alpha_n+1} + 1\, \mu_{\alpha_n} + 1)\,.$$

Тогда $w(u) \leqslant r$, т.е. $u \in G$. Согласно предложению 1.4 элемент $aa^u \in B(a)$ разлагается на независимые циклы, длины которых неограничены, а потому $|aa^u| = \infty$. Теорема доказана.

Глава 2

Вложения элементов в группе $Disp(M)$

В §2.1 настоящей главы дается определение равномерной подстановки множества M. Любая подстановка множества N равномерна. Множество R всех равномерных подстановок множества Z является группой. Это доказано в лемме 2.2 .

Связь между группами $Disp(N)$ и $Disp(Z)$ установлена в теоремах 2.1, 2.2 из §2.2.

В §2.3 формулируется и доказывается теорема 2.3 о вложении конечных подмножеств групп $Disp(N)$ и $R \cap Disp(Z)$ в подгруппы специального вида.

2.1. Основные понятия. Группа R

Пусть N, Z - множества всех натуральных и целых чисел соответственно. Если M - любое из этих множеств, то через $S(M)$ обозначена группа всех подстановок множества M.

Для любой подстановки $g \in S(M)$ определим её параметр рассеивания $\lambda(g)$ следующим образом. Для каждого $\alpha \in M$ полагаем

$$M_\alpha(g) = \{\beta | \beta \in M,\ \beta \leqslant \alpha < \beta^g\},\ L_\alpha(g) = \{\beta | \beta \in M,\ \beta^g \leqslant \alpha < \beta\}.$$

Пусть теперь

$$t(g) = \max_{\alpha \in M} |M_\alpha(g)|,\ s(g) = \max_{\alpha \in M} |L_\alpha(g)|,\ \lambda(g) = \max(t(g), s(g)).$$

Нетрудно понять, что множество

$$Disp(M) = \{g | g \in S(M), \lambda(g) < \infty\}$$

образует группу и $\lambda(g) \leqslant w(g)$ (см. определение 1.2). Отсюда немедлено следует, что $Lim(M) < Disp(M)$. Заметим, что при этом группа $Disp(M)$ существенно больше группы $Lim(M)$. Например если α_1, β_1, α_2, β_2, ..., α_n, $\beta_n, \ldots$ - строго возрастающая последовательность чисел из M и

$$\lim_{n\to\infty} (\beta_n - \alpha_n) = \infty,$$

то для подстановки

$$x = (\alpha_1\beta_1)(\alpha_2\beta_2)...(\alpha_n\beta_n)...$$

выполняются равенства $w(x) = \infty$, $\lambda(x) = 1$, т.е. $x \notin Lim(M)$, $x \in Disp(M)$.

Определение 2.1. Подстановка g множества M называется равномерной, если

$$|M_\alpha(g)| = |L_\alpha(g)| < \infty$$

при любом $\alpha \in M$.

Если g - равномерная подстановка, то $\lambda(g) = t(g) = s(g)$. Заметим, что любая подстановка множества N является равномерной.

Обозначим через R множество всех равномерных подстановок множества Z. Если d - сдвиг, $\alpha^\alpha = \alpha + 1$ $(\alpha \in Z)$, то $|M_\alpha(d)| = 1$, $|L_\alpha(d)| = 0$ при любом $\alpha \in Z$. Поэтому $d \notin R$, а так как $w(d) = 1$, то $d \in Lim(Z)$.

Лемма 2.1. *Пусть α, β, $\gamma \in Z$ и $\beta \leqslant \alpha < \gamma$. Тогда для любой равномерной подстановки y и инволюции $x = (\beta\gamma)$ выполняется равенство*

$$|M_\alpha(yx)| = |L_\alpha(yx)|.$$

Доказательство. Обозначим $\beta_1 = \beta^{y^{-1}}$, $\gamma_1 = \gamma^{y^{-1}}$. Так как x действует тождественно на $Z \setminus \{\beta, \gamma\}$, то образы подстановок y и yx различны лишь для точек β_1, γ_1. При этом $\beta_1^y = \beta$, $\beta_1^{yx} = \gamma$, $\gamma_1^y = \gamma$, $\gamma^{yx} = \beta$. Поэтому непосредственно проверяется следующие утверждения:

1) $\beta_1, \gamma_1 \leqslant \alpha \Longrightarrow M_\alpha(yx) = (M_\alpha(y) \cup \{\beta_1\}) \setminus \{\gamma_1\},\ L_\alpha(yx) = L_\alpha(y)$;

2) $\beta_1, \gamma_1 > \alpha \Longrightarrow M_\alpha(yx) = M_\alpha(y),\ L_\alpha(yx) = (L_\alpha(y) \cup \{\gamma_1\}) \setminus \{\beta_1\}$;

3) $\beta_1 \leqslant \alpha < \gamma_1 \Longrightarrow M_\alpha(yx) = M_\alpha(y) \cup \{\beta_1\},\ L_\alpha(yx) = L_\alpha(y) \cup \{\gamma_1\}$;

4) $\gamma_1 \leqslant \alpha < \beta_1 \Longrightarrow M_\alpha(yx) = M_\alpha(y) \setminus \{\gamma_1\},\ L_\alpha(yx) = L_\alpha(y) \setminus \{\beta_1\}$.

В силу условия $|M_\alpha(y)| = |L_\alpha(y)|$, и лемма вытекает из утверждений 1) – 4) очевидным образом. Лемма доказана.

Лемма 2.2. R - *группа.*

Доказательство. Пусть $g, h \in R$. Так как

$$M_\alpha(g^{-1}) = (L_\alpha(g))^g,\ L_\alpha(g^{-1}) = (M_\alpha(g))^g,$$

то $g^{-1} \in R$. Очевидно, что $M_\alpha(gh) \subset (M_\alpha(g) \cup M_\alpha(h))$, а значит $|M_\alpha(gh)| < \infty$, при любом целом α. Зафиксируем $\alpha \in Z$ и докажем, что $|M_\alpha(gh)| = |L_\alpha(gh)|$ индукции по $|M_\alpha(h)|$. Если $|M_\alpha(h)| = 0$, то $M_\alpha(gh) = M_\alpha(g)$, $L_\alpha(gh) = L_\alpha(g)$. Следовательно, база для индукции есть. Пусть $|M_\alpha(h)| > 0$ и $\gamma_1 \in M_\alpha(h)$, $\beta_1 \in L_\alpha(h)$, $\gamma = \gamma_1^h$, $\beta = \beta_1^h$. Тогда $\beta \leqslant \alpha < \gamma$. Если $x = (\beta\gamma)$, то по утверждению 4) из доказательства леммы 2.1 $|M_\alpha(h\text{x})| = |M_\alpha(h)| - 1$. По индуктивному предположению $|M_\alpha(y)| = |L_\alpha(y)|$ для $y = g(hx)$. Теперь согласно лемме 2.1 $|M_\alpha(yx)| = |L_\alpha(yx)|$. Но $yx = gh$. Итак $gh \in R$. Лемма доказана.

2.2. Связь между $Disp(N)$ и $Disp(Z)$

Обозначим $G = Disp(N)$, $H = Disp(Z)$. Предполагая, что подстановки группы G действуют тождественно на множестве $Z \setminus N$, мы получим естественное вложение $G < H$. Пусть, далее, t - инволюция группы $S(Z)$, для которой $\alpha^t = -\alpha (\alpha \in Z)$, d - сдвиг, $\alpha^d = \alpha + 1$ $(\alpha \in Z)$.

Заметим, что группа G^t действует на множестве отрицательных чисел, как группа всех подстановок этого множества с конечными параметрами рассеивания. Понятно, что G и G^t поэлементно пересановочны, тривиально пересекаются, а значит, мы можем образовать прямое произведение $G \times G^t$. Так $Fin(Z) \triangleleft S(Z)$, то $Fin(Z) \cdot (G \times G^t)$ является подгруппой группы $S(Z)$.

Напомним, что согласно лемме 2.2 множество R всех равномерных подстановок множества Z образует группу. Сформулируем основные результаты данного параграфа.

Теорема 2.1. $H \cap R = Fin(Z) \cdot (G \times G^t)$.

Теорема 2.2. $H = (H \cap R) \leftthreetimes < d >$.

Приступим к непосредственному доказательству теоремы 2.1. Очевидно, $Fin(Z) < (H \cap R)$. Так как элементы группы G действуют тождественно на множестве $Z \setminus N$ то $|M_\alpha(g)| = |L_\alpha(g)| = 0$ для каждых $\alpha \in (Z \setminus N)$, $g \in G$, а если $\alpha \in N$ то $|M_\alpha(g)| = |L_\alpha(g)| \leqslant \lambda(g)$. Следовательно, $G < (H \cap R)$. Далее, прямая проверка показывает, что $\beta \in M_\alpha(g) \Leftrightarrow -\beta \in L_{-\alpha-1}(g^t)$ и $\beta \in L_\alpha(g) \Leftrightarrow -\beta \in M_{-\alpha-1}(g^t)$. Отсюда выводим, что $G^t < (H \cap R)$. Таким образом, нами установлено включение $Fin(Z) \cdot (G \times G^t) < (H \cap R)$.

Установим обратное включение. Пусть x - произвольная подстановка из пересечения $(H \cap R)$. Из определения групп H и R следует, что множество $M_0(x)$ конечно и $|M_0(x)| = |L_0(x)|$. Если $M_0(x) = \{\beta_1, ..., \beta_r\}$, $L_0(x) = \{\gamma_1, ..., \gamma_r\}$, то обозначим $y = (\beta_1^x \, \gamma_1^x) \cdot \, ... \, \cdot (\beta_r^x \, \gamma_r^x)$. Ясно, что $y \in Fin(Z) \leqslant (H \cap R)$ и $M_0(xy) = L_0(xy) = \emptyset$. Если xy стабилизируют 0, то $xy = g_1 g_2$, где подстановка g_1 действует тождественно на $Z \setminus N$ и $\alpha^{g_1} = \alpha^{xy}$ для $\alpha \in N$; подстановка g_2 действует тождественно на $N \cup \{0\}$ и $\beta^{g_2} = \beta^{xy}$

для каждого отрицательного β. Но тогда из определения групп G и C^t следует, что $g_1 \in G$, $g_2 \in G^t$, а поэтому $x \in Fin(Z) \cdot (G \times G^t)$. Если же $0^{xy} = \alpha_0$ и $\alpha_0 \neq 0$, то рассматривая вместо y подстановку $y_1 = y(0_{\alpha_0}) \in Fin(Z)$, мы подобно вышеизложенному установим обратное включение. Теорема доказана.

Установим теперь два критерия равномерности подстановки множества Z и докажем теорему 2.2.

Лемма 2.3. *Пусть $x \in S(\mathbb{Z})$. Если $M_\gamma(x) = L_\gamma(x) = \varnothing$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{Z}$, то $x \in R$.*

Доказательство. Мы должны показать, что $|M_\alpha(x)| = |L_\alpha(x)| < \infty$ при любом целом α. Если $\alpha = \gamma$, то это верно по условию. Предположим, что $\alpha > \gamma$, и рассмотрим множество $T = \{\beta | \beta \in \mathbb{Z},\, \gamma < \beta \leqslant \alpha\}$. В силу условия леммы и определения множества $M_\alpha(x)$ справедливы равенства

$$T = M_\alpha(x) \cup (T \cap T^{x^{-1}}),\; M_\alpha(x) \cap T \cap T^{x^{-1}} = \varnothing. \tag{2.1}$$

Поскольку условие леммы выполняется и для элемента x^{-1}, то аналогично получаем

$$T = M_\alpha(x^{-1}) \cup (T \cap T^{x}),\; M_\alpha(x^{-1}) \cap T \cap T^{x} = \varnothing. \tag{2.2}$$

Заметим, что $(T \cap T^{x^{-1}})^x = T \cap T^x$, а так как x — подстановка, то $|T \cap T^{x^{-1}}| = |T \cap T^x|$. Отсюда и из равенств (2.1) и (2.2) выводим, что $|M_\alpha(x)| = |M_\alpha(x^{-1})|$. С другой стороны, из определений непосредственно следует, что $M_\alpha(x^{-1}) = (L_\alpha(x))^x$. Таким образом, $|M_\alpha(x)| = |L_\alpha(x)| < \infty$. Это остается справедливым и для случая $\alpha < \gamma$, что можно установить небольшой модификацией приведенных выше рассуждений. Лемма доказана.

В силу леммы 2.3 меет место включение $Fin(Z) < R$.

Лемма 2.4. *Пусть $x \in S(Z)$ и $|M_\gamma(x)| = |L_\gamma(x)| < \infty$ для некоторого $\gamma \in Z$. Тогда $x \in R$.*

Доказательство. Покажем, что найдется такая финитарная подстановка y, что $M_\gamma(xy) = L_\gamma(xy) = \emptyset$. Действительно, если $M_\gamma(x) = \emptyset$, то достаточно взять $y = 1$. Пусть $M_\gamma(x) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, $L_\gamma(x) = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$. Прямая проверка показывает, что подстановка

$$y = (\alpha_1^x \beta_1^x) \dots (\alpha_r^x \beta_r^x)$$

является искомой. Теперь по лемме 2.3 $xy \in R$, а так как $y \in R$, то и $x \in R$. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Для произвольных $x \in S(Z)$, $\alpha \in Z$ выполняются следующие утверждения:*

1) $\alpha^{x^{-1}} \leqslant \alpha \Longrightarrow M_\alpha(xd) = M_\alpha(x) \cup \{\alpha^{x^{-1}}\}$, $L_\alpha(xd) = L_\alpha(x)$;

2) $\alpha^{x^{-1}} > \alpha \Longrightarrow M_\alpha(xd) = M_\alpha(x)$, $L_\alpha(xd) = L_\alpha(x) \setminus \{\alpha^{x^{-1}}\}$;

3) $(\alpha+1)^{x^{-1}} \leqslant \alpha \Longrightarrow M_\alpha(xd^{-1}) = M_\alpha(x) \setminus \{(\alpha+1)^{x^{-1}}\}$, $L_\alpha(xd^{-1}) = L_\alpha(x)$;

4) $(\alpha+1)^{x^{-1}} > \alpha \Longrightarrow M_\alpha(xd^{-1}) = M_\alpha(x)$, $L_\alpha(xd^{-1}) = L_\alpha(x) \cup \{(\alpha+1)^{x^{-1}}\}$.

Доказательство. Непосредственная проверка.

По определению $M + \varepsilon = \{m + \varepsilon \,|\, m \in M\}$ для $M \subseteq Z$, $\varepsilon \in Z$. Простая проверка показывает, что верна

Лемма 2.6. *Для произвольных $x \in S(Z)$, $\alpha \in Z$ выполняются следующие утверждения:*

1) $(\alpha+1)^x > \alpha \Longrightarrow M_\alpha(dx) = (M_\alpha(x)-1) \cup \{\alpha\}$, $L_\alpha(dx) = L_\alpha(x)-1$;

2) $(\alpha+1)^x \leqslant \alpha \Longrightarrow M_\alpha(dx) = M_\alpha(x)-1$, $L_\alpha(dx) = (L_\alpha(x)-1) \setminus \{\alpha\}$;

3) $\alpha^x > \alpha \Longrightarrow M_\alpha(d^{-1}x) = (M_\alpha(x)+1) \setminus \{\alpha+1\}$, $L_\alpha(d^{-1}x) = L_\alpha(x)+1$;

4) $\alpha^x \leqslant \alpha \Longrightarrow M_\alpha(d^{-1}x) = M_\alpha(x)+1$, $L_\alpha(d^{-1}x) = (L_\alpha(x)+1) \cup \{\alpha+1\}$.

Приступим к непосредственному доказательству теоремы 2.2. Фиксируем целое число γ и элемент $h \in H$. Обозначим $G_1 = H \cap R$ и покажем,

что
$$|M_\gamma(h)| - |L_\gamma(h)| = k \Longleftrightarrow h \in G_1 d^k. \qquad (2.3)$$
в самом деле, пусть $|M_\gamma(h)| - |L_\gamma(h)| = k$. Если $k = 0$, то в силу леммы 2.4 $h \in R \cap H = G_1 = G_1 d^0$. Пусть $k > 0$. Применяя k раз в зависимости от ситуации утверждения 3) или 4) леммы 2.5, мы придем к равенству
$$|M_\gamma(hd^{-k})| = |L_\gamma(hd^{-k})|.$$
Ввиду леммы 2.4 $hd^{-k} \in H \cap R = G_1$, т.е. $h \in G_1 d^k$. Если $k < 0$, то это включение доказывается аналогично применением $|k|$ раз утверждений 1) или 2) леммы 2.5.

Обратно. Пусть $h = gd^k$, где $g \in G_1$. Если $k = 0$, то h - равномерная подстановка и $|M_\gamma(h)| - |L_\gamma(h)| = 0$. Если же $|k| > 0$, то равенство $|M_\gamma(h)| - |L_\gamma(h)| = k$ устанавливается применением $|k|$ раз соответствующих утверждений леммы 2.5.

Далее, подобно вышеизложенному, применяя лемму 2.6, доказывается, что
$$|M_\gamma(h)| - |L_\gamma(h)| = k \Longleftrightarrow h \in d^k G_1. \qquad (2.4)$$
Завершим доказательство теоремы 2.2. Из утверждений (2.3), (2.4) следует, что $H = \langle G_1, d\rangle$ и $G_1 \lhd H$. Теперь из очевидного равенства $G_1 \cap \langle d\rangle = 1$ вытекает, что $H = G_1 \leftthreetimes \langle d\rangle$. Теорема доказана.

2.3. Факторизации

Группа X называется локально финитно аппроксимируемой, если каждая её конечно порожденная подгруппа изоморфно вложима в декартово произведение конечных групп. Таковой является, например локально конечная группа, а так же произвольная абелева группа. Последнее легко вытекает из основной теоремы о конечно порожденных абелевых группах и финитной аппроксимируемости бесконечной циклической группы.

Пусть $H = Disp(Z)$, $G = Disp(N)$, R - группа ограниченных подстановок множества Z. Основным результатом данного параграфа является

Теорема 2.6. *В группе $G_1 = H \cap R$ и G любое конечное подмножество содержится в подгруппе вида $Q = AB$, где A, B - локально финитно аппроксимируемые подгруппы из Q.*

Доказательство данной теоремы конструктивное. Подгруппа $A(B)$ будет построена как объединение возрастающей цепочки подгрупп $A_n(B_n)$ $(n = 1, 2, ...)$. При фиксированном n подстановки из $A_n(B_n)$ оставляют на месте компоненты некоторого разбиения множества Z (при доказательстве теоремы для группы G_1) или N (при рассмотрении группы G) на отрезки целых чисел, а значит, $A_n(B_n)$ - финитно аппроксимируемая подгруппа. Поэтому мы имеем ясное представление элементов конечно порожденных подгрупп из G_1 и G.

Отрезок целых чисел с левым концом α и правым концом β (см. §1.2) при доказательстве теоремы 2.3 будем обозначать $[\alpha,\ \beta]$.

Приступим к доказательству теоремы 2.3. Итак, пусть G_1 — группа всех равномерных подстановок множества $\mathbb{Z}$ с конечными параметрами рассеивания, T — произвольное конечное подмножество группы G_1. Понятно, что мы можем предполагать, что T замкнуто относительно взятия обратных элементов, т. е. $T^{-1} = T$. Если $V \subseteq \mathbb{Z}$, то через V^T будет обозначаться множество $\{m^t \mid m \in V, t \in T\}$. Зададим некоторые разбиения множества $\mathbb{Z}$ на отрезки целых чисел. Начнем с разбиения

$$V_1^0, V_1^1, V_1^{-1},\ \dots\ , V_1^k, V_1^{-k},\ \dots\ ,$$

которое определим следующим образом: $V_1^0 = [1, 2m_0]$, где m_0 — любое такое натуральное число, что $m_0 > 1$ и V_1^0 содержит множество $(\mathbb{Z} \setminus N)^T \cap N$

(это пересечение конечно, так как является объединением конечного числа конечных множеств $M_0(t), t \in T$); $V_1^1 = [2m_0+1, 2m_1]$, $m_1 > m_0+1$, V_1^1 содержит множество $(V_1^0)^T \setminus \{\gamma \mid \gamma \in \mathbb{Z}, \gamma \leqslant 2m_0\}$; $V_1^{-1} = [-2s_0+1, 0]$, где s_0 — любое такое натуральное число > 1, что V_1^{-1} содержит конечное множество $\mathbb{N}^T \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$, являющееся объединением конечных множеств $L_0(t)$, $t \in T$; $\ldots$; $V_1^k = [2m_{k-1}+1, 2m_k]$, $m_k > m_{k-1}+1$, V_1^k содержит множество $(V_1^{k-1})^T \setminus \{\gamma \mid \gamma \in \mathbb{Z}, \gamma \leqslant 2m_{k-1}\}$; $V_1^{-k} = [-2s_{k-1}+1, -2s_{k-2}]$, $s_{k-1} > s_{k-2}+1$, V_1^{-k} содержит множество $(V_1^{-k+1})^T \setminus \{\gamma \mid \gamma \in \mathbb{Z}, \gamma > -2s_{k-2}\}$; $\ldots$.

Непосредственно из определения этих отрезков вытекает

Предложение 2.1. *Для каждого целого числа r выполняется включение*

$$(V_1^r)^T \subset (V_1^{r-1} \cup V_1^r \cup V_1^{r+1}).$$

Следующее разбиение множества $\mathbb{Z}$ получается из предыдущего объединением каждых трех последовательных отрезков, т. е. это разбиение составляют отрезки целых чисел $V_2^r (r \in \mathbb{Z})$, где

$$V_2^r = V_1^{3r} \cup V_1^{3r+1} \cup V_1^{3r+2}.$$

Рассмотрим еще два разбиения множества $\mathbb{Z}$, которые тесно связаны с предыдущими. Первое из них зададим отрезками $U_1^0 = [-s_0+1, m_0]$, $U_1^1 = [m_0+1, m_0+m_1]$, $U_1^{-1} = [-s_0-s_1+1, s_0]$, $\ldots$, $U_1^k = [m_{k-2}+m_{k-1}+1, m_{k-1}+m_k]$, $U_1^{-k} = [-s_k-s_{k-1}+1, -s_{k-1}-s_{k-2}]$, $\ldots$. Второе разбиение получается из первого следующим образом:

$$U_2^r = U_1^{3r-1} \cup U_1^{3r} \cup U_1^{3r+1},\ r \in \mathbb{Z}. \tag{2.5}$$

Сформулируем два предложения, которые являются простыми следствиями предыдущих построений. Если отрезок $[\alpha, \beta]$ содержит $2n$ чисел ($n > 1$), то под его левой (правой) половиной будем понимать отрезок $[\alpha, \alpha+n-1]$ (соответсвенно $[\alpha+n, \beta]$).

Предложение 2.2. *Для каждого целого числа r отрезок U_2^r состоит из правой половины отрезка V_1^{r-1} и левой половины отрезка V_1^r.*

Предложение 2.3. *Для каждого целого числа r отрезок U_1^r состоит из непересекающихся отрезков $U_2^r \cap V_2^{r-1}$ и $U_2^r \cap V_2^r$, первый из которых является объединением отрезка V_1^{3r-1} и правой половины отрезка V_1^{3r-2}, а второй — объединением отрезка V_1^{3r} и левой половины отрезка V_1^{3r+1}.*

Положим

$$B_2 = \{x \mid x \in G_1,\ (V_2^r)^x = V_2^r \text{ для всех } r \in \mathbb{Z}\},$$

$$A_2 = \{x \mid x \in G_1,\ (U_2^r)^x = U_2^r \text{ для всех } r \in \mathbb{Z}\}.$$

Очевидно, B_2, A_2 — подгруппы группы G_1. Установим важный вспомогательный результат.

Лемма 2.7. $T \subset B_2 A_2$.

Доказательство. Пусть t — произвольный элемент множества T. Определим подстановку $a \in A_2$ действием на компонентах разбиения (2.5) множества $\mathbb{Z}$, элементы которого будем записывать в виде α^t ($\alpha \in \mathbb{Z}$). Фиксируем целое число r и определим действие a на отрезке U_2^r. Обозначим через γ правый конец отрезка V_2^{r-1}, и пусть $\alpha_1^t, \ \dots \ \alpha_m^t$ — все такие элементы множества $\{\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{Z}, \varepsilon \leqslant \gamma\}$, что $\alpha_1 > \gamma, \ \dots \ , \alpha_m > \gamma$. Так как t — равномерная подстановка, то найдутся точно m элементов $\beta_1, \ \dots \ , \beta_m$ этого множества, для которых $\beta_1^t > \gamma, \ \dots \ , \beta_m^t > \gamma$. В силу предложений 2.1–2.3 и равенства (2.5) все числа $\alpha_1, \ \dots \ , \alpha_m, \beta_1, \ \dots \ , \beta_m, \alpha_1^t, \ \dots \ , \alpha_m^t, \beta_1^t, \ \dots \ , \beta_m^t$ содержатся в U_2^r. Полагаем $(\alpha_i^t)^a = \beta_i^t$, $(\beta_i^t)^a = \alpha_i^t$ ($i = 1, \ \dots \ , m$), причем a действует тождественно на остальных точках отрезка U_2^r. Непосредственно из определения параметра рассеивания выводим, что $m \leqslant \lambda(t)$, а значит, $\lambda(a) \leqslant \lambda(t)$. Отсюда заключаем, что $a \in A_2$. Заметим теперь, что в силу определения подгруппы B_2 она содержит элемент $b = ta$. Таким образом, $t = ba^{-1} \in B_2A_2$. Следовательно, $T \subset B_2A_2$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 2.3 для группы G_1. Для каждого натурального числа n определим индуктивно разбиение множества $\mathbb{Z}$ на попарно непересекающиеся отрезки $V_n^0, V_n^1, V_n^{-1}, \ \dots \ , V_n^r, V_n^{-r}, \ \dots$. При $n = 1, 2$ эти разбиения уже определены в предыдущем разделе. Пусть $n > 2$. Для каждого целого числа r полагаем

$$V_n^r = V_{n-1}^{3r} \cup V_{n-1}^{3r+1} \cup V_{n-1}^{3r+2}. \tag{2.6}$$

Далее, исходя из разбиения (2.5), зададим индуктивно при каждом $n > 2$ разбиение множества $\mathbb{Z}$ на попарно непересекающиеся отрезки

$$U_n^r = U_{n-1}^{3r-1} \cup U_{n-1}^{3r} \cup U_{n-1}^{3r+1}, r \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

Из предложений 2.2, 2.3 и равенств (2.6), (2.7) непосредственно следует

Предложение 2.4. *Для произвольных целых чисел r и $n > 1$ отрезок U_n^r разбивается на два отрезка $U_n^r \cap V_n^{r-1}$ и $U_n^r \cap V_n^r$. Первый из этих отрезков есть объединение отрезков V_{n-1}^{3r-1} и $U_n^r \cap V_{n-1}^{3r-2}$, а второй — объединение отрезков V_{n-1}^{3r} и $U_n^r \cap V_{n-1}^{3r+1}$.*

Для каждого целого числа $n > 2$ определим группы

$$A_n = \{g \mid g \in G, (U_n^r)^g = U_n^r \text{ для всех } r \in \mathbb{Z}\},$$

$$B_n = \{g \mid g \in G, (V_n^r)^g = V_n^r \text{ для всех } r \in \mathbb{Z}\}.$$

Лемма 2.8. $A_{n-1} < A_n, \ B_{n-1} < B_n, \ A_{n-1}B_{n-1} \subset B_nA_n$ *для всех* $n > 2$.

Доказательство. Первые два включения прямо следуют из равенств (2.6), (2.7) и определения рассмотренных групп. Установим третье включение. Пусть $a \in A_{n-1}, \ b \in B_{n-1}$. Считаем, что $n > 2$ и целое число r фиксированы. Обозначим через γ правый конец отрезка V_n^{r-1}. Если $\alpha \leqslant \gamma$, $\alpha^{ab} > \gamma$, то $\alpha \in (U_n^r \cap V_n^{r-1})$ в силу определения подгрупп A_{n-1}, B_{n-1}, равенств (2.6), (2.7) и предложения 2.4. Аналогично, если $\beta > \gamma$ и $\beta^{ab} \leqslant \gamma$, то $\beta \in (U_n^r \cap V_n^r)$. Положим $c = ab$, $M_n^r = U_n^r \cap V_n^{r-1}$, $L_n^r = U_n^r \cap V_n^r$. Определим теперь подстановку $x \in A_n$ действием на компоненте U_n^r разбиения (2.7) множества $\mathbb{Z}$. Нам будет удобно записывать целые числа в виде α^c $(\alpha \in \mathbb{Z})$. Пусть $\alpha_1^c, \ \ldots \ , \alpha_m^c$ — все числа из отрезка M_n^r, для которых $\alpha_1, \ \ldots \ , \alpha_m \in L_n^r$. В силу равномерности подстановки c и вышеизложенного найдутся точно m чисел $\beta_1^c, \ \ldots \ , \beta_m^c$ из отрезка L_n^r, для которых $\beta_1, \ \ldots \ , \beta_m \in M_n^r$. Полагаем

$$(\alpha_i^c)^x = \beta_i^c, \ (\beta_i^c)^x = \alpha_i^c \ (i = 1, \ \ldots \ , m)$$

и считаем, что x действует тождественно на остальных числах из отрезка U_n^r. Поскольку m не превосходит параметра рассеивания $\lambda(c)$, то $x \in A_n$. В силу определения подстановки x заключаем, что элемент cx оставляет на месте все компоненты разбиения (2.6), а потому $cx = abx = y \in B_n$. Таким образом, $ab = yx^{-1} \in B_n A_n$. Лемма доказана.

Согласно лемме 2.8 мы можем образовать в G_1 две возрастающие цепочки подгрупп

$$A_2 \ < \ A_3 \ < \ \ldots \ < \ A_n \ < \ \ldots \ ,$$

$$B_2 \ < \ B_3 \ < \ \ldots \ < \ B_n \ < \ \ldots \ .$$

Обозначим через A объединение подгрупп первой цепочки, через B — второй.

Лемма 2.9. *A и B — локально финитно аппроксимируемые подгруппы группы G_1, $Q = AB$ — подгруппа группы G_1.*

Доказательство. Действительно, в силу определения подгруппы A каждое ее конечное подмножество содержится в некоторой подгруппе A_n группы G_1. Согласно определению A_n является подгруппой группы D_n всех подстановок множества $\mathbb{Z}$, которые оставляют на месте конечные отрезки целых чисел (2.7), составляющие разбиение множества $\mathbb{Z}$, и, следовательно,

D_n изоморфна декартову произведению конечных симметрических групп. Таким образом, A — локально финитно аппроксимируемая группа. Подобными рассуждениями устанавливается, что этим свойством обладает и группа B.

Далее по лемме 2.8 $A_{n-1}B_{n-1} \subset B_nA_n$ для каждого целого числа $n > 2$. Отсюда сразу выводим, что $AB \subseteq BA$. Исходя из этого включения, нетрудно установить и обратное включение. В самом деле, мы имеем $(AB)^{-1} \subseteq (BA)^{-1}$, т.е. $B^{-1}A^{-1} \subseteq A^{-1}B^{-1}$ и $BA \subseteq AB$. Следовательно, $Q = AB = BA$ — подгруппы группы G_1. Лемма доказана.

Теорема 2.3. Для группы G_1 является непосредственным следствием лемм 2.7 — 2.9.

Небольшая модификация приведенного доказательства этой теоремы для группы G_1 позволяет установить её и для группы G.

Итак, пусть $G = Disp(N)$; $T = \{t_1, ..., t_s\}$ - произвольное конечное подмножества группы G. Снова считаем, что $T^{-1} = T$.

Зададим некоторые разбиения множества N на отрезки натуральных чисел. Начнем с разбиения $V_1^0, V_1^1, \dots V_1^k, \dots$, которое определим следующим образом: $V_1^0 = [1, 2m_0]$, m_0 — любое натуральное число >1, $V_1^1 = [2m_0 + 1, 2m_1]$, $m_1 > m_0 + 1$, V_1^1 содержит множество $(V_1^0)^T \setminus V_1^0$; $V_1^2 = [2m_1 + 1, 2m_2]$, $m_2 > m_1 + 1$, V_1^2 содержит множество $(V_1^0)^T \setminus V_1^0 \cup V_1^1)$; ... ; $V_1^k = [2m_{k-1} + 1, 2m_k]$, $m_2 > m_1 + 1$, V_1^k содержит множество $(V_1^{k-1})^T \setminus (V_1^{k-2} \cup V_1^{r-1}$; ... . Непосредственно из определения этих отрезков вытекает.

Непосредственно из определения этих отрезков вытекает

Предложение 2.5. *Для каждого целого числа r выполняется включение*

$$(V_1^r)^T \subset (V_1^{r-1} \cup V_1^r \cup V_1^{r+1}).$$

Следующее разбиение множества N получается из предыдущего объединением каждых трех последовательных отрезков, т.е. это разбиение составляют отрезки целых чисел $V_2^r(k = 0, 1, 2, \dots)$, Полагаем

$$V_2^r = V_1^{3r} \cup V_1^{3r+1} \cup V_1^{3r+2}. \qquad (2.8)$$

Рассмотрим еще два разбиения множества N, которые тесно связаны с предыдущими. Первое из них зададим отрезками $W_1 = [1, m_0]$, $U_1^1 = [m_0 + 1, m_0 + m_1]$, $U_1^2 = [m_0 + m_1 + 1, m_1 + m_2]$, ..., $U_1^k = [m_{k-2} + m_{k-1} + 1, m_{k-1} + m_k]$, ... Второе разбиение получается из первого следующим образом:

$$W_2 = W_1 \cup U_1^1,\, U_2^1 = U_1^2 \cup U_1^3 \cup U_1^4,\, \dots, U_2^k = U_1^{3k-1} \cup U_1^{3k} \cup U_1^{3k+1}, \dots . \qquad (2.9)$$

Сформулируем два предложения, которые являются простыми следствиями вышеизложенных разбиений.

Предложение 2.6. *При всех натуральных k отрезок U_2^k состоит из правой половины отрезка V_1^{k-1} и левой половины отрезка V_1^k.*

Предложение 2.7. *При всех натуральных k отрезок U_2^k состоит из непересекающихся отрезков $U_2^r \cap V_2^{k-1}$ и $U_2^k \cap V_2^k$, первый из которых является объединением отрезка V_1^{3k-1} и правой половины отрезка V_1^{3k-2}, а второй — объединением отрезка V_1^{3r} и левой половины отрезка V_1^{3r+1}.* Положим $B_2 = \{x | x \in G, (V_2^k)^x = V_2^k, k = 0, 1, 2, \dots\}$, $A_2 = \{x | x \in G, (W_2 \cap U_2^1)^x = W_2 \cap U_2^1,\, (U_2^k)^x = U_2^k (k > 1)\}$.

Установим важный вспомогательный результат.

Лемма 2.10. *$T \subset B_2 A_2$.*

Доказательство. Пусть t — произвольный элемент множества T. Определим подстановку $a \in A_2$ действием на компонентах разбиения (2.9) множества N, элементы которого будем записывать в виде α^t ($\alpha \in N$). Если $\alpha^t \in W_2$, то полагаем $(\alpha^t)^\alpha = \alpha^t$. Фиксируем некоторое натуральное r и определим действие a на отрезке U_2^k. Обозначим через γ правый конец отрезка V_2^{k-1}, и пусть $\alpha_1^t, \dots \alpha_m^t$ — все такие натуральные числа отрезка $[1, \gamma]$, что $\alpha_1 > \gamma, \ \dots \ , \ \alpha_m > \gamma$. Так как t подстановка, а отрезок натуральных чисел $[1, \gamma]$ конечен, то найдутся точно m натуральных чисел $\beta_1, \dots , \beta_m$ этого отрезка, для которых $\beta_1^g, > \gamma \dots \beta_m^g > \gamma$. В силу предложений 2.5 - 2.7 и равенства (2.9) все числа $\alpha_1, \ \dots \ , \alpha_m, \beta_1, \ \dots \ , \beta_m, \alpha_1^t, \ \dots \ , \alpha_m^t, \beta_1^t, \ \dots \ , \beta_m^t$ содержатся в U_2^r. Полагаем $(\alpha_i^t)^a = \beta_i^t, \ (\beta_i^t)^a = \alpha_i^t \ (i = 1, \ \dots \ , m)$, и a действует тождественно на остальных точках отрезка U_2^k. Непосредственно из определения параметра рассеивания выводим, что $m \leqslant \lambda(t)$, а значит, $\lambda(a) \leqslant \lambda(t)$. Отсюда заключаем, что $a \in A_2$.

Заметим теперь, что в силу определения подгруппы B_2 она содержит элемент $b = ta$. Таким образом, $t = ba^{-1} \in B_2A_2$. Следовательно, $T \subset B_2A_2$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2.3. для группы G. Для каждого натурального числа n определим индуктивно разбиение множества N на попарно непересекающиеся отрезки

$V_n^0, V_n^1, \dots , V_n^k, \dots$. При $n = 1, 2$ эти разбиения определены выше. Пусть $k > 2$. Полагаем

$$V_n^0 = V_{n-1}^0 \cup V_{n-1}^1 \cup V_{n-1}^2, \dots, V_{n-1}^k = V_{n-1}^{3r} \cup V_{n-1}^{3r+1} \cup V_{n-1}^{3r+2}, \dots . \qquad (2.10)$$

Наконец, исходя из разбиения (2.9), зададим индуктивно при каждом $n > 2$ разбиение множества N на попарно непересекающиеся отрезки целых чисел

$$W_n = W_{n-1} \cup U_{n-1}^1, \ U_n^1 = U_{n-1}^2 \cup U_{n-1}^3 \cup U_{n-1}^4, \dots, U_n^k = U_{n-1}^{3k-1} \cup U_{n-1}^{3k} \cup U_{n-1}^{3k+1}, \dots . \qquad (2.11)$$

Из предложений 2.6, 2.7 и равенств (2.10), (2.11) непосредственно следует

Предложение 2.8. *Для каждых натуральных k и $n > 1$ отрезок U_n^k разбивается на два отрезка $U_n^k \cap V_n^{k-1}$ и $U_n^k \cap V_n^k$. В свою очередь,* *первый из этих отрезков есть обвединение отрезков* V_{n-1}^{3k-1} *и* $V_n^k \cap V_{n-1}^{3k-2}$, *а второй — обвединение отрезков* V_{n-1}^{3k} *и* $U_n^k \cap V_{n-1}^{3k+1}$.

Для $n > 2$ определим подгруппы

$$A_n = \{g|g \in G, (W_n \cup U_n^1)^g = W_n \cup U_n^1, (U_n^k)^g = U_n^k (k > 1)\},$$

$$B_n = \{g|g \in G, (V_n^k)^g = V_n^k, k = 0, 1, 2, ...\}.$$

Лемма 2.11. $A_{n-1} < A_n$, $B_{n-1} < B_n$, $A_{n-1}B_{n-1} \subset B_nA_n$ *при всех* $n{>}2$.

Доказательство. Первые два влооженния прямо следуют из равенств (2.10), (2.11) и определения данных подгрупп. Установим третье включение. Пусть $\alpha \in A_{n-1}$, $b \in B_{n-1}$. Фиксируем натуральные $n > 2$, $k \geqslant 1$ и обозначим через $gamma$ первый конец отрезка V_n^{k-1}. Если $\alpha < \gamma$, $\alpha^{ab} \geqslant \gamma$, то $\alpha \in (U_n^k \cap V_n^{k-1})$ в силу определения подгрупп A_{n-1}, B_{n-1}, равенств (2.10), (2.11) и предложения 2.8. Аналогично, если $\beta \geqslant \gamma$, $\beta^{ab} < \gamma$, то $\beta \in (U_n^k \cap V_n^k)$. Положим, для краткости $c - ab$, $M_n^k = U_n^k \cap V_n^{k-1}$, $L_n^k = U_n^k \cap V_n^k$. Определим подстановку $x \in A_n$ действием на компонентах разбиения 2.11 множества N. Считаем, что x действует тождественно на отрезке W_n. Далее нам будет удобно записывать натуральные числа в виде $\alpha^c (\alpha \in N)$. Пусть α_1^c, ..., α_m^c - все числа отрезка M_n^k, для которых α_1, ..., $\alpha_m \in L_n^k$. Поскольку c - подстановка, а $[1, \gamma]$ - конечное множество, то в силу вышеизложенного найдутся точно m натуральных чисел β_1^c, ..., β_m^c отрезка L_n^k, для которых β_1, ..., $\beta_m \in M_n^k$. полагаем теперь $(\alpha_i^c)^x = \beta_i^c$, $(\beta_i^c)^x = \alpha_i^c$, $(i = 1, ..., m)$, и x действует тождественно на всех остальных точках отрезка U_n^k. Поскольку m не превосходит параметра рассеивания $\lambda(c)$, то $x \in A_n$. В силу определения подстановки x заключаем, что элемент cx оставляет на месте все компаненты разбиения (2.10), а потому $cx = abx = y \in B_n$. Таким образом $ab = yx^{-1} \in B_nA_n$. Это доказывает лемму 2.11.

Согласно лемме 2.11 мы можем рассмотреть две возрастающие цепочки подгрупп $A_2 < A_3 < ... < A_n < ...$, $B_2 < B_3 < ... < B_n < ....$ Обозначим через A объединение подгрупп первой цепочки, а через B - второй.

Лемма 2.12. *A, B - локально финитно аппроксимируемые подгруппы группы G, $Q = AB$ - подгруппа группы G.*

Доказательство. Действительно, в силу определения подгруппы A каждое её конечное подмножество содержится в некоторой группе A_n группы G. Снова согласно определению A_n является подгруппой группы D_n всех подстановок множества N, которые оставляют на месте конечные отрезки натуральных чисел (2.11) состовляющих разбиение множества N. Но тогда D_n и изоморфна декартову произведению конечных групп. Таким образом, A - локально финитно аппроксимируемая группа. Подобными рассуждениямиустанавливается, что этим свойством обладает и группа B.

Далее по лемме 2.11 $A_{n-1}B_{n-1} \subset B_nA_n$ при всех $n > 2$. Отсюда непосредственно выводим, что $AB \subset BA$. Исходя из этого включения нетрудно установить и обратное включение. В самом деле, мы имеем $(AB)^{-1} \subset (BA)^{-1}$, т.е. $B^{-1}A^{-1} \subset A^{-1}B^{-1}$ и $BA \subset AB$. Таким образом, $Q = AB = BA$ подгруппа группы G, и лемма доказана.

Теорема 2.3 для группы G прямо вытекает из лемм 2.10-2.12 Таким образом доказательство теоремы 2.3 полностью завершено.

Глава 3

Порождающие групп $Disp(M)$

Группа $Fin(M)$ порождается транспозициями $b_i = (i\, i+1)$, где $i \in M$. Очевидно, $w(b_i) = \lambda(b_i) = 1$. В работе [12] доказано, что

$$Lim(M) = \langle g | g \in S(M),\, w(g) = 1 \rangle.$$

Нетрудно понять, что $w(g) = 1$ тогда и только тогда, когда либо g - инволюция, в разложении которой на независимые циклы участвуют только транспозиции вида b_i, $i \in M$, либо $M = Z$ и $g \in \{d,\, d^{-1}\}$, где d - сдвиг, $\alpha^d = \alpha + 1 (\alpha \in Z)$.

В данной главе будет доказан следующий основной результат.

Теорема 3.1. *Группа $Disp(M)$ порождается подстановками g множества M, для которых параметр рассеивания $\lambda(g) = 1$.*

Для случая $M = N$ получено некоторое усиление этой теоремы.

Теорема 3.2. *Грппа $Disp(N)$ порождается подстановками множества N, которые имеют параметр рассеивания 1 и разлагаются в произведение конечных независимых циклов.*

Предполагая, что подстановки группы $Disp(N)$ действуют тождественно на числах $Z \setminus N$, мы получим естественное вложение $Disp(N) < Disp(Z)$. В теоремах 2.1, 2.2 доказано, что если $G = Disp(N)$, то

$$Disp(Z) = (Fin(Z) \cdot (G \times G^t)) \leftthreetimes \langle d \rangle,$$

где t - инволюция группы $S(Z)$, для которой $\alpha^t = -\alpha(\alpha \in Z)$. Ввиду равенства $Fin(Z) = \langle (1,2)^{d^i} | i \in Z \rangle$ отсюда выводим, что следствием теоремы 3.2 является

Теорема 3.3. *Группа $Disp(Z)$ порождается подстановками g, g^t ($g \in G$, $\lambda(g) = 1$) и сдвигом d.*

Поскольку из равенства $\lambda(g) = 1$ следует, что и $\lambda(g^t) = 1$, то теорема 3.1 является непосредственным следствием теорем 3.1, 3.2.

Подробное описание подстановок множества M с параметром рассеивания равным 1 дано в леммах 3.1 - 3.6

3.1. Подстановки с параметром рассеивания 1

Пусть $Q = \{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ - подмножество множества $M (r > 1), \alpha_1$ - наименьшее число из Q, а α_n - наибольшее. Рассмотрим подстановку

$$x = (\alpha_1 ... \alpha_r),$$

множества M, которая является конечным циклом, т.е. $\alpha_i^x = \alpha_{i+1}$ ($i = 1, ..., r-1$), $\alpha_r^x = \alpha_1$ и $\beta^x = \beta$ при любом $\beta \in M \backslash Q$.

Лемма 3.1. $\lambda(x) = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$ *и либо* $n = r$, *либо* $\alpha_n > \alpha_{n+1} > ... > > \alpha_r > \alpha_1$.

Доказательство Пусть $\lambda(x) = 1$. Предположим, что $\alpha_{i+1} < \alpha_i$ для некоторого индекса $i(1 < i < n-1)$. Тогда $\alpha_i \in L_{\alpha_{i+1}}(x)$. Ясно, что найдется такой индекс $j(n \leqslant j \leqslant r)$, что $\alpha_j > \alpha_{i+1}$, $\alpha_j^x < \alpha_{i+1}$, а значит, выполняется включение $\alpha_j \in L_{\alpha_{i+1}}(x)$ и $\lambda(x) \geqslant 2$. Противоречие. Итак, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ при $i = 1, ..., n-1$.

Допустим теперь, что $n < r$ и $\alpha_s < \alpha_{s+1}$ для некоторого $s(n < s < r)$. Тогда $\alpha_s \in M_{\alpha_s}(x)$. Поскольку по доказаному выше $\alpha_1 < ... < \alpha_n$, то найдется такой индекс $i(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, что $\alpha_i < \alpha_s < \alpha_{i+1}$, а потому

$\alpha_i \in M_{\alpha_s}(x)$ и $|M_{\alpha_s}(x)| \geqslant 2$. Снова получили противоречие. Следовательно, либо $n = r$, либо $\alpha_n > \alpha_{n+1} > ... > \alpha_r > \alpha_1$.

Обратно. Пусть $\alpha_i < \alpha_i^x = \alpha_{i+1} (1 \leqslant i \leqslant n-1)$ и либо $n = r$, либо $\alpha_n > \alpha_{n+1} > > ... > \alpha_r > \alpha_1$. Заметим, что тогда

$$\gamma^x > \gamma (\gamma \in M) \Leftrightarrow \gamma \in \{\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\}.$$

Следовательно, если θ - целое число и $\alpha_i \leqslant \theta < \alpha_{i+1}$ для некоторого $i =$ $= 1, ..., n-1$, то $M_\theta(x) = \{\alpha_i\}$. Очевидно, $M_{\alpha_n}(x) = \varnothing$, а так как $[\alpha_1, \alpha_n]^x =$ $= [\alpha_1, \alpha_n]$ и $\varepsilon^x = \varepsilon$ при $\varepsilon \notin [\alpha_1, \alpha_n]$, то $M_\theta(x) = \varnothing$ при всех $\theta \notin [\alpha_1, \alpha_n]$. Поэтому $t(x) = 1$. Отсюда выводим, что $\lambda(x) = 1$ поскольку x - равномерная подстановка ввиду леммы 2.3. Лемма доказана. Рассмотрим счетное подмножество $S = \{..., \beta_{-n}, ..., \beta_{-1}, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_n, ...\}$ множества M и подстановку

$$w = (... \, \beta_{-n} \, ... \, \beta_{-1} \, \beta_0 \, \beta_1 \, ... \beta_n \, ...)$$

множества M, которая является бесконечным циклом, т.е. $\beta_i^w = \beta_{i+1} (i \in Z)$ и $\gamma^w = \gamma$ при любом $\gamma \in M \backslash S$.

Предположим, что множество S ограничено снизу(сверху). Если, например, $S \subseteq N$, то S ограничено снизу. Пусть $\beta_0 = \min\limits_{\beta \in S} \beta$ $(\beta_0 = \max\limits_{\beta \in S} \beta)$. Справедлива следующая

Лемма 3.2. *$\lambda(w) = 1 \Leftrightarrow \beta_i < \beta_{i+1}$ для $i \geqslant 0$; $\beta_j < \beta_{j-1}$ для $j \leqslant 0$($\beta_i > \beta_{i+1}$ для $i \geqslant 0$; $\beta_j > \beta_{j-1}$ для $j \leqslant 0$).*

Доказательство Пусть $\lambda(w) = 1$ и, например, $\beta_0 = \min\limits_{\beta \in S} \beta$. Если $\beta_{i+1} < \beta_i$ для некоторого $i > 0$, то β_i содержится в множестве $L_{\beta_{i+1}}(w)$ в силу определений. Но при этом найдется такой индекс $j > 0$, что выполняются неравенства $\beta_j > \beta_{i+1}$, $\beta_j^w = \beta_{j+1} < \beta_{i+1}$, а значит, $\beta_j \in L_{\beta_{i+1}}(w)$ и $|L_{\beta_{i+1}}(w)| \geqslant 2$. Получили противоречие с равенством $\lambda(w) = 1$. Итак, $\beta_i < \beta_{i+1}$ при всех $i \geqslant 0$. Так как $\lambda(w^{-1}) = \lambda(w) = 1$, то аналогично вышеизложенному устанавливаем справедливость неравенств $\beta_0 < \beta_{-1} < \ldots < \beta_{-n} < \ldots$.

Обратно. Допустим, что $\beta_i < \beta_{i+1} = \beta_i^w (i \geqslant 0)$ и $\beta_j = \beta_{j-1}^w < \beta_{j-1}$ $(j \leqslant 0)$. Если θ - произвольное число из множества M и $\theta < \beta_0$, то $\alpha^w = \alpha$ при всех $\alpha \leqslant \beta_0$, а потому $M_\theta(w) = \varnothing$. Если же $\theta \geqslant \beta_0$, то $\beta_i \leqslant \theta < \beta_{i+1}$ для некоторого неотрицательного индекса i. Из этого следует, что $M_\theta(w) = \{\beta_i\}$. В силу леммы 2.3 $\lambda(w) = 1$. Лемма доказана.

Пусть теперь множество S не является ограниченным сверху и снизу. Ясно, что это возможно только при $M = Z$.

Лемма 3.3. $\lambda(w) = 1 \Leftrightarrow \beta_i < \beta_{i+1} (\beta_i > \beta_{i+1})$ *при всех целых* i.

Доказательство. Пусть $\lambda(w) = 1$. Предположим, что $\beta_0 < \beta_1$ и найдется такое натуральное s, что $\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_s$, $\beta_{s+1} = \beta_s^w < \beta_s$. Тогда в силу определений $\beta_{s-1} \in M_{\beta_s - 1}(w)$, $\beta_s \in L_{\beta_s - 1}(w)$. Так как множество S не является ограниченным сверху, то найдется такое целое k, что $\beta_k > \beta_s$. Из определения цикла следует, что $\beta_k = \beta_s^{w^j}$ для некоторого целого j. Если $j > 0$, то найдется такой индекс $e (0 < e < j)$, что $\beta_s^{w^e} = \beta_{s+e} \leqslant \beta_s - 1$, $\beta_{s+e}^w > \beta_s - 1$ и, следовательно, $\beta_{s+e} \in M_{\beta_s - 1}(w)$. Но тогда $|M_{\beta_s - 1}(w)| \geqslant 2$. Получили противоречие с равенством $\lambda(w) = 1$. Если же $j < 0$, то $\beta_s = \beta_k^{w^{-j}}$. Поэтому существует такое целое $m (0 \leqslant m < -j)$, что выполняются неравенства $\beta_k^{w^m} = \beta_{k+m} > \beta_s - 1$, $\beta_{k+m}^w \leqslant \beta_s - 1$. Отсюда $\beta_{k+m} \in L_{\beta_s - 1}(w)$ и множество $L_{\beta_s - 1}(w)$ содержит не менее двух элементов. Снова получили противоречие.

Итак, следствиями неравенства $\beta_0 < \beta_1$ являются все неравенства $\beta_0 < < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n < \ldots$. Точно так же доказывается, что если $\beta_i < \beta_{i+1}$ для некоторого целого i, то $\beta_i < \beta_{i+1} < \ldots < \beta_{i+n} < \ldots$. Поэтому если $\beta_i < \beta_{i+1}$, $\beta_{i-1} > \beta_i$, то $\beta_i < \beta_{i-1} < \beta_{i-2} < \ldots < \beta_{i-n} < \ldots$ и $\beta_i = \min\limits_{\beta \in S} \beta$, что противоречит определению множества S. Таким образом, либо $\beta_i > \beta_{i+1}$ при всех целых i, либо все эти неравенства противоположны.

Обратно. Пусть $\beta_i < \beta_i^w = \beta_{i+1}(\beta_i > \beta_i^w = \beta_{i+1})$ при всех целых i. Фиксируем любое $\theta \in Z$. Тогда $\beta_m \leqslant \theta < \beta_{m+1}(\beta_{m+1} \leqslant \theta < \beta_m)$ для единственного целого m. Поэтому $M_\theta(w) = \{\beta_m\}(M_\theta(w) = \varnothing)$, $L_\theta(w) = \varnothing(L_\theta(w) = \{\beta_m\})$, а значит, $\lambda(w) = 1$. Лемма доказана.

В последних трех леммах мы полностью описали циклы множества M с параметром рассеивания равным 1. Перейдем теперь к изучению произвольных таких подстановок. Любая подстановка g группы $S(M)$ разлагается в произведение независимых циклов x_i, где i пробегает конечное или счетное множество индексов I. Ясно, что если $\lambda(g) = 1$, то и $\lambda(x_i) = 1$ при любом $i \in I$.

Пусть $u = (\gamma_1 \dots \gamma_m)$, $v = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k)$, $w = (\dots \beta_{-n} \dots \beta_{-1}\, \beta_0\, \beta_1 \dots \beta_n \dots)$ - три цикла группы $S(M)$. Полагаем по определению

$$u < v \Leftrightarrow \gamma_i < \varepsilon_j (1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant j \leqslant k),$$

$$u < w \Leftrightarrow \gamma_i < \beta_j (1 \leqslant i \leqslant m;\ j \in Z).$$

Лемма 3.4. *Если u, v - различные циклы из разложения подстановки $g \in S(M)$ на независимые циклы и $\lambda(g) = 1$, то либо $u < v$, либо $v < u$.*

Доказательство. Мы можем считать, что $\gamma_1 = \min(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\varepsilon_1 = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$. Пусть $\gamma_n = \max(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\varepsilon_s = \max(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$. В силу условия $\lambda(u) = = \lambda(v) = 1$. Описание таких циклов дано в лемме 3.1. В частности, выполняются неравенства

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n;\ \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_s.$$

Предположим для определенности, что $\gamma_1 < \varepsilon_1$. Покажем, что тогда $u < v$. В самом деле, для этого достаточно установить неравенство $\gamma_n < \varepsilon_1$. Пусть это не так, т.е. $\gamma_n > \varepsilon_1(\gamma_n \neq \varepsilon_1$, в силу независимости по условию циклов $u, v)$. Тогда $\gamma_i < \varepsilon_1 < \gamma_{i+1}$ для некоторого индекса $i(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Отсюда из определений следует, что $\gamma_i, \varepsilon_1 \in M_{\varepsilon_1}(g)$ и $\lambda(g) > 1$. Получили противоречие с условием леммы. Итак, $\gamma_n < \varepsilon_1$, а значит, $u < v$. Если $\varepsilon_1 < \gamma_1$, то аналогично проверяется, что $v < u$. Лемма доказана.

Простым следствием леммы 5 является следующий результат

Лемма 3.5. *Пусть подстановка g множества N разлагается на конечные независимые циклы. Параметр рассеивания подстановки g равен 1 тогда и талько тогда, когда это разложение имеет вид $g = x_1 x_2 \ldots$, где $x_1 < x_2 < \ldots$ и $\lambda(x_i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots$.*

Лемма 3.6. *Пусть в разложении подстановки g множества N на независимые циклы имеется бесконечный цикл w. Если $\lambda(g) = 1$, то это разложение имеет вид*

$$g = x_1 \ldots x_m \, w,$$

где $x_1 \ldots x_m$ - конечные циклы и $x_1 < x_2 < \ldots < x_m < w$.

Доказательство. Пусть $w = (\ldots \beta_{-n} \ldots \beta_{-1} \, \beta_0 \, \beta_1 \ldots \beta_n \ldots)$, где $\beta_0 = \min_{i \in Z} \beta_i$. В силу условия $\lambda(w) = 1$, следовательно, согласно лемме 3.2

$$\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_n < \ldots ; \; \beta_0 < \beta_{-1} < \ldots < \beta_{-n} < \ldots .$$

Предположим, что в разложении g на независимые циклы есть еще один бесконечный цикл $w_1 = (\ldots \gamma_{-n} \ldots \gamma_{-1} \, \gamma_0 \, \gamma_1 \ldots \gamma_n \ldots)$ и $\gamma_0 = \min_{i \in Z} \gamma_i$. Так как $\lambda(w_1) = 1$, то снова по лемме 3.2

$$\gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_n < \ldots .$$

Обозначим через s любой такой положительный индекс, что $\beta_s > \gamma_0$. Тогда $\gamma_k < \beta_s < \gamma_{k+1}$ для некоторого $k \geqslant 0$. Поскольку $\gamma_{k+1} = \gamma_k^{w_1} = \gamma_k^g > \gamma_k$, то $\beta_s, \gamma_k \in M_{\beta_s}(g)$. Противоречие с равенством $\lambda(g) = 1$. Итак, w - единственный бесконечный цикл в разложении g на независимее циклы. Предположим теперь, что в этом разложении имеется конечный цикл $x = (\alpha_1 \ldots \alpha_r)$,

$\alpha_n = \max(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ и найдется такой индекс $l \leqslant 0$, что $\beta_l < \alpha_n < \beta_{l-1}$. Тогда

$$\beta^w_{l-1} = \beta^g_{l-1} = \beta_l \leqslant \alpha_n - 1,\ \alpha^x_n = \alpha^g_n \leqslant \alpha_n - 1$$

и мы имеем $\beta_{l-1}, \alpha_n \in L_{\alpha_n - 1}(g)$. Это противоречит равенству $\lambda(g) = 1$. Итак, выполняется неравенство $\alpha_n < \beta_0$, а потому $x < w$. Отсюда следует конечность числа конечных независимых циклов в разложении подстановки g. В силу леммы 3.4 их можно линейно упорядочить. Лемма доказана.

3.2. Разложение цикла

Рассмотрим произвольный конечный цикл $x = (\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_r)$, где $\alpha_1, ..., \alpha_r$ - целые числа, $\alpha_1 = \min(\alpha_1, ..., \alpha_r)$, $\alpha_n = \max(\alpha_1, ..., \alpha_r)$. Исходя из x, определим цикл

$$\overline{x} = (\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_s}),$$

где $\alpha_{i_1} = \alpha_1$; если α_{i_j} определено и $i_j < n$, то $\alpha_{i_{j+1}}$ - первое из чисел последовательности $\alpha_{i_j+1}, ..., \alpha_n$, которое больше α_{i_j}. Пусть k такое натуральное число, что $i_k = n$. Если $n = r$, то полагаем $s = k$ и цикл $\overline{x}$ определен. Если же $i_k = n < r$ и α_{i_t} определено ($t \geqslant k$, $i_t < r$), то $\alpha_{i_{t+1}}$ - первое из чисел последовательности $\alpha_{i_t+1}, ..., \alpha_r$, которое меньше α_{i_t} (если такого числа нет, то полагаем $s = t$ и цикл $\overline{x}$ определен). В силу наших построений найдется такое натуральное s, что либо $i_s = r$, либо α_{i_s} меньше каждого из чисел $\alpha_{i_s+1}, ..., \alpha_r$. Построение цикла $\overline{x}$ завершено.

Отметим, что непосредственным следствием определения $\overline{x}$ является следующие неравенства:

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k,\ \alpha_1 = \alpha_{i_1} < \alpha_{i_2} < \dots < \alpha_{i_k} = \alpha_n \tag{3.1}$$

и либо $s = k$, либо

$$i_k < i_{k+1} < \dots < i_s,\ \alpha_{i_k} = \alpha_n > \alpha_{i_{k+1}} > \dots > \alpha_{i_s}. \tag{3.2}$$

В частности, ввиду леммы 3.1 $\lambda(\overline{x}) = 1$. Рассмотрим теперь подстановку $y = x\overline{x}^{-1}$. Прямое вычисление показывает, что

$$y = (\alpha_{i_1}\,\alpha_{i_1+1}\,...\,\alpha_{i_2-1})(\alpha_{i_2}\,\alpha_{i_2+1}\,...\,\alpha_{i_3-1})\,...\,(\alpha_{i_s}\,\alpha_{i_s+1}\,...\,\alpha_r).$$

Лемма 3.7. $\lambda(y) = \lambda(x) - 1$.

Доказательство. Сравним множества $M_\theta(x)$ и $M_\theta(y)$ при каждом $\theta \in Z$. Так как $\gamma^x = \gamma^y = \gamma$ для $\gamma \notin [\alpha_1, \alpha_n]$, то $M_\theta(x) = M_\theta(y) = \varnothing$ при $\theta \notin [\alpha_1, \alpha_n]$. Очевидно, $M_{\alpha_n}(x) = M_{\alpha_n}(y) = \varnothing$. Если $\gamma^x = \gamma^y (\gamma \in Z)$, то $\gamma \in M_\theta(x) \Leftrightarrow \gamma \in M_\theta(y)$. Поэтому мы будем проверять принадлежность множествам $M_\theta(x)$ и $M_\theta(y)$ чисел γ, для которых $\gamma^x \neq \gamma^y$. Легко видеть, что такие γ составляют множество

$$T = \{\alpha_{i_j-1} | j = 2,\ ...,\ s\} \cup \{\alpha_r\}.$$

Так как $\alpha_r^x = \alpha_1 < \alpha_r$, $\alpha_r^y = \alpha_{i_s} \leqslant \alpha_r$ (определение цикла $\overline{x}$), то α_r не содержится в множествах $M_\theta(x)$, $M_\theta(y)$ при любом $\theta \in Z$ в силу их определений.

Далее, при каждом $j = 2,\ ...,\ s$ мы имеем

$$\alpha_{i_j-1}^x = \alpha_{i_j},\ \alpha_{i_j-1}^y = \alpha_{i_{j-1}}. \tag{3.3}$$

Пусть $k < j \leqslant s$. Тогда из (3.2) в силу определения цикла $\overline{x}$ выводим неравенства $\alpha_{i_j} < \alpha_{i_j-1}$, $\alpha_{i_{j-1}} \leqslant \alpha_{i_j-1}$, из которых с учетом соотношений (3.1) следует, что α_{i_j-1} не содержится в множествах $M_\theta(x)$, $M_\theta(y)$.

Таким образом, вместо множества T мы можем ограничится рассмотрением его подмножества

$$T_1 = \{\alpha_{i_j-1} | j = 2,\ ...,\ k\}$$

и при этом предполагать, что $\alpha_1 \leqslant \theta < \alpha_n$. Будем дополнительно считать, учитывая неравенства (3.1), что

$$\alpha_{i_{q-1}} \leqslant \theta < \alpha_{i_q}, \tag{3.4}$$

где $2 \leqslant q \leqslant k$. Из построения цикла $\overline{x}$ следует, что для $\alpha_{i_j-1} \in T_1$ выполняются неравенства

$$\alpha_{i_j-1} \leqslant \alpha_{i_{j-1}} < \alpha_{i_j}.$$

Отсюда ввиду (3.3) мы имеем $\alpha_{i_q-1} \leqslant \alpha_{i_{q-1}} \leqslant \theta$, $\alpha^x_{i_q-1} = \alpha_{i_q} > \theta$, $\alpha^y_{i_q-1} = \alpha_{i_{q-1}} \leqslant \theta$, а значит, $\alpha_{i_q-1} \in M_\theta(x)$ и $\alpha_{i_q-1} \notin M_\theta(y)$.

Предпложим теперь, что j целое отличное от q число и $2 \leqslant j \leqslant k$. Если $q > 2$ и $j < q$, то $\alpha^x_{i_j-1} = \alpha_{i_j} \leqslant \alpha_{i_{q-1}} \leqslant \theta$, $\alpha^y_{i_j-1} = \alpha_{i_{j-1}} < \alpha_{i_{q-1}} \leqslant \theta$, а потому α_{i_j-1} не содержится в множествах $M_\theta(x)$ и $M_\theta(y)$. Пусть $q < k$ и $j > q$. Тогда $\alpha^x_{i_j-1} = \alpha_{i_j} > \alpha_{i_q} > \theta$, $\alpha^y_{i_j-1} = \alpha_{i_{j-1}} \geqslant \alpha_{i_q} > \theta$. Отсюда выводим, что если $\alpha_{i_j-1} \leqslant \theta$, то α_{i_j-1} содержится в множествах $M_\theta(x)$ и $M_\theta(y)$, а если $\alpha_{i_j-1} > \theta$, то α_{i_j-1} не содержится в этих множествах.

Итак, $M_\theta(x) = M_\theta(y) \cup \{\alpha_{i_q-1}\}$ для всех θ, удовлетворяющих неравенствам (3.4). Если же θ не удовлетворяет этим неравенствам при любом $q = 2, ..., k$, то по доказанному выше $M_\theta(x) = M_\theta(y) = \varnothing$. Это позволяет нам заключить, что $t(x) = t(y) + 1$. Согласно лемме 2.3 отсюда вытекает равенство $\lambda(x) = \lambda(y) + 1$. Лемма доказана.

3.3. Доказательство теоремы 3.2

Лемма 3.8. *Пусть подстановка g группы $Disp(M)$ разлагается на конечные независимые циклы. Тогда $g = g_1\, g_2 \dots g_s$, где каждая подстановка $g_j (1 \leqslant j \leqslant s)$ содержится в этой группе и разлагается на конечные независимые циклы с параметром рассеивания равным 1.*

Доказательство. Пусть $\lambda(g) = m$ и $g = x_1\, x_2 \dots$ - разложение g на конечные независимые циклы x_1, x_2, ... Очевидно, что тогда $\lambda(x_i) \leqslant m$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Поэтому существует натуральное число

$$l = \max_i \lambda(x_i) \leqslant m.$$

Будем вести доказательство леммы индукцией по l. Если $l = 1$, то лемма верна ($s = 1$, $g_1 = g$). Пусть $l > 1$ и $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots$ - все циклы из разложения g, параметр рассеивания которых равен l. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ обозначим через $\overline{x}_{j_k}$ цикл с параметром рассеивания равным 1, построенный из x_{j_k} по схеме построения в самом начале §3.2. Если $y_{j_k} = x_{j_k}\overline{x}_{j_k}^{-1}$, то согласно лемме 3.6 $\lambda(y_{j_k}) = l-1$. В частности, в разложении y_{j_k} на независимые циклы, параметр рассеивания каждого из этих циклов не превосходит $l - 1$.

Пусть теперь $h = \overline{x}_{j_1}\, \overline{x}_{j_2} \ldots$; $y = gh^{-1}$. Каждый независимый цикл в разложении подстановки y либо совпадает с одним из циклов x_i, для которого $\lambda(x_i) < l$, либо является независимым циклом из разложения некоторой подстановки y_{j_k}, а потому его параметр рассеивания также меньше l. По индуктивному предположению $y = g_1 \cdot \ldots \cdot g_{s-1}$, где каждая подстановка g_j разлагается на конечные независимые циклы с параметром рассеивания 1. Так как $g = yh$, то полагая $g_s = h$, мы получим искомое разложение подстановки g. Лемма доказана.

Лемма 3.9. *Пусть подстановка h группы $G = Disp(N)$ разлагается на конечные независимые циклы с параметром рассеивания равным 1. Если $\lambda(h) = n$, то $h = h_1 \cdot \ldots \cdot h_n$, где $h_i \in G$, $\lambda(h_i) = 1$ и h_i разлагается на конечные независимые циклы $(1 \leqslant i \leqslant n)$.*

Доказательство. Индукция по n. Если $n = 1$, то лемма очевидна. Пусть $n > 1$. Для произвольного цикла $x = (\alpha_1 \ldots \alpha_r)$, составленного из натуральных чисел, введем обозначения

$$m(x) = \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\},\ l(x) = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}.$$

Заметим, что прямо из определений следует, что

$$M_\beta(x) \neq \varnothing \Leftrightarrow m(x) \leqslant \beta < l(x),$$

где $\beta \in N$. Обозначим через W множество всех циклов из разложения h на независимые циклы. В силу условия параметр рассеивания каждого цикла из W равен 1. Понятно, что следствием равенства $M_\beta(h) = n$ является существование таких n циклов t_1, ..., t_n из W, что

$$M_\beta(t_1) \cup ... \cup M_\beta(t_n) = M_\beta(h),\ |M_\beta(t_i)| = 1(1 \leqslant i \leqslant n).$$

Пусть теперь $\alpha_1 < \alpha_2 < ...$ - все натуральные числа, для которых $|M_{\alpha_i}(h)| = n$ $(i = 1, 2, ...)$. Возьмем произвольный цикл $x_1 \in W$, для которого $M_{\alpha_1}(x_1) \neq \varnothing$ и обозначим через s такое натуральное число, что множества $M_{\alpha_1}(x_1)$, ..., $M_{\alpha_{s-1}}(x_1)$ не пусты, а $M_{\alpha_s}(x_1) = \varnothing$. Из определения α_s следует, что существуют точно n циклов $y_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ множества W, для которых $M_{\alpha_s}(y_i) \neq \varnothing$. Мы утверждаем, что найдется такой индекс $j(1 \leqslant j \leqslant n)$, что

$$m(y_j) > \gamma = l(x_1).$$

В самом деле, предположим, что выполняются n неравенств

$$m(y_1) < \gamma,\ m(y_2) < \gamma,\ ...,\ m(y_n) < \gamma.$$

Тогда $m(y_i) \leqslant \gamma - 1 < l(x_1) < l(y_i)$ для каждого $i = 1, ..., n$. Это означает, как отмечалось выше, что $|M_{\gamma-1}(y_i)| = 1$, но поскольку и $|M_{\gamma-1}(x_1)| = 1$, то $|M_{\gamma-1}(h)| > n$. это противоречит условию леммы. Итак, $m(y_j) > l(x_1)$ для некоторого индекса j.

Обозначим $y_j = x_2$. Нами установлено неравенство $x_1 < x_2$ и при этом $M_{\alpha_s}(x_2) \neq \varnothing$ в силу определения циклов y_1, ..., y_n. Пусть $M_{\alpha_{s+1}}(x_2)$, $M_{\alpha_{s+2}}(x_2)$, ..., $M_{\alpha_{k-1}}(x_2)$ - непустые множества, а $M_{\alpha_k}(x_2) = \varnothing$. Аналогично вышеизложенному установим существование такого цикла $x_3 \in W$, что $x_2 < x_3$ и $M_{\alpha_k}(x_3) \neq \varnothing$. Продолжая эти рассуждения, мы найдем циклы $x_1 < x_2 < x_3 < ...$ из множества W такие, что для каждого $\alpha_i(i = 1, 2, ...)$ существует цикл x_j для некоторого $j = 1, 2, ...$, что $M_{\alpha_i}(x_j) \neq \varnothing$. Поэтому если $h_1 = x_1 x_2 x_3 \ldots$, то $\lambda(h_1) = 1$ (лемма 3.5) и $\lambda(h_1^{-1}h) = n - 1$ (подстановка $h_1^{-1}h$ получается из разложения подстановки h на независимые циклы удалением циклов x_1, x_2, x_3, ...). По индуктивному предположению $h_1^{-1}h = h_2 \cdot \ldots \cdot h_n$, где $\lambda(h_i) = 1$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$. Это доказывает лемму.

Приступим к непосредственному доказательству теоремы 3.2. Итак, пусть $G = Disp(N)$. При доказательстве теоремы 1 из работы [18] установлено, что каждое конечное подмножество группы G содержится в группе вида $H = AB$, где каждая из подгрупп A и B является объединением возрастающей цепочки подгрупп, которые оставляют на месте компоненты некоторых разбиений множеста N на отрезки натуральных чисел. В частности, подстановки из A и B разлагаются на конечные независимые циклы и группа G порождается такими подстановками. Отсюда и из лемм 3.8,3.9 непосредственно выводим, что группа G порождается подстановками с параметром рассеивания равным 1, которые разлагаются на конечные независимые циклы. Теорема 3.2 доказана.

Как отмечалось в начале главы, теоремы 3.1, 3.3 являются следствиями теоремы 3.2.

Список литературы

[1] Адо И.Д. О подгруппах счетной симметрической группы // Доклады АН СССР. - 1945. - Т. 50. - С. 15-17.

[2] Беляев В.В. Локальные характеризации бесконечных знакопеременных групп и групп лиевского типа // Алгебра и логика. - 1992. - Т. 31, №4. - С. 369 - 390.

[3] Беляев В.В., Швед Д.А. Полупростые группы, имеющие точное финитарное подстановочное представление // Труды Института математики и механики УрО РАН. - 2014. - Т. 20, №2. - С. 55-62.

[4] Горенстейн Д. Конечные простые группы. - М.: Мир, 1985.

[5] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. - М.: Наука, 1982.

[6] Созутов А.И., Сучков Н.М., Сучкова Н.Г., Бесконечные группы с инволюциями. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011.

[7] Супруненко Д.А. О локально нильпотентных подгруппах бесконечной симметрической группы // Докл. АН СССР. - 1996. - Т. 167, №2, - С. 302 - 304.

[8] Супруненко Д.А. Группы матриц. - М.: Наука, 1972.

[9] Сучков Н.М. Пример смешанной группы, факторизуемой двумя периодическими подгруппами // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 5. С. 573–577.

[10] Сучков Н.М. О подгруппах произведения локально конечных групп // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 4. С. 408–413.

[11] Сучков Н.М. О группе ограниченных перестановок // Сборник научных трудов "Конструкции в алгебре и логике". - Тверь. - 1990. С. 84-89.

[12] Сучков Н.М., Сучкова Н.Г. О группах ограниченных подстановок // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. - 2010. - Т. 3, №2. - С. 262 - 266.

[13] Сучков Н.М., Сучкова Н.Г. О нормальных подгруппах групп ограниченных подстановок // Сиб. электрон. матем. изв., 2015, том 12, 344–353.

[14] Сучков Н.М., Сучкова Н.Г. О локально конечном радикале группы ограниченных подстановок // Труды Института математики и механики УрО РАН. - 2016. - Т. 22, №3. - С. 259-264.

[15] Hall P. Periodic FC - groups // J. London Math. Soc. - 1959. - Vol. 34. - P. 289 - 304.

[16] Neumann P. The structure of finitary permutation groups // Arch. Math. - 1976. - Vol. 27, № 3. - P. 3 - 17.

[17] Wiegold J. Groups of finitary permutations // Arch. Math. - 1974. - Vol. 25,. - P. 466 - 469.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[18] Сучков Н.М., Маньков А.А., Тарасов Ю.С. Группы подстановок с конечными параметрами рассеивания // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. - 2012. Т. 5, № 1. С. 116–121.

[19] Сучков Н.М., Тарасов Ю.С. О равномерных подстановках с конечными параметрами рассеивания // Труды Института математики и механики УрО РАН. - 2013. - Т. 19, №3. - С. 284-289.

[20] Сучков Н.М., Тарасов Ю.С. О порождающих групп подстановок с конечными параметрами рассеивания // Сибирские электронные математические известия. - 2014, - Т. 11, -С. 345–353.

[21] Tarasov Yuri S On Normal Closures of Involutions in the Group of Limited Permutations // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. -2016. 9(3), 393 – 400.

[22] Сучков Н.М., Тарасов Ю.С. О группе подстановок целых чисел с конечными параметрами рассеивания // Тез. докл. международ. конф. "Алгебра и геометрия". Екатеринбург. - 2011. - С. 160.

[23] Сучков Н.М., Тарасов Ю.С. Группы подстановок с конечными параметрами рассеивания // Тез. докл. международ. конф. "Алгебра и линейная оптимизация". Екатеринбург. - 2012. - С. 158.

[24] Тарасов Ю.С. О группах подстановок с конечными параметрами рассеивания // Тез. докл. международ. конференции "Алгебра и логика: теория и приложения, посвященной памяти В.П. Шункова". Красноярск. - 2013. - С. 130.

[25] Тарасов Ю.С. О Нормальном замыкании инволюций в группе ограниченных подстановок // Тез. докл. международ. конф. по теории групп, посвященной 70-летию А.Ю. Ольшанского. Красноярск. - 2016. - С. 59 - 60.