Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Брянский государственный университет
имени академика И.Г. Петровского»

На правах рукописи

Сорокина Марина Михайловна

ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор физ.-мат. наук, профессор
В.А. Ведерников

Брянск – 2017

О г л а в л е н и е

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертационного исследования и степень ее разработанности.

Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Среди классов конечных групп центральное место занимают формации – классы групп, замкнутые относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формациями являются такие важные классы групп, как $\mathfrak{S}, \mathfrak{U}, \mathfrak{N}, \mathfrak{A}$ – классы всех конечных разрешимых, сверхразрешимых, нильпотентных, абелевых групп соответственно, и многие другие, причем $\mathfrak{S}, \mathfrak{U}, \mathfrak{N}$ являются насыщенными формациями. Формации явились эффективным средством для изучения подгруппового строения конечных групп (см. [47]), что обусловило интенсивное развитие теории формаций в последние десятилетия.

В теории классов конечных групп важную роль играют функциональные методы. Удобным инструментом для изучения формаций явились функции, в качестве области определения которых выступает множество $\mathbb{P}$ всех простых чисел (или, что равносильно, класс всех конечных простых абелевых групп). Так, понятие формации было введено Гашюцом в 1963 году в работе [64], и уже в этой работе с помощью функциональных методов Гашюцом были построены локальные формации, занимающие центральное место в теории формаций конечных групп, а также установлено, что в универсуме всех конечных разрешимых групп всякая локальная формация является насыщенной[1]. Следуя Гащюцу, в работе [71] Хартли ввел понятие локального класса Фиттинга.

С помощью локальных формаций были решены многие важные вопросы в теории конечных групп, в частности, с единых позиций изложены результаты о силовских, холловых, картеровых, гашюцевых подгруппах, о системных нормализаторах конечных разрешимых групп, о группах Миллера-Морено, группах Шмидта и многие другие (см. [47]). Локальные формации нашли применение в исследовании вопросов дополняемости в группе ее нормальных подгрупп. В этом направлении хорошо известен следующий результат Гашюца.

Теорема 1 (Гашюц, [63]). *Пусть N – нормальная абелева подгруппа конечной группы G. Подгруппа N тогда и только тогда дополняема в группе G,*

[1]Теорема о том, что всякая формация конечных групп насыщенна тогда и только тогда, когда она локальна, известна в настоящее время как теорема Гашюца-Любезедера-Шмида (см., например, [60], теорема IV, 4.6).

когда N_p *дополняема в* G_p *для любого* $p \in \pi(N)$.

Виландт в обзорном докладе на Международном математическом конгрессе в Эдинбурге в 1958 году поставил следующую проблему (Виландт [81]):

(A) *Ослабить условие абелевости нормальной подгруппы* N *в Теореме* 1.

Одновременно Виландтом была отмечена невозможность исключить это условие полностью (пример, подтверждающий данный факт, имеется в книге [74], с. 131).

Важный шаг в решении проблемы **(A)** был сделан Л.А. Шеметковым, а именно, в 1974 году Л.А. Шеметков для локальной формации $\mathfrak{F}$ доказал следующую теорему о дополняемости в конечной группе G ее $\mathfrak{F}$-корадикала N в случае, когда силовские подгруппы из N являются абелевыми.

Теорема 2 (Шеметков, [45]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация,* G *– конечная группа. Если для любого простого числа* p*, делящего* $|G : G^{\mathfrak{F}}|$*, силовская* p*-подгруппа из* $G^{\mathfrak{F}}$ *абелева, то подгруппа* $G^{\mathfrak{F}}$ *дополняема в* G.

В качестве следствий из теоремы 2 вытекают, ставшие уже классическими, теорема Ф. Холла [70] о дополняемости в конечной разрешимой группе G её коммутанта G' ($\mathfrak{A}$-корадикала группы G) с абелевыми силовскими подгруппами, теорема Хупперта [73] о дополняемости в G нормальной подгруппы $O^p(G)$ ($\mathfrak{N}_p$-корадикала группы G) с абелевой силовской p-подгруппой.

Понятие $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы, введенное в рассмотрение Гашюцом в 1963 году [64], явилось естественным обобщением понятий холловой и картеровой подгрупп. Гашюц в работе [64] объединил и расширил известные результаты Холла [67] и Картера [58], а именно, Гашюцом были установлены существование и сопряженность $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп ($\mathfrak{F}$-проекторов[1]) в разрешимой группе для насыщенной (локальной) формации $\mathfrak{F}$. В работе Шунка [77] теорема Гашюца была распространена для класса $\mathfrak{F}$, являющегося примитивно замкнутым гомоморфом. Шмид и Э.Ф. Шмигирев в работах [76] и [53] соответственно распространили результаты Гашюца [64] на произвольные группы с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$, а Л.А. Шеметковым в [46] условие разрешимости $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ было ослаблено до $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимости.

[1] Понятие $\mathfrak{F}$-проектора группы было введено Гашюцом в 1969 году (см. [65]). Отметим, что в универсуме всех конечных разрешимых групп понятия $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы и $\mathfrak{F}$-проектора совпадают.

Дальнейшее обобщение результаты работ [46], [53], [64], [76], [77] получили в работе Эриксона [61] для примитивно замкнутого гомоморфа (класса Шунка), содержащегося в SQ-замкнутом универсуме. В работе Фёрстера [62] к исследованию вопросов существования и сопряженности $\mathfrak{F}$-проекторов в группах для класса Шунка $\mathfrak{F}$, содержащегося в SQE_{Φ}-замкнутом универсуме, был применен подход, основанный на использовании Q-границы класса Шунка (см. также [60], главы III и VI). В ряде работ были установлены необходимые и достаточные условия, при которых $\mathfrak{F}$-подгруппа является $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой ($\mathfrak{F}$-проектором) группы G или содержится в её $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе ($\mathfrak{F}$-проекторе), в частности, выявлены условия при которых $\mathfrak{F}$-проектор группы является её $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой (см., например, [3], [55], [56], [59], [72]). В книге [60] Дерком и Хоуксом была поставлена следующая общая проблема (Дерк, Хоукс [60], глава III, § 3, проблема B):

(B) *Может ли универсум, для которого работает теория проекторов, расширен за пределы класса $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп?*

К этому направлению относятся упомянутые выше результаты Шмида, Э.Ф. Шмигирева, Л.А. Шеметкова, Эриксона, Фёрстера.

Ф. Холл в работах [68], [69] ввел понятия силовской системы и системного нормализатора с целью более глубокого изучения разрешимых групп. Картером и Хоуксом в работе [59] для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ в разрешимой группе G был выделен сопряженный класс $\mathfrak{F}$-подгрупп, получивших в [59] название $\mathfrak{F}$-нормализаторов, причем класс $\mathfrak{F}$-нормализаторов совпадает с сопряженным классом системных нормализаторов в G, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп. В работе [59] установлено, что для $\mathfrak{F}$-нормализаторов в разрешимой группе G выполняются многие свойства системных нормализаторов в G, а именно, в [59] доказано, что в разрешимой группе G для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ существуют $\mathfrak{F}$-нормализаторы, любые два $\mathfrak{F}$-нормализатора группы G сопряжены в G, $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор и изолирует каждый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G (см. также [60], глава V). Кроме того, в [59] для $\mathfrak{F}$-нормализатора H разрешимой группы G была получена его характеризация посредством цепи максимальных подгрупп, соединяющих H с G. Это свойство

$\mathfrak{F}$-нормализатора H разрешимой группы G послужило отправной точкой для определения $\mathfrak{F}$-нормализатора H для класса Шунка в работе Манна [75] и в произвольной группе для локальной формации $\mathfrak{F}$ в работе Л.А. Шеметкова [46] (см. также [47]). Понятие $\mathfrak{F}$-нормализатора (системного нормализатора) разрешимой группы G оказалось тесно связанным с понятиями $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы и подгруппы Картера группы G (см. [57], [59], [60], [64]). Так, в [59] установлено, что любой $\mathfrak{F}$-нормализатор разрешимой группы G содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе из G. $\mathfrak{F}$-нормализаторы также нашли применение в исследовании вопросов дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикалов в группах. В [59] доказано, что всякое дополнение к абелевому $\mathfrak{F}$-корадикалу разрешимой группы G является $\mathfrak{F}$-нормализатором в G, где $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Для произвольной группы G аналогичный результат получен Л.А. Шеметковым в [47].

В связи с классификацией конечных простых групп актуальной в теории конечных групп стала задача исследования непростых конечных групп с произвольными, необязательно абелевыми, композиционными факторами. Наиболее удобными для решения этой задачи явились композиционные формации, введенные в рассмотрение Л.А. Шеметковым в 1974 году с помощью функций вида $f : \mathfrak{I} \to \{$формации конечных групп$\}$, где $\mathfrak{I}$ – класс всех конечных простых групп [45]. Независимо от Л.А. Шеметкова композиционные формации были построены Бэром в терминах разрешимо насыщенных формаций (см. [60]). Композиционные формации также нашли широкое применение в теории конечных групп, в частности, при изучении субнормальных подгрупп и их обобщений (см. [15]).

Тот факт, что теория формаций оказалась достаточно удобным средством для решения многих вопросов теории конечных групп, привел к необходимости более тщательного изучения самих формаций. В 1984 году Л.А. Шеметков для непустого подмножества ω множества $\mathbb{P}$ построил ω-локальные формации [49], раскрыв новые возможности использования функций при изучении классов конечных групп. Примером этому служат работы [38], [40], [52]. В работе [40] А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым доказана равносильность понятий ω-локальной и ω-насыщенной формаций. Актуальность проблемы применения ω-локальных формаций к изучению подгруппового строения конечных групп в разные годы неоднократно обсуждалась на Гомельском Алгебраическом Семинаре. В 1999 году А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков в качестве обобщения понятия композиционной формации построили Ω-композиционные формации, где Ω – непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$ (см. [41]).

Как отмечено в монографии А.Н. Скибы [39], важной характеристикой формации является наличие в ней тех или иных подформаций и их взаимное расположение (см. [39], с. 9). Поскольку понятие формации явилось естественным обобщением понятия многообразия, то многие методы в теории формаций возникли как аналоги соответствующих методов теории многообразий. В частности, исследования подформационного строения локальных формаций привели к необходимости разработки особых методов, связанных с понятием критической формации. В 1980 году Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп впервые была поставлена следующая общая проблема (Л.А. Шеметков [48]):

(C) *Изучить $\mathfrak{H}_\theta$-критические формации, где $\mathfrak{H}$ – класс групп, θ – некоторая совокупность формаций.*

В серии работ (см., например, [33] – [37]) А.Н. Скиба получил решение Проблемы **(C)** в случае, когда θ – совокупность всех локальных формаций. В работах [25] и [26] изучены критические нормально наследственные и наследственные локальные формации соответственно. Важным обобщением понятия локальности является понятие кратной локальности, введенное в рассмотрение А.Н. Скибой в 1987 году [35]. В работе В.Г. Сафонова [22] получено описание строения критических n-кратно локальных формаций. Исследованием критических ω-локальных формаций занимались А.Н. Скиба, В.М. Селькин, И.Н. Сафонова и др. (см., например, [23], [24], [27]). В работе [82] изучены критические композиционные формации, а в [7] получено описание строения критических Ω-композиционных наследственных формаций. В последние годы нередко в качестве аппарата исследования формаций стали использоваться подгрупповые функторы, т.е. согласованные с изоморфизмами групп функции, выделяющие некоторые системы подгрупп (см. [15], [39]). Теория подгрупповых функторов как самостоятельное направление в рамках теории групп берет свое начало в работах Р. Бэра [54] и Б.И. Плоткина [20]. Однако особенно интенсивно данная теория стала развиваться в последние годы в связи с обнаружением тесной связи между подгрупповыми функторами и классами групп (см. [15]). В монографии [39] представлены основные результаты о критических τ-замкнутых n-кратно локальных формациях, где τ – регулярный подгрупповой функтор (подгрупповой функтор Скибы).

В 1999 году В.А. Ведерниковым был предложен принципиально новый функциональный подход к изучению формаций, который привел к необходимости рассмотрения для формаций наряду с функциями-спутниками новой функции – направления, определяемой как отображение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел (класса $\mathfrak{I}$ всех простых конечных групп) во множество всех непустых формаций Фиттинга ([98], [99]). Таких направлений существует бесконечное множество, а направление ω-локальной формации (Ω-композиционной формации) является одним из них. Поэтому для фиксированного непустого множества ω простых чисел (для фиксированного непустого класса Ω простых конечных групп) можно построить бесконечное множество новых видов формаций – ω-веерных формаций (Ω-расслоенных формаций). В.А. Ведерниковым в 1999 году была поставлена следующая задача (В.А. Ведерников [98], [99]):

(D) *Разработать теории ω-веерных* (задача (D1)) *и Ω-расслоенных* (задача (D2)) *формаций конечных групп.*

Ввиду отмеченной выше связи между $\mathfrak{F}$-проекторами, $\mathfrak{F}$-покрывающими подгруппами и $\mathfrak{F}$-нормализаторами в конечных группах для локальной формации $\mathfrak{F}$ решение Проблемы **(B)** является тесно связанным с решением следующей задачи:

(E) *Разработать теорию $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов, где $\mathfrak{F}$ – произвольная ω-локальная формация.*

Цели диссертационного исследования.

В диссертации ставится целью решение проблем и задач **(A)** – **(E)**.

Основные результаты диссертации.

1. Решена Проблема Виландта [81] о дополняемости в конечной группе G $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ без условия абелевости его силовских подгрупп для ω-локальной (локальной) формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ (решение Проблемы **(A)**).

2. Решена Проблема Дерка и Хоукса [60] о расширении универсума, в котором работает теория проекторов, за пределы класса всех конечных разрешимых групп (решение Проблемы **(B)**).

3. Решена Проблема Л.А. Шеметкова [48] изучения $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций для n-кратно ω-веерных, τ-замкнутых ω-веерных, τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций (решение Проблемы **(C)**).

4. Разработаны основные положения теории ω-веерных и теории Ω-расслоенных формаций (решение Задачи **(D)** В.А. Ведерникова).

5. Разработаны основные положения теории $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов, где $\mathfrak{F}$ – произвольная ω-локальная формация (решение Задачи **(E)**).

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Методология и методы исследования. В диссертации используются классические методы теории групп, а также методы теории классов групп и теории подгрупповых функторов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп и теории классов конечных групп, при чтении спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Публикации. Все основные результаты диссертации опубликованы в 16 статьях [82] – [97] в журналах, входящих в перечень ВАК ведущих рецензируемых научных изданий. Все результаты диссертации опубликованы в 26 статьях [82] – [97], [102], [107] – [109], [114], [115], [120], [121], [124], [125] в рецензируемых научных изданиях и 3 препринтах [98], [99], [116].

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации апробировались:

– на научно-исследовательском семинаре кафедры Высшей алгебры Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (2017 г., Москва);

– на семинаре «Алгебра и логика» Института математики имени С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (2017 г., Новосибирск);

– на научно-исследовательском семинаре отдела алгебры и топологии Института математики и механики имени Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (2016 г., Екатеринбург);

– на Международной конференции «Алгебра и логика: теория и приложения» (2016 г., Красноярск) – пленарный доклад;

– на Международной конференции "Groups and Graphs, Metrics and Menifolds"(2017 г., Екатеринбург);

– на семинарах кафедры алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского (2014 – 2017 гг., Брянск).

Результаты диссертации также были представлены на международных алгебраических конференциях в Москве (2003, 2008), Санкт-Петербурге (2002), Екатеринбурге (2001, 2015), Красноярске (2002, 2007, 2010, 2013, 2016), Гомеле (2000, 2005, 2007), Киеве (2002), Владикавказе (2012, 2015), Казани (2016), Нальчике (2017) (см. [100] – [101], [103] – [106], [110] – [113], [117] – [119], [122], [123], [127] – [132]).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав основной части, заключения, перечня условных обозначений и определений, списка литературы, составленного в алфавитном порядке. Объем диссертации – 229 страниц.

Обзор результатов

Обзор результатов Главы 1.

Глава 1 диссертации посвящена разработке теории ω-веерных формаций конечных групп и ее применению к изучению вопросов дополняемости корадикалов в группах. В данной главе получены следующие основные результаты диссертации:

— решена (совместно с В.А. Ведерниковым) Задача **(D1)**: Теоремы 1.1.1, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.6, 1.1.7;

— решена (совместно с В.А. Ведерниковым) Проблема **(A)** для случая локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$: Следствия 1.4.1, 1.4.2, 1.4.4 Теоремы 1.4.2.

Все основные результаты данной главы опубликованы в работах [84], [95] и получены в неразделимом соавторстве с В.А. Ведерниковым.

В параграфе 1.1 представлены основные положения теории ω-веерных формаций конечных групп. Пусть $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$ формации групп $\}$, где $f(\omega') \neq \emptyset$, – ω-формационная функция простого натурального аргумента или, коротко, ωF-функция, $g : \mathbb{P} \to \{$ формации групп $\}$ – формационная функция простого натурального аргумента или, коротко, $\mathbb{P}F$-функция, $\delta : \mathbb{P} \to \{$ непустые формации Фиттинга $\}$ – формационно-радикальная функция простого натурального аргумента, или коротко, $\mathbb{P}FR$-функция. Формацию

$$\omega F(f,\delta) = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/G_{\delta(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\ )$$

называем *ω-веерной формацией с направлением δ и ω-спутником f*. Формацию

$$\mathbb{P}F(g,\delta) = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\delta(p)} \in g(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)\ )$$

называем *веерной формацией с направлением δ и спутником g*.

Одним из важных видов ω-веерных формаций являются ω-полные формации. Формацию $\mathfrak{F} = \omega F(f,\delta_0)$ называем *ω-полной* формацией, где $\delta_0(p) = \mathfrak{E}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и обозначаем $\mathfrak{F} = \omega AF(f)$. Значение ω-полных формаций в теории формаций конечных групп показывает следующая теорема.

Теорема 1.1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая неединичная формация и $\omega = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является ω-полной формацией.*

Следующая теорема устанавливает связь между ω-веерными и веерными формациями.

Теорема 1.1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая неединичная формация и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. Формация $\mathfrak{F}$ является ω-веерной с направлением δ и ω-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – веерная формация с направлением δ и спутником f_1 таким,что $f_1(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $f_1(p) = \emptyset$ для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \omega$.*

Одним из видов ω-веерных формаций являются хорошо известные ω-локальные формации. В.А. Ведерников в работе [8] ввел в рассмотрение два важных вида ω-веерных формаций – ω-специальные и ω-центральные формации. Для направлений δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 соответственно ω-полной, ω-локальной, ω-специальныой и ω-центральной формаций справедливо соотношение: $\delta_0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \delta_3$. Среди направлений δ ω-веерной формации таких, что $\delta_0 \leq \delta$, важное место занимают p-направления, т.е. направления, удовлетворяющие равенству $\mathfrak{E}_{p'} \cdot \delta\ (p) \ = \ \delta\ (p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. В частности, этому равенству удовлетворяют отмеченные выше направления δ_0, δ_1, δ_2 и δ_3. В.А. Ведерников в работе [8] для ω-веерной формации ввел в рассмотрение понятие a-направления, b-направления, b_p-направления, где $p \in \mathbb{P}$, r-направления и s-направления. Для ω-веерных формаций с p-направлением получена следующая теорема.

Теорема 1.1.4. *Пусть δ – p-направление ω-веерной формации. Если $\mathfrak{F}$ – веерная формация с направлением δ, то $\mathfrak{F}$ является ω-веерной формацией с направлением δ для любого непустого множества простых чисел ω.*

При исследовании ω-веерных формаций удобно использовать их ω-спутники. Этот факт обусловлен тем, что значениями ω-спутника ω-веерной формации $\mathfrak{F}$ являются формации, имеющие часто более простое строение, чем формация $\mathfrak{F}$. В параграфе 1.1 рассматриваются некоторые важные виды ω-спутников ω-веерной формации. В теореме 1.1.6 установлено существование единственного минимального ω-спутника ω-веерной формации с направлением δ, удовлетворяющим условию $\delta_0 \leq \delta$, а также получено описание его строения. Используя описание строения минимального ω-спутника ω-веерной формации, получен ряд результатов об ω-веерных формациях.

Теорема 1.1.7. *Пусть δ – ps-направление ω-веерной формации. Форма-*

ция $\mathfrak{F}$ является ω-веерной с направлением δ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является $\{q\}$-веерной формацией с направлением δ для любого $q \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$.

Среди ω-спутников ω-веерной формации $\mathfrak{F}$ большую роль играют внутренние ω-спутники, т.е. такие ω-спутники, все значения которых являются подформациями формации $\mathfrak{F}$. В частности, из строения минимального ω-спутника f ω-веерной формации $\mathfrak{F}$ вытекает, что f является внутренним ω-спутником $\mathfrak{F}$. В.А. Ведерников в работе [8] установил, что ω-веерная формация $\mathfrak{F}$ с bp-направлением δ таким, что $\delta \leq \delta_3$, обладает единственным максимальным внутренним ω-спутником, а также получил описание его строения. Л.А. Шеметков и А.Н. Скиба в книге [50] ввели в рассмотрение полувнутренний композиционный экран (спутник) композиционной формации (см. [50], § 15). Следуя [50], в параграфе 1.1 введено определение полувнутреннего ω-спутника ω-веерной формации и исследовано строение максимального полувнутреннего ω-спутника ω-веерной формации с b_qp-направлением, где q – некоторое простое число из ω.

Все основные результаты параграфа 1.1 опубликованы в работе [84].

Параграфы 1.2 – 1.4 посвящены применению ω-веерных формаций с направлением δ_1 (ω-локальных формаций) к исследованию дополняемости корадикалов в группах.

В параграфе 1.2 введены в рассмотрение понятия f_ω-центрального и f_ω-эксцентрального главных факторов групп, свойства которых в параграфах 1.3 и 1.4 применяются к исследованию указанных выше вопросов. Пусть f – ωF-функция. Главный ωd-фактор A/B группы G называем *f_ω-центральным* в G, если $G/C_G(A/B) \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(A/B)$; *$f_\omega$-эксцентральным* в G, если $G/C_G(A/B) \notin f(p)$ для некоторого $p \in \omega \cap \pi(A/B)$. В лемме 1.2.1 получена характеризация ω-локальной формации с внутренним ω-спутником f в терминах f_ω-центральных главных факторов групп. Далее в данном параграфе для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлены условия, при которых $\mathfrak{F}$-корадикал группы G не содержит определенных G-главных f_ω-центральных факторов. Ключевой здесь является следующая теорема.

Теорема 1.2.1. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega LF(f)$ – ω-локальная формация Фиттинга с максимальным внутренним ω-спутником f и группа $G = A_1A_2 \cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G.*

Если для некоторого простого числа $p \in \omega$ силовская p-подгруппа группы $A_i^{\mathfrak{F}}$ является абелевой для любого $i = 1, 2, \dots, n$, то $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} A_2^{\mathfrak{F}} \cdots A_n^{\mathfrak{F}}$ и $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов.

В параграфе 1.3 изучаются вопросы применения ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ к доказательству существования ω-дополнений и дополнений к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G. В теоремах 1.3.1 – 1.3.3 получены результаты, подобные (не равносильные) результатам Л.А. Шеметкова из [78] (см. [78], теоремы 4, 5, следствие теоремы 5). В теореме 1.3.4 установлены условия, при которых $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ в любом расширении группы G обладает ω-дополнением, нормализующим некоторую силовскую подгруппу из $G^{\mathfrak{F}}$.

Теорема 1.3.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, Γ – расширение группы G, ω_1 – множество всех тех простых чисел $q \in \omega$, для которых силовская q-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ является циклической. Если $\omega_1 \neq \emptyset$, то в Γ существует ω_1-дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$, нормализующее некоторую силовскую p-подгруппу из $G^{\mathfrak{F}}$, где p – наименьшее число из ω_1.*

Из теоремы 1.3.4 следует результат Л.А. Шеметкова из [47] (см. [47], теорема 11.10).

В параграфе 1.4 получено решение Проблемы **(A)**. С этой целью здесь введено определение $\omega\mathfrak{F}$-нормализатора группы G. Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация. Следуя [47] (см. [47], определение 21.1), подгруппу H группы G называем *$\omega\mathfrak{F}$-нормализатором* группы G, если $H/\Phi(H) \cap O_{\omega'}(H) \in \mathfrak{F}$ и существует максимальная цепь группы G вида $H = H_t \subset H_{t-1} \subset \cdots \subset H_1 \subset H_0 = G$, где $t \geq 0$, такая, что H_i – $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа группы H_{i-1} для любого $i = 1, 2, \dots, t$. В данном параграфе получен ряд свойств $\omega\mathfrak{F}$-нормализаторов групп (Леммы 1.4.3 – 1.4.5, Теорема 1.4.1). В теореме 1.4.2 установлены достаточные условия ω-дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала группы G ее $\omega\mathfrak{F}$-нормализаторами.

Теорема 1.4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация Фиттинга и группа $G = A_1A_2 \cdots A_n$, где $A_1, A_2, \dots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является ω-разрешимым для любого $i = 1, 2, \dots, n$, а его силовские p-подгруппы абелевы для любого $p \in \omega$, то каждый $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является ω-дополнением в G к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$.*

В качестве следствий из теоремы 1.4.2 получен ряд результатов о дополняемости в конечной группе её $\mathfrak{F}$-корадикала без условия абелевости его силовских подгрупп, тем самым для локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ получено решение Проблемы **(A)**.

Следствие 1.4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация Фиттинга и группа $G = A_1A_2 \cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, а его силовские p-подгруппы абелевы для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является дополнением в G к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$.*

Следствие 1.4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация Фиттинга и группа $G = A_1A_2 \cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является абелевым для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является дополнением в G к её $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$.*

Следствие 1.4.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы, и группа $G = A_1A_2 \cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является разрешимым с абелевыми силовскими подгруппами для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в группе G.*

Все основные результаты параграфов 1.2 – 1.4 опубликованы в [95].

Обзор результатов Главы 2.

Глава 2 диссертации посвящена применению ω-веерных формаций к изучению классических $\mathfrak{F}$-подгрупп в группах. В данной главе получены следующие основные результаты диссертации:

— решена Проблема **(A)** для случая ω-локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$: Теорема 2.5.5;

— решена Проблема **(B)**: построена теория $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторов, где $\mathfrak{F}$ – произвольный непустой ω-примитивно замкнутый гомоморф, содержащий неразрешимые группы, и, в частности, ω-локальная формация, содержащая неразрешимые группы: Теоремы 2.2.1, 2.2.2, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4 – 2.3.7;

— решена Задача **(E)**: разработана теория $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов, где $\mathfrak{F}$ – произвольная ω-локальная формация: Теоремы 2.5.1 – 2.5.3, 2.6.1 – 2.6.3.

Все основные результаты Главы 2 опубликованы в работах [96], [97] и получены автором диссертации самостоятельно, при этом идеи и методы доказательств обсуждались и согласовывались с В.А. Ведерниковым.

В параграфах 2.1 – 2.3 получено решение Проблемы **(B)**. С этой целью в параграфе 2.1 изучаются ω-примитивно замкнутые классы групп и ω-примитивные группы. Здесь получены предварительные результаты, используемые при доказательстве утверждений параграфов 2.2 и 2.3.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – непустые классы групп, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называем *ω-насыщенным в $\mathfrak{X}$*, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и любой нормальной подгруппы N группы G такой, что $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$, из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. При $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ получаем определение ω-насыщенного класса групп [40]. Класс $\mathfrak{F}$ называем *ω-примитивно замкнутым в $\mathfrak{X}$* или, коротко, *ωP-замкнутым в $\mathfrak{X}$*, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ из $G/Core_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы M группы G следует, что $G \in \mathfrak{F}$. ωP-замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф коротко будем называть *ωP-гомоморфом в $\mathfrak{X}$*. Будем говорить, что $\mathfrak{F}$ – ωP-замкнутый класс групп (ωP-гомоморф), если $\mathfrak{F}$ является ωP-замкнутым в $\mathfrak{E}$ классом (ωP-гомоморфом в $\mathfrak{E}$). Если $\omega = \pi(\mathfrak{F})$, то ω-насыщенный в $\mathfrak{X}$ класс (ωP-замкнутый в $\mathfrak{X}$ класс, ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$) $\mathfrak{F}$ становится насыщенным в $\mathfrak{X}$ классом (соответственно P-замкнутым в $\mathfrak{X}$ классом, P-гомоморфом в $\mathfrak{X}$). В леммах 2.1.1 – 2.1.3 получены свойства ωP-замкнутых классов групп.

В параграфе 2.1 также введено в рассмотрение определение ω-примитивной группы. Группу G называем *ω-примитивной*, если в G существует максимальная подгруппа M такая, что $Core_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$, а M называем *ω-примитиватором* группы G. Считаем, что в единичной группе $E = 1$ не существует максимальной подгруппы. Поэтому E не является ω-примитивной группой. Если $\omega = \pi(G)$, то ω-примитивная группа G становится примитивной группой, а M – ее примитиватором (см., например, [18], с. 143). Центральным результатом об ω-примитивных группах является следующая теорема.

Теорема 2.1.1. *Пусть G – ω-примитивная группа, M – ее ω-примитиватор и $O_\omega(G) \neq 1$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

1) *группа G содержит единственную минимальную нормальную ω-подгруппу N, $C_G(N) = N \times Core_G(M)$ и $G = [N]M$*;

2) *группа G содержит единственную минимальную нормальную ω-подгруппу N, $C_G(N) = Core_G(M)$ и $G = NM$*;

3) *группа G содержит точно две минимальные нормальные ω-подгруппы N_1 и N_2, причем $G = [N_1]M = [N_2]M$, $N_1 \cong N_2 \cong N_1N_2 \cap M$, $C_G(N_i) = N_{3-i} \times Core_G(M)$, $i = 1, 2$.*

В качестве следствия из теоремы 2.1.1 получается известный результат Бэра о примитивных группах из [54].

В параграфе 2.2 вводится в рассмотрение понятие $\mathfrak{F}^\omega$-проектора конечной группы и изучаются его основные свойства. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Подгруппу H группы G называем *$\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G*, если для любой нормальной ω-подгруппы N группы G подгруппа HN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в фактор-группе G/N. Если $\omega = \pi(G)$, то $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G становится $\mathfrak{F}$-проектором в G ([65], см. также [60], определение III, 3.2). В теоремах 2.2.1 и 2.2.2 установлены соответственно достаточное и необходимое условия существования в группе G $\mathfrak{F}^\omega$-проекторов для непустого ωP-замкнутого в $\mathfrak{X}$ гомоморфа $\mathfrak{F}$.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$ и $G \in \mathfrak{X}$. Если G обладает $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной ω-подгруппой, то в G существует $\mathfrak{F}^\omega$-проектор.*

Теорема 2.2.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф и $\mathfrak{F}$ – непустой подкласс класса $\mathfrak{X}$. Если каждая группа $G \in \mathfrak{X}$ с $O_\omega(G) \neq 1$ обладает $\mathfrak{F}^\omega$-проектором, то справедливы следующие утверждения*:

1) *класс $\mathfrak{F}$ является ωP-замкнутым в $\mathfrak{X}$*;

2) *если $H \in \mathfrak{F}$ и N – нормальная ω-подгруппа группы H, то $H/N \in \mathfrak{F}$.*

В качестве следствия из теорем 2.2.1 и 2.2.2 получаем следующий известный результат.

Следствие 2.2.1 (Эриксон [61]). *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф* *и $\mathfrak{F}$ – непустой подкласс класса $\mathfrak{X}$. В любой группе $G \in \mathfrak{X}$ существует $\mathfrak{F}$-проектор тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является примитивно замкнутым в $\mathfrak{X}$ гомоморфом.*

В параграфе 2.3 изучаются $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающие подгруппы конечных групп и их взаимосвязь с $\mathfrak{F}^\omega$-проекторами. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Подгруппу H группы G называем *$\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой* группы G, если $H \in \mathfrak{F}$ и из того, что $H \leq U \leq G$, V – нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$ следует, что $U = HV$. При $\omega = \pi(G)$ из определения $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппы получаем определение $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы, введенное в рассмотрение Гашюцом в работе [64]. Следуя [60] (см. также [18], глава 5), через $Proj_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$ обозначаем совокупность всех $\mathfrak{F}^\omega$-проекторов группы G, $Cov_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$ – совокупность всех $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающих подгрупп группы G, $Comp_G(A)$ – совокупность всех дополнений к нормальной подгруппе A в G. В теореме 2.3.1 для группы G с абелевой минимальной нормальной ω-подгруппой A устанавлена взаимосвязь между множествами $Proj_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$, $Cov_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$ и $Comp_G(A)$.

Теорема 2.3.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$, A – абелева минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, $G/A \in \mathfrak{F}$. Тогда $Proj_{\mathfrak{F}^\omega}(G) = Cov_{\mathfrak{F}^\omega}(G) = Comp_G(A)$.*

В теореме 2.3.2 исследуется вопрос включения $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G в ее $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающую подгруппу.

Теорема 2.3.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X}$, N – нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G. Если H – $\mathfrak{F}$-подгруппа в G такая, что $G = HN$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппе группы G. В частности, если H – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G такая, что $G = HN$, то H – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G.*

При $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 2.3.2 непосредственно получаем следующие известные результаты.

Следствие 2.3.2 (Эриксон [61]). *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой P-гомоморф в $\mathfrak{X}$. Если H – $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G и $G = HF(G) \in \mathfrak{X}$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе группы G.*

Следствие 2.3.3 (Гашюц, см. [60], лемма III, 3.14). *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс*

Шунка, G – группа, N – нильпотентная нормальная подгруппа группы G. Если H – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G такая, что $G = HN$, то H является $\mathfrak{F}$-проектором группы G.

Следствие 2.3.4 (Шеметков [47], теорема 15.9(1)). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Если H – $\mathfrak{F}$-подгруппа в G такая, что $G = HF(G)$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе группы G.*

В теореме 2.3.4 для непустого ωP-замкнутого в $\mathfrak{X}$ гомоморфа $\mathfrak{F}$ установлена взаимосвязь между $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторами и $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающими подгруппами.

Теорема 2.3.4. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$, G – $\mathfrak{X}$-группа, обладающая $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной ω-подгруппой. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором в G тогда и только тогда, когда H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G.*

Применяя лемму 2.1.2, из теоремы 2.3.4 при $\omega = \pi(G)$ непосредственно получаем следующий известный результат.

Следствие 2.3.6 (Эриксон [61]). *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой P-гомоморф в $\mathfrak{X}$, G – $\mathfrak{X}$-группа, обладающая $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной подгруппой. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$-проектором в G тогда и только тогда, когда H – $\mathfrak{F}$-покрывающая подгруппа в G.*

В теореме 2.3.5 для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлено существование и сопряженность $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающих подгрупп ($\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторов) в группе с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом, являющимся ω-группой.

Теорема 2.3.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G является $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой ω-группой. Тогда группа G имеет по крайней мере одну $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающую подгруппу (один $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор) и любые две $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающие подгруппы (два $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора) из G сопряжены в G.*

Следствие 2.3.9 (Шеметков [47], теорема 15.7). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда G обладает, по крайней мере, одной $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой и любые две $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы из G сопряжены в G.*

Следствие 2.3.10 (Шмигирев [53], Шмид [76]; см. также [47], теорема 15.6). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда G обладает, по крайней мере, одной $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой и любые две $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы из G сопряжены в G.*

В теореме 2.3.6 изучается взаимосвязь между $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающими и $\mathfrak{F}$-абнормальными подгруппами в группах.

Теорема 2.3.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, G – группа, $G^\mathfrak{F}$ – ω-группа и $H < G$. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей в G тогда и только тогда, когда $H \in \mathfrak{F}$ и H – $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G.*

Следствие 2.3.13 (Шеметков [47], теорема 15.1). *Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$-покрывающей в G тогда и только тогда, когда $H \in \mathfrak{F}$ и H $\mathfrak{F}$-абнормальна в G.*

В теореме 2.3.7 для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлено существование $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппы в определенной подгруппе группы G.

Теорема 2.3.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $G = LN$, $L \leq G$, N – нильпотентная нормальная ω-подгруппа в G и $G^\mathfrak{F}$ – π-разрешимая ω-группа. Тогда L обладает хотя бы одной $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой, причем всякая $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа из L имеет вид $H \cap L$, где H – некоторая $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G.*

Следствие 2.3.14 (Картер, Хоукс [59], теорема 5.12). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $G = LF(G)$, $L \leq G$. Тогда всякая $\mathfrak{F}$-покрывающая подгруппа из L имеет вид $H \cap L$ для некоторой $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы H в G.*

Все основные результаты параграфов 2.1 – 2.3 опубликованы в работе [96].

В параграфах 2.4 – 2.6 решена Задача **(E)**. Параграф 2.4 посвящен изучению $\mathfrak{F}^\omega$-предельных и $\mathfrak{F}^\omega$-критических подгрупп конечных групп. Результаты, представленные здесь, используются при доказательстве основных утверждений параграфов 2.5 и 2.6. Следуя [47], нормальную подгруппу R группы G называем $\mathfrak{F}^\omega$-*предельной* нормальной подгруппой в G, если $R \leq G^\mathfrak{F}$ и $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ является главным фактором группы G. Максимальную подгруппу M группы G называем $\mathfrak{F}^\omega$-*критической* в G, если $G = MR$ для некоторой $\mathfrak{F}^\omega$-предельной нормальной подгруппы R из G. В леммах 2.4.1 – 2.4.4 получены свойства $\mathfrak{F}^\omega$-предельных и $\mathfrak{F}^\omega$-критических подгрупп.

В параграфе 2.5 вводится в рассмотрение понятие $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатора конечной группы и изучаются его основные свойства. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и G – группа. $\mathfrak{F}$-подгруппу H группы G называем $\mathfrak{F}^\omega$-*нормализатором* в G, если существует цепь подгрупп группы G вида $H = H_t \subset H_{t-1} \subset \ldots \subset H_1 \subset H_0 = G$, где $t \geq 0$, такая, что H_i – $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в группе H_{i-1} для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. В следующих теоремах представлены свойства $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов групп.

Теорема 2.5.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, G – группа с $\mathfrak{F}$-корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$, являющимся ω-группой. Тогда в G существует $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор H и $G = G^{\mathfrak{F}}H$.*

Теорема 2.5.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G является π-разрешимой ω-группой. Тогда любые два $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатора группы G сопряжены в G.*

При $\omega = \pi(G)$ из теоремы 2.5.2 непосредственно получаем следующие известные результаты.

Следствие 2.5.1 (Шеметков [46]; см. также [47], теорема 21.4). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда любые два $\mathfrak{F}$-нормализатора группы G сопряжены в G.*

Следствие 2.5.2 (Картер, Хоукс [59]; см. также [60], теорема V, 3.2). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – разрешимая группа. Тогда любые два $\mathfrak{F}$-нормализатора группы G сопряжены в G.*

В следующей теореме установлено свойство $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов группы, связанное с покрытием и изолированием ее главных факторов.

Теорема 2.5.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация с внутренним ω-спутником f, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, H – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G. Тогда H покрывает каждый f_ω-центральный и изолирует каждый f_ω-эксцентральный главный ωd-фактор группы G, если выполняется одно из следующих условий:*

1) *$G^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая группа;*

2) *$G^{\mathfrak{F}}$ – ω-разрешимая группа.*

Следствие 2.5.3 (Шеметков [46]; см. также [47], следствие 21.1.1). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация,* G *– группа с* $\pi(\mathfrak{F})$*-разрешимым* $\mathfrak{F}$*-корадикалом. Если* H *–* $\mathfrak{F}$*-нормализатор группы* G*, то* H *покрывает каждый* $\mathfrak{F}$*-центральный и изолирует каждый* $\mathfrak{F}$*-эксцентральный главный фактор группы* G*.*

Следствие 2.5.4 (Картер, Хоукс [59]; см. также [60], теорема V, 3.2). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация,* H *–* $\mathfrak{F}$*-нормализатор разрешимой группы* G*. Тогда* H *покрывает каждый* $\mathfrak{F}$*-центральный и изолирует каждый* $\mathfrak{F}$*-эксцентральный главный фактор группы* G*.*

В теореме 2.5.5 для ω-локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ установлены достаточные условия дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала группы G ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторами, тем самым получено решение Проблемы **(A)**.

Теорема 2.5.5. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *–* ω*-локальная формация Фиттинга,* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ *и* $G = A_1A_2\cdots A_n$*, где* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *– попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы* G*. Если* $\mathfrak{F}$*-корадикал* $A_i^{\mathfrak{F}}$ *является* π*-разрешимой* ω*-группой, а его силовские* p*-подгруппы абелевы для любого* $p \in \omega$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, то каждый* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-нормализатор группы* G *является дополнением к* $\mathfrak{F}$*-корадикалу* $G^{\mathfrak{F}}$ *в* G*.*

Отметим, что теоремы 1.4.2 и 2.5.5 являются развитием основных результатов работ С.Ф. Каморникова [16] и С.Ф. Каморникова, О.Л. Шеметковой [17].

В параграфе 2.6 для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ получен ряд результатов о взаимосвязи $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторов с $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающими подгруппами в группах. В теореме 2.6.1 представлен центральный результат данного параграфа.

Теорема 2.6.1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *–* ω*-локальная формация,* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$*,* G *– группа и* $G^{\mathfrak{F}}$ *–* π*-разрешимая* ω*-группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *всякая* $\mathfrak{F}$*-субабнормальная подгруппа группы* G *содержит, по крайней мере, один* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-нормализатор группы* G;

2) *всякая* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-покрывающая подгруппа группы* G *содержит, по крайней мере, один* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-нормализатор группы* G;

3) *каждый* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-нормализатор группы* G *содержится, по крайней мере, в одной* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-покрывающей подгруппе группы* G*.*

В теореме 2.6.2 установлено, при каких условиях множество $\mathfrak{F}^{\omega}$-

нормализаторов группы совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающих подгрупп.

Теорема 2.6.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, $G^{\mathfrak{F}}$ – нильпотентная ω-подгруппа группы G. Тогда множество всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторов группы G совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающих подгрупп.*

В качестве следствий из теоремы 2.6.2 получаем следующие известные результаты.

Следствие 2.6.2 (Шеметков [46], см. также [47], следствие 21.5.2). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда множество всех $\mathfrak{F}$-нормализаторов группы G совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп.*

Следствие 2.6.3 (Картер, Хоукс [59], теорема 5.6). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – разрешимая группа. Если $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, то множество всех $\mathfrak{F}$-нормализаторов группы G совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп.*

В теореме 2.6.3 для ω-локальных формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ получен результат, характеризующий влияние совпадения множества всех $\mathfrak{F}_1^{\omega}$-покрывающих подгрупп группы G со множеством всех ее $\mathfrak{F}_2^{\omega}$-покрывающих подгрупп на совпадение множества всех $\mathfrak{F}_1^{\omega}$-нормализаторов группы G со множеством всех ее $\mathfrak{F}_2^{\omega}$-нормализаторов.

Все основные результаты параграфов 2.4 – 2.6 опубликованы в работе [97].

Обзор результатов Главы 3.

Глава 3 диссертации посвящена применению ω-веерных формаций к изучению подформационного строения формаций конечных групп в рамках исследования $\mathfrak{H}_{\theta}$-критических формаций. В данной главе получены следующие основные результаты диссертации:

— для n-кратно ω-веерных и τ-замкнутых ω-веерных формаций решена Проблема **(C)**: Теоремы 3.1.1, 3.1.2, 3.4.1, 3.4.2.

Все основные результаты Главы 3 опубликованы в работах [88], [89]. Основные результаты данных работ, в частности, Теоремы 3.1.1, 3.1.2, 3.4.1, 3.4.2

принадлежат М.М. Сорокиной.

Формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}_\theta$*-критической* формацией (или, иначе, минимальной не $\mathfrak{H}$ θ-формацией), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные θ-подформации из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{H}$ содержатся, где $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп, θ – совокупность формаций, $\mathfrak{F} \in \theta$ (см., например, [33], [48]). $\mathfrak{H}_\theta$-критическую формацию в случае, когда θ – совокупность всех n-кратно ω-веерных формаций с направлением δ, называем $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$*-критической* формацией. В случае, когда $n = 1$, $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критическую формацию называем $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$*-критической* формацией. В параграфах 3.1 и 3.2 изучаются n-кратно ω-веерные формации. В теоремах 3.1.1 и 3.1.2 решается Проблема **(C)** для n-кратно ω-веерных формаций с bp-направлением.

Теорема 3.1.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – n-кратно ω-веерная формация с направлением δ и минимальным $\omega\delta_{(n-1)}$-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критической, то $\mathfrak{F} = \omega F_n(G, \delta)$, где G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \subseteq \omega$, то формация $f(p)$ является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической формацией.*

Теорема 3.1.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – n-кратно ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F} = \omega F_n(G, \delta)$ – формация с минимальным $\omega\delta_{(n-1)}$-спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической, а если $\pi(P) \cap \omega = \varnothing$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической формацией. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критической.*

Всякое br-направление ω-веерной формации является bp-направлением, обратное неверно. Поэтому в параграфе 3.1 отдельно рассмотрены критические n-кратно ω-веерные формации с br-направлением $\delta \leq \delta_3$. В параграфе 3.2 изучены критические n-кратно ω-веерные формации в случае, когда $n = 1$.

Все основные результаты параграфов 3.1 и 3.2 опубликованы в работе [88].

В параграфах 3.3 и 3.4 изучаются τ-замкнутые ω-веерные формации, где τ – подгрупповой функтор, т.е. отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп, удовлетворяющее условию $(\tau(G))^{\alpha} = \tau(G^{\alpha})$ для любого изоморфизма α каждой группы G (см., например, [15]). Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ [39]; ω-спутник ω-веерной формации называем *τ-замкнутым*, если все его значения являются τ-замкнутыми формациями. В теоремах 3.4.1 и 3.4.2 решается Проблема **(C)** для τ-замкнутых ω-веерных формаций с bp-направлением.

Теорема 3.4.1. *Пусть δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-веерная формация с направлением δ и минимальным τ-замкнутым ω-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$-критической, то $\mathfrak{F} = \tau\omega F(G, \delta)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем, если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{\tau}$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\tau}$-критической формацией.*

Теорема 3.4.2. *Пусть δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F} = \tau\omega F(G, \delta)$ – формация с минимальным τ-замкнутым ω-спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем, если $\pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{\tau}$-критической, а если $\pi(P) \cap \omega = \emptyset$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\tau}$-критической формацией. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$-критической.*

Из теорем 3.4.1 и 3.4.2 непосредственно вытекают результаты для критических τ-замкнутых ω-локальных, ω-специальных и ω-центральных формаций.

Все основные результаты параграфов 3.3 и 3.4 опубликованы в [89].

Обзор результатов Главы 4.

Глава 4 диссертации посвящена разработке теории Ω-расслоенных формаций конечных групп и ее применению к изучению подформационного строения формаций. В данной главе получены следующие основные результаты диссертации:

— решена (совместно с В.А. Ведерниковым) Задача **(D2)**: Теоремы 4.1.1 – 4.1.3, 4.1.5 – 4.1.7;

— для τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций решена Проблема **(C)**: Теоремы 4.4.1, 4.4.2.

Все основные результаты Главы 4 опубликованы в [83], [86], [91], [92]. Все результаты работы [83] получены в неразделимом соавторстве с В.А. Ведерниковым. Все результаты работы [86] получены в неразделимом соавторстве с М.А. Корпачевой. Основные результаты работы [91], в частности, Теоремы 4.4.1, 4.4.2 принадлежат М.М. Сорокиной.

В параграфе 4.1 разработаны основные положения теории Ω-расслоенных формаций конечных групп. Пусть $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{$ формации групп $\}$, где $f(\Omega') \neq \emptyset$, – Ω-формационная функция или, коротко, ΩF-функция, $g : \mathfrak{I} \to \{$ формации групп $\}$ – формационная функция или, коротко, F-функция, $\varphi : \mathfrak{I} \to \{$ непустые формации Фиттинга $\}$ – формационно-радикальная функция, или коротко, FR-функция. Функции f, g и φ принимают одинаковые значения на изоморфных группах из области определения. Формацию $\Omega F(f,\varphi) = (G \in \mathfrak{E} | G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G))$ называем *Ω-расслоенной формацией с направлением φ и Ω-спутником f*. Формацию $F(g,\varphi) = (G \in \mathfrak{E} | G/G_{\varphi(A)} \in g(A)$ для всех $A \in K(G))$ называем *расслоенной формацией с направлением φ и спутником g*. Одним из важных видов Ω-расслоенных формаций являются Ω-свободные формации. Формацию $\mathfrak{F} = \Omega F(f,\varphi_0)$ называем *Ω-свободной* формацией, где $\varphi_0(A) = \mathfrak{E}_{A'}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, и обозначаем $\mathfrak{F} = \Omega Fr(f)$. Роль Ω-свободных формаций раскрывается в следующей теореме.

Теорема 4.1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая неединичная формация и $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является Ω-свободной формацией.*

Теорема 4.1.2 устанавливает связь между Ω-расслоенными и расслоенными формациями.

Теорема 4.1.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая нееденичная формация и $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с направлением φ и Ω-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – расслоенная формация с направлением φ спутником f_1 таким, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \emptyset$ для всех $A \in \mathfrak{I} \setminus \Omega$.*

Одним из видов Ω-расслоенных формаций являются хорошо известные Ω-композиционные формации. Формацию $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi_2')$ называем Ω-*канонической* формацией, где $\varphi_2'(A) = \mathfrak{E}_{A'} \cdot \mathfrak{E}_A$ для любого $A \in \mathfrak{I}$. В.А. Ведерников в работе [79] ввел в рассмотрение Ω-биканонические формации – важный тип Ω-расслоенных формаций, направление которых интегрирует в себе компоненты двух направлений, а именно, композиционной и канонической формаций. Для направлений φ_0, φ_2, φ_3 соответственно Ω-свободной, Ω-биканонической и Ω-композиционной формаций справедливо следующее соотношение $\varphi_0 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3$.

Направление φ Ω-расслоенной формации называем *правильным* или, коротко, *r-направлением*, если $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'} \cdot \varphi(A)$ для любого $A \in \mathfrak{I}$. В.А. Ведерников в работе [79] ввел в рассмотрение такие виды направлений Ω-расслоенной формации, как a-направление, b-направление, b_A-направлением, где $A \in \mathfrak{I}$, n-направление. Для Ω-расслоенных формаций с r-направлением справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1.3. *Пусть φ – r-направление Ω-расслоенной формации. Если $\mathfrak{F}$ – расслоенная формация с направлением φ, то $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной формацией с направлением φ для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

В данном параграфе рассматриваются некоторые важные виды Ω-спутников Ω-расслоенной формации. В теореме 4.1.5 установлено существование единственного минимального Ω-спутника Ω-расслоенной формации с направлением φ, удовлетворяющим условию $\varphi_0 \leq \varphi$, а также получено описание его строения. Используя описание строения минимального Ω-спутника Ω-расслоенной формации, получен ряд результатов об Ω-расслоенных формациях.

Теорема 4.1.6. *Пусть φ – nr-направление Ω-расслоенной формации. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является (Z_p)-расслоенной формацией с направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.*

Следуя [50], введено понятие полувнутреннего Ω-спутника Ω-расслоенной формации и исследовано строение максимального полувнутреннего Ω-спутника Ω-расслоенной формации с b_Ar-направлением, где $A \in \Omega$.

Теорема 4.1.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – Ω-расслоенная формация с b_Ar-направлением φ, где $A \in \Omega$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным полувнутренним Ω-спутником f, удовлетворяющим условию: если $f(A) \neq \mathfrak{E}$, то $f(A) = \mathfrak{E}_A h(A)$, где h – произвольный полувнутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$.*

Теорема 4.1.7 опубликована в [92]. Все остальные основные результаты параграфа 4.1 опубликованы в работе [83].

В параграфе 4.2 изучаются максимальные подформации Ω-расслоенных формаций, а именно, устанавливаются условия, при которых однопорожденная Ω-расслоенная формация имеет единственную максимальную Ω-расслоенную подформацию. Одним из центральных результатов здесь является следующая теорема.

Теорема 4.2.1. *Пусть φ – br-направление Ω-расслоенной формации такое, что $\varphi \leq \varphi_3$, $G = [P]H$ – монолитическая группа с монолитом P, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $Z_p \in \Omega$, H – f-базисная группа и $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация из $formH$. Тогда Ω-расслоенная формация $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \varphi)$ обладает единственной максимальной Ω-расслоенной подформацией с направлением φ и Ω-спутником h, имеющим следующее строение*:

$$h(\Omega') = form(G/O_\Omega(G)),$$
$$h(Z_p) = \mathfrak{M},$$
$$h(A) = form(G/G_{\varphi(A)}) \text{ для всех } A \in (\Omega \cap K(G)) \setminus (Z_p),$$
$$h(A) = \varnothing, \text{ если } A \in \Omega \setminus K(G).$$

Все основные результаты параграфа 4.2 опубликованы в работе [86].

В параграфах 4.3 и 4.4 изучаются τ-замкнутые Ω-расслоенные формации, где τ – подгрупповой функтор. В параграфе 4.3 представлены свойства τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций. Одним из центральных результатов здесь является теорема 4.3.1, устанавливающая взаимосвязь между τ-замкнутостью Ω-расслоенной формации и τ-замкнутостью ее Ω-спутника. В параграфе 4.4 изучаются критические τ-замкнутые Ω-расслоенные формации. В теоремах 4.4.1 и 4.4.2 решается Проблема **(С)** для τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций с br-

направлением.

Теорема 4.4.1. *Пусть* φ – br*-направление* Ω*-расслоенной формации,* $\varphi \leq \varphi_3$*,* τ – *регулярный* $\Omega\varphi$*-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов,* $\mathfrak{H}$ – τ*-замкнутая* Ω*-расслоенная формация с направлением* φ *и максимальным внутренним* Ω*-спутником* h*,* $\mathfrak{F}$ – τ*-замкнутая* Ω*-расслоенная формация с направлением* φ *и минимальным* τ*-замкнутым* Ω*-спутником* f*. Если формация* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi}$*-критической, то* $\mathfrak{F} = \tau\Omega F(G,\varphi)$*, где* G – *монолитическая* τ*-минимальная не* $\mathfrak{H}$*-группа с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$*, причем если* $K(P) \subseteq \Omega$*, то формация* $f(A)$ *является* $h(A)_\tau$*-критической для* $A \in K(P)$*, а если* $K(P) \nsubseteq \Omega$*, то* $f(\Omega')$ *является* $h(\Omega')_\tau$*-критической формацией.*

Теорема 4.4.2. *Пусть* φ – br*-направление* Ω*-расслоенной формации,* $\varphi \leq \varphi_3$*,* τ – *регулярный* $\Omega\varphi$*-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов,* $\mathfrak{H}$ – τ*-замкнутая* Ω*-расслоенная формация с направлением* φ *и максимальным внутренним* Ω*-спутником* h*,* $\mathfrak{F} = \tau\Omega F(G,\varphi)$ – τ*-замкнутая* Ω*-расслоенная формация с минимальным* τ*-замкнутым* Ω*-спутником* f*, где* G – *монолитическая группа с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$*, причем если* $K(P) \subseteq \Omega$*, то* $\Phi(G) = 1$ *и формация* $f(A)$ *является* $h(A)_\tau$*-критической для* $A \in K(P)$*, а если* $K(P) \nsubseteq \Omega$*, то* $f(\Omega')$ *является* $h(\Omega')_\tau$*-критической формацией. Тогда* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi}$*-критической формацией.*

Основные результаты параграфов 4.3 и 4.4 опубликованы в работе [91].

ГЛАВА 1
ω-ВЕЕРНЫЕ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ВОПРОСАМ ДОПОЛНЯЕМОСТИ КОРАДИКАЛОВ В ГРУППАХ

Данная глава посвящена построению теории ω-веерных формаций конечных групп и ее применению к изучению вопросов дополняемости корадикалов в группах. Глава состоит из пяти параграфов. В параграфе 1.1 разработаны основные положения теории ω-веерных формаций (решение Задачи **(D1)**). В параграфе 1.2 введены в рассмотрение понятия f_ω-центрального и f_ω-эксцентрального главных факторов групп, свойства которых в параграфах 1.3 и 1.4 применяются к исследованию вопросов дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала в конечной группе. В параграфе 1.3 ω-локальные формации применяются к доказательству существования ω-дополнений и дополнений к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G. В параграфе 1.4 получено решение Проблемы **(A)** – проблемы Виландта [81] о дополняемости в конечной группе её $\mathfrak{F}$-корадикала без условия абелевости его силовских подгрупп для локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$. В параграфе 1.5 содержатся известные результаты, используемые в Главе 1. Основные результаты данной главы опубликованы в работах [84], [95] и получены в неразделимом соавторстве с В.А. Ведерниковым.

§ 1.1. Определение и основные свойства ω-веерных формаций

В дальнейшем ω всегда обозначает непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел; ω' – дополнение к подмножеству ω во множестве $\mathbb{P}$; $\{\omega'\}$ – одноэлементное множество, состоящее из одного элемента ω'; $\mathfrak{E}_\omega$ – класс всех ω-групп, т.е. таких групп G, что $\pi(G) \subseteq \omega$; $O_\omega(G) = G_{\mathfrak{E}_\omega}$ – $\mathfrak{E}_\omega$-радикал группы G, т.е. наибольшая нормальная ω-подгруппа группы G.

Определение 1.1.1. Функцию $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$ формации групп $\}$, где $f(\omega')$ – непустая формация, назовем *ω-формационной функцией простого натурального аргумента* или, коротко, *ωF-функцией*.

Функцию $g : \mathbb{P} \to \{$ формации групп $\}$ назовем *формационной функцией простого натурального аргумента* или, коротко, *$\mathbb{P}F$-функцией*.

Функцию $\delta : \mathbb{P} \to \{$ непустые формации Фиттинга $\}$ назовем *формационно-радикальной функцией простого натурального аргумента*, или коротко, $\mathbb{P}FR$-*функцией.*

Лемма 1.1.1. *Пусть f – ωF-функция, δ – $\mathbb{P}FR$-функция и $\mathfrak{F} = (\, G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\,)$. Тогда $\mathfrak{F}$ является непустой формацией.*

Доказательство. Поскольку $f(\omega')$ – непустая формация, то $1 \in f(\omega')$ и ввиду того, что $\pi(1) = \emptyset$, получаем $1 \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Установим, что класс $\mathfrak{F}$ является гомоморфом. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$. Проверим, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Пусть $O_\omega(G/N) := R/N$. Так как $(O_\omega(G)N)/N \cong O_\omega(G)/(O_\omega(G) \cap N) \in \mathfrak{E}_\omega$, то $(O_\omega(G)N)/N \subseteq R/N$. В силу того, что класс $f(\omega')$ является гомоморфом, получаем $(G/N)/O_\omega(G/N) \cong G/R \cong (G/O_\omega(G))/(R/O_\omega(G)) \in f(\omega')$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(G/N)$ и $(G/N)_{\delta(p)} := T/N$. Поскольку $\delta(p)$ – гомоморф, то $(G_{\delta(p)}N)/N \cong G_{\delta(p)}/(G_{\delta(p)} \cap N) \in \delta(p)$, и значит, $(G_{\delta(p)}N)/N \subseteq T/N$. Так как $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ и $f(p)$ – гомоморф, имеем $(G/N)/(G/N)_{\delta(p)} \cong G/T \cong (G/G_{\delta(p)})/(T/G_{\delta(p)}) \in f(p)$.

Таким образом, $(G/N)/O_\omega(G/N) \in f(\omega')$ и $(G/N)/(G/N)_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G/N)$. Это означает, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что класс $\mathfrak{F}$ является гомоморфом.

Покажем, что класс $\mathfrak{F}$ замкнут относительно конечных подпрямых произведений. Пусть $G/N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$, и $D := N_1 \cap N_2$. Установим, что $G/D \in \mathfrak{F}$. Так как фактор-группа G/D изоморфна подпрямому произведению групп G/N_1 и G/N_2, то существует группа M такая, что $M = K_1 \times K_2$, H – подпрямое произведение групп K_1 и K_2, причем $K_i \cong G/N_i$, $i = 1, 2$, и $H \cong G/D$. Так как класс $\mathfrak{E}_\omega$ является формацией Фиттинга, то по лемме 8 [7][1] $O_\omega(H) = H \cap O_\omega(M)$. Далее, $O_\omega(M) = O_\omega(K_1) \times O_\omega(K_2)$ и $O_\omega(M)H$ является подпрямым произведением групп K_1 и K_2. Тогда по лемме 2(1) [6] $HO_\omega(M)/O_\omega(M)$ является подпрямым произведением групп $K_iO_\omega(M)/O_\omega(M) \cong K_i/O_\omega(K_i)$, $i = 1, 2$. Так как $K_i/O_\omega(K_i) \cong (G/N_i)/O_\omega(G/N_i) \in f(\omega')$, $i = 1, 2$, и класс $f(\omega')$ замкнут относительно конечных подпрямых произведений, то $HO_\omega(M)/O_\omega(M) \cong H/O_\omega(H) \in$

[1] Все известные результаты, используемые в доказательствах утверждений, приводятся в заключительном параграфе главы.

$f(\omega')$ и, значит, $(G/D)/O_\omega(G/D) \in f(\omega')$. Поскольку для любого $q \in \mathbb{P}$ класс $\delta(q)$ является формацией Фиттинга, то, аналогично рассуждая, получим, что $(G/D)/(G/D)_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G/D)$. Следовательно, $G/D \in \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что гомоморф $\mathfrak{F}$ замкнут относительно конечных подпрямых произведений и поэтому $\mathfrak{F}$ является формацией. *Лемма доказана.*

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 1.1.2. *Пусть f – $\mathbb{P}F$-функция, δ – $\mathbb{P}FR$-функция и $\mathfrak{F} = (\ G \in \ \mathfrak{E} \mid G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \pi(G)\ )$. Тогда $\mathfrak{F}$ является непустой формацией.*

Определение 1.1.2. Пусть f, g и δ – некоторые ωF-функция, $\mathbb{P}F$-функция и $\mathbb{P}FR$-функция соответственно. Формацию

$$\mathfrak{F} = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/G_{\delta(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\ )$$

назовем *ω-веерной формацией* и обозначим $\omega F(f, \delta)$; функцию f будем называть *ωF-спутником* (или, коротко, *ω-спутником*), а функцию δ – *направлением* ω-веерной формации $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$.

Формацию $\mathfrak{F} = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\delta(p)} \in g(p)$ для всех $p \in \pi(G)\ )$ назовем *веерной формацией с направлением* δ и обозначим $\mathbb{P}F(g, \delta)$, а g будем называть *$\mathbb{P}F$-спутником* (или, коротко, *спутником*) веерной формации $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(g, \delta)$.

Замечание 1.1.1. Пусть δ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция и f – ωF-функция ($\mathbb{P}F$-функция) такая, что $f(\omega') = \mathfrak{E}$ и $f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \omega$ ($f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \mathbb{P}$). Тогда $\omega F(f, \delta) = \mathfrak{E}$ ($\mathbb{P}F(f, \delta) = \mathfrak{E}$). Таким образом, класс $\mathfrak{E}$ всех конечных групп является ω-веерной (веерной) формацией с любым направлением δ.

Лемма 1.1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$, где f – ωF-функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(p) = \varnothing$ для всех $p \in \omega$, и δ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция. В частности, единичная формация* (1) *является ω-веерной для любого непустого множества простых чисел ω.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} := \omega F(f, \delta)$, где f и δ – функции, описанные в заключении леммы. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} =$

$f(\omega')$ и из $p \in \omega \cap \pi(G) \subseteq \omega \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$ следует, что $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$. Поэтому $G \in \mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда H – монолитическая группа с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Так как $H/O_\omega(H) \in f(\omega') = \mathfrak{F}$, то $M \subseteq O_\omega(H)$ и для $p \in \pi(M) \cap \omega$ получаем $H/H_{\delta(p)} \in f(p) = \emptyset$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. *Лемма доказана.*

Пусть $p \in \mathbb{P}$. Напомним следующие обозначения: $\mathfrak{N}_p$ – класс всех p-групп; $\mathfrak{E}_{p'}$ – класс всех p'-групп; $\mathfrak{E}_{(Z_p)'}$ – класс всех $(Z_p)'$-групп, т.е. таких групп G, у которых нет главных Z_p-факторов; $\mathfrak{S}_{cp}$ – класс всех групп, у которых каждый главный p-фактор централен. Будем использовать следующие обозначения: $O_{p'}(G) = G_{\mathfrak{E}_{p'}}$, $O_{(Z_p)',Z_p}(G) = G_{\mathfrak{E}_{(Z_p)'}\mathfrak{N}_p}$, $F_p(G) = G_{\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p}$, $F_{cp}(G) = G_{\mathfrak{S}_{cp}}$.

Определение 1.1.3. Формацию $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ назовем *ω-полной* или, коротко, *ωA-формацией* (от англ. "absolute"), если $\delta(p) = \mathfrak{E}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и будем обозначать $\mathfrak{F} = \omega AF(f)$, т.е. $\omega AF(f) =$

$$= (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/O_{p'}(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\ ).$$

Направление ω-полной формации обозначим через δ_0.

Пусть f – $\mathbb{P}F$-функция. Формацию $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(f, \delta_0) =$

$$= (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_{p'}(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)\ )$$

назовем *полной* формацией и обозначим $\mathfrak{F} = AF(f)$.

Теорема 1.1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая нееденичная формация и $\omega = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является ω-полной формацией.*

Доказательство. Пусть f – такая ωF-функция, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(p) = form(\ G/O_{p'}(G) \mid G \in \mathfrak{F}\ )$ для всех $p \in \omega$, и $\mathfrak{F}_1 = \omega AF(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Тогда $H/O_\omega(H) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Кроме того, $H/O_{p'}(H) \in (\ G/O_{p'}(G) \mid G \in \mathfrak{F}\ ) \subseteq f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T – монолитическая группа с монолитом $M = T^{\mathfrak{F}}$. Так как $T/O_\omega(T) \in f(\omega') = \mathfrak{F}$, то $M \subseteq O_\omega(T)$. Пусть $p \in \pi(M)$. Тогда $p \in \omega \cap \pi(T)$ и из $T/O_{p'}(T) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$

следует, что $M \subseteq O_{p'}(T)$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. *Теорема доказана.*

Замечание 1.1.2. Из теоремы 1.1.1 и леммы 1.1.3 следует, что каждая непустая формация является ω-полной для некоторого непустого множества простых чисел ω.

Лемма 1.1.4. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(f,\delta)$, где δ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция. Тогда справедливы следующие утверждения :*

1) $\mathfrak{F} = \omega F(g,\delta)$, *где* $g(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}$ *для любого* $p \in \omega \cup \{\omega'\}$;
2) $\mathfrak{F} = \omega F(h,\delta)$, *где* $h(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(p) = f(p)$ *для любого* $p \in \omega$.

Доказательство. 1) Пусть g – ωF-функция, описанная в пункте 1) леммы, и $\mathfrak{B} = \omega F(g,\delta)$. Так как $g(p) \subseteq f(p)$ для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$, то $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Поскольку $\mathfrak{F}$ – формация, то $\{G/O_\omega(G), G/G_{\delta(p)}\} \subseteq \mathfrak{F}$ и, значит, $G/O_\omega(G) \in f(\omega') \cap \mathfrak{F} = g(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p) \cap \mathfrak{F} = g(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$.

2) Пусть h – ωF-функция из пункта 2) леммы и $\mathfrak{H} = \omega F(h,\delta)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ имеем $G/G_{\delta(p)} \in f(p) = h(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H монолитична с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Из $H/O_\omega(H) \in h(\omega') = \mathfrak{F}$ следует, что $M \subseteq O_\omega(H)$ и поэтому $H/O_\omega(H) \cong (H/M)/(O_\omega(H)/M) = (H/M)/O_\omega(H/M) \in f(\omega')$. Кроме того, для любого $p \in \omega \cap \pi(H)$ выполняется $H/H_{\delta(p)} \in h(p) = f(p)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. *Лемма доказана.*

Определение 1.1.4. Формацию $\mathfrak{F} = \omega F(f,\delta)$ назовем *ω-локальной* или, коротко, *ωL-формацией*, если $\delta(p) = \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и будем обозначать $\mathfrak{F} = \omega LF(f)$, т.е. $\omega LF(f) =$

$$= (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\ ).$$

Направление ω-локальной формации обозначим через δ_1.

В случае, когда f является $\mathbb{P}F$-функцией, получаем определение локальной формации

$\mathfrak{F} = LF(f) = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(G)\ )$.

Замечание 1.1.3. Отметим, что рассматриваемое нами понятие ω-локальной формации имеет более простое определение, чем в работе [40]. Установим равносильность этих определений. Напомним, что через $\mathfrak{E}_{\omega d}$ обозначается класс всех ωd-групп. Для удобства ω-локальную формацию $LF_\omega(f) =$

$$= (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\ ),$$

где $G_{\omega d} = G_{\mathfrak{E}_{\omega d}}$, из [40] временно назовем ωd-локальной.

Теорема 1.1.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *формация ωd-локальной;*

2) *формация $\mathfrak{F}$ является ω-локальной.*

Доказательство. I. Пусть формация $\mathfrak{F}$ является ωd-локальной. Тогда согласно [40] $\mathfrak{F} = LF_\omega(f) =$

$$= (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\ ),$$

причем в силу теоремы 1 [40] можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Рассмотрим формацию $\omega LF(f) =$

$$= (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\ ).$$

Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ имеем $G/F_p(G) \in f(p)$. Следовательно, $G \in \omega LF(f)$ и $\mathfrak{F} \subseteq \omega LF(f)$.

Пусть $H \in \omega LF(f)$. Тогда $H/O_\omega(H) \in f(\omega')$ и $H/F_p(H) \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Поскольку $O_\omega(H) \subseteq H_{\omega d}$, то $H/H_{\omega d} \in f(\omega')$, а значит, $H \in \mathfrak{F}$ и $\omega LF(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \omega LF(f)$ – ω-локальная формация.

II. Пусть формация $\mathfrak{F}$ является ω-локальной, т.е. $\mathfrak{F} = \omega LF(f)$. Согласно лемме 1.1.4 можем считать, что $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$, причем $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Рассмотрим формацию $LF_\omega(f) = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\ )$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/G_{\omega d} \in \mathfrak{F} = f(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ имеем $G/F_p(G) \in f(p)$. Следовательно, $G \in LF_\omega(f)$ и $\mathfrak{F} \subseteq LF_\omega(f)$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset LF_\omega(f)$ и H – группа наименьшего порядка из $LF_\omega(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H монолитична с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Из $H/H_{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{F}$ следует, что $M \subseteq H_{\omega d}$. Пусть M – неабелева группа. Так как

M – ωd-группа, то существует $p \in \omega \cap \pi(M)$. Тогда $F_p(H) = 1$. Поскольку $H \in LF_\omega(f)$, то $H \cong H/F_p(H) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, M – элементарная абелева p-группа, причем $p \in \omega$. Так как $H/M \in \mathfrak{F}$, то $H/O_\omega(H) \cong (H/M)/(O_\omega(H)/M) = (H/M)/O_\omega(H/M) \in f(\omega')$. Кроме того, для любого $p \in \omega \cap \pi(H)$ выполняется $H/F_p(H) \in f(p)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ – ωd-локальная формация. *Теорема доказана.*

В.А. Ведерниковым в работе [8] введены в рассмотрение два важных вида ω-веерных формаций – ω-специальные и ω-центральные формации.

Определение 1.1.5. ([8], определение 6). Формация $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ называется *ω-специальной* или, коротко, *ωS-формацией*, если $\delta(p) = \mathfrak{E}_{(Z_p)'}\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и обозначается $\mathfrak{F} = \omega SF(f)$, т.е. $\omega SF(f) =$

$$(G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/O_{(Z_p)', Z_p}(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Направление ω-специальной формации обозначается через δ_2.

В случае, когда f является $\mathbb{P}F$-функцией, получают определение *специальной* формации

$$\mathfrak{F} = SF(f) = (G \in \mathfrak{E} \mid G/O_{(Z_p)', Z_p}(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)).$$

Определение 1.1.6. ([8], определение 7). Формация $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ называется *ω-центральной* или, коротко, *ωZ-формацией*, если $\delta(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и обозначается $\mathfrak{F} = \omega ZF(f)$, т.е. $\omega ZF(f) =$

$$= (G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_{cp}(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Направление ω-центральной формации обозначается через δ_3.

В случае, когда f является $\mathbb{P}F$-функцией, получают определение *центральной* формации

$$\mathfrak{F} = ZF(f) = (G \in \mathfrak{E} \mid G/F_{cp}(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)).$$

В следующей теореме установим взаимосвязь между ω-веерностью и веерностью непустой неединичной формации $\mathfrak{F}$ такой, что $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$.

Теорема 1.1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая неединичная формация и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. Формация $\mathfrak{F}$ является ω-веерной с направлением δ и ω-спутником f тогда и* *только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – веерная формация с направлением δ и спутником f_1 таким,что $f_1(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $f_1(p) = \varnothing$ для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \omega$. Такие ω-спутник f и спутник f_1 формации $\mathfrak{F}$ будем называть ω-равными.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть формация $\mathfrak{F}$ является ω-веерной с направлением δ и ω-спутником f. Тогда $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta) =$

$$= (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/G_{\delta(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\ ).$$

Рассмотрим $\mathbb{P}F$-функцию f_1 такую, что $f_1(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $f_1(p) = \varnothing$ для любого $p \in \mathbb{P} \setminus \omega$. Пусть

$$\mathfrak{F}_1 = \mathbb{P}F(f_1, \delta) = (\ H \in \mathfrak{E} \mid H/H_{\delta(p)} \in f_1(p) \text{ для любого } p \in \pi(H)\ ).$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Отметим, что по определению 1.1.1 $f(\omega') \neq \varnothing$. Поскольку $\mathfrak{F} \neq (1)$, то $\pi(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$ и согласно условию $\omega \neq \varnothing$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда G является ω-группой и, значит, $G/G_{\delta(p)} \in f(p) = f_1(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T – монолитическая группа с монолитом $M = T^{\mathfrak{F}}$. В силу леммы 1.1.4 можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi(M)$. Поскольку $T \in \mathfrak{F}_1$, то $T/T_{\delta(p)} \in f_1(p)$ и, значит, $f_1(p) \neq \varnothing$. Отсюда по определению f_1 следует, что $p \in \omega$ и $M \subseteq O_\omega(T)$. Поэтому $T/O_\omega(T) \cong (T/M)/(O_\omega(T)/M) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Кроме того, $T/T_{\delta(q)} \in f_1(q) = f(q)$ для любого $q \in \pi(T) = \omega \cap \pi(T)$. Тогда по определению 1.1.2 получаем $T \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Достаточность. Пусть теперь $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(g, \delta)$ – веерная формация с направлением δ. Рассмотрим ωF-функцию h такую, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$, $h(p) = g(p)$ для любого $p \in \omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \omega F(h, \delta)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ справедливо $G/G_{\delta(p)} \in g(p) = h(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда H – монолитическая группа с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Так как $H/O_\omega(H) \in h(\omega') = \mathfrak{F}$, то $M \subseteq O_\omega(H)$. Поскольку $H/M \in \mathfrak{F}$ и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, то H/M является ω-группой и, значит, H – ω-группа. Так как $H \in \mathfrak{H}$, то $H/H_{\delta(p)} \in h(p) = g(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(H) = \pi(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. *Теорема доказана.*

Следствие 1.1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая нееденичная формация и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. Формация $\mathfrak{F}$ является ω-полной (ω-локальной, ω-специальной, ω-центральной) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – полная (соответственно локальная, специальная, центральная) формация.*

Пусть ψ_1 и ψ_2 – произвольные ωF-функции ($\mathbb{P}F$-функции, $\mathbb{P}FR$-функции). Будем говорить, что $\psi_1 \leq \psi_2$, если $\psi_1(q) \subseteq \psi_2(q)$ для всех $q \in \omega \cup \{\omega'\}$ (для всех $q \in \mathbb{P}$). В соответствии с этим, можем считать, что всякое множество ωF-функций ($\mathbb{P}F$-функций, $\mathbb{P}FR$-функций) является частично упорядоченным.

Среди направлений δ ω-веерной формации таких, что $\delta_0 \leq \delta$, важное место занимают направления, удовлетворяющие равенству $\mathfrak{E}_{q'}\delta(q) = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$. Этому равенству удовлетворяют направления ω-полной, ω-локальной, ω-специальной, ω-центральной формаций, а также направления вида $\delta(q) = \mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{X}$ для любого $q \in \mathbb{P}$ и любой непустой формации Фиттинга $\mathfrak{X}$.

Определение 1.1.7. Направление δ ω-веерной формации назовем *главным* или, коротко, *p-направлением* (от англ. "principal"), если

$$\delta(q) = \mathfrak{E}_{q'}\delta(q) \text{ для любого } q \in \mathbb{P}.$$

В.А. Ведерников в работе [8] ввел в рассмотрение ряд важных видов направлений ω-веерных формаций.

Определение 1.1.8. ([8], определение 1). Направление δ ω-веерной формации называется:
a-направлением, если $Z_q \in \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$;
b-направлением, если $\delta(q)\mathfrak{N}_q = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$;
b_p-направлением, где $p \in \mathbb{P}$, если $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$;
r-направлением, если $\delta(q) = \mathfrak{E}_{(Z_q)'}\delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$;
s-направлением, если формация Фиттинга $\delta(q)$ q-разрешима
для любого $q \in \mathbb{P}$.

Пусть $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ – множество направлений ω-веерной формации $\mathfrak{F}$. $\mathbb{P}FR$-функция δ называется *$i_1 i_2 \ldots i_k$-направлением* ω-веерной формации $\mathfrak{F}$, если δ является i_j-направлением формации $\mathfrak{F}$ для любого $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Замечание 1.1.4. Из определения 1.1.8 следует, что всякое b-направление ω-веерной формации является a-направлением и b_p-направлением для любого

$p \in \mathbb{P}$; всякое r-направление является p-направлением.

Замечание 1.1.5. Отметим, что направление δ_0 ω-полной формации является ps-направлением, но не является ни a-, ни b-, ни r-направлением; направление δ_1 ω-локальной формации является bps-направлением, но не является r-направлением; направления δ_2 и δ_3 соответственно ω-специальной и ω-центральной формаций являются br-направлениями, но не являются s-направлениями.

Теорема 1.1.4. *Пусть δ – p-направление ω-веерной формации. Если $\mathfrak{F}$ – веерная формация с направлением δ, то $\mathfrak{F}$ является ω-веерной формацией с направлением δ для любого непустого множества простых чисел ω.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(f, \delta)$ – веерная формация с направлением δ, h – такая ωF-функция, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$, $h(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$, и $\mathfrak{H} = \omega F(h, \delta)$. Как и при доказательстве теоремы 1.1.3, легко проверить, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $H \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$ и H – группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда H – монолитическая группа с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Как и при доказательстве теоремы 1.1.3, $M \subseteq O_\omega(H)$. Поэтому $\pi(M) \subseteq \omega$ и $H/H_{\delta(p)} \in h(p) = f(p)$ для любого $p \in \pi(M)$. Пусть $q \in \pi(H) \setminus \pi(M)$ и $(H/M)_{\delta(q)} := T/M$. Поскольку $T/M \in \delta(q)$ и $M \in \mathfrak{E}_{q'}$, то $T \in \mathfrak{E}_{q'}\delta(q) = \delta(q)$. Тогда $H/H_{\delta(q)} \cong (H/M)/(H_{\delta(q)}/M) = (H/M)/(H/M)_{\delta(q)} \in f(q)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. *Теорема доказана.*

Поскольку направления δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 являются p-направлениями, то из теоремы 1.1.4 непосредственно вытекают результаты для полных, локальных, специальных и центральных формаций.

Следствие 1.1.2. *Если $\mathfrak{F}$ – полная (локальная, специальная, центральная) формация, то $\mathfrak{F}$ является ω-полной (соответственно ω-локальной, ω-специальной, ω-центральной) формацией для любого непустого множества простых чисел ω.*

В следующей теореме для произвольной непустой неединичной формации $\mathfrak{F}$ построим веерную формацию, содержащую $\mathfrak{F}$.

Теорема 1.1.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая неединичная формация, δ – $\mathbb{P}FR$-функция, $\pi_p = \cup_{H\in\mathfrak{F}}\pi(H/H_{\delta(p)})$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, f – такая $\mathbb{P}F$-функция, что для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ справедливо: $f(p) = \mathfrak{E}_{\pi_p}$, если $\pi_p \neq \varnothing$, и $f(p) = (1)$, если $\pi_p = \varnothing$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ содержится в веерной формации $\mathbb{P}F(f, \delta)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 := \mathbb{P}F(f, \delta)$, где f – $\mathbb{P}F$-функция, удовлетворяющая условию теоремы. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $p \in \pi(G)$. Проверим, что $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Пусть $\pi_p \neq \varnothing$. Тогда $f(p) = \mathfrak{E}_{\pi_p}$. Из $G \in \mathfrak{F}$ следует $\pi(G/G_{\delta(p)}) \subseteq \cup_{H\in\mathfrak{F}}\pi(H/H_{\delta(p)}) = \pi_p$. Это означает, что $G/G_{\delta(p)} \in \mathfrak{E}_{\pi_p} = f(p)$. Пусть $\pi_p = \varnothing$. Тогда для любой группы $H \in \mathfrak{F}$ имеем $\pi(H/H_{\delta((p)}) = \varnothing$ и, в частности, $\pi(G/G_{\delta(p)}) = \varnothing$. Следовательно, $G/G_{\delta(p)} = 1 \in (1) = f(p)$. Таким образом, $G \in \mathbb{P}F(f, \delta) = \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. *Теорема доказана.*

При исследовании ω-веерных формаций удобно использовать их ω-спутники. Так, например, ω-спутники g и h из леммы 1.1.4 применялись при доказательстве теорем 1.1.2 и 1.1.3. Рассмотрим некоторые важные виды ω-спутников ω-веерной формации.

Определение 1.1.9. ωF-функцию ($\mathbb{P}F$-функцию) f назовем *минимальным ω-спутником* (*спутником*) ω-веерной (веерной) формации $\mathfrak{F}$, если f является минимальным элементом множества всех ω-спутников (спутников) формации $\mathfrak{F}$.

Рассмотрим строение минимального ω-спутника ω-веерной формации с направлением δ, удовлетворяющим условию $\delta_0 \leq \delta$.

Пусть $\{\ f_i \mid i \in I\ \}$ – произвольный набор ωF-функций ($\mathbb{P}F$-функций). Обозначим через $\cap_{i\in I} f_i$ такую ωF-функцию ($\mathbb{P}F$-функцию) f, что $f(p) = \cap_{i\in I} f_i(p)$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$ (для всех $p \in \mathbb{P}$).

Лемма 1.1.5. *Пусть δ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция, $\mathfrak{F} = \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = \omega F(f_i, \delta)$ ($\mathfrak{F}_i = \mathbb{P}F(f_i, \delta)$), $i \in I$. Тогда $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ ($\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(f, \delta)$), где $f = \cap_{i\in I} f_i$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \omega F(f, \delta)$, где f – ωF-функция из заключения леммы. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}_i$ и, значит, $G/O_\omega(G) \in f_i(\omega')$, $i \in I$. Поэтому $G/O_\omega(G) \in \cap_{i\in I} f_i(\omega') = f(\omega')$. Так как для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ имеем $G/G_{\delta(p)} \in f_i(p)$, $i \in I$, то $G/G_{\delta(p)} \in \cap_{i\in I} f_i(p) = f(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Тогда $H/O_\omega(H) \in f(\omega') = \cap_{i\in I} f_i(\omega')$ и $H/H_{\delta(p)} \in f(p) = \cap_{i\in I} f_i(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(H)$. Отсюда следует, что $H/O_\omega(H) \in f_i(\omega')$ и $H/H_{\delta(p)} \in f_i(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(H)$, $i \in I$. Поэтому $H \in \mathfrak{F}_i$, $i \in I$ и, значит, $H \in \cap_{i\in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Для веерных формаций доказательство проводится аналогично. *Лемма доказана.*

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество групп. Обозначим через $\omega F(\mathfrak{X}, \delta)$ ω-веерную формацию с направлением δ, порожденную множеством $\mathfrak{X}$, т.е. $\omega F(\mathfrak{X}, \delta)$ – пересечение всех ω-веерных формаций с направлением δ, которые содержат $\mathfrak{X}$; аналогично, $\mathbb{P}F(\mathfrak{X}, \delta)$ – веерная формация, порожденная множеством $\mathfrak{X}$. При фиксированном δ для формаций $\omega F(\mathfrak{X}, \delta)$ и $\mathbb{P}F(\mathfrak{X}, \delta)$ будем также использовать следующие обозначения:

$\omega AF(\mathfrak{X})$ ($\omega LF(\mathfrak{X})$, $\omega SF(\mathfrak{X})$, $\omega ZF(\mathfrak{X})$) – ω-полная (соответственно ω-локальная, ω-специальная, ω-центральная) формация, порожденная множеством $\mathfrak{X}$;

$AF(\mathfrak{X})$ ($LF(\mathfrak{X})$, $SF(\mathfrak{X})$, $ZF(\mathfrak{X})$) – полная (соответственно локальная, специальная, центральная) формация, порожденная множеством $\mathfrak{X}$.

Теорема 1.1.6. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X}, \delta)$ – ω-веерная формация с направлением δ, где $\delta_0 \le \delta$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным ω-спутником f таким, что*

$$f(\omega') = form(\ G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ ),$$
$$f(p) = form(\ G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{X}\ ) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X}),$$
$$f(p) = \varnothing, \text{ если } p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X}).$$

Доказательство. Поскольку класс $\mathfrak{E}$ является ω-веерной формацией с направлением δ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}$, то формация $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X}, \delta)$ существует и, значит, множество L всех ω-спутников формации $\mathfrak{F}$ непусто. Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из L. Согласно лемме 1.1.5 справедливо $\mathfrak{F} = \omega F(f_1, \delta)$ и поэтому $f_1 \in L$. Тем самым установлено, что f_1 – единственный минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{F}$.

Пусть f – ωF-функция, описанная в заключении теоремы. Покажем, что $f = f_1$. Пусть $M \in \mathfrak{X}$. Тогда $M/O_\omega(M) \in f(\omega')$ и из $\pi(M) \subseteq \pi(\mathfrak{X})$ следует, что $M/M_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(M)$. Это означает, что $M \in \omega F(f, \delta)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \omega F(f, \delta)$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \omega F(\mathfrak{X}, \delta) \subseteq \omega F(f, \delta)$.

Покажем, что $f \leq f_1$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая группа $H \in \mathfrak{F}$, что $p \in \omega \cap \pi(H)$. Из равенства $\mathfrak{F} = \omega F(f_1, \delta)$ следует, что $H/H_{\delta(p)} \in f_1(p)$. Поэтому $f_1(p) \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $p \in \omega \cap \pi(G)$, то из $G \in \mathfrak{F} = \omega F(f_1, \delta)$ получаем $G/G_{\delta(p)} \in f_1(p)$. Пусть теперь $p \in (\omega \cap \pi(\mathfrak{X})) \setminus (\omega \cap \pi(G))$. Тогда $G \in \mathfrak{E}_{p'} = \delta_0(p) \subseteq \delta(p)$ и поэтому $G/G_{\delta(p)} \cong 1 \in f_1(p)$. Таким образом,

$$f(p) = form(\ G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{X}\ ) \subseteq f_1(p) \text{ для любого } p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X}).$$

Если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$, то $f(p) = \emptyset \subseteq f_1(p)$. Кроме того, из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ получаем $f(\omega') = form(\ G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ ) \subseteq f_1(\omega')$. Следовательно, $f \leq f_1$ и $\omega F(f, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$.

Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ и $f \in L$. Поскольку f_1 – минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, то $f \leq f_1$ влечет $f = f_1$. *Теорема доказана.*

Следствие 1.1.3. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(\mathfrak{X}, \delta)$ – веерная формация с направлением δ, где $\delta_0 \leq \delta$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным спутником f таким, что*

$$\begin{aligned} f(p)\ &= form(\ G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{X}\ ) \text{ для всех } p \in \pi(\mathfrak{X}), \\ f(p)\ &= \emptyset, \text{ если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{X}). \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\omega = \mathbb{P}$. Тогда $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. Согласно теореме 1.1.3 формация $\mathfrak{F}$ является ω-веерной с направлением δ. По теореме 1.1.6 $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным ω-спутником f_1. Пусть f – $\mathbb{P}F$-функция, описанная в заключении следствия. Тогда $f(p) = f_1(p)$ для всех $p \in \mathbb{P} = \omega$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(f, \delta)$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то для любого $p \in \pi(G) = \omega \cap \pi(G)$ справедливо $G/G_{\delta(p)} \in f_1(p) = f(p)$ и поэтому $G \in \mathbb{P}F(f, \delta)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathbb{P}F(f, \delta)$.

Пусть теперь $H \in \mathbb{P}F(f, \delta)$ и $p \in \pi(H) = \pi(H) \cap \omega$. Тогда $H/H_{\delta(p)} \in f(p) = f_1(p)$. Кроме того, из $H \in \mathfrak{E}_\omega$ получаем $H/O_\omega(H) \cong 1 \in f_1(\omega')$. Таким образом, $H \in \omega F(f_1, \delta) = \mathfrak{F}$ и $\mathbb{P}F(f, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(f, \delta)$, т.е. f – спутник формации $\mathfrak{F}$.

Предположим, что найдется такой спутник h формации $\mathfrak{F}$, что $f(q) \not\subseteq h(q)$ для некоторого $q \in \mathbb{P}$. Пусть h_1 – такая ωF-функция, что $h_1(p) = h(p)$ для всех

$p \in \omega$ и $h_1(\omega') = f_1(\omega')$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \omega F(h_1, \delta)$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\omega(G) \in f_1(\omega') = h_1(\omega')$ и для любого $p \in \omega \cap \pi(G) = \pi(G)$ справедливо $G/G_{\delta(p)} \in h(p) = h_1(p)$. Это означает, что $G \in \omega F(h_1, \delta)$ и $\mathfrak{F} \subseteq \omega F(h_1, \delta)$.

Пусть $L \in \omega F(h_1, \delta)$ и $p \in \pi(L)$. Тогда из $\pi(L) = \omega \cap \pi(L)$ следует, что $L/L_{\delta(p)} \in h_1(p) = h(p)$. Поэтому $L \in \mathbb{P}F(h, \delta) = \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \omega F(h_1, \delta)$. Поскольку f_1 – единственный минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, то $f_1(p) \subseteq h_1(p)$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$. Однако, $f_1(q) = f(q) \not\subseteq h(q) = h_1(q)$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что f – единственный минимальный спутник формации $\mathfrak{F}$. *Следствие доказано.*

Следствие 1.1.4. *Пусть f_i – минимальный ω-спутник (спутник) ω-веерной (веерной) формации $\mathfrak{F}_i$ с направлением δ, где $\delta_0 \leq \delta$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Тогда ввиду теоремы 1.1.6 $f_1(\omega') = form(\ G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1\ ) \subseteq form(\ G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2\ ) = f_2(\omega')$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F}_1)$. Тогда согласно теореме 1.1.6 $f_1(p) = form(\ G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{F}_1\ ) \subseteq form(\ G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{F}_2\ ) = f_2(p)$. Если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F}_1)$, то $f_1(p) = \emptyset \subseteq f_2(p)$. Тем самым установлено, что $f_1 \leq f_2$.

Достаточность. Пусть $f_1 \leq f_2$ и $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда по определению 1.1.2 $G/O_\omega(G) \in f_1(\omega') \subseteq f_2(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f_1(p) \subseteq f_2(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_2$ и поэтому $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. *Следствие доказано.*

Следствие 1.1.5. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда ω-полная (ω-специальная, ω-центральная) формация $\mathfrak{F} = \omega AF(\mathfrak{X})$ (соответственно $\mathfrak{F} = \omega SF(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F} = \omega ZF(\mathfrak{X})$) обладает единственным минимальным ω-спутником f таким, что*

$$f(\omega') = form(\ G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ ),$$

$$f(p) = \emptyset, \text{ если } p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X}),$$

$$f(p) = form(\ G/O_{p'}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$$

($f(p) = form(\ G/O_{(Z_p)', Z_p}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$, $f(p) = form(\ G/F_{cp}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ соответственно) для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F}$ является ω-веерной формацией с направлением δ_0, то по теореме 1.1.6 формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным ω-спутником f, причем $f(p) = form(\ G/O_{p'}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$.

Для ω-специальной и ω-центральной формаций рассуждения проводятся аналогично. *Следствие доказано.*

Следствие 1.1.6. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда полная (специальная, центральная) формация $\mathfrak{F} = AF(\mathfrak{X})$ (соответственно $\mathfrak{F} = SF(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F} = ZF(\mathfrak{X})$) обладает единственным минимальным спутником f таким, что*

$f(p)\ = \varnothing$, *если* $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{X})$,

$f(p)\ = form(\ G/O_{p'}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$

($f(p)\ = form(\ G/O_{(Z_p)',Z_p}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$, $f(p)\ = form(\ G/F_{cp}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *соответственно*) *для всех* $p \in \pi(\mathfrak{X})$.

Следствие 1.1.7. (Скиба, Шеметков [40], лемма 5). *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда ω-локальная формация $\mathfrak{F} = \omega LF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ω-спутником f таким, что*

$f(\omega') = form(\ G/O_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$,

$f(p) = form(\ G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *для всех* $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ *и*

$f(p) = \varnothing$, *если* $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

Следствие 1.1.8. (Шеметков, Скиба [50], теорема 8.3). *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда локальная формация $\mathfrak{F} = LF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным спутником f таким, что*

$f(p) = form(\ G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *для всех* $p \in \pi(\mathfrak{X})$ *и*

$f(p) = \varnothing$, *если* $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

Используя строение минимального ω-спутника ω-веерной формации, получим ряд свойств ω-веерных формаций.

Лемма 1.1.6. *Пусть δ – p-направление ω-веерной формации. Если формация $\mathfrak{F}$ является ω-веерной с направлением δ, то $\mathfrak{F}$ является $\{q\}$-веерной формацией с направлением δ для любого $q \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ и $q \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является $\{q\}$-веерной формацией с направлением δ. Пусть f_q – такая $\{q\}F$-функция, что $f_q(q) = f(q)$, $f_q(\{q\}') = \mathfrak{F}$, и $\mathfrak{F}_1 = \{q\}F(f_q, \delta)$. Покажем, что

$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_q(G) \in \mathfrak{F} = f_q(\{q\}')$ и в случае, когда $q \in \pi(G)$, имеем $G/G_{\delta(q)} \in f(q) = f_q(q)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H монолитична с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Ввиду леммы 1.1.4 можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Тогда $H/O_\omega(H) \cong (H/O_q(H))/(O_\omega(H)/O_q(H)) \in f_q(\{q\}') = \mathfrak{F} = f(\omega')$. Пусть $r \in \omega \cap \pi(H)$. Если $r = q$, то $H/H_{\delta(r)} \in f_r(r) = f(r)$. Пусть $r \neq q$. Из $H/O_q(H) \in \mathfrak{F}$ следует, что $M \subseteq O_q(H)$ и $M \in \mathfrak{E}_{r'}$. Пусть $(H/M)_{\delta(r)} := T/M$. Так как δ – p-направление, то $T \in \mathfrak{E}_{r'}\delta(r) = \delta(r)$ и поэтому $T = H_{\delta(r)}$. Отсюда получаем $H/H_{\delta(r)} \cong (H/M)/(H_{\delta(r)}/M) = (H/M)/(H/M)_{\delta(r)} \in f(r)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. *Лемма доказана.*

Теорема 1.1.7. *Пусть δ – ps-направление ω-веерной формации. Формация $\mathfrak{F}$ является ω-веерной с направлением δ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является $\{q\}$-веерной формацией с направлением δ для любого $q \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. *Необходимость* следует из леммы 1.1.6.

Достаточность. Пусть для любого $q \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ справедливо $\mathfrak{F} = \{q\}F(b_q, \delta)$ – $\{q\}$-веерная формация с направлением δ. В силу леммы 1.1.4 и теоремы 1.1.6 можем считать, что $b_q(\{q\}') = \mathfrak{F}$ и $b_q(q) = form(\ G/G_{\delta(q)} \mid G \in \mathfrak{F}\ )$ для любого $q \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Пусть b – такая ωF-функция, что $b(\omega') = \mathfrak{F}$, $b(q) = b_q(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$, $b(q) = \emptyset$ для всех $q \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F})$, и $\mathfrak{B} = \omega F(b, \delta)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = b(\omega')$ и $G/G_{\delta(q)} \in b_q(q) = b(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$.

Предположим, что $B \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{F}$ и B – группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда группа B монолитична с монолитом $R = B^{\mathfrak{F}}$. Пусть $q \in \pi(R)$. Поскольку $B/O_\omega(B) \in b(\omega') = \mathfrak{F}$, то $R \subseteq O_\omega(B)$ и $q \in \omega$. Так как $B/B_{\delta(q)} \in b(q)$, то $b(q) \neq \emptyset$ и, значит, $q \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $B/B_{\delta(q)} \in b(q) = b_q(q)$. Покажем, что $B/O_q(B) \in b_q(\{q\}')$. Если $R \not\subseteq O_q(B)$, то R является неабелевой qd-группой. Поскольку δ – s-направление, то $R \notin \delta(q)$ и, значит, $B_{\delta(q)} = 1$. Отсюда получаем $B \cong B/B_{\delta(q)} \in b(q) = b_q(q) \subseteq \mathfrak{F}$, что невозможно. Поэтому $R \subseteq O_q(B)$ и $B/O_q(B) \cong (B/R)/(O_q(B)/R) \in \mathfrak{F} = b_q(\{q\}')$. Таким образом, $B \in \{q\}F(b_q, \delta) = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. *Теорема доказана.*

Следствие 1.1.9. *Пусть ω – непустое множество простых чисел, $\omega_1 = \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ и δ – ps-направление ω-веерной формации. Формация $\mathfrak{F}$ является ω-веерной с направлением δ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является ω_1-веерной формацией с направлением δ.*

Доказательство. Согласно теореме 1.1.7 формация $\mathfrak{F}$ является ω-веерной формацией с направлением δ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – $\{q\}$-веерная формация с направлением δ для любого $q \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F}) = \omega_1 \cap \pi(\mathfrak{F})$, но это по теореме 1.1.7 выполняется тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – ω_1-веерная формация с направлением δ. *Следствие доказано.*

Поскольку направления δ_0 и δ_1 являются ps-направлениями, то из теоремы 1.1.7 непосредственно вытекают результаты для ω-полных и ω-локальных формаций.

Следствие 1.1.10. *Формация $\mathfrak{F}$ является ω-полной (ω-локальной) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является $\{q\}$-полной ($\{q\}$-локальной) формацией для любого $q \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$.*

В теории формаций конечных групп хорошо известно строение локальной формации:

$$\mathfrak{F} = LF(f) = \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap (\cap_{p\in\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p)),$$

где f – некоторый спутник формации $\mathfrak{F}$ (см., например, [60], теорема IV, 3.2). Описание строения композиционной формации было получено С.Ф. Каморниковым и Л.А. Шеметковым в работе [14]. Используя минимальный ω-спутник ω-веерной формации, изучим строение ω-веерной формации с направлением δ, удовлетворяющим условию $\delta_0 \leq \delta$.

Теорема 1.1.8. *Пусть f – ω-спутник ω-веерной формации $\mathfrak{F}$ с направлением δ, где $\delta_0 \leq \delta$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ имеет следующее строение*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{E}_\omega f(\omega') \cap (\cap_{p\in(\pi(\mathfrak{F})\cap\omega)}\delta(p)f(p)).$$

Доказательство. По условию $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$. Пусть

$$\mathfrak{H} := \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{E}_\omega f(\omega') \cap (\cap_{p\in(\pi(\mathfrak{F})\cap\omega)}\delta(p)f(p)).$$

Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и, значит, $G \in \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{F})}$. Так как по определению 1.1.2 $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$, то $G \in \mathfrak{E}_\omega f(\omega')$. Далее, из $G \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G) \cap \omega$. Поэтому $G \in \delta(p)f(p)$ для любого $p \in \pi(G) \cap \omega$. Пусть $q \in (\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega) \setminus \pi(G)$. Тогда ввиду $\delta_0 \leq \delta$ получаем $G \in \mathfrak{E}_{q'} \subseteq \delta(q)$. Пусть f_1 – минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Поскольку $q \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, то по теореме 1.1.6 $f_1(q) \neq \emptyset$. Так как f_1 – единственный минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, то $f_1(q) \subseteq f(q)$ и поэтому $f(q) \neq \emptyset$. Тогда $\delta(q) \subseteq \delta(q)f(q)$ и, значит, $G \in \delta(q)f(q)$ для любого $q \in (\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega) \setminus \pi(G)$. Следовательно, $G \in \cap_{p\in(\pi(\mathfrak{F})\cap\omega)}\delta(p)f(p)$. Тем самым установлено, что $G \in \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{E}_\omega f(\omega') \cap (\cap_{p\in(\pi(\mathfrak{F})\cap\omega)}\delta(p)f(p)) = \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Тогда $H \in \mathfrak{E}_\omega f(\omega')$ и $H/O_\omega(H) \in f(\omega')$. Пусть $p \in \pi(H) \cap \omega$. Из $H \in \mathfrak{H}$ имеем $H \in \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{F})}$. Следовательно, $\pi(H) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ а, значит, $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ и $H \in \delta(p)f(p)$. Поэтому $H/H_{\delta(p)} \in f(p)$. Таким образом, по определению 1.1.2 $H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. *Теорема доказана.*

Следствие 1.1.11. *Пусть f – спутник веерной формации $\mathfrak{F}$ с направлением δ, где $\delta_0 \leq \delta$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ имеет следующее строение*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap (\cap_{p\in\pi(\mathfrak{F})}\delta(p)f(p)).$$

А.Н. Скиба в книге [39] ввел в рассмотрение следующую конструкцию прямого разложения формаций.

Определение 1.1.10. ([39], глава 4). Пусть $\{\ \mathfrak{F}_i \mid i \in I\ \}$ – некоторая система непустых подформаций формации $\mathfrak{F}$ таких, что $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для любых $i \neq j$, $i, j \in I$. Говорят, что $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ – прямо разложимая формация, если каждая группа G из $\mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_t}$, где $A_{i_1} \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_{i_t} \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \ldots, i_t \in I$.

Ряд важных результатов о прямых разложениях локальных и ω-локальных формаций получен А.Н. Скибой (см., например, [39]). Исследованиями в данном направлении занимались также Н.Н. Воробьев, И.В. Близнец, Ю.А. Еловикова (см., например, [1], [10], [11], [32]). Используя описание строения минимального ω-спутника ω-веерной формации, исследуем свойства формаций $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, для ω-веерной формации $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ с bp-направлением δ.

Лемма 1.1.7. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – такие ω-веерные формации с bp-направлением δ, что $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1)$. Тогда $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) \cap \omega = \emptyset$.*

Доказательство. Пусть f_i – минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Предположим, что $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) \cap \omega \neq \emptyset$. Тогда найдется такое простое число p, что $p \in \pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) \cap \omega$. Поскольку $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega$, то $p \in \pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega$ и ввиду теоремы 1.1.6 $f_i(p) \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Тогда согласно лемме 6(1) [8] $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f_i(p) \subseteq \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Поэтому $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1)$. Противоречие. Следовательно, $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) \cap \omega = \emptyset$. *Лемма доказана.*

Теорема 1.1.9. *Пусть $\{ \mathfrak{F}_i \mid i \in I \}$ – некоторое множество непустых подформаций формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Если $\mathfrak{F}$ – ω-веерная формация с $\mathfrak{b}p$-направлением δ и ω-спутником f, то для любого $i \in I$ формация $\mathfrak{F}_i$ также является ω-веерной с направлением δ, причем $\mathfrak{F}_i$ обладает таким ω-спутником f_i, который имеет следующее строение:*

$$f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i,$$
$$f_i(p) = f(p) \text{ для любого } p \in \pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega,$$
$$f_i(p) = \emptyset, \text{ если } p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F}_i).$$

Доказательство. Пусть $i \in I$ и $\mathfrak{H}_i := \omega F(f_i, \delta)$, где f_i – ωF-функция, описанная в заключении теоремы. Покажем, что $\mathfrak{H}_i = \mathfrak{F}_i$.

Предположим, что $\mathfrak{H}_i \nsubseteq \mathfrak{F}_i$ и G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H}_i \setminus \mathfrak{F}_i$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}_i}$.

Проверим, что $\pi(R) \subseteq \omega$. Допустим, что $\pi(R) \nsubseteq \omega$. Тогда $R \nsubseteq O_\omega(G)$ и поэтому $O_\omega(G) = 1$. Из $G \in \mathfrak{H}_i$ следует $G \cong G/O_\omega(G) \in f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i$. Получили противоречие. Следовательно, $\pi(R) \subseteq \omega$.

Установим, что $\pi(R) \subseteq \pi(\mathfrak{F}_i)$. Пусть $p \in \pi(R)$. Тогда $p \in \pi(G) \cap \omega$ и ввиду $G \in \mathfrak{H}_i$ имеем $G/G_{\delta(p)} \in f_i(p)$. Это означает, что $f_i(p) \neq \emptyset$, и в силу строения функции f_i получаем, что $p \in \pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega$. Тем самым установлено, что $\pi(R) \subseteq \pi(\mathfrak{F}_i)$.

Покажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Так как $R = G^{\mathfrak{F}_i}$, то $G/R \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку $\pi(R) \subseteq \omega$, то $R \subseteq O_\omega(G)$ и $G/O_\omega(G) \cong (G/R)/(O_\omega(G)/R) \in \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.1.4 можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Таким образом, $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$. Из $G/R \in \mathfrak{F}$, $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f_i(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(R)$ по лемме 2(3) [8] получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Согласно определению 1.1.10 найдутся такие $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$, что $G = G_{i_1} \times G_{i_2} \times \ldots \times G_{i_t}$, где $G_{i_j} \in \mathfrak{F}_{i_j}$, $j = 1, 2, \ldots, t$. Так как G – монолитическая группа, то существует такое число $n \in \{1, 2, \ldots, t\}$, что $G = G_{i_n} \in \mathfrak{F}_{i_n}$.

Покажем, что $\mathfrak{F}_{i_n} = \mathfrak{F}_i$. Действительно, так как $\pi(R) \subseteq \pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega$ и $\pi(R) \subseteq \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F}_{i_n})$, то $\pi(R) \subseteq \pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_{i_n}) \cap \omega$. Если $\mathfrak{F}_i \neq \mathfrak{F}_{i_n}$, то по определению 1.1.10 $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_{i_n} = (1)$ и согласно лемме 1.1.7 $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_{i_n}) \cap \omega = \emptyset$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{F}_{i_n} = \mathfrak{F}_i$ и, значит, $G \in \mathfrak{F}_i$. Противоречие. Тем самым доказано, что $\mathfrak{H}_i \subseteq \mathfrak{F}_i$.

Допустим, что $\mathfrak{F}_i \not\subseteq \mathfrak{H}_i$ и G_1 – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_i \setminus \mathfrak{H}_i$. Тогда G_1 – монолитическая группа с монолитом $R_1 = (G_1)^{\mathfrak{H}_i}$. Предположим, $\pi(R_1) \cap \omega = \emptyset$. Тогда $O_\omega(G_1) = 1$ и $G_1/O_\omega(G_1) \cong G_1 \in \mathfrak{F}_i = f_i(\omega')$. Поскольку $R_1 \subseteq O_{\omega'}(G_1)$, то $G_1/O_{\omega'}(G_1) \cong (G_1/R_1)/(O_{\omega'}(G_1)/R_1) \in \mathfrak{H}_i$. Согласно лемме 2(2) [8] $G_1 \in \mathfrak{H}_i$, что невозможно. Следовательно, $\pi(R_1) \cap \ \omega \neq \emptyset$. Пусть $p \in \pi(R_1) \cap \omega$. Тогда $p \in \pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega$. Поскольку $G_1 \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, то $G_1/(G_1)_{\delta(p)} \in f(p) = f_i(p)$. Так как $R_1 = (G_1)^{\mathfrak{H}_i}$, то $G_1/R_1 \in \mathfrak{H}_i$. Кроме того, $G_1/O_\omega(G_1) \in \mathfrak{F}_i = f_i(\omega')$. Следовательно, по лемме 2(3) [8] $G \in \mathfrak{H}_i$, что противоречит выбору G. Таким образом, $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}_i$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{H}_i$ – ω-веерная формация с направлением δ и f_i – ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. *Теорема доказана.*

Следствие 1.1.12. *Пусть* $\{ \ \mathfrak{F}_i \mid i \in I \ \}$ *– некоторое множество непустых подформаций формации* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. *Если* $\mathfrak{F}$ *– веерная формация с* bp*-направлением* δ *и спутником* f, *то для любого* $i \in I$ *формация* $\mathfrak{F}_i$ *также является веерной с направлением* δ, *причем* $\mathfrak{F}_i$ *обладает таким спутником* f_i, *который имеет следующее строение*:

$$f_i(p) = f(p) \ \textit{для любого} \ p \in \pi(\mathfrak{F}_i),$$
$$f_i(p) = \emptyset, \ \textit{если} \ p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}_i).$$

Среди ω-спутников ω-веерной формации $\mathfrak{F}$ большую роль играют внутренние ω-спутники, т.е. такие ω-спутники, все значения которых являются подформациями формации $\mathfrak{F}$. Из леммы 1.1.4 следует, что всякая ω-веерная формация обладает по крайней мере одним внутренним ω-спутником. В частности, из строения минимального ω-спутника f ω-веерной формации $\mathfrak{F}$ вытекает, что f является внутренним ω-спутником $\mathfrak{F}$. В.А. Ведерников в работе [8] установил, что ω-веерная формация $\mathfrak{F}$ с bp-направлением δ таким, что $\delta \leq \delta_3$, обладает единственным максимальным внутренним ω-спутником, а также получил описание его строения ([8], теорема 6).

Л.А. Шеметков и А.Н. Скиба в книге [50] ввели в рассмотрение полувнутренний композиционный экран композиционной формации и получили описание его строения (см. [50], § 15). Следуя [50], введем понятие полувнутреннего ω-спутника ω-веерной формации.

Определение 1.1.11. ω-спутник f ω-веерной формации $\mathfrak{F}$ назовем *полувнутренним ω-спутником*, если из $f(p) \neq \mathfrak{E}$ следует, что $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$. Аналогично, f – *полувнутренний спутник* веерной формации $\mathfrak{F}$, если из $f(p) \neq \mathfrak{E}$ следует, что $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.

Минимальный ω-спутник ω-веерной формации является ее минимальным полувнутренним ω-спутником. Исследуем строение максимального полувнутреннего ω-спутника ω-веерной формации с $b_q p$-направлением, где q – некоторое простое число из ω. Отметим, что *максимальный полувнутренний* ω-спутник (спутник) ω-веерной (веерной) формации $\mathfrak{F}$ есть максимальный элемент множества всех полувнутренних ω-спутников (спутников) формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 1.1.10. *Пусть $q \in \omega$, $\mathfrak{F}$ – ω-веерная формация с $b_q p$-направлением δ. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным полувнутренним ω-спутником f таким, что $f(r) = h(r)$ для всех $r \in \{\omega'\} \cup (\omega \setminus \{q\})$ и $f(q) = \mathfrak{N}_q h(q)$, где h – произвольный полувнутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Ввиду леммы 1.1.4 ω-веерная формация $\mathfrak{F}$ обладает внутренними ω-спутниками. Поскольку всякий внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$ является полувнутренним, то множество всех полувнутренних ω-спутников формации $\mathfrak{F}$ непусто. Пусть h – произвольный полувнутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Так как δ является b_q-направлением, то по лемме 5(2) [8] формация $\mathfrak{F}$ обладает ω-спутником f таким, что $f(q) = \mathfrak{N}_q h(q)$ и $f(r) = h(r)$ для всех $r \in \{\omega'\} \cup (\omega \setminus \{q\})$.

Покажем, что f является полувнутренним ω-спутником формации $\mathfrak{F}$. Действительно, так как h – полувнутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, то для любого $r \in \{\omega'\} \cup \omega$ либо $h(r) = \mathfrak{E}$, либо $h(r) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, в силу строения f для всех $r \in \{\omega'\} \cup (\omega \setminus \{q\})$ если $f(r) \neq \mathfrak{E}$, то $f(r) \subseteq \mathfrak{F}$. Далее, пусть $r = q$. Если $h(q) = \mathfrak{E}$, то $f(q) = \mathfrak{N}_q h(q) = \mathfrak{N}_q \mathfrak{E} = \mathfrak{E}$. Пусть $h(q) \neq \mathfrak{E}$. Тогда согласно определению 1.1.11 $h(q) \subseteq \mathfrak{F}$. Покажем, что в этом случае $f(q) \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что $f(q) \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G – группа наименьшего порядка из $f(q) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G является монолитической группой с монолитом $M = G^{\mathfrak{F}}$. Покажем, что $G/O_q(G) \in \mathfrak{F}$. Если $O_q(G) = 1$, то из $G \in f(q) = \mathfrak{N}_q h(q)$ следует, что $G \in h(q)$, и ввиду $h(q) \subseteq \mathfrak{F}$ получаем $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $O_q(G) \neq 1$. Тогда $M \subseteq O_q(G)$ и, значит, $G/O_q(G) \cong (G/M)/(O_q(G)/M) \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $G/O_q(G) \in \mathfrak{F}$. Установим, что $G/G_{\delta(q)} \in h(q)$. Поскольку $G \in f(q)$, то $G/G_{\delta(p)} \in f(q) = \mathfrak{N}_q h(q)$. Это означает, что $(G/G_{\delta(q)})/O_q(G/G_{\delta(p)}) \in h(q)$. Согласно лемме 5(1) [8] $O_q(G/G_{\delta(q)}) = 1$. Поэтому $G/G_{\delta(q)} \in h(q)$. Так как δ является p-направлением, то из $q \in \omega$, $G/O_q(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\delta(q)} \in h(q)$ по лемме 2(1) [8] получаем $G \in \omega F(h, \delta) = \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $f(q) \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что f является полувнутренним ω-спутником формации $\mathfrak{F}$.

Из строения ω-спутника f вытекает, что $h \leq f$ для любого полувнутреннего ω-спутника h формации $\mathfrak{F}$. Поэтому f – единственный максимальный полувнутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. *Теорема доказана.*

В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, из теоремы 1.1.10 непосредственно получаем следующее утверждение для веерных формаций.

Следствие 1.1.13. *Пусть $q \in \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$ – веерная формация с $b_q p$-направлением δ. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным полувнутренним спутником f таким, что $f(r) = h(r)$ для всех $r \in \mathbb{P} \setminus \{q\}$ и $f(q) = \mathfrak{N}_q h(q)$, где h – произвольный полувнутренний спутник формации $\mathfrak{F}$.*

Следствие 1.1.14. *Пусть h_1 и h_2 – произвольные полувнутренние ω-спутники (спутники) ω-веерной (веерной) формации $\mathfrak{F}$ с $b_q p$-направлением δ, где $q \in \omega$ ($q \in \mathbb{P}$), G – группа. Тогда и только тогда $G/G_{\delta(q)} \in h_1(q)$, когда $G/G_{\delta(q)} \in h_2(q)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $G/G_{\delta(q)} \in h_1(q)$. Согласно теореме 1.1.10 формация $\mathfrak{F}$ обладает максимальным полувнутренним ω-спутником f таким, что $f(q) = \mathfrak{N}_q h_1(q) = \mathfrak{N}_q h_2(q)$. Если $h_2(q) = \mathfrak{E}$, то утверждение верно. Пусть $h_2(q) \neq \mathfrak{E}$. Поскольку $h_1(q) \subseteq \mathfrak{N}_q h_1(q)$, то $G/G_{\delta(q)} \in \mathfrak{N}_q h_1(q) = \mathfrak{N}_q h_2(q)$. Так как по лемме 5(1) [8] $O_q(G/G_{\delta(q)}) = 1$, то $G/G_{\delta(q)} \in h_2(q)$.

Достаточность доказывается аналогично. *Следствие доказано.*

Основные результаты параграфа 1.1 опубликованы в работе [84]. Теорема 1.1.5 опубликована в [126], теоремы 1.1.8 и 1.1.9 представлены в [108], теорема 1.1.10 опубликована в [124]. Все результаты работ [84], [108], [124] получены в неразделимом соавторстве.

§ 1.2. Свойства f_ω-центральных и f_ω-эксцентральных главных факторов конечных групп

С целью применения свойств ω-веерной формации $\mathfrak{F}$ к исследованию вопросов дополняемости в конечной группе ее $\mathfrak{F}$-корадикала в данном параграфе введем в рассмотрение понятия f_ω-центрального и f_ω-эксцентрального главных факторов групп и изучим их основные свойства.

Определение 1.2.1. Пусть f – ωF-функция и $p \in \omega$. Главный pd-фактор A/B группы G назовем *f_p-центральным* (*f_p-эксцентральным*) в G, если $G/C_G(A/B) \in f(p)$ (соответственно $G/C_G(A/B) \notin f(p)$). Главный ωd-фактор A/B группы G назовем *f_ω-центральным* (*f_ω-эксцентральным*) в G, если $G/C_G(A/B) \in f(p)$ для любого простого числа $p \in \omega \cap \pi(A/B)$ (соответственно $G/C_G(A/B) \notin f(p)$ для некоторого простого числа $p \in \omega \cap \pi(A/B)$).

Таким образом, главный ωd-фактор A/B группы G f_ω-централен (f_ω-эксцентрален) в G, если A/B f_p-централен в G для любого $p \in \omega \cap \pi(A/B)$ (соответственно f_p-эксцентрален в G для некоторого простого числа $p \in \omega \cap \pi(A/B)$).

Лемма 1.2.1. *Пусть $\mathfrak{L} = \omega LF(f)$ – ω-локальная формация с внутренним ω-спутником f и $\mathfrak{F}$ – класс всех групп G таких, что $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и G обладает главным рядом, в котором каждый ωd-фактор является f_ω-центральным в G. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{L}$. Тогда $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Пусть A/B – главный ωd-фактор группы G. Покажем, что A/B f_ω-централен в G. Пусть $q \in \omega \cap \pi(A/B)$. Согласно лемме 3.9 [47] $F_q(G) \subseteq C_G(A/B)$. Так как $f(q)$ является формацией, то $G/C_G(A/B) \cong (G/F_q(G))/(C_G(A/B)/F_q(G)) \in f(q)$. Таким образом, $G/C_G(A/B) \in f(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(A/B)$. Поэтому A/B является f_ω-центральным главным фактором группы G и $G \in \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$.

Предположим, что $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$. Пусть $H \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{L}$ и группа H наименьшего порядка с таким свойством. Тогда H – монолитическая группа с монолитом M. В силу леммы 1.1.4(2) можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{L}$. Так как $H \in \mathfrak{F}$, то по определению класса $\mathfrak{F}$ имеем $H/O_\omega(H) \in f(\omega') = \mathfrak{L}$. Поэтому $O_\omega(H) \neq 1$. Следовательно, M – ω-группа, причем ввиду выбора группы H справедливо $H/M \in \mathfrak{L}$.

Пусть $p \in \pi(M)$. Покажем, что $H/F_p(H) \in f(p)$. Так как $H \in \mathfrak{F}$, то группа H обладает главным рядом, в котором каждый pd-фактор является f_p-центральным в H. Поэтому $H/C_H(K/L) \in f(p)$ для любого главного pd-фактора K/L группы H. Так как $f(p)$ является формацией, то $H/D \in f(p)$, где D – пересечение централизаторов в H всех главных pd-факторов группы H. По теореме 4.1 [47] $D = F_p(H)$. Следовательно, $H/F_p(H) \in f(p)$ или, иначе, $H/H_{\delta_1(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \pi(M) = \pi(M) \cap \omega$. Тогда по лемме 2(3) [8] имеем $H \in \mathfrak{L}$. Получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}$. *Лемма доказана.*

Лемма 1.2.2. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega LF(f)$ – ω-локальная формация с внутренним ω-спутником f. Если для некоторого простого числа $p \in \omega$ силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то группа G не имеет главных f_ω-центральных pd-факторов ниже $G^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Предположим, что существует такое простое число $p \in \omega$, что силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, но группа G имеет по крайней мере один главный f_ω-центральный pd-фактор ниже $G^{\mathfrak{F}}$, причем G – группа наименьшего порядка с такими свойствами. Тогда $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$ и $f(p) \neq \varnothing$.

I. Покажем, что G – монолитическая группа. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Согласно лемме 1.2(1) [47] $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N$. Пусть P – абелева силовская p-подгруппа группы $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда PN/N – абелева силовская p-подгруппа группы $G^{\mathfrak{F}}N/N$. Это означает, что группа G/N удовлетворяет условию леммы. Поскольку $|G/N| < |G|$, то ввиду выбора группы G для G/N выполняется заключение леммы, т.е. $G^{\mathfrak{F}}N/N$ не содержит (G/N)-главных f_ω-центральных pd-факторов. Следовательно, $N \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и $N \cong N/1$ – единственный f_ω-центральный G-главный pd-фактор в $G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G/C_G(N) \in f(p)$ и f – внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, то $G/C_G(N) \in \mathfrak{F}$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C_G(N)$. Ввиду $N \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ получаем $N \subseteq Z(G^{\mathfrak{F}})$. Это означает, что N – элементарная абелева p-группа. Если M – минимальная нормальная подгруппа группы G, отличная от N, то, как и выше, получим, что $M \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и M – элементарная абелева p-группа. Тогда группа $G^{\mathfrak{F}}/N$ содержит (G/N)-главный f_ω-центральный pd-фактор MN/N. Противоречие. Следовательно, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, N – p-группа, причем $N/1$ – единственный главный f_ω-центральный pd-фактор группы G ниже $G^{\mathfrak{F}}$.

II. Покажем, что $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_p$. Предварительно установим, что группа $G^{\mathfrak{F}}$ p-разрешима. Пусть T – p-разрешимый корадикал группы $G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что $T \neq 1$. Так как подгруппа T характеристична в $G^{\mathfrak{F}}$, а $G^{\mathfrak{F}}$ характеристична в G, то T является нормальной подгруппой группы G. Ввиду монолитичности группы G справедливо $N \subseteq T$ и, значит, $Z_p \in K(T)$. С другой стороны, $P \cap T$ – абелева силовская p-подгруппа группы T. Тогда по теореме 5.11(1) [47] группа T не имеет композиционных факторов порядка p. Получили противоречие. Следовательно, $T = 1$ и поэтому группа $G^{\mathfrak{F}}$ p-разрешима.

По следствию 5.11.1 [47] имеем $l_p(G^{\mathfrak{F}}) \leq 1$. Если $l_p(G^{\mathfrak{F}}) = 0$, то $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{E}_{p'}$, что невозможно. Таким образом, $l_p(G^{\mathfrak{F}}) = 1$ и ввиду монолитичности группы G подгруппа P – нормальная подгруппа группы $G^{\mathfrak{F}}$.

Покажем, что $G^{\mathfrak{F}} = P$. По лемме 5.10 [47] имеем $P = [G^{\mathfrak{F}}, P] \times (P \cap Z(G^{\mathfrak{F}}))$. Если $[G^{\mathfrak{F}}, P] \neq 1$, то $N \subseteq [G^{\mathfrak{F}}, P]$ и, значит, $[G^{\mathfrak{F}}, P] \cap (P \cap Z(G^{\mathfrak{F}})) \neq 1$. Противоречие. Следовательно, $[G^{\mathfrak{F}}, P] = 1$ и $P \cap Z(G^{\mathfrak{F}}) = P$. Тогда $P \subseteq Z(G^{\mathfrak{F}})$. Ввиду монолитичности группы G получаем $G^{\mathfrak{F}} = P$ и поэтому $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_p$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq O_p(G)$ и, значит, $G/O_p(G) \in \mathfrak{F}$.

III. Пусть D – пересечение централизаторов всех главных f_p-центральных pd-факторов группы G. Тогда $G/D \in f(p)$. Так как $G/P \in \mathfrak{F}$, то по лемме 1.2.1 все главные pd-факторы группы G выше P являются f_p-центральными в G. Поскольку $N \cong N/1$ – единственный f_p-центральный главный pd-фактор группы G ниже P и $P \leq C_G(N)$, то $P \leq D$. Тогда факторгруппа D/P совпадет с пересечением централизаторов всех главных pd-факторов группы G/P. Следовательно, по теореме 4.1 [47] группа D/P является p-нильпотентной.

Пусть R/P – нормальное p-дополнение в группе D/P. Предположим, что группа R является p-нильпотентной. Тогда из монолитичности группы G следует, что R, а значит, и D является p-группой. Отсюда следует, что $D \leq F_p(G)$ и поэтому $G/F_p(G) \in f(p)$. Тогда по лемме 2 [8] имеем $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, R не p-нильпотентна. Поскольку P – абелева нормальная силовская p-подгруппа группы R, то по лемме 5.10 [47] $P = [P, R] \times (P \cap Z(R))$. Так как $N \leq P \cap Z(R)$, то из монолитичности группы G следует, что $[P, R] = 1$ и, значит, группа R p-нильпотентна. Получили противоречие. *Лемма доказана.*

Замечание 1.2.1. Доказательство леммы 1.2.2 основано на лемме 1.2.1, в которой получена новая характеризация ω-локальной формации. В книге [66], применяя другие определения $\mathfrak{F}$-центральности и $\mathfrak{F}$-эксцентральности, получен результат, подобный лемме 1.2.2 (см. [66], теорема 3.3.3).

Лемма 1.2.3. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega LF(f)$ – ω-локальная формация Фиттинга с максимальным внутренним ω-спутником f и группа $G = A_1A_2$, где A_1 и A_2 – субнормальные подгруппы группы G. Если $A_i^{\mathfrak{F}}$ для некоторого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ не содержит A_i-главных f_ω-центральных pd-факторов для любого $i = 1, 2$, то $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов.*

Доказательство. Допустим, что лемма не верна, и G – группа, удовлетворяющая условию, но не удовлетворяющая заключению леммы, причем для группы G с такими свойствами натуральное число $t = |G| + |G : A_1| + |G : A_2|$ является наименьшим.

Если $t = 3$, то $G = 1$ и $G^{\mathfrak{F}} = 1$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов, что противоречит выбору группы G.

Пусть $t > 3$, $G \notin \mathfrak{F}$. Если $G = A_1$, то по условию леммы $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов. Противоречие. Следовательно, $G \neq A_i$, $i = 1, 2$. Тогда A_i – нетривиальная субнормальная подгруппа группы G, $i = 1, 2$ и, значит, G – непростая группа.

Покажем, что группа G является монолитической. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $G/N = (A_1N/N)(A_2N/N)$ и согласно лемме 1.2 [47] $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N$ и $(A_iN/N)^{\mathfrak{F}} = A_i^{\mathfrak{F}}N/N$, $i = 1, 2$, то по индукции $G^{\mathfrak{F}}N/N$ не содержит (G/N)-главных f_ω-центральных pd-факторов.

Допустим, что $G^{\mathfrak{F}} \cap N = 1$. Тогда $G^{\mathfrak{F}}N/N \cong G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap N \cong G^{\mathfrak{F}}$ и, значит, $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов, что противоречит выбору группы G. Поэтому каждая минимальная нормальная подгруппа группы G содержится в $G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда следует, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как группа $G^{\mathfrak{F}}/N$ не содержит (G/N)-главных f_ω-центральных pd-факторов, то ввиду выбора группы G получаем, что $N/1$ – главный f_ω-центральный pd-фактор группы G. Тогда $G/C_G(N) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \leq C_G(N)$ и, значит, $N \leq Z(G^{\mathfrak{F}})$. Поэтому N является элементарной абелевой p-группой.

Так как $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга и $G = A_1A_2 = A_2A_1$, то по лемме 2 [13] $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}}A_2^{\mathfrak{F}}$. Покажем, что $A_i^{\mathfrak{F}} \neq 1$ и $A_i^{\mathfrak{F}} \cap N = 1$, $i = 1, 2$. Действительно, из $N \leq G^{\mathfrak{F}}$ следует, что хотя бы одна из подгрупп $A_1^{\mathfrak{F}}$ или $A_2^{\mathfrak{F}}$ не является единичной. Пусть $A_1^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Обозначим $A_1^{\mathfrak{F}} \cap N$ через D. Предположим, что $D \neq 1$. Так как формация $\mathfrak{F}$ S_n-замкнута, то по лемме 1 [89] (см. также следствие 3.3.5) формация $f(p)$ также является S_n-замкнутой. Поскольку $A_1C_G(N)/C_G(N)$ субнормальна в $G/C_G(N)$ и $G/C_G(N) \in f(p)$, то $A_1C_G(N)/C_G(N) \in f(p)$. Тогда $A_1C_G(N)/C_G(N) \cong A_1/A_1 \cap C_G(N) = A_1/C_{A_1}(N) \in f(p)$. Так как $C_{A_1}(N) \leq C_{A_1}(D)$ и $f(p)$ – формация, то $A_1/C_{A_1}(D) \in f(p)$. Отсюда следует, что A_1 содержит главный f_ω-центральный pd-фактор ниже $A_1^{\mathfrak{F}}$. Получили противоречие с условием леммы. Поэтому $D = 1$. Допустим, что $A_2^{\mathfrak{F}} = 1$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}}$ и, значит, $N \leq A_1^{\mathfrak{F}}$. Противоречие. Следовательно, $A_2^{\mathfrak{F}} \neq 1$ и $A_2^{\mathfrak{F}} \cap N = 1$. Таким образом, $A_i^{\mathfrak{F}} \neq 1$ и $A_i^{\mathfrak{F}} \cap N = 1$, $i = 1, 2$.

Допустим, что A_1 – нормальная подгруппа группы G. Так как подгруппа $A_1^{\mathfrak{F}}$ характеристична в A_1, то $A_1^{\mathfrak{F}}$ нормальна в G. Поскольку N – монолит группы G, то из $A_1^{\mathfrak{F}} \neq 1$ получаем $N \subseteq A_1^{\mathfrak{F}}$ и, значит, $A_1^{\mathfrak{F}} \cap N \neq 1$. Противоречие. Следовательно, A_i не является нормальной подгруппой группы G, $i = 1, 2$. Пусть $|A_2| \leq |A_1|$. Согласно теореме 7.1 [47] в группе G существует элемент x такой, что $A_1^x \neq A_1$, $A_1^x \leq N_G(A_1)$, $A_1 \leq N_G(A_1^x)$. Тогда $A_1A_1^x = A_1^xA_1$. Кроме того, подгруппа A_1^x субнормальна в G.

Пусть $T := A_1A_1^x$. По лемме 1.44 [18] $T \neq G$. Так как A_1 не содержит главных f_ω-центральных pd-факторов ниже $A_1^{\mathfrak{F}}$, то и A_1^x не содержит главных f_ω-центральных pd-факторов ниже $(A_1^x)^{\mathfrak{F}}$. Так как подгруппы A_1 и A_1^x субнормальны в группе G, то A_1 и A_1^x субнормальны в группе T. Поскольку $|T| + |T : A_1| + |T : A_1^x| < t$, то по индукции подгруппа $T^{\mathfrak{F}}$ не содержит T-главных f_ω-центральных pd-факторов.

Согласно теореме 7.5 [47] подгруппа T субнормальна в G. Так как $G = TA_2$

и $|G| + |G : T| + |G : A_2| < t$, то по индукции $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов. Получили противоречие. *Лемма доказана.*

Лемма 1.2.4. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega LF(f)$ – ω-локальная формация Фиттинга с максимальным внутренним ω-спутником f и группа $G = A_1A_2\cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $A_i^{\mathfrak{F}}$ для некоторого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ не содержит A_i-главных f_ω-центральных pd-факторов для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} A_2^{\mathfrak{F}} \cdots A_n^{\mathfrak{F}}$ и $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов.*

Доказательство. Применим индукцию по параметру n. Если $n = 1$, то $G = A_1$ и по условию леммы $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов. Пусть $n = 2$. Тогда $G = A_1A_2$ и по лемме 1.2.3 $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов для некоторого $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Согласно лемме 2 [13] $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} A_2^{\mathfrak{F}}$.

Пусть $n > 2$. Предположим, что для числа множителей A_i меньшего чем n утверждение верно. Рассмотрим группу $G = A_1A_2\cdots A_n$. Пусть $H := A_1A_2\cdots A_{n-1}$. Тогда подгруппа H субнормальна в группе G. По предположению индукции $H^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} A_2^{\mathfrak{F}} \cdots A_{n-1}^{\mathfrak{F}}$ и $H^{\mathfrak{F}}$ не содержит H-главных f_ω-центральных pd-факторов для некоторого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Так как $G = HA_n$, подгруппы $H^{\mathfrak{F}}$ и $A_n^{\mathfrak{F}}$ для некоторого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ не содержат соответственно H-главных и A_n-главных f_ω-центральных pd-факторов, то по лемме 1.2.3 $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов. Согласно лемме 2 [13] $G^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}} A_n^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} A_2^{\mathfrak{F}} \cdots A_n^{\mathfrak{F}}$. *Лемма доказана.*

Теорема 1.2.1. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega LF(f)$ – ω-локальная формация Фиттинга с максимальным внутренним ω-спутником f и группа $G = A_1A_2\cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если для некоторого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ силовская p-подгруппа группы $A_i^{\mathfrak{F}}$ является абелевой для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} A_2^{\mathfrak{F}} \cdots A_n^{\mathfrak{F}}$ и $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов.*

Доказательство. Пусть для некоторого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ силовская p-подгруппа группы $A_i^{\mathfrak{F}}$ является абелевой для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда по лемме 1.2.2 $A_i^{\mathfrak{F}}$ не содержит A_i-главных f_ω-центральных pd-факторов для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Согласно лемме 1.2.4 $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} A_2^{\mathfrak{F}} \cdots A_n^{\mathfrak{F}}$ и $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов. *Теорема доказана.*

Определение 1.2.2. ([47], определение 8.1). Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая непустая формация. Максимальная подгруппа M группы G называется:

1) $\mathfrak{F}$-*нормальной*, если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$;

2) $\mathfrak{F}$-*абнормальной*, если $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Максимальная $(G - H)$-цепь $H = H_m < H_{m-1} < \ldots < H_1 < H_0 = G$ называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной* ($\mathfrak{F}$-*абнормальной*), если для любого $i \geq 1$ подгруппа H_i $\mathfrak{F}$-нормальна (соответственно $\mathfrak{F}$-абнормальна) в H_{i-1}.

Подгруппа H группы G называется:

1) $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если существует хотя бы одна $\mathfrak{F}$-субнормальная максимальная $(G - H)$-цепь;

2) $\mathfrak{F}$-*абнормальной*, если любая максимальная $(G - H)$-цепь $\mathfrak{F}$-абнормальна.

Пусть A/B – секция и H – подгруппа группы G. Говорят, что подгруппа H покрывает (изолирует) секцию A/B, если $A \subseteq HB$ (соответственно $H \cap A \subseteq B$) (см., например, [47], с. 249).

Лемма 1.2.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация с внутренним ω-спутником f, M – максимальная подгруппа ωd-группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если M $\mathfrak{F}$-нормальна в G, то M покрывает каждый f_ω-эксцентральный главный ωd-фактор группы G;*

2) *если M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G, то M покрывает каждый f_ω-центральный главный ωd-фактор группы G.*

Доказательство. Так как G – ωd-группа, то в G существует хотя бы один главный ωd-фактор H/K. Пусть M не покрывает главный ωd-фактор H/K группы G. Тогда $K \leq M \cap H$ и $G = MH$. Пусть $M_1 := Core_G(M)$ и $C := C_G(H/K)$. По лемме 8.1 [47] M не покрывает главный ωd-фактор HM_1/M_1, G-изоморфный H/K. Поэтому $C = C_G(HM_1/M_1) \supseteq KM_1 = M_1$.

1) Предположим, что M $\mathfrak{F}$-нормальна в G. По определению 1.2.2 $G^{\mathfrak{F}} \leq M_1$ и $G/M_1 \in \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 1.2.1 главный ωd-фактор HM_1/M_1 группы G/M_1

является f_ω-центральным в G/M_1, а, значит, и в группе G. Следовательно, для любого $p \in \omega \cap \pi(HM_1/M_1)$ имеем $G/C \in f(p)$ и, значит, главный ωd-фактор H/K f_ω-централен в группе G. Отсюда следует, что если M $\mathfrak{F}$-нормальна в G, то M покрывает каждый f_ω-эксцентральный главный ωd-фактор группы G.

2) Предположим, что M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G и главный ωd-фактор H/K группы G f_ω-централен в G. Тогда по определению 1.2.2 $G = MG^{\mathfrak{F}}$. Так как по лемме 1.2(1) [47] $(G/M_1)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}M_1/M_1 \not\subseteq M/M_1$, то по определению 1.2.2 M/M_1 является $\mathfrak{F}$-абнормальной подгруппой группы G/M_1. Так как главные факторы H/K и HM_1/M_1 группы G являются G-изоморфными, то главный ωd-фактор HM_1/M_1 также является f_ω-центральным в G, а, значит, и в группе G/M_1. Так как $G = MH$, то $G/M_1 = (M/M_1)(HM_1/M_1)$. Поэтому M/M_1 не покрывает главный ωd-фактор HM_1/M_1 группы G/M_1.

Допустим, что $M_1 \neq 1$. Так как $|G/M_1| < |G|$, то по индукции M/M_1 покрывает каждый f_ω-центральный главный ωd-фактор группы G/M_1. Получили противоречие. Пусть $M_1 = 1$ и $C \neq 1$. Так как $C \triangleleft G$, то $C \not\subseteq M$ и поэтому $G = MC = MH$. Пусть $D := M \cap C$. Тогда $D \triangleleft M$ и для любых $c \in C$, $h \in H$ имеем $ch = hc$ и, значит, $D^h = D$. Поэтому $N_G(D) \geq MH = G$. Следовательно, $D \triangleleft G$. Так как $M_1 = 1$, то $D = 1$, $K = 1$ и $G = [C]M$. Тогда H является минимальной нормальной подгруппой группы G. Пусть $p \in \omega \cap \pi(H)$. Так как H f_ω-центральна в G, то $G/C \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что группа H абелева. Тогда H является элементарной абелевой p-группой и $M \cap H = 1$. Так как $H \leq C$, то по модулярному тождеству получим $C = H(M \cap C) = H$. Поскольку $C = H \leq O_\omega(G)$, то по лемме 1.1.4(2) $G/O_\omega(G) \cong (G/C)/(O_\omega(G)/C) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Так как $G/H \in \mathfrak{F}$, то по лемме 1.2.1 G/H обладает главным рядом, все ωd-факторы которого f_ω-центральны. Поскольку H f_ω-центральна в G, то группа G обладает главным рядом, все ωd-факторы которого f_ω-центральны в G. Так как $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$, то по лемме 1.2.1 $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = 1$ и $G = G^{\mathfrak{F}}M = M$. Получили противоречие.

Пусть H – неабелева группа. Тогда $H \cap C = 1$. Поскольку $M \cong G/C \in \mathfrak{F}$ и $G/H \cong M/M \cap H \in \mathfrak{F}$, то $G \cong G/H \cap C \in \mathfrak{F}$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = 1$ и $G = M$. Противоречие.

Пусть $M_1 = 1$ и $C = 1$. Тогда из f_ω-центральности H в группе G ввиду

$p \in \omega \cap \pi(H)$ получаем $G \cong G/C \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = 1$ и $G = M$. Противоречие. *Лемма доказана.*

Лемма 1.2.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация с внутренним ω-спутником f и R/K является f_ω-эксцентральным главным фактором группы G. Тогда $R \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}}$ является f_ω-эксцентральным главным фактором группы G, G-изоморфным R/K, причем любая максимальная подгруппа группы G, не покрывающая R/K, не покрывает $R \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Так как R/K является f_ω-эксцентральным главным фактором группы G, то в силу определения 1.2.1 R/K является ωd-фактором группы G. Покажем, что $R \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}}$ – f_ω-эксцентральный главный фактор группы G, G-изоморфный R/K. Поскольку $RG^{\mathfrak{F}}/KG^{\mathfrak{F}} = RKG^{\mathfrak{F}}/KG^{\mathfrak{F}} \cong R/R \cap KG^{\mathfrak{F}} = R/K(R \cap G^{\mathfrak{F}})$ и R/K – главный фактор группы G, то либо $K(R \cap G^{\mathfrak{F}}) = K$, либо $K(R \cap G^{\mathfrak{F}}) = R$.

Допустим, что $K(R \cap G^{\mathfrak{F}}) = K$. Тогда $RG^{\mathfrak{F}}/KG^{\mathfrak{F}} \cong R/K$ и поэтому $RG^{\mathfrak{F}}/KG^{\mathfrak{F}}$ – f_ω-эксцентральный главный ωd-фактор группы G. С другой стороны, так как $G/KG^{\mathfrak{F}} \cong (G/G^{\mathfrak{F}})/(KG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F}$, то по лемме 1.2.1 главный ωd-фактор $(RG^{\mathfrak{F}}/KG^{\mathfrak{F}})/(KG^{\mathfrak{F}}/KG^{\mathfrak{F}})$ группы $G/KG^{\mathfrak{F}}$ f_ω-централен в $G/KG^{\mathfrak{F}}$. Это означает, что и главный фактор $RG^{\mathfrak{F}}/KG^{\mathfrak{F}}$ группы G f_ω-централен в G. Получили противоречие.

Следовательно, $K(R \cap G^{\mathfrak{F}}) = R$. Отсюда вытекает, что $R/K = (R \cap G^{\mathfrak{F}})K/K \cong R \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}}$ – f_ω-эксцентральный главный фактор группы G.

Пусть M – максимальная подгруппа группы G, не покрывающая R/K. Предположим, что M покрывает $R \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}}$. Тогда $R \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq M(K \cap G^{\mathfrak{F}}) \subseteq MK$ и ввиду $K(R \cap G^{\mathfrak{F}}) = R$ получаем $R = (R \cap G^{\mathfrak{F}})K \subseteq MK$, что невозможно. Следовательно, M не покрывает $R \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}}$. *Лемма доказана.*

Все результаты параграфа 1.2 опубликованы в работе [95] и получены в неразделимом соавторстве с В.А. Ведерниковым.

§ 1.3. Применение ω-локальных формаций к исследованию дополняемости корадикалов в конечных группах

Рассмотрим применения ω-локальной формации $\mathfrak{F} = \omega LF(f)$ с внутренним ω-спутником f к доказательству существования ω-дополнений в группе G к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$. Кратко приведем и обоснуем терминологию, применяющуюся в дальнейшем. В силу леммы 1.1.3 любая формация $\mathfrak{M}$ такая, что $\pi(\mathfrak{M})\cap\omega = \emptyset$ является ω-веерной формацией с любым направлением δ и, в частности, является ω-локальной формацией. Поэтому в дальнейшем для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ будем считать, что $\omega_1 := \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega \neq \emptyset$. Согласно следствию 1.1.9 $\mathfrak{F}$ является ω_1-локальной формацией. В связи с этим в дальнейшем для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ будем считать, что $\emptyset \neq \omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Ввиду леммы 1.1.4 можем считать, что f является внутренним ω-спутником ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ и $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Отметим, что по следствию 1.1.1 ω-локальная формация $\mathfrak{F}$ при $\omega = \pi(\mathfrak{F})$ является локальной формацией.

Предварительно докажем следующие две леммы.

Лемма 1.3.1. *Пусть N – субнормальная подгруппа группы G, $K \trianglelefteq N$ и $K \leq \Phi(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Phi(N) \leq \Phi(G)$;

2) *если N/K π-замкнута, то и N π-замкнута, в частности, $F_p(N/K) = F_p(N)/K$*;

3) *если N/K π-разложима, то и N π-разложима*;

4) *если N/K нильпотентна, то и N – нильпотентная группа.*

Доказательство. 1) Если $N = G$, то утверждение верно. Пусть $N < G$ и G – контрпример минимального порядка. Так как N – субнормальная подгруппа группы G, то в группе G существует собственная нормальная подгруппа L, содержащая N. Тогда $N \trianglelefteq\trianglelefteq L$ и по индукции $\Phi(N) \leq \Phi(L)$. Так как $L \trianglelefteq G$, то по теореме 3.22(1) [18] $\Phi(L) \leq \Phi(G)$. Следовательно, $\Phi(N) \leq \Phi(G)$.

2) Пусть N/K π-замкнута. Применим индукцию по $|G|$. Пусть $\Phi(G) := \Phi$ и $M := \Phi_{\pi(K)}$. Тогда $M \trianglelefteq G$ и $K \leq M \leq \Phi$. Рассмотрим факторгруппу G/M. По теореме 3.22 [18] $\Phi(G/M) = \Phi/M$, $NM/M \trianglelefteq\trianglelefteq G/M$, $KM/M \trianglelefteq NM/M$ и $KM/M \leq \Phi/M$. Так как $(NM/M)/(KM/M) \cong NM/KM \cong N/N\cap KM = N/K(N\cap M) \cong (N/K)/(K(N\cap M)/K)$, то $(NM/M)/(KM/M)$ π-замкнута. В силу $|G/M| < |G|$ по индукции получим, что группа NM/M π-замкнута. Поскольку класс $\mathfrak{R}$ всех π-замкнутых групп является классом Фиттинга, то $NM/M \leq T/M := (G/M)_{\mathfrak{R}}$. Так как $T \trianglelefteq G$, $M \trianglelefteq G$, $M \leq \Phi$ и T/M π-замкнута,

то по лемме 4.4 [47] группа T, а, значит, и NM π-замкнута. Поэтому N π-замкнута.

3) Так как N/K π-разложима, то N/K π-замкнута и N/K π'-замкнута. Тогда по пункту 2) группа N π-замкнута и группа N π'-замкнута и, значит, N π-разложима.

4) Пусть $\pi := \pi(N/K)$. Так как N/K – нильпотентная π-группа, то по пункту 3) N π-разложима и N p-разложима для любого $p \in \pi$. Тогда $N = N_\pi \times N_{\pi'}$, причем N_π нильпотентна. Так как N/K – π-группа, то $N_{\pi'} \leq K$. Поэтому $N_{\pi'}$ нильпотентна и, значит, N – нильпотентная группа. *Лемма доказана.*

Лемма 1.3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, N – субнормальная подгруппа группы G и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) *если $N/N \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$;*

2) *если $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$ и $N \cap \Phi(G)$ является ω-группой, то $N \in \mathfrak{F}$;*

3) *если $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $N = F \times Q$, где F – π-группа, Q – π'-группа, $Q \subseteq N \cap \Phi(G) = \Phi$, $F \cap \Phi = A \times B$, где A – нормальная в N ω-подгруппа, B – нормальная в N ω'-подгруппа, причем $N/BQ \cong F/B \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. 1) Пусть $D = N \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. Так как по условию $N/D \in \mathfrak{F}$, то N/D является π-группой и, значит, N/D π-разложима. Так как $N/N \cap \Phi(G) \cong (N/D)/(N \cap \Phi(G)/D)$, то из π-разложимости группы N/D следует π-разложимость группы $N/N \cap \Phi(G)$. Тогда по лемме 1.3.1(3) группа N π-разложима и $N = N_\pi \times N_{\pi'}$. Пусть $F := N_\pi$ и $Q := N_{\pi'}$. Поскольку N/D является π-группой и FD/D является S_π-подгруппой группы N/D, то $N/D = FD/D$ и, значит, $N = FD$. Отсюда следует, что $Q \leq D \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. Как отмечено выше, в силу следствия 1.1.9 можем считать, что $\omega \subseteq \pi$. Поскольку Q является π'-группой и Q – ω-группа, то $Q = 1$. Тогда $N = F$ – π-группа.

Пусть f – внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.1.4 можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Поскольку $N/D \in \mathfrak{F}$ и $D \leq N \cap O_\omega(G) = O_\omega(N)$, то $N/O_\omega(N) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Пусть $p \in \pi(N/D) \cap \omega$. Так как $N/D \in \mathfrak{F}$, то по определению ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ получим $(N/D)/F_p(N/D) \in f(p)$. По лемме 1.3.1(2) $F_p(N/D) = F_p(N)/D$. Следовательно, $N/F_p(N) \in f(p)$. Отсюда получаем, что каждый главный pd-фактор группы N f_p-централен в N, а выше D каждый главный ωd-фактор группы N f_ω-централен в N. Пусть $q \in \pi(D) \setminus \pi(N/D)$.

Так как группа N/D q-разложима, то по лемме 1.3.1(3) группа N q-разложима. Пусть $N = L \times D_q$, где L – q'-группа. Тогда каждый главный q-фактор группы N централен в N и, значит, f_q-централен. Следовательно, каждый главный ωd-фактор группы N f_ω-централен в N и $N/O_\omega(N) \in f(\omega')$. Тогда по лемме 1.2.1 $N \in \mathfrak{F}$.

2) Так как $N \cap \Phi(G)$ является ω-группой, то $N \cap \Phi(G) \leq O_\omega(G)$ и $N \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G) = N \cap \Phi(G)$. Следовательно, $N/N \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$ и по пункту 1) $N \in \mathfrak{F}$.

3) Пусть $N/\Phi \in \mathfrak{F}$, где $\Phi := N \cap \Phi(G)$. Тогда по лемме 1.3.1(3) $N = F \times Q$, где $F = N_\pi$ – нормальная S_π-подгруппа группы N, $Q = N_{\pi'}$ – нормальная $S_{\pi'}$-подгруппа группы N. Заметим, что $N = F\Phi$, $F \cap \Phi = \Phi_\pi$ и $\Phi = \Phi_\pi \times \Phi_{\pi'} = \Phi_\omega \times \Phi_{\omega'}$. Тогда $N/\Phi \cong F/\Phi_\pi \in \mathfrak{F}$ и $\Phi_\pi = F \cap \Phi = F \cap (N \cap \Phi(G)) = F \cap \Phi(G)$, $F \lhd\lhd G$ и $\Phi_\pi = A \times B$, $A = \Phi_\omega, B = F \cap \Phi_{\omega'}$.

Как и при доказательстве пункта 1), нетрудно проверить, что каждый главный ωd-фактор группы F f_ω-централен в F. Тогда и каждый главный ωd-фактор группы F/B является f_ω-центральным в F/B. Так как $F/\Phi_\pi \cong (F/B)/(\Phi_\pi/B) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$ и $\Phi_\pi/B \leq O_\omega(F/B)$, то по лемме 1.2.1 $F/B \in \mathfrak{F}$. *Лемма доказана.*

В следующей теореме для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установим, при каком условии всякое добавление к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$ группы G в любом расширении Γ группы G является его ω-дополнением.

Теорема 1.3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, G – группа с абелевым $\mathfrak{F}$-корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$, Γ – расширение группы G. Если H – добавление к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ, то H является ω-дополнением к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ.*

Доказательство. Пусть $\pi(\mathfrak{F}) := \pi$, H – добавление к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ. Согласно лемме 11.1 [47] $\Gamma = HG^{\mathfrak{F}}$ и $H \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(H)$.

Пусть $N := H \cap G$. Тогда, применяя модулярное тождество, получим $G = \Gamma \cap G = HG^{\mathfrak{F}} \cap G = (H \cap G)G^{\mathfrak{F}} = NG^{\mathfrak{F}}$. Таким образом, $G = NG^{\mathfrak{F}}$ и, значит, $G/G^{\mathfrak{F}} = NG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cong N/N \cap G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Так как G – нормальная подгруппа группы Γ и $N = H \cap G$, то N нормальна в H. Поскольку $G^{\mathfrak{F}}$ характеристична в G, то $G^{\mathfrak{F}} \lhd \Gamma$.

Пусть $\Phi_1 := N \cap G^{\mathfrak{F}}$. Тогда $\Phi_1 = N \cap G^{\mathfrak{F}} = H \cap G \cap G^{\mathfrak{F}} = H \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(H)$

и $N/\Phi_1 \in \mathfrak{F}$. Пусть $\Phi := N \cap \Phi(H)$. Так как $\Phi_1 \leq N \cap \Phi(H) = \Phi$, то $N/\Phi \in \mathfrak{F}$ и группа H с нормальной подгруппой N удовлетворяют условию леммы 1.3.2(3). Тогда по лемме 1.3.2(3) $N = F \times Q$, где F – π-группа, Q – π'-группа, $Q \subseteq N \cap \Phi(H) = \Phi$, $F \cap \Phi = A \times B$, где $A = \Phi_\omega$ – нормальная в N ω-подгруппа, $B = F \cap \Phi_{\omega'}$ – нормальная в N ω'-подгруппа, причем $N/BQ \cong F/B \in \mathfrak{F}$.

Допустим, что $p \in \pi(\Phi_1) \cap \omega$. Так как Φ_1 нормальна в N и ввиду $\Phi_1 \subseteq \Phi(H)$ Φ_1 нильпотентна, то силовская p-подгруппа группы Φ_1 нормальна в N и, значит, в N существует минимальная нормальная p-подгруппа. Пусть $\Phi_1 = C \times D$, где C – нормальная в Φ_1 ω-подгруппа, D – нормальная в Φ_1 ω'-подгруппа, причем $C \leq A$. Так как $\Phi_1 \triangleleft N$ и C характеристична в Φ_1, то $C \triangleleft N$. Пусть L – минимальная нормальная p-подгруппа группы N, содержащаяся в C. Поскольку $L \leq \Phi_1 \leq G^{\mathfrak{F}}$, то в силу абелевости $G^{\mathfrak{F}}$ имеем $L \triangleleft G^{\mathfrak{F}}$ и, значит, $L \triangleleft G = NG^{\mathfrak{F}}$. Отсюда получаем, что L – минимальная нормальная подгруппа группы G, причем $L \leq C \leq A$. Так как $N/BQ \in \mathfrak{F}$ и LBQ/BQ – минимальная нормальная подгруппа группы N/BQ, то по лемме 1.2.1 $(N/BQ)/C_{N/BQ}(LBQ/BQ) \in f(p)$, где f – внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Поскольку $C_{N/BQ}(LBQ/BQ) = C_N(LBQ/BQ)/BQ$, то ввиду N-изоморфизма групп LBQ/BQ и L получаем, что $C_N(L) = C_N(LBQ/BQ)$. Тогда $(N/BQ)/(C_N(L)/BQ) \in f(p)$ и $N/C_N(L) \in f(p)$. Так как $G = NG^{\mathfrak{F}}$ и $G^{\mathfrak{F}} \leq C_G(L)$, то $G = NC_G(L)$ и поэтому $G/C_G(L) \cong N/N \cap C_G(L) = N/C_N(L) \in f(p)$. Это означает, что $L/1$ – f-центральный главный p-фактор группы G ниже $G^{\mathfrak{F}}$. С другой стороны, по лемме 1.2.2 группа G не имеет f_ω-центральных главных pd-факторов ниже $G^{\mathfrak{F}}$ для $p \in \omega$. Получили противоречие.

Следовательно, $|\Phi_1| = |H \cap G^{\mathfrak{F}}|$ – ω'-число и поэтому H – ω-дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ. *Теорема доказана.*

Следствие 1.3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация. Если $\mathfrak{F}$-корадикал группы G абелев и является ω-группой, то он дополняем в любом расширении группы G.*

Следствие 1.3.2. (Шеметков [47], теорема 11.7). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G абелев, то для любого расширения Γ группы G справедливо следующее утверждение: каждое добавление к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ является $\pi(\mathfrak{F})$-дополнением.*

Следствие 1.3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация такая, что $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Если $\mathfrak{F}$-корадикал группы G абелев, то он дополняем в любом расширении группы G.*

В следующих теоремах проведем исследование вопроса существования ω-дополнений и дополнений к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$ в любом расширении группы G в зависимости от существования в $G^{\mathfrak{F}}$ абелевых силовских подгрупп.

Теорема 1.3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, G – группа, ω_1 – множество всех тех простых чисел $p \in \omega$, для которых $G^{\mathfrak{F}}$ обладает абелевой силовской p-подгруппой. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ обладает ω_1-дополнением в любом расширении группы G.*

Доказательство. Пусть Γ – расширение группы G. Покажем, что $G^{\mathfrak{F}}$ обладает ω_1-дополнением в Γ. Доказательство проведем индукцией по порядку $G^{\mathfrak{F}}$. Пусть R – $\mathfrak{N}_{\omega_1}$-корадикал группы $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда по теореме 5.11(1) [18] $R = (G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}_{\omega_1}} = G^{\mathfrak{N}_{\omega_1}\mathfrak{F}}$. По теореме 1 [8] $\mathfrak{H} := \mathfrak{N}_{\omega_1}\mathfrak{F}$ является ω-локальной формацией и $R = G^{\mathfrak{H}}$. Возможны два случая.

I. Пусть $R \subset G^{\mathfrak{F}}$. Тогда по индукции R обладает ω_1-дополнением L в группе Γ. Это означает, что $\Gamma = RL$ и $|R \cap L|$ – ω_1'-число. По модулярному тождеству $G = R(G \cap L)$ и $G^{\mathfrak{F}} = R(G^{\mathfrak{F}} \cap L)$. Тогда $G/R = R(G \cap L)/R \cong G \cap L/R \cap L$ и $G^{\mathfrak{F}}/R = R(G^{\mathfrak{F}} \cap L)/R \cong G^{\mathfrak{F}} \cap L/R \cap L$ – абелева ω_1-группа. Так как $\Gamma/R = RL/R \cong L/R \cap L$, то группа $L/R \cap L$ является расширением группы $G \cap L/R \cap L$ и $(G \cap L/R \cap L)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}} \cap L/R \cap L$. Согласно следствию 1.3.1 группа $G^{\mathfrak{F}} \cap L/R \cap L$ обладает дополнением $H/R \cap L$ в $L/R \cap L$. Так как $L/R \cap L = (G^{\mathfrak{F}} \cap L/R \cap L)(H/R \cap L)$, то $L = (G^{\mathfrak{F}} \cap L)H$ и поэтому $\Gamma = RL = R(G^{\mathfrak{F}} \cap L)H = G^{\mathfrak{F}}H$. Поскольку $|(G^{\mathfrak{F}} \cap L/R \cap L) \cap (H/R \cap L)| = 1$, то $G^{\mathfrak{F}} \cap L \cap H/R \cap L = R \cap L/R \cap L$. Поэтому $G^{\mathfrak{F}} \cap H = R \cap L$ и, значит, $|G^{\mathfrak{F}} \cap H|$ – ω_1'-число. Тем самым установлено, что H – ω_1-дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в группе Γ.

II. Пусть $R = G^{\mathfrak{F}}$. Покажем, что в этом случае $G^{\mathfrak{F}}$ также ω_1-дополняема в Γ. Ввиду следствия 11.4.1 [47] достаточно установить, что для любого $p \in \omega_1$ подгруппа $G^{\mathfrak{F}} \cap \Gamma_p$ абелева и дополняема в Γ_p.

Пусть $p \in \omega_1$. Согласно условию $G^{\mathfrak{F}}$ обладает абелевой силовской p-подгруппой $G^{\mathfrak{F}} \cap \Gamma_p$. Так как $G^{\mathfrak{F}}/O^p(G^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_{\omega_1}$, то $R = (G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}_{\omega_1}} \subseteq O^p(G^{\mathfrak{F}})$ и ввиду $R = G^{\mathfrak{F}}$ получаем $O^p(G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{F}}$. Поскольку $G^{\mathfrak{F}}\Gamma_p/G^{\mathfrak{F}} \cong \Gamma_p/\Gamma_p \cap G^{\mathfrak{F}} \in$

$\mathfrak{N}_p$, то согласно теореме 11.1 [47] $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в группе $G^{\mathfrak{F}}\Gamma_p$ и, значит, ω_1-дополняема в $G^{\mathfrak{F}}\Gamma_p$. Следовательно, по лемме 11.7 [47] $G^{\mathfrak{F}} \cap \Gamma_p$ дополняема в Γ_p.

Таким образом, для любого $p \in \omega_1$ подгруппа $G^{\mathfrak{F}}\cap\Gamma_p$ абелева и дополняема в Γ_p. Тогда по следствию 11.4.1 [47] $G^{\mathfrak{F}}$ обладает ω_1-дополнением в Γ. *Теорема доказана.*

Следствие 1.3.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, G – группа. Если $\pi(G^{\mathfrak{F}}) \subseteq \omega$ и все силовские подгруппы из $G^{\mathfrak{F}}$ абелевы, то $G^{\mathfrak{F}}$ обладает дополнением в любом расширении группы G.*

Доказательство. Пусть $\pi(G^{\mathfrak{F}}) \subseteq \omega$ и все силовские подгруппы из $G^{\mathfrak{F}}$ абелевы. Согласно теореме 1.3.2 $G^{\mathfrak{F}}$ обладает $\pi(G^{\mathfrak{F}})$-дополнением в любом расширении группы G. Пусть $\pi(G^{\mathfrak{F}}) := \omega_1$, Γ – расширение группы G и H – ω_1-дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ. Тогда $\Gamma = G^{\mathfrak{F}}H$ и $|H \cap G^{\mathfrak{F}}|$ – ω_1'-число. Поскольку $G^{\mathfrak{F}}$ – ω_1-группа, то $|H \cap G^{\mathfrak{F}}| = 1$. Следовательно, H является дополнением к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ. *Следствие доказано.*

Следствие 1.3.5. (Шеметков [47], теорема 11.8). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа, ω_1 – множество всех тех простых чисел $p \in \pi(\mathfrak{F})$, для которых $G^{\mathfrak{F}}$ обладает абелевой силовской p-подгруппой. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ обладает ω_1-дополнением в любом расширении группы G.*

Теорема 1.3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация,* Γ *– расширение группы G, $\omega_1 = \{p \in \mathbb{P} \mid p$ делит $(|\Gamma : G^{\mathfrak{F}}|, |G^{\mathfrak{F}}|)\}$. Если $\omega_1 \subseteq \omega$ и для любого $p \in \omega_1$ силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то $G^{\mathfrak{F}}$ обладает дополнением в* Γ.

Доказательство. Пусть $\omega_1 \subseteq \omega$ и для любого $p \in \omega_1$ силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева. Покажем, что $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в Γ. Если $\omega_1 = \emptyset$, то $(|\Gamma : G^{\mathfrak{F}}|, |G^{\mathfrak{F}}|) = 1$ и по теореме Шура $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в Γ.

Пусть $\omega_1 \neq \emptyset$ и ω_2 – множество всех тех простых чисел $p \in \omega$, для которых $G^{\mathfrak{F}}$ обладает абелевой силовской p-подгруппой. Согласно теореме 1.3.2 $G^{\mathfrak{F}}$ обладает ω_2-дополнением в группе Γ. Поскольку $\omega_1 \subseteq \omega_2$, то $G^{\mathfrak{F}}$ ω_1-дополняема в Γ. Тогда существует такое добавление H к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ, которое является ω_1-дополнением. Это означает, что $\Gamma = G^{\mathfrak{F}}H$, $\pi(G^{\mathfrak{F}} \cap H) \subseteq \omega_1'$ и ввиду леммы 11.2 [47] $\pi(H) = \pi(\Gamma/G^{\mathfrak{F}})$.

Покажем, что H является дополнением к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ. Действительно, для любого $q \in \pi(G^{\mathfrak{F}} \cap H)$ число q делит $(|H|, |G^{\mathfrak{F}}|)$. Так как $\pi(H) = \pi(\Gamma/G^{\mathfrak{F}})$, то q делит $(|\Gamma : G^{\mathfrak{F}}|, |G^{\mathfrak{F}}|)$ и поэтому $q \in \omega_1$. Таким образом, $\pi(G^{\mathfrak{F}} \cap H) \subseteq \omega_1 \cap \omega_1'$. Следовательно, $|G^{\mathfrak{F}} \cap H| = 1$. Тем самым установлено, что H является дополнением к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ. *Теорема доказана.*

Следствие 1.3.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация. Если для любого простого числа $p \in \omega$, делящего $|G : G^{\mathfrak{F}}|$, силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G.*

Следствие 1.3.7. (Шеметков [47], теорема 11.9). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, Γ – расширение группы G. Пусть любое простое число p, делящее $(|\Gamma : G^{\mathfrak{F}}|, |G^{\mathfrak{F}}|)$, входит в $\pi(\mathfrak{F})$, причем силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ обладает дополнением в Γ.*

Следствие 1.3.8. (Шеметков [47], следствие 11.9.1). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Если для любого простого числа p, делящего $|G : G^{\mathfrak{F}}|$, силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G.*

Замечание 1.3.1. Теоремы 1.3.1 – 1.3.3 представляют результаты, подобные (не равносильные) результатам Л.А. Шеметкова из [78] (см. [78], теоремы 4, 5, следствие теоремы 5), в основе доказательства которых лежит понятие малого централизатора главного фактора группы.

Теорема 1.3.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, Γ – расширение группы G, ω_1 – множество всех тех простых чисел $q \in \omega$, для которых силовская q-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ является циклической. Если $\omega_1 \neq \emptyset$, то в Γ существует ω_1-дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$, нормализующее некоторую силовскую p-подгруппу из $G^{\mathfrak{F}}$, где p – наименьшее число из ω_1.*

Доказательство. Пусть $\omega_1 \neq \emptyset$ и ω_2 – множество всех тех простых чисел $q \in \omega$, для которых $G^{\mathfrak{F}}$ обладает абелевой силовской q-подгруппой. Так как $\omega_1 \subseteq \omega_2$, то согласно теореме 1.3.2 получаем следующее свойство:

$$\text{подгруппа } G^{\mathfrak{F}} \text{ обладает } \omega_1\text{-дополнением в } \Gamma. \tag{1.3.1}$$

Пусть p – наименьшее простое число из ω_1, P – силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$, $N := N_\Gamma(P)$ и $N_1 := N \cap G^{\mathfrak{F}}$. Покажем, что N_1 ω_1-дополняема в N. Ввиду следствия 11.4.1 [47] достаточно проверить, что для любого простого числа $q \in \omega_1$ подгруппа $N_q \cap N_1$ абелева и дополняема в N_q.

I. Пусть $q = p$. Так как $P \subseteq N$ и $P \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то $P \subseteq N \cap G^{\mathfrak{F}} = N_1$ и, значит, P – силовская p-подгруппа группы N_1. Пусть N_p – силовская p-подгруппа группы N такая, что $P \subseteq N_p$, Γ_p – силовская p-подгруппа группы Γ, содержащая N_p. Из (1.3.1) по лемме 11.7 [47] следует, что P обладает дополнением в Γ_p. Пусть H_1 – дополнение к P в Γ_p. Тогда $\Gamma_p = PH_1$ и $|P \cap H_1| = 1$. Так как $N_p \subseteq \Gamma_p$, то $N_p = \Gamma_p \cap N = PH_1 \cap N = P(H_1 \cap N)$. Таким образом, $N_p = P(H_1 \cap N)$. Кроме того, так как $|P \cap H_1| = 1$, то $|P \cap H_1 \cap N| = 1$. Следовательно, $H_1 \cap N$ – дополнение к P в N_p. Тем самым установлено, что P дополняема в N_p.

II. Пусть $q \in \omega_1$, $q \neq p$ и Q – силовская q-подгруппа группы N_1. Так как $N_1 = N \cap G^{\mathfrak{F}} = N_{G^{\mathfrak{F}}}(P)$, то по лемме 11.8 [47] либо $|N_1|$ не делится на q, либо $|G^{\mathfrak{F}} : N_1|$ не делится на q. Если $|N_1|$ не делится на q, то $N_1 = N \cap G^{\mathfrak{F}}$ – q'-группа и поэтому $Q = 1$, что в рассматриваемом случае невозможно. Следовательно, $|G^{\mathfrak{F}} : N_1|$ – q'-число. Ввиду равенства $|G^{\mathfrak{F}}| = |G^{\mathfrak{F}} : N_1||N_1|$ получаем, что Q – абелева силовская q-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$.

Пусть N_q – силовская q-подгруппа группы N такая, что $Q \subseteq N_q$. Согласно лемме Фраттини $\Gamma = NG^{\mathfrak{F}}$. Тогда $|\Gamma| = |G^{\mathfrak{F}} : N_1||N|$. Поскольку $|G^{\mathfrak{F}} : N_1|$ – q'-число, то N_q – силовская q-подгруппа группы Γ. Из (1.3.1) по лемме 11.7 [47] получаем, что Q дополняема в N_q.

Таким образом, для любого $q \in \omega_1$ подгруппа $N_q \cap N_1$ абелева и дополняема в N_q. Тогда по следствию 11.4.1 [47] подгруппа N_1 ω_1-дополняема в N. Пусть H – ω_1-дополнение к N_1 в N. Это означает, что $N = HN_1$ и $|H \cap N_1|$ – ω_1'-число. Поскольку $G^{\mathfrak{F}}H = G^{\mathfrak{F}}(N \cap G^{\mathfrak{F}})H = G^{\mathfrak{F}}N_1H = G^{\mathfrak{F}}N = \Gamma$ и $|H \cap G^{\mathfrak{F}}| = |H \cap N \cap G^{\mathfrak{F}}| = |H \cap N_1|$ – ω_1'-число, то H – ω_1-дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ. Кроме того, так как $H \subseteq N$, то H нормализует P. *Теорема доказана.*

Следствие 1.3.9. (Шеметков [47], теорема 11.10). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, Γ – расширение группы G, ω_1 – непустое множество всех тех простых чисел $q \in \pi(\mathfrak{F})$, для которых силовская q-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ является циклической. Тогда в Γ существует ω_1-дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$, нормализующее некоторую силовскую p-подгруппу из $G^{\mathfrak{F}}$, где p – наименьшее число из ω_1.*

Следствие 1.3.10. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, Γ – расширение* *группы G. Если $\pi(G^{\mathfrak{F}}) \subseteq \omega$ и все силовские подгруппы из $G^{\mathfrak{F}}$ являются циклическими, то в Γ существует дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$, нормализующее некоторую силовскую p-подгруппу из $G^{\mathfrak{F}}$, где p – наименьшее число из $\pi(G^{\mathfrak{F}})$.*

Все результаты параграфа 1.3 опубликованы в работе [95] и получены в неразделимом соавторстве с В.А. Ведерниковым.

§ 1.4. $\omega\mathfrak{F}$-нормализаторы групп и их применение к исследованию дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикалов в конечных группах

В данном параграфе для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ введем определение $\omega\mathfrak{F}$-нормализатора группы G и установим его основные свойства. Применяя свойства $\omega\mathfrak{F}$-нормализаторов групп, получим новые результаты о дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала группы G. Считаем, что $\varnothing \neq \omega \subseteq \pi := \pi(\mathfrak{F})$.

Определение 1.4.1. ([66], определение 2.6.1). Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Нормальная подгруппа R группы G называется $\mathfrak{F}$-*предельной* нормальной подгруппой группы G, если $R \leq G^{\mathfrak{F}}$ и $R/R \cap \Phi(G)$ является главным фактором группы G. Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-*критической* подгруппой группы G, если $G = MR$ для некоторой $\mathfrak{F}$-предельной нормальной подгруппы R из G.

Предварительно докажем ряд свойств $\mathfrak{F}$-предельных нормальных подгрупп группы.

Лемма 1.4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и K – нормальная подгруппа группы G. Если $K \cap G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq \Phi(G)$, то в группе G существует $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа R такая, что $R/(K \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G))$ является главным фактором группы G ниже $K \cap G^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Так как по условию $K \cap G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq \Phi(G)$, то

$$(K \cap G^{\mathfrak{F}})\Phi(G)/\Phi(G) \cong (K \cap G^{\mathfrak{F}})/(K \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)) \neq 1$$

и поэтому существует минимальная нормальная подгруппа $R/(K \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G))$ группы $G/(K \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G))$, содержащаяся в $(K \cap G^{\mathfrak{F}})/(K \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G))$. Тогда $R/(K \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G))$ является главным фактором группы G. Так как

$$K \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) = R \cap (K \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)) = (R \cap (K \cap G^{\mathfrak{F}})) \cap \Phi(G) = R \cap \Phi(G),$$

то $R/R\cap\Phi(G)$ является главным фактором группы G. Следовательно, по определению 1.4.1 R является $\mathfrak{F}$-предельной нормальной подгруппой в группе G, причем $R\leq K\cap G^{\mathfrak{F}}$. *Лемма доказана.*

Лемма 1.4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, $G=M_1R_1=M_2R_2$, где M_1 и M_2 – максимальные подгруппы группы G, R_1 и R_2 – различные нильпотентные $\mathfrak{F}$-предельные нормальные подгруппы группы G, $G^{\mathfrak{F}}\cap\Phi(G)\subseteq R_1\cap R_2$. Тогда подгруппа $R=M_1\cap R_1R_2$ является $\mathfrak{F}$-предельной нормальной подгруппой в G, причем $R_1R=R_1R_2$ и следующие группы G-изоморфны:*

$$R_1R_2/R_1\cong R_2/G^{\mathfrak{F}}\cap\Phi(G)\cong R/G^{\mathfrak{F}}\cap\Phi(G).$$

Доказательство. Пусть $\Phi:=G^{\mathfrak{F}}\cap\Phi(G)$ и $R:=M_1\cap R_1R_2$. Тогда $RR_1=(M_1\cap R_1R_2)R_1=M_1R_1\cap R_1R_2=G\cap R_1R_2=R_1R_2$. Поскольку R_i – $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа в G, то по определению 1.4.1 $R_i\subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и, значит, $R_i\cap\Phi(G)\subseteq\Phi$, $i=1,2$. Так как по условию $\Phi\subseteq R_i$, то $R_i\cap\Phi(G)=\Phi$ и согласно определению 1.4.1 R_i/Φ – главный фактор группы G для любого $i=1,2$. Так как подгруппы R_1 и R_2 нильпотентны, то R_1R_2/Φ – абелева группа и поэтому подгруппа R/Φ нормальна в R_1R_2/Φ. Поскольку R нормальна в M_1, то $G/\Phi=M_1R_1/\Phi\subseteq N_{G/\Phi}(R/\Phi)$. Следовательно, R – нормальная подгруппа группы G.

Так как $R\cap R_1$ нормальна в G и ввиду условия $\Phi\subseteq R\cap R_1\subseteq R_1$, то либо $R\cap R_1=R_1$, либо $R\cap R_1=\Phi$. Если $R\cap R_1=R_1$, то $R_1\subseteq M_1$, что, в силу $G=M_1R_1$, невозможно. Поэтому $R\cap R_1=\Phi$.

Поскольку $R_1\neq R_2$, то $R_1/\Phi\cap R_2/\Phi=\Phi/\Phi$ и, значит, $R_1\cap R_2=\Phi$. Тогда $R_1R_2/R_1\cong R_2/R_1\cap R_2=R_2/\Phi$. Кроме того, $R_1R_2/R_1=R_1R/R_1\cong R/R\cap R_1=R/\Phi$. Таким образом, $R_1R_2/R_1\cong R_2/\Phi\cong R/\Phi$.

Согласно определению 1.4.1 $R_1R_2\subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Это означает, что $R\subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и $R\cap\Phi(G)\subseteq\Phi$. Так как $\Phi=R\cap R_1$, то $\Phi\subseteq R\cap\Phi(G)$. Тем самым установлено, что $\Phi=R\cap\Phi(G)$ и поэтому $R/R\cap\Phi(G)$ – главный фактор группы G. Следовательно, R – $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа в G. *Лемма доказана.*

Следуя [47], для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ сформулируем определение $\omega\mathfrak{F}$-нормализатора группы (см. [47], определение 21.1).

Определение 1.4.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация. Подгруппу H

группы G назовем *$\omega\mathfrak{F}$-нормализатором* группы G, если $H/\Phi(H) \cap O_{\omega'}(H) \in \mathfrak{F}$ и существует максимальная цепь группы G вида

$$H = H_t \subset H_{t-1} \subset \cdots \subset H_1 \subset H_0 = G, \qquad (1.4.1)$$

где $t \geq 0$, такая, что H_i – $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа группы H_{i-1} для любого $i = 1, 2, \ldots, t$.

Докажем ряд важных свойств $\omega\mathfrak{F}$-нормализаторов групп.

Лемма 1.4.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация и G – группа. Тогда в G существует по крайней мере один $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор H и $G = G^{\mathfrak{F}}H$.*

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} = 1$ и $H = G$ – $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор в G, причем $G = G^{\mathfrak{F}}H$. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$ и $G^{\mathfrak{F}} \leq \Phi(G)$. Тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ и по лемме 1.3.2(3) при $G = N$ получим, что $G = F$ и $G/B \in \mathfrak{F}$, где $B = \Phi(G) \cap O_{\omega'}(G)$. По определению 1.4.2 $H = G$ является $\omega\mathfrak{F}$-нормализатором в группе G.

Пусть $G \notin \mathfrak{F}$ и $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq \Phi(G)$. Тогда по лемме 1.4.1 при $K = G$ в группе G существует $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа R такая, что $R/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$ является главным фактором группы G ниже $G^{\mathfrak{F}}$.

Поскольку $R \not\subseteq \Phi(G)$, то в группе G существует максимальная подгруппа M такая, что $R \not\subseteq M$. Следовательно, $G = RM$. Тогда по определению 1.4.1 M является $\mathfrak{F}$-критической подгруппой группы G. Так как $|M| < |G|$, то по индукции в M существует $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор H такой, что $H/\Phi(H) \cap O_{\omega'}(H) \in \mathfrak{F}$. Тогда в силу определения 1.4.2 H является $\omega\mathfrak{F}$-нормализатором группы G.

Индукцией по t докажем, что $G = G^{\mathfrak{F}}H$. Если $t = 0$, то $G = H = G^{\mathfrak{F}}H$. Пусть $t > 0$. Так как H является $\omega\mathfrak{F}$-нормализатором группы H_1, то по индукции $H_1 = H_1^{\mathfrak{F}}H$. Поскольку $G = RH_1$, где $R \leq G^{\mathfrak{F}}$, то $G = G^{\mathfrak{F}}H_1$. Тогда $G/G^{\mathfrak{F}} \cong H_1/H_1 \cap G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ влечет, что $H_1^{\mathfrak{F}} \leq H_1 \cap G^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ и, значит, $G = G^{\mathfrak{F}}H_1 = G^{\mathfrak{F}}H_1^{\mathfrak{F}}H = G^{\mathfrak{F}}H$. *Лемма доказана.*

Лемма 1.4.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация. Если H – $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор группы G и α – эпиморфизм группы G на группу U, то H^{α} – $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор группы U.*

Доказательство. Пусть H – $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор группы G и α – эпиморфизм группы G на группу U. Покажем, что H^{α} является $\omega\mathfrak{F}$-нормализатором группы U. Так как $G^\alpha = U \cong G/K$ и $H^\alpha \cong HK/K$, то достаточно установить, что HK/K является $\omega\mathfrak{F}$-нормализатором группы G/K, где $K = Ker(\alpha)$.

Согласно определению 1.4.2 $H/\Phi(H) \cap O_{\omega'}(H) \in \mathfrak{F}$. Так как $\Phi(HK/K) \geq \Phi(H)K/K$ и $O_{\omega'}(HK/K) \geq O_{\omega'}(H)K/K$, то нетрудно проверить, что группа $(HK/K)/(\Phi(HK/K) \cap O_{\omega'}(HK/K)) \in \mathfrak{F}$, поскольку она изоморфна гомоморфному образу группы $G/\Phi(G) \cap O_{\omega'}(G) \in \mathfrak{F}$.

Далее рассуждая, как при доказательстве теоремы 2.6.6 [66], получаем, что HK/K является $\omega\mathfrak{F}$-нормализатором группы G/K. *Лемма доказана.*

Лемма 1.4.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация с внутренним ω-спутником f, G – группа с ω-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$. Если H – $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор группы G, то H покрывает каждый f_ω-центральный и изолирует каждый f_ω-эксцентральный главный ωd-фактор группы G.*

Доказательство. Пусть H – $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор группы G. Если G является ω'-группой, то G не имеет главных ωd-факторов и, значит, утверждение верно. Пусть G – ωd-группа. По определению 1.4.2 $H/\Phi(H) \cap O_{\omega'}(H) \in \mathfrak{F}$ и существует максимальная цепь (1.4.1) группы G. Докажем лемму индукцией по параметру t. Пусть $t = 0$. Тогда $G/\Phi(G) \cap O_{\omega'}(G) \in \mathfrak{F}$. В этом случае каждый главный ωd-фактор группы G выше $\Phi(G) \cap O_{\omega'}(G)$, согласно лемме 1.2.1, является f_ω-центральным в G, а каждый главный фактор группы G ниже $\Phi(G) \cap O_{\omega'}(G)$ является ω'-фактором. Кроме того, группа G покрывает каждый свой главный фактор. Таким образом, при $t = 0$ утверждение верно.

Пусть $t > 0$. Так как H_1 – $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа группы G, то согласно определению 1.4.1 существует $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа R группы G такая, что $G = H_1R$. Так как ввиду определения 1.4.1 $R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то $H_1R \subseteq H_1G^{\mathfrak{F}}$ и, значит, $G = H_1G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда по лемме 1.2(2) [47] получаем, что $H_1^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Так как группа $G^{\mathfrak{F}}$ ω-разрешима, то и $H_1^{\mathfrak{F}}$ является ω-разрешимой группой. Поскольку H – $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор группы G, то в силу (1.4.1) H является $\omega\mathfrak{F}$-нормализатором группы H_1. Таким образом, группа H_1 удовлетворяет условию леммы и по индукции для H_1 справедливо заключение леммы. Из $G = H_1G^{\mathfrak{F}}$ по определению 1.2.2 следует, что H_1 – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G. Пусть L/K – произвольный главный ωd-фактор группы G и $C := C_G(L/K)$.

Рассмотрим случай, когда $K \neq 1$. Так как ввиду леммы 1.2(1) [47] $\mathfrak{F}$-корадикал группы G/K ω-разрешим и по лемме 1.4.4 HK/K – $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор группы G/K, то по индукции для G/K справедливо заключение леммы. Если L/K f_ω-централен в G, то $(L/K)/(K/K)$ f_ω-централен в G/K и по индукции HK/K покрывает $(L/K)/(K/K)$. Это означает, что $L/K \subseteq (HK/K)(K/K)$. Отсюда получаем, что $L \subseteq HK$ и H покрывает L/K. Если L/K f_ω-эксцентрален в G, то $(L/K)/(K/K)$ f_ω-эксцентрален в G/K и по индукции HK/K изолирует $(L/K)/(K/K)$. Тогда $L/K \cap (HK/K) \subseteq (K/K)$. Это означает, что $L \cap HK = K(L \cap H) \subseteq K$ и поэтому H изолирует L/K.

Пусть $K = 1$. Рассмотрим случай, когда H_1 не покрывает L. Это означает, что $L \not\subseteq H_1$ и $G = H_1L$. По лемме 1.2.5(2) главный фактор $L/1$ является f_ω-эксцентральным в G. Согласно лемме 1.2.6 $L \cong L \cap G^{\mathfrak{F}}$. Из ω-разрешимости $G^{\mathfrak{F}}$ следует, что L является абелевой p-группой для некоторого $p \in \omega$. Поскольку $G = H_1L$, то $H_1 \cap L = 1$. Так как $H \subseteq H_1$, то $H \cap L = 1$. Тем самым установлено, что в этом случае H изолирует L.

Пусть теперь H_1 покрывает L. Тогда $L \subseteq H_1$. Пусть $L/1$ – f_ω-центральный главный фактор группы G. Так как f – внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, то $G/C \in \mathfrak{F}$ и, значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C$. Тогда $G = H_1G^{\mathfrak{F}} = H_1C$. Отсюда получаем, что $L = L \cap H_1$ – f_ω-центральный главный фактор группы H_1. По индукции H покрывает $L \cap H_1$. Следовательно, $L = L \cap H_1 \subseteq H$ и поэтому H покрывает L.

Пусть теперь главный фактор $L/1$ группы G f_ω-эксцентрален в G. Как и выше, в силу леммы 1.2.6 и ω-разрешимости $G^{\mathfrak{F}}$ группа L является абелевой p-группой для некоторого $p \in \omega$. Предположим, что $C \subseteq H_1$. Рассмотрим случай, когда $R/R \cap \Phi(G)$ – ω'-группа. Тогда $R/R \cap \Phi(G)$ ω'-разложима и по лемме 1.3.1(3) R ω'-разложима. Это означает, что $R = A \times B$, где $A = R_{\omega'}$, $B = R_\omega$. Тогда $B \subseteq \Phi(G) \cap R$. Так как B нильпотентна, то $B_{p'}$ нормальна в B. Следовательно, B – нормальная p'-замкнутая подгруппа группы G. По лемме 1.8.5 [66] $B \subseteq C_G(L)$. Поскольку $A \cap L = 1$, то по лемме 1.3.1 [66] $A \subseteq C_G(L)$. Таким образом, $R \subseteq C_G(L)$. Тогда $G = H_1R = H_1C = H_1$, что невозможно.

Если $R/R \cap \Phi(G)$ – ωd-группа, то в силу $R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ получаем, что $R/R \cap \Phi(G)$ – q-группа для некоторого $q \in \omega$. Тогда по теореме 3.24 [18] группа R нильпотентна и поэтому $R \subseteq F(G) \subseteq C$. Отсюда, как и выше, следует, что

$G = H_1$. Получили противоречие.

Следовательно, $C \nsubseteq H_1$. Тогда $G = H_1C$ и $L = L \cap H_1$ – f_ω-эксцентральный главный фактор группы H_1. По индукции H изолирует $L \cap H_1$. Это означает, что $H \cap L \cap H_1 \subseteq K = 1$. Таким образом, $H \cap L = 1$ и поэтому H изолирует L. *Лемма доказана.*

Теорема 1.4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, G – группа. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G является разрешимой ω-группой, то любые два $\omega\mathfrak{F}$-нормализатора группы G сопряжены в G.*

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка, H_1 и H_2 – $\omega\mathfrak{F}$-нормализаторы группы G, не являющиеся сопряженными в G. Если $G^{\mathfrak{F}} = 1$, то $G \in \mathfrak{F}$ и по определению 1.4.2 $H_1 = H_2 = G$, что невозможно. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Допустим, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G)$. Тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ и по лемме 1.3.2(3) $G/\Phi(G) \cap O_{\omega'}(G) \in \mathfrak{F}$. Согласно определению 1.4.2 $H_1 = H_2 = G$, что противоречит выбору группы G. Таким образом, $G^{\mathfrak{F}} \nsubseteq \Phi(G)$.

Пусть $i \in \{1, 2\}$. Так как H_i – $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор группы G, то $H_i/\Phi(H_i) \cap O_{\omega'}(H_i) \in \mathfrak{F}$ и существует максимальная цепь группы G вида $H_i \subset \ldots \subset M_i \subset G$, удовлетворяющая определению 1.4.2. Это означает, что H_i является $\omega\mathfrak{F}$-нормализатором группы M_i. По лемме 1.4.3 $G = H_iG^{\mathfrak{F}} = M_iG^{\mathfrak{F}}$. Отсюда ввиду леммы 1.2(2) [47] получаем, что $M_i^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Поэтому $M_i^{\mathfrak{F}}$ – разрешимая ω-группа, и по индукции любые два $\omega\mathfrak{F}$-нормализатора группы M_i сопряжены в M_i. Кроме того, из $G = M_iG^{\mathfrak{F}}$ следует, что M_i – $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G. Так как M_i – $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа в G, то $G = M_iR_i$, где R_i – $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа группы G. Согласно определению 1.4.1 $R_i \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и $R_i/R_i \cap \Phi(G)$ – главный фактор группы G.

Если $M_1 = M_2^g$ для некоторого $g \in G$, то ввиду леммы 1.4.4 H_1 и H_2^g – $\omega\mathfrak{F}$-нормализаторы группы M_1. По индукции H_1 и H_2^g сопряжены в M_1, а значит, H_1 и H_2 сопряжены в G, что невозможно. Следовательно, M_1 и M_2 не сопряжены в G.

Пусть $G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) := \Phi$ и $F(G^{\mathfrak{F}}/\Phi) := F/\Phi$. Так как $G^{\mathfrak{F}} \nsubseteq \Phi(G)$, то $G^{\mathfrak{F}} \neq \Phi$. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}}/\Phi$ – неединичная разрешимая группа и по лемме 4.21(1) [18] $F/\Phi \neq 1$. Так как $\Phi \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то $\Phi \subseteq F(G^{\mathfrak{F}})$. Поскольку $F(G^{\mathfrak{F}})/\Phi$ – нильпотентная нормальная подгруппа в $G^{\mathfrak{F}}/\Phi$, то $F(G^{\mathfrak{F}})/\Phi \subseteq F/\Phi$. В силу теоремы 3.24 [18]

$F/\Phi \subseteq F(G^{\mathfrak{F}})/\Phi$. Таким образом, $F/\Phi = F(G^{\mathfrak{F}})/\Phi$. Применяя лемму 2.37 [18], нетрудно показать, что

$$\begin{gathered} F/\Phi \text{ является прямым произведением минимальных} \\ \text{нормальных подгрупп группы } G/\Phi, \text{ содержащихся в } G^{\mathfrak{F}}/\Phi. \end{gathered} \tag{1.4.2}$$

1. Рассмотрим случай, когда

$$F/\Phi \cdot\!\lhd G/\Phi. \tag{1.4.3}$$

Пусть $i \in \{1,2\}$. Так как $R_i \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то $R_i/R_i \cap \Phi(G) = R_i/R_i \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) = R_i/R_i \cap \Phi \cong R_i\Phi/\Phi$ – главный фактор группы G и, значит, $R_i\Phi/\Phi$ – минимальная нормальная подгруппа группы G/Φ, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}/\Phi$. Ввиду (1.4.2) и (1.4.3) $R_i\Phi/\Phi = F/\Phi$ и поэтому $F = R_i\Phi$. Тогда $G = M_iR_i = M_i\Phi R_i = M_iF$. Тем самым установлено, что $G = M_iF$ для любого $i = 1,2$.

Пусть $S_i = G^{\mathfrak{F}} \cap Core_G(M_i)$, $i = 1,2$. Так как $\Phi \subseteq F$ и $\Phi \subseteq S_i$, то $\Phi \subseteq F \cap S_i \subseteq F$. В силу (1.4.3) либо $F \cap S_i = F$, либо $F \cap S_i = \Phi$. Если $F \cap S_i = F$, то $F \subseteq S_i$ и поэтому $G = M_iF = M_i$, что невозможно. Следовательно, $F \cap S_i = \Phi$ и, значит, $\Phi \subseteq S_i$ для любого $i = 1,2$.

1.1. Пусть $S_1 = S_2 = \Phi$. Так как $G = M_iF$, то $|G : M_i| = |F : F \cap M_i| = k_i \neq 1$, $i = 1,2$. Поскольку $\Phi \subseteq F \cap M_i$, то $|F : \Phi| = |F : F \cap M_i| \cdot |F \cap M_i : \Phi|$, $i = 1,2$. Ввиду (1.4.2) и (1.4.3) F/Φ – абелева p-группа для некоторого $p \in \omega$ и, значит, $k_i = |G : M_i|$ – p-число, $i = 1,2$. Так как $p \in \omega$, то по теореме 1.1.7 формация $\mathfrak{F}$ является p-локальной. Поскольку $G^{\mathfrak{F}}$ – разрешимая группа, то $G^{\mathfrak{F}}$ p-разрешима. Тогда по лемме 2.4.3 [66] подгруппы M_1 и M_2 являются сопряженными в G. Получили противоречие.

1.2. Пусть хотя бы одна из подгрупп S_1 или S_2 не совпадает с Φ. Пусть, например, $S_1 \neq \Phi$. Тогда S_1/Φ – неединичная нормальная подгруппа группы G/Φ и поэтому существует минимальная нормальная подгруппа N/Φ в G/Φ, содержащаяся в S_1/Φ. Так как $N/\Phi \subseteq G^{\mathfrak{F}}/\Phi$, то ввиду (1.4.2) $N/\Phi \subseteq F/\Phi$ и, значит, исходя из (1.4.3), $N/\Phi = F/\Phi$. Отсюда получаем, что $N = F$. Тогда из $N \subseteq S_1 \subseteq M_1$ имеем $G = M_1F = M_1N = M_1$, что невозможно.

2. Пусть теперь F/Φ не является минимальной нормальной подгруппой группы G/Φ и

$$\begin{gathered} \Sigma = \{L_i/\Phi | i \in I\} \text{ – совокупность всех минимальных} \\ \text{нормальных подгрупп группы } G/\Phi, \text{ содержащихся в } F/\Phi. \end{gathered} \tag{1.4.4}$$

2.1. Рассмотрим случай, когда M_1 и M_2 дополняют один и тот же главный фактор группы G из Σ, например, главный фактор L_1/Φ. Тогда имеем $G = M_1L_1 = M_2L_1$.

Предположим, что $L_j \nsubseteq M_1$ для любого $j \in I$, $j \neq 1$. Можем считать, что $2 \in I$. Тогда $L_2 \nsubseteq M_1$ и $G = M_1L_2$. Пусть $i \in \{1, 2\}$. Так как $L_i/\Phi \subseteq F/\Phi = F(G^{\mathfrak{F}}/\Phi)$, то по теореме 3.24 [18] группа L_i нильпотентна и $L_i \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Так как $L_i \cap \Phi(G) = \Phi$, то $L_i/L_i \cap \Phi(G)$ – главный фактор группы G. Это означает, что L_i – $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа группы G для любого $i = 1, 2$. Тогда по лемме 1.4.2 $L = M_1 \cap L_1L_2$ – $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа в G и $L/\Phi \cong L_1/\Phi$. Последнее означает, что $L/\Phi \in \Sigma$ и $L \subseteq M_1$, что противоречит предположению. Следовательно, найдется такое $j \in I$, $j \neq 1$, что $L_j \subseteq M_1$. Можем считать, $L_2 \subseteq M_1$.

В силу (1.4.4) L_1L_2/Φ – неединичная нильпотентная нормальная подгруппа группы G/Φ. Кроме того, $(L_1L_2/\Phi) \cap \Phi(G/\Phi) = (L_1L_2/\Phi) \cap \Phi(G)/\Phi = (L_1L_2 \cap \Phi(G))/\Phi \subseteq (G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G))/\Phi = \Phi/\Phi = 1$. Тогда согласно лемме 7.9 [47] подгруппа L_1L_2/Φ дополняема в G/Φ. Пусть D/Φ – дополнение к L_1L_2/Φ в G/Φ и $M := L_1D$. Тогда $G = DL_1L_2 = ML_2$ и M – максимальная подгруппа группы G.

Поскольку $G = M_1L_1 = M_2L_1 = ML_2$, $L_2 \subseteq M_1$, $L_1 \subseteq M$ и $L_1 \cap \Phi(G) = \Phi = L_2 \cap \Phi(G)$, то по лемме 2.6.5 [66] $M_i \cap M$ – $\mathfrak{F}$-критическая максимальная подгруппа группы M и группы M_i, $i = 1, 2$. Согласно лемме 1.4.3 в группе $M_i \cap M$ существует $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор K_i, $i = 1, 2$. Тогда K_i является $\omega\mathfrak{F}$-нормализатором группы M и K_i является $\omega\mathfrak{F}$-нормализатором группы M_i, $i = 1, 2$. Так как по индукции H_1 и K_1 сопряжены в M_1, K_1 и K_2 сопряжены в M, K_2 и H_2 сопряжены в M_2, то отсюда следует, что H_1 и H_2 сопряжены в G. Получили противоречие.

2.2. Пусть M_1 и M_2 дополняют соответственно главные факторы L_1/Φ и L_2/Φ группы G из Σ, $L_1/\Phi \neq L_2/\Phi$. Тогда $G = M_1L_1 = M_2L_2$. Если $L_1 \nsubseteq M_2$ (или $L_2 \nsubseteq M_1$), то $G = M_2L_1$ (соответственно $G = M_1L_2$) и мы приходим к случаю, рассмотренному в пункте 2.1. Таким образом, можем считать, что $L_1 \subseteq M_2$ и $L_2 \subseteq M_1$. Как и в пункте 2.1, нетрудно проверить, что L_1 и L_2 – нильпотентные $\mathfrak{F}$-предельные нормальные подгруппы группы G и $L_i \cap \Phi(G) = \Phi$, $i = 1, 2$. Тогда по лемме 2.6.5 [66] $M_1 \cap M_2$ – $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа группы

M_i, $i = 1, 2$. Используя лемму 1.4.3 и индукционное предположение, получаем, что H_1 и H_2 сопряжены в G. Противоречие. *Теорема доказана.*

В следующей теореме получены достаточные условия ω-дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала группы G $\omega\mathfrak{F}$-нормализаторами.

Теорема 1.4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация Фиттинга и группа $G = A_1 A_2 \cdots A_n$, где $A_1, A_2, \dots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является ω-разрешимым для любого $i = 1, 2, \dots, n$, а его силовские p-подгруппы абелевы для любого $p \in \omega$, то каждый $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является ω-дополнением в G к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Пусть группа $A_i^{\mathfrak{F}}$ является ω-разрешимой, а ее силовские p-подгруппы абелевы для любого $p \in \omega$ и для любого $i = 1, 2, \dots, n$, f – максимальный внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда по теореме 1.2.1 $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} A_2^{\mathfrak{F}} \cdots A_n^{\mathfrak{F}}$ – ω-разрешимая группа и $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов для любого $p \in \omega$.

По лемме 1.4.3 в группе G существует по крайней мере один $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор H и $G = G^{\mathfrak{F}} H$. По лемме 1.4.5 H покрывает каждый f_ω-центральный и изолирует каждый f_ω-эксцентральный главный фактор группы G. Следовательно, H изолирует каждый главный ωd-фактор группы G ниже $G^{\mathfrak{F}}$.

Допустим, что $D := G^{\mathfrak{F}} \cap H$ является ωd-группой. Рассмотрим главный ряд группы G, проходящий через $G^{\mathfrak{F}}$ вида: $G = G_0 > \cdots > G_k = G^{\mathfrak{F}} > G_{k+1} > \cdots > G_s = 1$. Тогда $D = D \cap G_k \geq D \cap G_{k+1} \geq \cdots \geq D \cap G_s = 1$ является нормальным рядом группы D, причем $|D|$ равен произведению всех индексов этого ряда. Так как D является ωd-группой, то $D \cap G_l / D \cap G_{l+1}$ является ωd-группой для некоторого l, где $k \leq l \leq s-1$. Поскольку $(D \cap G_l)G_{l+1} \leq G_l$, то $(D \cap G_l)G_{l+1}/G_{l+1} \leq G_l/G_{l+1}$, причем $(D \cap G_l)G_{l+1}/G_{l+1} \cong D \cap G_l / D \cap G_{l+1}$. Поэтому G_l/G_{l+1} является главным ωd-фактором группы G ниже $G^{\mathfrak{F}}$ и, значит, H изолирует фактор G_l/G_{l+1}. Таким образом, $H \cap G_l \leq G_{l+1}$. Тогда $D \cap G_l = (H \cap D) \cap G_l = D \cap (H \cap G_l) \leq D \cap G_{l+1}$. Получили противоречие с тем, что $D \cap G_l / D \cap G_{l+1}$ является ωd-группой.

Следовательно, D является ω'-группой. Поскольку $G = G^{\mathfrak{F}} H$, то Hявляется ω-дополнением в G к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$. *Теорема доказана.*

В качестве следствий из теоремы 1.4.2 получим ряд результатов о дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G, тем самым получаем решение проблемы Виландта [81] о дополняемости в конечной группе её $\mathfrak{F}$-корадикала без условия абелевости его силовских подгрупп для локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ (решение Проблемы **(A)**).

Следствие 1.4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация Фиттинга и группа $G = A_1A_2\cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, а его силовские p-подгруппы абелевы для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является дополнением в G к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$.*

Следствие 1.4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация Фиттинга и группа $G = A_1A_2\cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является абелевым для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является дополнением в G к её $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$.*

Следствие 1.4.3. *Пусть группа $G = A_1A_2\cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если подгруппа $O^p(A_i)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ p-разрешима с абелевыми силовскими p-подгруппами, то каждый $\mathfrak{E}_p$-нормализатор группы G является дополнением к подгруппе $O^p(G)$ в группе G.*

Следствие 1.4.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы, и группа $G = A_1A_2\cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является разрешимым с абелевыми силовскими подгруппами для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в группе G.*

Все результаты параграфа 1.4 опубликованы в работе [95] и получены в неразделимом соавторстве с В.А. Ведерниковым.

§ 1.5. Известные результаты, используемые в Главе 1

В Главе 1 используются следующие известные результаты.

[6], Лемма 2. *Пусть группа* U *— прямое произведение подгрупп* Y_i, $i = 1, 2, \dots, n$, $G \leq U$ *и* G *является внутренним подпрямым произведением групп* Y_i, $i = 1, 2, \dots, n$. *Тогда* 1) *если* $N_i \triangleleft Y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ *и* $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n$, *то* U/N *является прямым произведением подгрупп* Y_iN/N, *а* GN/N *является подпрямым произведением групп* Y_iN/N, $i = 1, 2, \dots, n$; 2) *если* $G \cap Y_k = 1$ *для некоторого* $k = 1, 2, \dots, n$, *то* G *изоморфна подпрямому произведению групп* Y_m, $m = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$; 3) *если* $Y_k \leq G$ *для некоторого* $k = 1, 2, \dots, n$, *то* $G \cap (Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_{k-1} \times Y_{k+1} \dots \times Y_n$ *изоморфна подпрямому произведению групп* Y_m, $m = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$.

[7], Лемма 8. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация Фиттинга и группа* $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ *– прямое произведение групп* $G_1, G_2, \dots, G_n$. *Если* H *– подпрямое произведение групп* G_i, $i = 1, \dots, n$, *то* $H_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \cap H$.

[8], Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ *с* p*-направлением* δ. *Тогда* 1) *если* $p \in \omega$, $G/O_p(G) \in \mathfrak{F}$ *и* $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$, *то* $G \in \mathfrak{F}$; 2) *если* $G/O_{\omega'}(G) \in \mathfrak{F}$ *и* $G/O_{\omega}(G) \in f(\omega')$, *то* $G \in \mathfrak{F}$; 3) *если* $G/M \in \mathfrak{F}$, $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ *для любого* $p \in \omega \cap \pi(M)$ *и* $G/O_{\omega}(G) \in f(\omega')$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

[8], Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *–* ω*-веерная формация с* ω*-спутником* f *и* b_p*-направлением* δ. *Тогда выполняются следующие утверждения*: 1) $O_p(G/G_{\delta(p)}) = 1$ *для любой группы* G; 2) $\mathfrak{F}$ *обладает* ω*-спутником* g *таким, что* $g(q) = f(q)$ *для всех* $q \in \{\omega'\} \cup (\omega \setminus \{p\})$ *и* $g(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$.

[8], Лемма 6(1). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *–* ω*-веерная формация с внутренним* ω*-спутником* f *и* bp*-направлением* δ. *Тогда* $\mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ *для всех* $p \in \omega$.

[13], Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая формация. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является классом Фиттинга, когда для любых двух перестановочных субнормальных подгрупп* A *и* B *произвольной группы* G *имеет место равенство* $(AB)^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}}$.

[18], Лемма 1.44. *Если* G *– группа,* $H < G$, *то* $H^x H \neq G$ *при любом* $x \in G$.

[18], Лемма 2.37. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– некоторое множество минимальных нормальных подгрупп группы* G *и* $M = \Pi_{N \in \mathfrak{M}} N$. *Тогда*: 1) *если* $K \triangleleft G$, *то существуют* *подгруппы* $N_1, N_2, \ldots, N_k \in \mathfrak{M}$ *такие, что* $KM = K \times N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$; 2) *существуют* $N_1, \ldots, N_m \in \mathfrak{M}$ *такие, что* $M = N_1 \times \ldots \times N_m$; 3) *если* $\mathfrak{M}$ *– множество всех минимальных нормальных подгрупп, то существуют подгруппы* $N_1, \ldots, N_s \in \mathfrak{M}$ *такие, что* $Soc\ G = N_1 \times \ldots \times N_s$.

[18], Теорема 3.12(2). *В нильпотентной группе каждая собственная подгруппа отлична от своего нормализатора.*

[18], Лемма 3.17. *Пусть* $M < \cdot\ G$ *и* $K \lhd\ G$. *Тогда*: 1) *если* $\alpha \in Aut\ G$, *то* $\alpha(M) < \cdot\ G$; 2) *если* $x \in G$, *то* $M^x < \cdot\ G$; 3) *если* $K \leq M$, *то* $M/K < \cdot\ G/K$; 4) *если* K *не содержится в* M, *то* $MK = G$; 5) *если* $\bar{U}$ *– максимальная подгруппа фактор-группы* $\bar{G} = G/K$, *то существует* $U < \cdot\ G$ *такая, что* $K \leq U$ *и* $\bar{U} = U/K$; 6) *если* $M \lhd\ G$, *то* $|\ G : M\ |$ *– простое число.*

[18], Лемма 3.18(2). $\Phi(G) = \cap_{M < \cdot G} Core_G(M)$.

[18], Теорема 3.22. *Пусть* $K \lhd\ G$. *Тогда*: 1) $\Phi(K) \leq \Phi(G)$; 2) $\Phi(G)K/K \leq \Phi(G/K)$; 3) *если* $K \leq \Phi(G)$, *то* $\Phi(G)/K = \Phi(G/K)$; 4) *если* $A \leq G$ *и* $K \leq \Phi(A)$, *то* $K \leq \Phi(G)$.

[18], Теорема 3.24. *Пусть* $D \lhd K \lhd G$, $D \leq \Phi(G)$ *и* $D \lhd G$. *Если фактор-группа* K/D *нильпотентна, то* K *нильпотентна.*

[18], Лемма 4.21(1). $\Phi(G) \leq F(G)$; *если* G *разрешима и* $G \neq 1$, *то* $\Phi(G) \neq F(G)$.

[18], Теорема 5.11(1). *Пусть* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *– формации. Тогда* $G^{(\mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y})} = (G^{\mathfrak{Y}})^{\mathfrak{X}}$ *для любой группы* G.

[40], Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация. Тогда следующие условия равносильны*: 1) *формация* $\mathfrak{F}$ ω*-насыщена*; 2) $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$ *для всех* $p \in \omega$; 3) $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ *для всех* $p \in \omega$; 4) *формация* $\mathfrak{F}$ ω*-локальна.*

[47], Лемма 1.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустная формация,* $K \lhd\ G$. *Тогда справедливы следующие утверждения*: 1) $(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$; 2) *если* $G = HK$, *то* $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}K$; 3) *если* $G = HK$ *и* $K \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, *то* $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}$.

[47], Лемма 3.9. *Справедливы следующие утверждения*: 1) *если* H/K *– главный фактор группы* G *и* $p \in \pi(H/K)$, *то* $G/C_G(H/K)$ *не содержит неединичных нормальных* p*-подгрупп, причем* $F_p(G) \subseteq C_G(H/K)$; 2) *если* A *– группа операторов группы* G *и* R/T *–* A*-композиционный* p*-фактор группы* G, *то* $A/C_A(R/T)$ *не имеет неединичных нормальных* p*-подгрупп.*

[47], Лемма 4.4. *Пусть* $K \subseteq N \lhd G$, $K \lhd G$, $K \subseteq \Phi(G)$. *Тогда*: 1) *если* N/K π-*замкнута, то и* N π-*замкнута*; 2) $F_p(N/K) = F_p(N)/K$.

[47], Теорема 4.1. *В любой pd-группе* G *подгруппа* $F_p(G)$ *совпадает с пересечением централизаторов в* G *всех главных pd-факторов группы* G.

[47], Лемма 5.10. *Пусть* H – *абелева нормальная подгруппа группы* G, *причем* $(|H|, |G:H|) = 1$. *Тогда* $H = [\ H, G\ ] \times (H \cap Z(G))$.

[47], Теорема 5.11(1). *Пусть p-разрешимый корадикал* R *группы* G *имеет абелеву силовскую p-подгруппу* P. *Тогда* R *не имеет композиционных факторов порядка p.*

[47], Следствие 5.11.1. *Пусть группа* G *имеет абелеву силовскую p-подгруппу. Тогда* $l_p(G) \leq 1$.

[47], Лемма 7.9. *Пусть* H – *нильпотентная нормальная подгруппа группы* G. *Если* $H \neq 1$ *и* $H \cap \Phi(G) = 1$, *то* H *дополняема в* G *и равна прямому произведению некоторого числа минимальных нормальных подгрупп* G.

[47], Теорема 7.1. *Если подгруппа* H *субнормальна, но не нормальна в* G, *то существует такой элемент* $x \in G$, *что* $H^x \neq H$, $H \subseteq N_G(H^x)$, $H^x \subseteq N_G(H)$.

[47], Теорема 7.5. *Если* $H \lhd\lhd G$ *и* $K \lhd\lhd G$, *то* $H \vee K \lhd\lhd G$.

[47], Лемма 8.1. *Пусть максимальная подгруппа* M *не покрывает главный фактор* H/K *группы* G. *Тогда* M *не покрывает фактор* $HCore_G(M)/Core_G(M)$, G-*изоморфный* H/K.

[47], Теорема 8.5. *Пусть f-корадикал группы* G *p-разрешим,* f – *p-однородный экран,* M *и* H – f-*абнормальные максимальные подгруппы группы* G. *Если* $Core_G(M) \cap G^f = Core_G(H) \cap G^f$ *и p делит* $(\ |G:M|,\ |G:H|\ )$, *то* M *и* H *сопряжены между собой в* G.

[47], Лемма 11.1. *Подгруппа* H *тогда и только тогда является добавлением к нормальной подгруппе* K *группы* G, *когда* $HK = G$ *и* $H \cap K \subseteq \Phi(H)$.

[47], Лемма 11.2. *Пусть* H – *добавление к нормальной подгруппе* K *группы* G. *Тогда* $\pi(H) = \pi(G/K)$.

[47], Лемма 11.7. *Пусть нормальная подгруппа* K *группы* G *обладает* π-*дополнением в* G. *Тогда для любого* $p \in \pi$ *силовская p-подгруппа из* K *дополняема в любой ее содержащей силовской p-подгруппе группы* G.

[47], Лемма 11.8. *Пусть группа* G *имеет циклические силовские* p_i-

подгруппы, $i = 1, 2$. *Если* $p_1 < p_2$ *и* N *– нормализатор в* G *некоторой ее силовской* p_1*-подгруппы, то либо* $|N|$*, либо* $|G : N|$ *не делится на* p_2.

[47], Теорема 11.1. *Пусть* K *– нормальная подгруппа группы* G *со следующими свойствами:* 1) G/K *является* p*-группой;* 2) $K = O^p(K)$; 3) K *имеет абелеву силовскую* p*-подгруппу* P. *Тогда* K *обладает дополнением в* G.

[47], Следствие 11.4.1. *Нормальная подгруппа* K *группы* G *обладает* π*-дополнением в* G*, если для любого* $p \in \pi$ $G_p \cap K$ *абелева и дополняема в* G_p.

[66], Лемма 1.3.1. *Пусть* $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$ *и* $A \cap B = 1$. *Тогда* $A \subseteq C_G(B)$.

[66], Лемма 1.8.5. *Если* H/K *–* pd*-главный фактор группы* G *и* N *– нормальная* p'*-замкнутая подгруппа группы* G*, то* $N \subseteq C_G(H/K)$.

[66], Лемма 2.4.3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая* p*-локальная формация,* G *– группа и* $G^{\mathfrak{F}}$ p*-разрешима. Если* M *и* H *– максимальные* $\mathfrak{F}$*-абнормальные подгруппы в* G, $H_G \cap G^{\mathfrak{F}} = M_G \cap G^{\mathfrak{F}}$, $|G : M|$ *и* $|G : H|$ *–* pd*-числа, то* H *и* M *сопряжены.*

[66], Лемма 2.6.5. *Пусть* $G = M_1R_1 = M_2R_2$*, где* M_1 *и* M_2 *– максимальные подгруппы группы* G, R_1 *и* R_2 *– нильпотентные* $\mathfrak{F}$*-предельные нормальные подгруппы из* G, $K = R_1 \cap \Phi(G) = R_2 \cap \Phi(G)$ *и* $R_1 \subseteq M_2$. *Тогда* $M_1 \cap M_2$ *является* $\mathfrak{F}$*-критической максимальной подгруппой в* M_1 *и в* M_2.

ГЛАВА 2
ПРИМЕНЕНИЕ ω-ВЕЕРНЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП К ИССЛЕДОВАНИЮ КЛАССИЧЕСКИХ $\mathfrak{F}$-ПОДГРУПП В ГРУППАХ

Данная глава посвящена применению ω-веерных формаций с направлением δ_1 (ω-локальных формаций) к изучению таких классических $\mathfrak{F}$-подгрупп в конечных группах, как $\mathfrak{F}$-проекторы, $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы, $\mathfrak{F}$-нормализаторы. Глава состоит из семи параграфов. В параграфах 2.1 – 2.3 получено решение проблемы Дерка и Хоукса ([60], глава III, § 3, проблема B) о расширении универсума, в котором работает теория проекторов, за пределы класса $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп, а именно, здесь построена теория $\mathfrak{F}^\omega$-проекторов, где $\mathfrak{F}$ – произвольный непустой ω-примитивно замкнутый гомоморф, содержащий неразрешимые группы, и, в частности, ω-локальная формация, содержащая неразрешимые группы (решение Проблемы **(B)**). В параграфах 2.4 – 2.6 построена теория $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов, где $\mathfrak{F}$ – произвольная ω-локальная формация (решение Задачи **(E)**). При этом, в Теореме 2.5.5 получено решение проблемы Виландта [81] о дополняемости в конечной группе G $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ без условия абелевости его силовских подгрупп для случая ω-локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ (решение Проблемы **(A)**). В параграфе 2.7 содержатся известные результаты, используемые в Главе 2. Все основные результаты Главы 2 опубликованы в работах [96], [97] и получены автором диссертации самостоятельно, при этом идеи и методы доказательств обсуждались и согласовывались с В.А. Ведерниковым.

§ 2.1. ω-примитивно замкнутые классы и ω-примитивные группы

В данном параграфе приведены предварительные результаты, используемые при доказательстве утверждений параграфов 2.2 и 2.3.

Определение 2.1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – непустые классы групп, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ назовем *ω-насыщенным в* $\mathfrak{X}$, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и любой нормальной подгруппы N группы G такой, что $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$, из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Замечание 2.1.1. При $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ получаем определение ω-насыщенного класса групп [40].

Определение 2.1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – непустые классы групп, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{F}$ назовем *ω-примитивно замкнутым в $\mathfrak{X}$* или коротко *ωP-замкнутым в $\mathfrak{X}$*, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ из $G/Core_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы M группы G следует, что $G \in \mathfrak{F}$. ωP-замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф коротко будем называть *ωP-гомоморфом в $\mathfrak{X}$*. Будем говорить, что $\mathfrak{F}$ – ωP-замкнутый класс групп (ωP-гомоморф), если $\mathfrak{F}$ является ωP-замкнутым в $\mathfrak{E}$ классом (ωP-гомоморфом в $\mathfrak{E}$).

Замечание 2.1.2. Если $\omega = \pi(\mathfrak{F})$, то ω-насыщенный в $\mathfrak{X}$ класс (ωP-замкнутый в $\mathfrak{X}$ класс, ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$) $\mathfrak{F}$ становится насыщенным в $\mathfrak{X}$ классом (соответственно P-замкнутым в $\mathfrak{X}$ классом, P-гомоморфом в $\mathfrak{X}$).

Лемма 2.1.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда всякий ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$ является ω-насыщенным в $\mathfrak{X}$ классом.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенным в $\mathfrak{X}$ классом. Пусть $G \in \mathfrak{X}$, N – нормальная подгруппа группы G, $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ и $G/N \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Так как $N \subseteq \Phi(G)$, то по лемме 3.18(2) [18] $N \subseteq Core_G(M)$ для любой максимальной подгруппы M группы G. Тогда ввиду $N \subseteq O_\omega(G)$ получаем, что $N \subseteq Core_G(M) \cap O_\omega(G)$ для каждой максимальной подгруппы M из G. Поскольку $G/N \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – гомоморф, то $G/Core_G(M) \cap O_\omega(G) \cong (G/N)/(Core_G(M) \cap O_\omega(G)/N) \in \mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы M группы G. Отсюда в силу ωP-замкнутости в $\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F}$ – ω-насыщенный в $\mathfrak{X}$ класс групп. *Лемма доказана.*

Лемма 2.1.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда всякий P-замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф является ωP-замкнутым в $\mathfrak{X}$. В частности, каждый класс Шунка является ωP-гомоморфом.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – P-замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф. Покажем, что класс $\mathfrak{F}$ является ωP-замкнутым в $\mathfrak{X}$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и $G/Core_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы M группы G. Тогда $G/Core_G(M) \cong$

$(G/Core_G(M)\cap O_\omega(G))/(Core_G(M)/Core_G(M)\cap O_\omega(G))\in\mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы M группы G. Так как класс $\mathfrak{F}$ является P-замкнутым в $\mathfrak{X}$, то $G\in\mathfrak{F}$ и, значит, класс $\mathfrak{F}$ является ωP-замкнутым в $\mathfrak{X}$. *Лемма доказана.*

Определение 2.1.3. Группу G назовем *ω-примитивной*, если в G существует максимальная подгруппа M такая, что $Core_G(M)\cap O_\omega(G)=1$, а M будем называть *ω-примитиватором* группы G.

Замечание 2.1.3. Если $\omega=\pi(G)$, то ω-примитивная группа G становится примитивной группой, а M – ее примитиватором (см., например, [18], глава 4). Считаем, что в единичной группе $E=1$ не существует максимальной подгруппы. Поэтому E не является ω-примитивной группой.

Исследуем свойства ω-примитивных групп.

Лемма 2.1.3. *Пусть G – ω-примитивная группа с ω-примитиватором M и $F=F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G. Тогда либо F – ω'-группа, либо $F=F_p\times Q$, где $p\in\omega$, Q – ω'-группа, F_p является единственной минимальной нормальной ω-подгруппой группы G и $G=[F_p]M$.*

Доказательство. Пусть F не является ω'-группой. Тогда F – ωd-группа и F_ω – неединичная нормальная подгруппа группы G. Если $F_\omega\subseteq M$, то по определению 2.1.3 $F_\omega\subseteq Core_G(M)\cap O_\omega(G)=1$, что невозможно. Следовательно, $F_\omega\nsubseteq M$ и поэтому $G=MF_\omega$.

Пусть $K:=M\cap F_\omega$. Тогда $K\lhd M$. Поскольку $F_\omega\nsubseteq M$, то $K\subset F_\omega$ и по теореме 3.12(2) [18] $K<N_{F_\omega}(K)$. Поэтому $M<N_G(K)$ и, значит, $K\lhd G$. Тогда $K\subseteq Core_G(M)\cap O_\omega(G)=1$. Таким образом, $K=1$. Отсюда следует, что $G=[F_\omega]M$ и по лемме 4.39 [18] F_ω является минимальной нормальной подгруппой в G. Поэтому $F_\omega=F_p$ для некоторого $p\in\omega$. Тогда $F=F_p\times Q$, где Q – ω'-группа и $G=[F_p]M$.

Допустим, что в группе G существует минимальная нормальная ω-подгруппа R, отличная от F_p. Тогда $F_p\times R$ является нормальной ω-подгруппой в группе G и $D:=M\cap F_pR\lhd M$, причем D является неединичной ω-группой. Так как $D\subseteq C_G(F_p)$, то $F_p\subseteq C_G(D)$ и, значит, $G=F_pM\subseteq N_G(D)$. Следовательно, $D\lhd G$. По определению 2.1.3 $D\subseteq Core_G(M)\cap O_\omega(G)=1$. Получили противоречие. Следовательно, F_p является единственной минимальной нормальной ω-подгруппой группы G. *Лемма доказана.*

Теорема 2.1.1. *Пусть G – ω-примитивная группа, M – ее ω-примитиватор и $O_\omega(G) \neq 1$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *группа G содержит единственную минимальную нормальную ω-подгруппу N, $C_G(N) = N \times Core_G(M)$ и $G = [N]M$;*

2) *группа G содержит единственную минимальную нормальную ω-подгруппу N, $C_G(N) = Core_G(M)$ и $G = NM$;*

3) *группа G содержит точно две минимальные нормальные ω-подгруппы N_1 и N_2, причем $G = [N_1]M = [N_2]M$, $N_1 \cong N_2 \cong N_1N_2 \cap M$, $C_G(N_i) = N_{3-i} \times Core_G(M)$, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Так как $R := O_\omega(G) \neq 1$, то в группе G существует минимальная нормальная подгруппа N, содержащаяся в R. По условию G – ω-примитивная группа и M – ее ω-примитиватор. Тогда в силу определения 2.1.3 $N \cap Core_G(M) \leq R \cap Core_G(M) = 1$ и, значит, $N \not\subseteq M$. Поэтому $G = NM$. Пусть $C := C_G(N)$. Тогда подгруппа C нормальна в G. Поскольку $C \cap M \lhd M$ и $N \leq C_G(C \cap M) \leq N_G(C \cap M)$, то $C \cap M \lhd G$. Так как $N \cap Core_G(M) = 1$, то $Core_G(M) \leq C$ и, значит, $Core_G(M) \leq C \cap M$. Из $C \cap M \leq Core_G(M)$ следует, что $C \cap M = Core_G(M)$.

Пусть $N \subseteq C$. Тогда N – элементарная абелева p-группа для некоторого $p \in \omega$. Пусть $F := F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G. Так как $N \leq F$, то по лемме 2.1.3 $N = F_p$ – единственная минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, $G = [N]M$ и $C = N \times Core_G(M)$. Следовательно, G – группа типа 1).

Пусть $N \cap C = 1$ и $C \subseteq M$. Тогда N является прямым произведением попарно изоморфных простых неабелевых ω-групп и $C = Core_G(M)$. Допустим, что в группе G существует минимальная нормальная ω-подгруппа $L \neq N$. Тогда $L \leq C = Core_G(M)$ и $L \leq Core_G(M) \cap R = 1$. Получили противоречие. Следовательно, N – единственная минимальная нормальная ω-подгруппа группы G и G – группа типа 2).

Пусть $N \cap C = 1$ и $C \not\subseteq M$. Тогда N является прямым произведением попарно изоморфных простых неабелевых ω-подгрупп, $C \cap M = Core_G(M)$ и $G = CM = NM$. Пусть G содержит две различные минимальные нормальные

ω-подгруппы N_1 и N_2. Тогда можем считать, что N_1 и N_2 – неабелевы нормальные ω-подгруппы группы G, причем $N_i \not\subseteq M$, $i = 1, 2$. Следовательно, $G = MN_1 = MN_2$, причем $N_1 \cap N_2 = 1$. Допустим, что $D_i := M \cap N_i \neq 1$, $i = 1, 2$. Тогда $D_i \triangleleft M$ и $G = N_{3-i}M \leq N_G(D_i)$. Поэтому $D_i \triangleleft G$, что противоречит минимальности нормальной подгруппы N_i в группе G. Следовательно, $D_i = 1$ для любого $i = 1, 2$. Тогда $G = [N_1]M = [N_2]M$. Пусть $C_1 := C_G(N_1)$. Тогда $N_2 \leq C_1$ и, значит, $C_1 \not\subseteq M$. Поэтому $G = MC_1$, причем $M \cap C_1 = Core_G(M)$. Так как $N_2 \leq C_1$ и $G = MN_2$, то по модулярному тождеству $C_1 = N_2(M \cap C_1) = N_2 \times Core_G(M)$.

Допустим, что G содержит минимальную нормальную ω-подгруппу N_3, отличную от N_1 и N_2. Тогда $C_1 = N_3 \times Core_G(M) = (N_2 \times N_3)Core_G(M)$. Из $|C_1| = |N_2|\cdot|Core_G(M)| = (|N_2|\cdot|N_3|\cdot|Core_G(M)|)/(|N_2N_3 \cap Core_G(M)|)$ следует, что $|N_2N_3 \cap Core_G(M)| = |N_3|$. Поэтому $T := N_2N_3 \cap Core_G(M)$ – нормальная ω-подгруппа группы G порядка равного $|N_3|$. Тогда $T \leq Core_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$. Получили противоречие. Следовательно, группа G содержит точно две минимальные нормальные ω-подгруппы N_1 и N_2. *Теорема доказана.*

Следствие 2.1.1. (Бэр [54]). *Пусть G – примитивная группа, M – ее примитиватор. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

1) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, $C_G(N) = N$ и $G = [N]M$;*

2) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, $C_G(N) = 1$ и $G = NM$;*

3) *группа G содержит точно две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2, причем $G = [N_1]M = [N_2]M$, $N_1 \cong N_2 \cong N_1N_2 \cap M$, $C_G(N_i) = N_{3-i}$, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Полагая в условии теоремы 2.1.1 $\omega = \pi(G)$, получим, что G – примитивная группа, M – ее примитиватор, $O_\omega(G) = G \neq 1$ и каждая подгруппа из G является ω-подгруппой в G. Теперь из теоремы 2.1.1 непосредственно получаем утверждения 1) – 3) из заключения следствия 2.1.1. *Следствие доказано.*

Используя ω-примитивные группы, докажем следующее утверждение.

Лемма 2.1.4. *Пусть $\mathfrak{X}$ – гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустая формация, содержа-*

щаяся в $\mathfrak{X}$. Формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной в $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является ωP-замкнутой в $\mathfrak{X}$.

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной в $\mathfrak{X}$. Тогда по определению 2.1.1 для любой группы $H \in \mathfrak{X}$ и любой ее нормальной подгруппы N такой, что $N \leq \Phi(H) \cap O_\omega(H)$, справедливо:

$$\text{из } H/N \in \mathfrak{F} \text{ следует, что } H \in \mathfrak{F}. \qquad (2.1.1)$$

Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ является ωP-замкнутой в $\mathfrak{X}$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и для любой максимальной подгруппы M группы G выполняется

$$G/Core_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}. \qquad (2.1.2)$$

Установим, что $G \in \mathfrak{F}$. Если G – ω-примитивная группа, то по определению 2.1.3 найдется такая максимальная подгруппа L в G, что $Core_G(L) \cap O_\omega(G) = 1$. Тогда в силу (2.1.2) имеем $G \cong G/1 = G/Core_G(L) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$.

Пусть G не является ω-примитивной группой. Согласно лемме 3.18(2) [18] $\Phi(G) = \cap_{M <\cdot G} Core_G(M)$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то из (2.1.2) следует, что $G/\Phi(G) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$. Отсюда ввиду (2.1.1) получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что формация $\mathfrak{F}$ является ωP-замкнутой в $\mathfrak{X}$.

2. *Достаточность.* Пусть $\mathfrak{F}$ – ωP-замкнутая в $\mathfrak{X}$ формация. Тогда по лемме 2.1.1 формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной в $\mathfrak{X}$. *Лемма доказана.*

Основные результаты параграфа 2.1 опубликованы в работе [96].

§ 2.2. $\mathfrak{F}^\omega$-проекторы конечных групп

Определение 2.2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Подгруппу H группы G назовем *$\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G*, если для любой нормальной ω-подгруппы N группы G подгруппа HN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в фактор-группе G/N.

Замечание 2.2.1. Если $\omega = \pi(G)$, то $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G становится $\mathfrak{F}$-проектором в G ([65], см. также [60], определение III, 3.2).

Рассмотрим основные свойства $\mathfrak{F}^\omega$-проекторов групп.

Лемма 2.2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой гомоморф, N – нормальная ω-подгруппа группы G. Если H/N – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G/N и K – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы H, то K является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором группы G.*

Доказательство. Пусть H/N – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G/N и K – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы H. Так как N – нормальная ω-подгруппа группы H, то по определению 2.2.1 подгруппа KN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной в H/N. Поскольку H/N – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G/N и N/N – нормальная ω-подгруппа группы G/N, то ввиду определения 2.2.1 H/N – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/N и по определению $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппы $H/N \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $KN/N = H/N$ и $H = KN$.

Покажем, что K является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G. Действительно, так как K – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы H, то ввиду определения 2.2.1 и определения $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппы $K \in \mathfrak{F}$. Пусть $K \leq U \leq G$ и $U \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $U = K$. Поскольку $\mathfrak{F}$ – гомоморф, то

$$H/N = KN/N \leq UN/N \cong U/U \cap N \in \mathfrak{F}.$$

Так как подгруппа H/N $\mathfrak{F}$-максимальна в G/N, то $H/N = UN/N$. Следовательно, $U \leq H$. Тогда из $\mathfrak{F}$-максимальности подгруппы K в H получаем $K = U$ и по определению $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппы K – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G.

Предположим, что подгруппа K не является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором группы G. Тогда найдется такая нормальная ω-подгруппа A в G, что KA/A не является $\mathfrak{F}$-максимальной в G/A. В этом случае в G/A существует подгруппа $B/A \in \mathfrak{F}$ такая, что $KA/A \subset B/A$. Поскольку H/N – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G/N и AN/N – нормальная ω-подгруппа в G/N, то $(H/N \cdot AN/N)/(AN/N) = (HA/N)/(AN/N)$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в $(G/N)/(AN/N)$ и поэтому HA/NA – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/NA. Так как

$$(B/A \cdot AN/A)/(AN/A) \cong BN/AN \cong$$

$$\cong B/B \cap AN \cong (B/A)/((B/A) \cap (AN/A)) \in \mathfrak{F}$$

и $HA/NA = KNA/NA \leq BN/AN$, то из $\mathfrak{F}$-максимальности подгруппы HA/NA в G/NA получаем $HA = KNA = BN$. Тогда $B = B \cap AKN =$

$AK(B\cap N)\leq AH$. Поскольку K – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы H и $A\cap H$ – нормальная ω-подгруппа в H, то $K(A\cap H)/(A\cap H)$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в $H/A\cap H$. Так как $K(A\cap H)/(A\cap H)\cong K/(K\cap H\cap A)=K/K\cap A\cong KA/A$ и $H/H\cap A\cong HA/A$, то KA/A – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в HA/A. Следовательно, из $KA/A\leq B/A\leq HA/A$ получаем, что $KA/A=B/A$. Противоречие. Таким образом, подгруппа K является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором группы G. *Лемма доказана.*

Установим достаточное условие существования в группе $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторов для непустого ωP-гомоморфа $\mathfrak{F}$ в наследственном гомоморфе $\mathfrak{X}$.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$ и $G\in\mathfrak{X}$. Если G обладает $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной ω-подгруппой, то в G существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор.*

Доказательство. Пусть N – $\mathfrak{F}$-корадикальная нормальная ω-подгруппа группы $G\in\mathfrak{X}$. Предположим, что G не имеет $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора, причем G – группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда $G\notin\mathfrak{F}$ и поэтому $N\neq 1$. Следовательно, $O_{\omega}(G)\neq 1$. Пусть L – произвольная неединичная нормальная ω-подгруппа группы G. Так как $NL/L\cong N/N\cap L$ – ω-группа и $(G/L)/(NL/L)\cong G/NL\cong (G/N)/(NL/N)\in\mathfrak{F}$, то группа G/L имеет $\mathfrak{F}$-корадикальную нормальную ω-подгруппу. Поскольку $G\in\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ – гомоморф, то $G/L\in\mathfrak{X}$. Так как $|G/L|<|G|$, то по индукции в G/L существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор T/L. Тогда по определению 2.2.1 $((T/L)(NL/L))/(NL/L)$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в фактор-группе $(G/L)/(NL/L)$. Отсюда следует, что $(TN)/(NL)$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в фактор-группе $G/(NL)$. Так как $G/(NL)\in\mathfrak{F}$, то $TN=G$. Поскольку $G/N=TN/N\cong T/T\cap N\in\mathfrak{F}$ и $T\cap N$ – ω-группа, то группа T обладает $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной ω-подгруппой. В силу наследственности класса $\mathfrak{X}$ из $G\in\mathfrak{X}$ получаем, что $T\in\mathfrak{X}$. Если T – собственная подгруппа в G, то ввиду выбора группы G в T существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор K. Тогда по лемме 2.2.1 K – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G. Получили противоречие. Следовательно, $T=G$. Это означает, что G/L – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор в G/L и поэтому $G/L\in\mathfrak{F}$. Таким образом,

$$\begin{gathered}\text{для любой неединичной нормальной } \omega\text{-подгруппы } L\\ \text{группы } G \text{ справедливо } G/L\in\mathfrak{F}.\end{gathered}\tag{2.2.1}$$

Покажем, что G – ω-примитивная группа. Действительно, если $Core_G(M) \cap O_\omega(G) \neq 1$ для любой максимальной подгруппы M из G, то по (2.2.1) $G/Core_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$. Так как класс $\mathfrak{F}$ является ωP-гомоморфом в $\mathfrak{X}$, то отсюда получаем $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, найдется максимальная подгруппа M в G такая, что $Core_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$. Это означает, что G – ω-примитивная группа. Поскольку $O_\omega(G) \neq 1$, то по теореме 2.1.1 группа G имеет не более двух минимальных нормальных ω-подгрупп.

Покажем, что G обладает единственной минимальной нормальной ω-подгруппой. Пусть A – минимальная нормальная ω-подгруппа группы G. По (2.2.1) справедливо $G/A \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $A \cap M = 1$. Тогда $G = MA$. Проверим, что в этом случае M является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G.

Предварительно установим, что M – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G. Действительно, $M \cong M/1 = M/M \cap A \cong MA/A = G/A \in \mathfrak{F}$, т.е. $M \in \mathfrak{F}$. Пусть $M \leq U \leq G$ и $U \in \mathfrak{F}$. Поскольку $M < \cdot G$ и $G \notin \mathfrak{F}$, то $M = U$. Это означает, что M является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G.

Пусть B – произвольная нормальная ω-подгруппа группы G. Покажем, что MB/B – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/B. Если $B = 1$, то утверждение верно. Пусть $B \neq 1$. Если $B \subseteq M$, то $B \subseteq Core_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$, что невозможно. Поэтому $B \nsubseteq M$ и, значит, $G = MB$. Тогда ввиду (2.2.1) $MB/B = G/B \in \mathfrak{F}$. Это означает, что MB/B – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/B. Тем самым установлено, что M является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G. Получили противоречие. Следовательно, $M \cap A \neq 1$ и в силу теоремы 2.1.1 A является единственной минимальной нормальной ω-подгруппой группы G.

Пусть H – добавление к A в группе G. Согласно лемме 11.1 [47] $G = HA$ и $A \cap H \subseteq \Phi(H)$. Так как A – ω-группа, то $H \cap A \subseteq \Phi(H) \cap O_\omega(H)$, причем $H/H \cap A \cong HA/A = G/A \in \mathfrak{F}$. По условию $\mathfrak{F}$ – ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$. Тогда по лемме 2.1.1 $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенным в $\mathfrak{X}$ классом. Поэтому из $H \in \mathfrak{X}$ и $H/H \cap A \in \mathfrak{F}$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Тогда в G найдется $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа R такая, что $H \subseteq R$. Покажем, что в этом случае R является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G. Пусть S – нормальная ω-подгруппа из G. Проверим, что RS/S – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G/S. Так как $R \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – гомоморф, то $RS/S \in \mathfrak{F}$. Пусть $RS/S \leq V/S \leq G/S$ и $V/S \in \mathfrak{F}$. Если $S = 1$, то $RS/S \cong$

R и поэтому RS/S – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/S. Пусть $S \neq 1$. Тогда $A \subseteq S$ и, значит, $G = HA = HS = RS$. Следовательно, $RS/S = G/S$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/S. Таким образом, R является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G. Получили противоречие. *Теорема доказана.*

Лемма 2.2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Если H – $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G и N – нормальная ω-подгруппа в G, то HN/N – $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G/N.*

Доказательство. Пусть H – $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G и N – нормальная ω-подгруппа в G. Покажем, что HN/N – $\mathfrak{F}^\omega$-проектор в G/N. Пусть K/N – нормальная ω-подгруппа группы G/N. Проверим, что $(HN/N \cdot K/N)/(K/N)$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G/N. Так как K/N – ω-группа и N – ω-группа, то K – нормальная ω-подгруппа группы G. Поэтому HK/K – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/K. Поскольку $(HN/N \cdot K/N)/(K/N) = (HK/N)/(K/N) \cong HK/K$ и $(G/N)/(K/N) \cong G/K$, то $(HN/N \cdot K/N)/(K/N)$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в $(G/N)/(K/N)$. Тем самым установлено, что HN/N – $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G/N. *Лемма доказана.*

Теорема 2.2.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф и $\mathfrak{F}$ – непустой подкласс класса $\mathfrak{X}$. Если каждая группа $G \in \mathfrak{X}$ с $O_\omega(G) \neq 1$ обладает $\mathfrak{F}^\omega$-проектором, то справедливы следующие утверждения*:

1) *класс $\mathfrak{F}$ является ωP-замкнутым в $\mathfrak{X}$*;

2) *если $H \in \mathfrak{F}$ и N – нормальная ω-подгруппа группы H, то $H/N \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть каждая группа $G \in \mathfrak{X}$ с $O_\omega(G) \neq 1$ имеет по крайней мере один $\mathfrak{F}^\omega$-проектор.

1) Покажем, что $\mathfrak{F}$ является ωP-замкнутым в $\mathfrak{X}$ классом. Допустим, что существует группа $G_1 \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$ такая, что $G_1/Core_{G_1}(S) \cap O_\omega(G_1) \in \mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы S группы G_1, причем G_1 – группа наименьшего порядка с таким свойством. По условию теоремы в G_1 существует $\mathfrak{F}^\omega$-проектор R. Так как $R \in \mathfrak{F}$, то $R \subset G_1$. Тогда найдется максимальная подгруппа M группы G_1 такая, что $R \subseteq M$. Согласно определению 2.2.1 $R(Core_{G_1}(M) \cap O_\omega(G_1))/(Core_{G_1}(M) \cap O_\omega(G_1))$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы $G_1/Core_{G_1}(M) \cap O_\omega(G_1)$. В силу выбора группы G_1 справедливо

$G_1/Core_{G_1}(M) \cap O_\omega(G_1) = R(Core_{G_1}(M) \cap O_\omega(G_1))/(Core_{G_1}(M) \cap O_\omega(G_1))$. Тогда $G_1 = R(Core_{G_1}(M) \cap O_\omega(G_1)) \subseteq M$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что класс $\mathfrak{F}$ является ωP-замкнутым в $\mathfrak{X}$.

2) Пусть $H \in \mathfrak{F}$ и N – нормальная ω-подгруппа группы H. Покажем, что $H/N \in \mathfrak{F}$. Если $N = 1$, то утверждение верно. Пусть $N \neq 1$. Так как $H \in \mathfrak{X}$, то по условию в H существует $\mathfrak{F}^\omega$-проектор. Поскольку $H \in \mathfrak{F}$, то H является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в H и по лемме 2.2.2 H/N является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в H/N. Следовательно, $H/N \in \mathfrak{F}$. *Теорема доказана.*

Следствие 2.2.1. (Эриксон [61]). *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф и $\mathfrak{F}$ – непустой подкласс класса $\mathfrak{X}$. В любой группе $G \in \mathfrak{X}$ существует $\mathfrak{F}$-проектор тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является примитивно замкнутым в $\mathfrak{X}$ гомоморфом.*

Основные результаты параграфа 2.2 опубликованы в работе [96].

§ 2.3. $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающие подгруппы конечных групп

Определение $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы было введено Гашюцом в 1963 году в работе [64]. Следуя [64], сформулируем определение $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппы.

Определение 2.3.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Подгруппу H группы G назовем $\mathfrak{F}^\omega$-*покрывающей подгруппой* группы G, если $H \in \mathfrak{F}$ и из того, что $H \leq U \leq G$, V – нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$ следует, что $U = HV$.

Замечание 2.3.1. Если $\omega = \pi(G)$, то $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G становится $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой в G [64].

Рассмотрим ряд простейших свойст $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающих подгрупп.

Лемма 2.3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – гомоморф. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой группы G тогда и только тогда, когда H является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором каждой подгруппы группы G, в которой H содержится.*

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть H – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G. Тогда по определению 2.3.1 $H \in \mathfrak{F}$ и

$$\begin{gathered}\text{из того, что } H \le U \le G,\ V \text{ -- нормальная } \omega\text{-подгруппа} \\ \text{группы } U \text{ и } U/V \in \mathfrak{F}, \text{ следует, что } U = HV.\end{gathered} \tag{2.3.1}$$

Покажем, что H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором каждой подгруппы группы G, содержащей H. Предположим, что существует такая подгруппа K в G, что $H \subseteq K$, но H не является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором в K. Тогда в K найдется нормальная ω-подгруппа L такая, что HL/L не является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в K/L. Так как $H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – гомоморф, то $HL/L \in \mathfrak{F}$. Пусть M/L – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в K/L, содержащая HL/L. Тогда $HL < M$. С другой стороны, поскольку $H \le M \le G$, L – нормальная ω-подгруппа в M и $M/L \in \mathfrak{F}$, то ввиду (2.3.1) $M = HL$. Получили противоречие. Следовательно, H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором в любой подгруппе группы G, содержащей H.

2. *Достаточность.* Пусть H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором каждой подгруппы группы G, в которой H содержится. Ввиду определения 2.2.1 и определения $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппы $H \in \mathfrak{F}$. Пусть $H \le U \le G$, V – нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$. По условию H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором в U. Так как V – нормальная ω-подгруппа в U, то по определению 2.2.1 HV/V – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в U/V. Отсюда в силу $U/V \in \mathfrak{F}$ получаем $HV/V = U/V$ и, значит, $U = HV$. Тогда по определению 2.3.1 H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой группы G. *Лемма доказана.*

Лемма 2.3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – гомоморф и G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *Если H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G и H – максимальная подгруппа группы G, то H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G*;

2) *Если H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G и $H \le K \le G$, то H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в K*;

3) *Если H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G и N – нормальная ω-подгруппа в G, то HN/N является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G/N*;

4) *Если N – нормальная ω-подгруппа в G и H/N – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G/N, то каждая $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа из H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G.*

Доказательство. 1) Пусть H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G и H – максимальная подгруппа группы G. Покажем, что H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G. Пусть $H \le U \le G$, V – нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$. Проверим, что $U = HV$. Действительно, из $H \le U \le G$ в силу максимальности H в G получаем, что либо $H = U$, либо $U = G$. Если $H = U$, то $U = UV = HV$. Пусть $U = G$. Так как H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы $G = U$ и V – нормальная ω-подгруппа группы G, то по определению 2.2.1 HV/V – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G/V. Поскольку $G/V = U/V \in \mathfrak{F}$, то $HV/V = G/V$ и поэтому $HV = G = U$. Таким образом, H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G.

2) Пусть H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G и $H \le K \le G$. Покажем, что H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в K. В самом деле, если $H \le U \le K$, V – нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$, то по определению 2.3.1 $U = HV$.

3) Пусть H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G и N – нормальная ω-подгруппа в G. Покажем, что HN/N является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G/N. Согласно лемме 2.3.1 H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором группы G. Тогда по лемме 2.2.2 HN/N – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G/N. Пусть K/N – подгруппа в G/N, содержащая HN/N. Покажем, что HN/N является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором в K/N. Действительно, так как $H \le K$, то по пункту 2) подгруппа H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в K и ввиду леммы 2.3.1 H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор в K. Отсюда по лемме 2.2.2 получаем, что HN/N – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор в K/N. Это, согласно лемме 2.3.1, означает, что HN/N является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G/N.

4) Пусть N – нормальная ω-подгруппа группы G, H/N – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G/N и K – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы H. Покажем, что K является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G. Согласно лемме 2.3.1 K является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором в H. Тогда по определению 2.2.1 KN/N – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в H/N. Так как H/N – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G/N, то по определению 2.3.1 $H/N \in \mathfrak{F}$. Поэтому $KN/N = H/N$ и $H = KN$. Из того, что K – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор в H, N – нормальная ω-подгруппа группы G и H/N – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор в G/N, по лемме 2.2.1 получаем, что подгруппа K является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором в G.

Пусть $K \le U \le G$, V – нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$.

Проверим, что $U = KV$. Так как $H = KN \leq UN$, то $H/N = KN/N \leq UN/N \leq G/N$. Поскольку VN/N – нормальная ω-подгруппа в UN/N и H/N – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G/N, то по определению 2.3.1

$$UN/N = H/N \cdot VN/N = HVN/N = KVN/N$$

и, значит, $UN = KVN$. Так как $K(U \cap N) = U \cap KN = U \cap H$, то $U = U \cap UN = U \cap KVN = KV(U \cap N) = (U \cap H)V$. Тогда

$$U/V = (U \cap H)V/V = (U \cap H)/(U \cap H \cap V) = (U \cap H)/(V \cap H) \in \mathfrak{F}.$$

Таким образом, $K \leq U \cap H \leq H$, $V \cap H$ – нормальная ω-подгруппа в $U \cap H$ и $(U \cap H)/(V \cap H) \in \mathfrak{F}$. Тогда по определению 2.3.1 $U \cap H = K(V \cap H)$ и поэтому $U = V(U \cap H) = V(V \cap H)K = VK$. Следовательно, K – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G. *Лемма доказана.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп, G – группа, A – нормальная ω-подгруппа группы G. Следуя [60] (см. также [18], глава 5), через $Proj_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$ обозначим совокупность всех $\mathfrak{F}^\omega$-проекторов группы G, $Cov_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$ – совокупность всех $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающих подгрупп группы G, $Comp_G(A)$ – совокупность всех дополнений к подгруппе A в G.

В следующей теореме для группы G с абелевой минимальной нормальной ω-подгруппой A установлена взаимосвязь между множествами $Proj_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$, $Cov_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$ и $Comp_G(A)$.

Теорема 2.3.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$, A – абелева минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, $G/A \in \mathfrak{F}$. Тогда $Proj_{\mathfrak{F}^\omega}(G) = Cov_{\mathfrak{F}^\omega}(G) = Comp_G(A)$.*

Доказательство. Отметим, что согласно теореме 2.2.1 в группе G существует $\mathfrak{F}^\omega$-проектор и поэтому $Proj_{\mathfrak{F}^\omega}(G) \neq \emptyset$. Применим индукцию по порядку группы G. Пусть H – $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G. Тогда из определения 2.2.1 и определения $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппы следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Согласно лемме 2.2.2 HA/A является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G/A. По условию теоремы $G/A \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $HA/A = G/A$ и $G = HA$. Если $G = H$, то $G \in \mathfrak{F}$, что противоречит условию теоремы. Поэтому $G \neq H$. Из $G = HA$ получаем, что $A \nsubseteq H$. Так как A – абелева группа, то подгруппа $A \cap H$ нормальна в G. Поскольку

A – минимальная нормальная подгруппа группы G и $A \nsubseteq H$, то $A \cap H = 1$. Таким образом, $G = [A]H$ и H – максимальная подгруппа в G. Тогда по лемме 2.3.2(1) H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G. Поэтому $Proj_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G) \subseteq Cov_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G)$. Из леммы 2.3.1 следует, что $Cov_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G) \subseteq Proj_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G)$. Следовательно, $Proj_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G) = Cov_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G)$. Из $G = [A]H$ получаем, что $H \in Comp_G(A)$. Таким образом, $Cov_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G) = Proj_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G) \subseteq Comp_G(A)$.

Пусть $B \in Comp_G(A)$. Это означает, что $G = [A]B$ и B – максимальная подгруппа группы G. Рассмотрим случай, когда $Core_G(H \cap B) \cap O_{\omega}(G) \neq 1$. Пусть N – минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, содержащаяся в $H \cap B$. Так как $(AN/N) \cap (B/N) = (AN \cap B)/N = N(A \cap B)/N = N/N$, то $G/N = [AN/N](B/N)$ и $B/N \in Comp_{G/N}(AN/N)$. Проверим, что для G/N справедливо условие теоремы. Действительно, так как $N \subseteq H \cap B$, то $A \nsubseteq N$ и ввиду леммы 2.36(3) [18] AN/N – абелева минимальная нормальная ω-подгруппа в G/N. Далее, поскольку класс $\mathfrak{F}$ является гомоморфом, то $(G/N)/(AN/N) \cong G/AN \cong (G/A)/(AN/A) \in \mathfrak{F}$. Так как $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ – гомоморф, то $G/N \in \mathfrak{X}$. Покажем, что $G/N \notin \mathfrak{F}$. Согласно лемме 2.2.2 H/N – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G/N. Если $G/N \in \mathfrak{F}$, то $H/N = G/N$ и, значит, $G = H \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Поэтому $G/N \notin \mathfrak{F}$. Таким образом, группа G/N удовлетворяет условию теоремы. Тогда по индукции $B/N \in Cov_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G/N)$. Так как $B \cong G/A \in \mathfrak{F}$, то $B \in Cov_{\mathfrak{F}^{\omega}}(B)$ и по лемме 2.3.2(4) $B \in Cov_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G)$. Таким образом, в случае, когда $Core_G(H \cap B) \cap O_{\omega}(G) \neq 1$, получаем $Comp_G(A) \subseteq Cov_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G) = Proj_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G)$.

Пусть теперь $Core_G(H \cap B) \cap O_{\omega}(G) = 1$. Предположим, что $Core_G(B) \cap O_{\omega}(G) \neq 1$ и K – минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, содержащаяся в B. Пусть $T := AK \cap H$. Покажем, что подгруппа T является нормальной в G. В самом деле, так как $AK = A \times K$ и A – абелева группа, то $A \subseteq C_G(AK)$ и поэтому $A \subseteq N_G(T)$. Ввиду $H \subseteq N_G(T)$ получаем $G = HA \subseteq N_G(T)$. Следовательно, T – нормальная ω-подгруппа в G. В силу $Core_G(H \cap B) \cap O_{\omega}(G) = 1$ имеем $T \nsubseteq B$. Поскольку B – максимальная подгруппа группы G, то $G = TB$. Тогда из $B \in \mathfrak{F}$ получаем $G/T = BT/T \cong B/B \cap T \in \mathfrak{F}$. Из $H \in Proj_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G)$ по лемме 2.2.2 следует, что $H/T \in Proj_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G/T)$. Поскольку $G/T \in \mathfrak{F}$, то $G = H$, что невозможно. Следовательно, $Core_G(B) \cap O_{\omega}(G) = 1$. Тогда для любой неединичной нормальной ω-подгруппы L группы G справедливо $L \not\subseteq B$ и поэтому $G = BL$. Так как $B \in \mathfrak{F}$, то $G/L = BL/L \in \mathfrak{F}$. Таким образом, BL/L – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/L для любой нормальной ω-подгруппы L из G. Согласно определению 2.2.1 B является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором в G и поэтому $Comp_G(A) \subseteq Proj_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G) = Cov_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G)$.

Тем самым установлено, что $Proj_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G) = Cov_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G) = Comp_G(A)$. *Теорема доказана.*

Поскольку всякий класс Шунка, согласно лемме 2.1.2, является ωP-гомоморфом для любого непустого множества простых чисел ω, то при $\omega = \pi(G)$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ из теоремы 2.3.1 непосредственно вытекает следующий результат.

Следствие 2.3.1. ([18], теорема 5.19). *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Шунка, A – минимальная нормальная подгруппа группы G, причем $G \notin \mathfrak{F}$, а $G/A \in \mathfrak{F}$. Если A абелева, то $Proj_{\mathfrak{F}}(G) = Cov_{\mathfrak{F}}(G) = Comp_G(A)$.*

Замечание 2.3.2. Условия, при которых множество всех $\mathfrak{F}$-проекторов и множество всех $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп группы совпадают, также рассматриваются в [60] (см., например, [60], лемма III, 3.9(b)).

Теорема 2.3.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X}$, N – нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G. Если H – $\mathfrak{F}$-подгруппа в G такая, что $G = HN$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппе группы G. В частности, если H – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G такая, что $G = HN$, то H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G. Если $G \in \mathfrak{F}$, то G – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G. В этом случае утверждение верно. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Если $N = 1$, то $H = G$ – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G и утверждение верно. Пусть $N \neq 1$ и A – минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, содержащаяся в N. Покажем, что для G/A выполняется условие теоремы. Действительно, N/A – нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G/A. В силу того, что класс $\mathfrak{X}$ является гомоморфом, $G/A \in \mathfrak{X}$. Так как $H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – гомоморф, то $HA/A \in \mathfrak{F}$. Поскольку $G = HN$, то $G/A = (HA/A)(N/A)$. Таким образом, по индукции для G/A выполняется заключение теоремы. Это означает, что существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа K/A в группе G/A такая, что $HA/A \subseteq K/A$.

Рассмотрим случай, когда $K < G$. Покажем, что K удовлетворяет условию теоремы. В самом деле, $K \cap N$ – нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы K, H – $\mathfrak{F}$-подгруппа в K, $K = G \cap K = HN \cap K = H(N \cap K)$. Ввиду наследственности класса $\mathfrak{X}$, имеем $K \in \mathfrak{X}$. Тогда по индукции существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа R группы K, содержащая H. Отсюда, согласно лемме 2.3.2(4), получаем, что R – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G. Таким образом, в данном случае утверждение верно.

Пусть теперь $G = K$. Тогда $G/A = K/A \in \mathfrak{F}$. Так как A – ω-группа, то группа G обладает $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной ω-подгруппой и по теореме 2.2.1 группа G обладает $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором. Пусть T – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G. Согласно теореме 2.3.1 T является дополнением к A в G и T – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G. Так как $G = [A]T$ и A – абелева минимальная нормальная ω-подгруппа в G, то T – максимальная подгруппа в G. Покажем, что подгруппа $N \cap T$ нормальна в G. Действительно, поскольку A нормальна в N и N нильпотентна, то $A \subseteq C_G(N)$ и поэтому $A \subseteq N_G(N \cap T)$. Тогда $G = TA \subseteq N_G(N \cap T)$, и значит, $N \cap T$ – нормальная ω-подгруппа группы G. Если $N \cap T \neq 1$, то подгруппу A можно выбрать содержащейся в $N \cap T$. Тогда $G = TA = T \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, $N \cap T = 1$. Тогда из $A \subseteq N$ и $G = [A]T = [N]T$ получаем $N = A$ – минимальная нормальная ω-подгруппа в G. Кроме того, $H \cap N$ – нормальная подгруппа в G. Если $H \cap N = N$, то $N \subseteq H$ и $G = HN = H \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Таким образом, $H \cap N = 1$ и подгруппа H является дополнением к N в G. По теореме 2.3.1 H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G, содержащая H. *Теорема доказана.*

При $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 2.3.2 непосредственно получаем следующие известные результаты.

Следствие 2.3.2. (Эриксон [61]). *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой P-гомоморф в $\mathfrak{X}$. Если H – $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G и $G = HF(G) \in \mathfrak{X}$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе группы G.*

Следствие 2.3.3. (Гашюц, см. [60], лемма III, 3.14). *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Шунка, G – группа, N – нильпотентная нормальная подгруппа группы G.*

Если H – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G такая, что $G = HN$, то H является $\mathfrak{F}$-проектором группы G.

Следствие 2.3.4. (Шеметков [47], теорема 15.9(1)). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Если H – $\mathfrak{F}$-подгруппа в G такая, что $G = HF(G)$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе группы G.*

Доказательство. Ввиду следствия 1.1.2, теоремы 1 [40] и леммы 2.1.3 $\mathfrak{F}$ – ωP-гомоморф для любого непустого множества простых чисел ω. Тогда при $\omega = \pi(G)$ из теоремы 2.3.2 непосредственно получаем заключение следствия 2.3.4. *Следствие доказано.*

В следующей теореме для группы G, обладающей нильпотентной нормальной ω-подгруппой, изучаются вопросы принадлежности ее подгрупп ω-локальной формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 2.3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, N – нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G, H и M – такие подгруппы группы G, что $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq M$ и $G = HN$. Если H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в M, то $M \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы M. Применим индукцию по порядку группы G. Рассмотрим случай, когда $M < G$. Покажем, что M удовлетворяет условию теоремы. Действительно, $M = M \cap G = M \cap HN = H(M \cap N)$ и $M \cap N$ – нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы M. Следовательно, M удовлетворяет условию теоремы и по индукции $M \in \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $M = G$. Так как H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в $M = G$, то согласно определению 1.2.2 существует максимальная цепь группы G вида $H = H_m \subset H_{m-1} \subset \ldots \subset H_1 \subset H_0 = G$, где $m \geq 0$, такая, что H_i – $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа в H_{i-1} для любого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Индукцией по m докажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Если $m = 0$, то $H = G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $m > 0$. По предположению индукции $H_1 \in \mathfrak{F}$. Поскольку H_1 – $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа в G, то по определению 1.2.2 $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H_1$. Так как $H \subseteq H_1$, то $G = H_1 N$ и по теореме 2.3.2 при $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ получаем, что H_1 является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G. Тогда из определения 2.3.1 при

$U = G$, $V = G^{\mathfrak{F}}$ получаем $G = H_1G^{\mathfrak{F}} = H_1$. Таким образом, $M = G \in \mathfrak{F}$. *Теорема доказана.*

Следствие 2.3.5. (Хоукс [72]; см. также [47], теорема 15.10). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом, H и M – такие подгруппы группы G, что $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq M$ и $G = HF(G)$. Если H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в M, то $M \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в M. Ввиду следствия 1.1.2 $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация для любого непустого множества простых чисел ω. Тогда при $\omega = \pi(G)$ и $N = F(G)$ из теоремы 2.3.3 непосредственно получаем заключение следствия 2.3.5. *Следствие доказано.*

В следующей теореме установлена взаимосвязь между $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторами и $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающими подгруппами в группе для непустого ωP-гомоморфа $\mathfrak{F}$ в наследственном гомоморфе $\mathfrak{X}$.

Теорема 2.3.4. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$, G – $\mathfrak{X}$-группа, обладающая $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой $\mathfrak{F}$-корадикальной ω-подгруппой. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором в G тогда и только тогда, когда H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G*

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G. Тогда из определения 2.2.1 следует, что H является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в группе G. Применяя индукцию по порядку группы G, покажем, что H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G = H$ и в силу определения 2.3.1 G – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G. Таким образом, в этом случае утверждение верно.

Пусть $G \notin \mathfrak{F}$ и L – $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимая $\mathfrak{F}$-корадикальная нормальная ω-подгруппа группы G. Тогда $L \neq 1$. Пусть A – минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, содержащаяся в L, и $\pi := \pi(\mathfrak{F})$. Так как $(G/A)/(L/A) \cong G/L \in \mathfrak{F}$, то G/A обладает π-разрешимой $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной ω-подгруппой. Поскольку $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ – гомоморф, то $G/A \in \mathfrak{X}$. Согласно лемме 2.2.2 подгруппа HA/A является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором группы G/A и по индукции HA/A – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G/A. Пусть $K := HA$.

Пусть A является π-группой. Так как A – π-разрешимая группа, то A является элементарной абелевой p-группой для некоторого $p \in \pi$. Покажем, что для группы K выполняются условия теоремы 2.3.2. Действительно, A – нильпотентная нормальная ω-подгруппа в K и H – $\mathfrak{F}$-подгруппа в K. Так как $\mathfrak{X}$ – наследственный класс, то $K \in \mathfrak{X}$. Поскольку H – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G, то H – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в K. Тогда по теореме 2.3.2 H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в K. Так как K/A – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G/A, то согласно лемме 2.3.2(4) H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G.

Пусть A – π'-группа. Так как $H \in \mathfrak{F}$, то H является π-группой. Тогда в силу теоремы 4.32 [18] имеем: $K = H[A]$, H является S_π-подгруппой группы K, причем любые две S_π-подгруппы группы K сопряжены в K. Покажем, что H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой группы K. Пусть $H \leq U \leq K$ и $U/V \in \mathfrak{F}$, где V – нормальная ω-подгруппа в группе U. Тогда H является S_π-подгруппой группы U, а по лемме 4.34(2) [18] HV/V является S_π-подгруппой группы U/V. Так как $U/V \in \mathfrak{F}$, то U/V является π-группой. Тогда $HV/V = U/V$ и, значит, $U = HV$. По определению 2.3.1 H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в K. Так как K/A – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G/A, то по лемме 2.3.2(4) H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в группе G.

2. *Достаточность.* Пусть H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G. Тогда по лемме 2.3.1 H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором группы G. *Теорема доказана.*

Применяя лемму 2.1.2, из теоремы 2.3.4 при $\omega = \pi(G)$ непосредственно получаем следующий результат.

Следствие 2.3.6. (Эриксон [61]). *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой P-гомоморф в $\mathfrak{X}$, G – $\mathfrak{X}$-группа, обладающая $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной подгруппой. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$-проектором в G тогда и только тогда, когда H – $\mathfrak{F}$-покрывающая подгруппа в G.*

Применяя теорему 1 [40] и лемму 2.1.3, из теоремы 2.3.4 при $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ получаем следующее утверждение.

Следствие 2.3.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, G – группа, $G^{\mathfrak{F}}$ – $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимая ω-группа. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором в G тогда и только тогда, когда H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G.*

Ввиду следствия 1.1.2, получаем результат для локальной формации.

Следствие 2.3.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$-проектором в G тогда и только тогда, когда H – $\mathfrak{F}$-покрывающая подгруппа в G.*

В следующей теореме для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлено существование и сопряженность $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающих подгрупп в группе с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом, являющимся ω-группой.

Теорема 2.3.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая ω-локальная формация, $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G является $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой ω-группой. Тогда группа G имеет, по крайней мере, одну $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающую подгруппу (один $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор) и любые две $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающие подгруппы (два $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора) из G сопряжены в G.*

Доказательство. Так как согласно теореме 1 [40] $\mathfrak{F}$ – ω-насыщенная формация, то по лемме 2.1.3 при $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ получаем, что $\mathfrak{F}$ является ωP-гомоморфом. Тогда по теореме 2.2.1 в группе G существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор. Согласно теореме 2.3.4 $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G. Таким образом, группа G имеет по крайней мере одну $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающую подгруппу.

Пусть H_1 и H_2 – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающие подгруппы группы G и $\pi := \pi(\mathfrak{F})$. Покажем, что H_1 и H_2 сопряжены в G. Применим индукцию по порядку группы G. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G = H_1 = H_2$ и, значит, утверждение верно. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$.

Согласно лемме 2.3.2(3) H_1L/L и H_2L/L – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающие подгруппы в G/L. Проверим, что для G/L выполняются условия теоремы. Действительно, по лемме 1.2(1) [47] $(G/L)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}L/L$ и поэтому $(G/L)^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа. Тогда по индукции H_1L/L и H_2L/L сопряжены в G/L. Следовательно, найдется такой элемент $x \in G$, что $H_1L/L = H_2^xL/L$ и, значит, $H_1L = H_2^xL$. Поскольку H_2 – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G, то нетрудно проверить, что H_2^x является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G. Тогда по лемме 2.3.2(2) H_1 и H_2^x – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающие подгруппы в H_1L. Так как $H_1L/L \in \mathfrak{F}$, то $(H_1L)^{\mathfrak{F}} \subseteq L$ и поэтому $(H_1L)^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа. Если $H_1L < G$, то по индукции существует $y \in H_1L$ такой, что $H_1 = (H_2^x)^y$ и, значит, H_1 и H_2 сопряжены в G.

Пусть $G = H_1L = H_2^xL$. Если $Core_G(H_1) \cap O_{\omega}(G) \neq 1$, то L можно выбрать так, чтобы $L \subseteq H_1$. Тогда $G = H_1L = H_1 \in \mathfrak{F}$ и, значит, $G = H_1 = H_2$. Аналогично, если $Core_G(H_2^x) \cap O_\omega(G) \neq 1$, то можем считать, что $L \subseteq H_2^x$. Тогда $G = H_2^xL = H_2^x \in \mathfrak{F}$ и $G = H_2^x = H_1$. Следовательно, $Core_G(H_1) \cap O_\omega(G) = Core_G(H_2^x) \cap O_\omega(G) = 1$.

Пусть L является π-группой. Так как L – π-разрешимая группа, то L является элементарной абелевой p-группой для некоторого $p \in \pi \cap \omega$. Тогда $L \cap H_1 = L \cap H_2^x = 1$ и $G = [L]H_1 = [L]H_2^x$. Поскольку $G/L = H_1L/L \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq L$ и поэтому $L = G^{\mathfrak{F}}$. Так как L – абелева минимальная нормальная подгруппа группы G, то H_1 и H_2^x – максимальные подгруппы в G, причем H_1 и H_2^x $\mathfrak{F}$-абнормальны в G. Согласно теореме 1.1.7 $\mathfrak{F}$ – p-локальная формация. Кроме того, $Core_G(H_1) \cap G^{\mathfrak{F}} = Core_G(H_2^x) \cap G^{\mathfrak{F}}$, $G^{\mathfrak{F}}$ – p-разрешимая группа, $| G : H_1 |$ и $| G : H_2^x |$ – p-числа. Тогда по теореме 8.5 [47] подгруппы H_1 и H_2^x являются сопряженными в G. Тем самым установлено, что H_1 и H_2 сопряжены в G.

Пусть L является π'-группой. Так как по определению **??** $H_i \in \mathfrak{F}$, то H_i является π-группой, $i = 1, 2$. Тогда в силу теоремы 4.32 [18] имеем: $G = [L]H_1 = [L]H_2^x$, H_i является S_π-подгруппой группы G, причем любые две S_π-подгруппы группы G сопряжены в G. Отсюда следует, что H_1 и H_2 сопряжены в G. *Теорема доказана.*

Пример 2.3.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\omega \times \mathfrak{A}_2$, где $2 \notin \omega$, $\mathfrak{S}_\omega$ – класс всех разрешимых ω-групп, $\mathfrak{A}_2$ – класс всех абелевых 2-групп и G – диэдральная группа порядка 8. Простая проверка показывает, что класс $\mathfrak{F}$ является ω-локальной формацией, $\mathfrak{F}$-корадикал K группы G совпадет с $\mathfrak{A}_2$-корадикалом группы G. Следовательно, K – неединичная 2-группа и, значит, K не является ω-группой, причем $K \leq \Phi(G)$. Отсюда следует, что группа G не обладает $\mathfrak{F}$-проектором. Так как нормальной ω-подгруппой в группе G является лишь единичная подгруппа, то по определению 2.2.1 каждая $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G. Тогда любая абелева максимальная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G. Следовательно, циклическая подгруппа порядка 4 и две элементарные абелевы подгруппы порядка 4 являются $\mathfrak{F}^\omega$-проекторами в группе G. Поэтому условие "быть ω-подгруппой" $\mathfrak{F}$-корадикала в теореме 2.3.5 является существенным.

Следствие 2.3.9. (Шеметков [47], теорема 15.7). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная* *формация, G – группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда G обладает по крайней мере одной $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой и любые две $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы из G сопряжены в G.*

Доказательство. Согласно следствию 1.1.2 формация $\mathfrak{F}$ является ω-локальной для любого непустого множества простых чисел ω. Тогда при $\omega = \pi(G)$ из теоремы 2.3.5 непосредственно получаем заключение следствия 2.3.9. *Следствие доказано.*

Следствие 2.3.10. (Шмигирев [53], Шмид [76]; см. также [47], теорема 15.6). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда G обладает по крайней мере одной $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой и любые две $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы из G сопряжены в G.*

Ввиду следствия 2.3.7 из теоремы 2.3.5 получаем следующий результат.

Следствие 2.3.11. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, G – группа, $G^{\mathfrak{F}}$ – $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимая ω-группа. Тогда G обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором и любые два $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора группы G сопряжены в G.*

Из следствий 2.3.8 и 2.3.9 непосредственно получаем утверждение для локальной формации.

Следствие 2.3.12. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда G обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}$-проектором и любые два $\mathfrak{F}$-проектора группы G сопряжены в G.*

В следующей теореме изучается взаимосвязь между $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающими и $\mathfrak{F}$-абнормальными подгруппами в группах.

Теорема 2.3.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, G – группа, $G^{\mathfrak{F}}$ – ω-группа и $H < G$. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей в G тогда и только тогда, когда $H \in \mathfrak{F}$ и H – $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G. По определению 2.3.1 $H \in \mathfrak{F}$ и из $H \leq U \leq G$, V – нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$ следует, что $U = HV$. Тогда при $U = G$ и $V = G^{\mathfrak{F}}$ получаем $G = HG^{\mathfrak{F}}$. Покажем, что любая максимальная $(G - H)$-цепь является $\mathfrak{F}$-абнормальной. Пусть

$$H = H_t < H_{t-1} < \ldots < H_1 < H_0 = G \tag{2.3.2}$$

– произвольная максимальная $(G - H)$-цепь.

Пусть $i \in \{1, \ldots, t\}$. Установим, что H_i – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы H_{i-1}. Поскольку $H \leq H_{i-1}$, то $G = H_{i-1}G^{\mathfrak{F}}$ и ввиду леммы 1.2(3) [47] $H_{i-1}^{\mathfrak{F}}$ является ω-группой. Так как $H \leq H_{i-1} \leq G$, $H_{i-1}^{\mathfrak{F}}$ – нормальная ω-подгруппа группы H_{i-1} и $H_{i-1}/H_{i-1}^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то по определению 2.3.1 $H_{i-1} = H_{i-1}^{\mathfrak{F}}H = H_{i-1}^{\mathfrak{F}}H_i$. Это означает, что H_i – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в H_{i-1}. Следовательно, (2.3.2) – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная $(G - H)$-цепь и по определению 1.2.2 подгруппа H $\mathfrak{F}$-абнормальна в G.

2. *Достаточность.* Пусть H – $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G и $H \in \mathfrak{F}$. Покажем, что H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G. Пусть $H \leq U \leq G$, V – нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $U \neq HV$. Тогда существует такая максимальная подгруппа M в U, что $HV \subseteq M$. Таким образом, имеем $H \leq HV \leq M < U \leq G$. Поскольку H $\mathfrak{F}$-абнормальна в G, то по определению 1.2.2 M является $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой в U. Это означает, что $U = MU^{\mathfrak{F}}$. С другой стороны, из $U/V \in \mathfrak{F}$ следует, что $U^{\mathfrak{F}} \subseteq V$, и поэтому $U^{\mathfrak{F}} \subseteq M$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что $U = HV$ и, значит, H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G. *Теорема доказана.*

Следствие 2.3.13. (Шеметков [47], теорема 15.1). *Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$-покрывающей в G тогда и только тогда, когда $H \in \mathfrak{F}$ и H $\mathfrak{F}$-абнормальна в G.*

В следующей теореме для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлено существование и получено строение $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппы в некоторой подгруппе группы G.

Теорема 2.3.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $G = LN$, $L \leq G$, N – нильпотентная нормальная ω-подгруппа в G и $G^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа. Тогда L обладает хотя бы одной $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой, причем всякая $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа из L имеет вид $H \cap L$, где H – некоторая $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G.*

Доказательство. Покажем, что L обладает хотя бы одной $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой. Так как по лемме 1.2(1) [47] $G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}}\cap N \cong G^{\mathfrak{F}}N/N = (G/N)^{\mathfrak{F}} = (LN/N)^{\mathfrak{F}} \cong (L/L\cap N)^{\mathfrak{F}} = L^{\mathfrak{F}}(L\cap N)/(L\cap N) \cong L^{\mathfrak{F}}/L^{\mathfrak{F}}\cap N$, то ввиду условия $L^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа. Тогда согласно теореме 2.3.5 группа L имеет хотя бы одну $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающую подгруппу.

Пусть K – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы L. Покажем, что KN/N – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G/N. Так как $L\cap N$ – нормальная ω-подгруппа в L, то по лемме 2.3.2(3) $K(L\cap N)/(L\cap N)$ – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в $L/L\cap N$. Поскольку $L/L\cap N \cong LN/N = G/N$ и $K(L\cap N)/(L\cap N) \cong K/(K\cap L\cap N) = K/K\cap N \cong KN/N$, то KN/N – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G/N.

Пусть $G_1 := KN$. Согласно следствию теоремы 2.3.2 K содержится в некоторой $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппе группы G_1. Пусть H – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G_1 такая, что $K \subseteq H$. Проверим, что H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой группы G. Действительно, так как KN/N – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G/N и H – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в KN, то по лемме 2.3.2(4) H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой группы G.

Покажем, что $K = H\cap L$. Предварительно установим, что $H\cap L \in \mathfrak{F}$. Так как $H = H\cap G_1 = H\cap KN = K(H\cap N)$ и $K \subseteq H\cap L$, $H\cap N \subseteq F(H)$, то $H = (H\cap L)F(H)$. Тогда по теореме 2.3 [47] $H\cap L \in formH$ и из $H \in \mathfrak{F}$ получаем $H\cap L \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $H\cap L$ – $\mathfrak{F}$-подгруппа группы L. Поскольку $K \leq H\cap L \leq L$ и K – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в L, то $K = H\cap L$. *Теорема доказана.*

Следствие 2.3.14. (Картер, Хоукс [59], теорема 5.12). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $G = LF(G)$, $L \leq G$. Тогда всякая $\mathfrak{F}$-покрывающая подгруппа из L имеет вид $H\cap L$ для некоторой $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы H в G.*

Все основные результаты параграфа 2.3 опубликованы в работе [96].

§ 2.4. $\mathfrak{F}^\omega$-предельные и $\mathfrak{F}^\omega$-критические подгруппы конечных групп

В параграфах 2.4 – 2.6 построена теория $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов, где $\mathfrak{F}$ – произвольная ω-локальная формация. Параграф 2.4 посвящен изучению $\mathfrak{F}^\omega$-предельных и $\mathfrak{F}^\omega$-критических подгрупп конечных групп. В данном параграфе представлены результаты, используемые при доказательстве основных утверждений параграфов 2.5 и 2.6.

Следуя [47], сформулируем следующее определение (см. [47], определения 13.1 и 13.2).

Определение 2.4.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и G – группа.

Нормальную подгруппу R группы G назовём $\mathfrak{F}^\omega$-*предельной* нормальной подгруппой в G, если $R \leq G^\mathfrak{F}$ и $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ является главным фактором группы G.

Максимальную подгруппу M группы G назовём $\mathfrak{F}^\omega$-*критической* в G, если $G = MR$ для некоторой $\mathfrak{F}^\omega$-предельной нормальной подгруппы R из G.

Рассмотрим ряд свойств $\mathfrak{F}^\omega$-предельных и $\mathfrak{F}^\omega$-критических подгрупп.

Лемма 2.4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, $G = M_1R_1 = M_2R_2$, где M_1 и M_2 – максимальные подгруппы группы G, R_1 и R_2 – различные нильпотентные $\mathfrak{F}^\omega$-предельные нормальные подгруппы группы G, $G^\mathfrak{F} \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G) \subseteq R_1 \cap R_2$. Тогда подгруппа $R = M_1 \cap R_1R_2$ является $\mathfrak{F}^\omega$-предельной нормальной подгруппой в G, причем $R_1R = R_1R_2$ и следующие группы G-изоморфны:*

$$R_1R_2/R_1 \cong R_2/G^\mathfrak{F} \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G) \cong R/G^\mathfrak{F} \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G).$$

Доказательство. Пусть $\Phi := G^\mathfrak{F} \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ и $R := M_1 \cap R_1R_2$. Тогда, рассуждая как и при доказательстве леммы 1.4.2, получим, что $RR_1 = R_1R_2$, R – нормальная подгруппа группы G, $R \cap R_1 = \Phi$ и $R_1R_2/R_1 \cong R_2/\Phi \cong R/\Phi$.

Согласно определению 2.4.1 $R_1R_2 \leq G^\mathfrak{F}$. Это означает, что $R \leq G^\mathfrak{F}$ и $R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G) \subseteq \Phi$. Так как $\Phi = R \cap R_1$, то $\Phi \subseteq R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. Тем самым установлено, что $\Phi = R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ и поэтому $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ – главный фактор группы G. Следовательно, R – $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G. *Лемма доказана.*

Лемма 2.4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, G – группа, $\mathfrak{F}$-корадикал $G^\mathfrak{F}$ которой является ω-группой, M – максимальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *M является $\mathfrak{F}^\omega$-критической в G тогда и только тогда, когда M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G и $G = M\tilde{F}(G)$;*

2) *если M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G и $G = MF(G)$, то M является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой в G.*

Доказательство. 1) Пусть f – внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, $\Phi := \Phi(G)$ и $\tilde{F} := \tilde{F}(G)$. Согласно определению 7.5 [47] $\Phi \subseteq \tilde{F}$ и $\tilde{F}/\Phi$ – цоколь группы G/Φ.

Необходимость. Пусть M – $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа группы G. Тогда $G = ML$, где L – $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G. Следовательно, $L \leq G^{\mathfrak{F}}$ и $L/L \cap \Phi \cap O_\omega(G) = L/L \cap \Phi \cong L\Phi/\Phi$ – главный фактор группы G. Это означает, что $L\Phi/\Phi \cdot\!\!\lhd G/\Phi$ и поэтому $L\Phi/\Phi \subseteq \tilde{F}/\Phi$. Таким образом, $G = ML = M\tilde{F}$. Кроме того, из $L \leq G^{\mathfrak{F}}$ следует $\mathfrak{F}$-абнормальность M в G.

Достаточность. Пусть M – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G и $G = M\tilde{F}$. Так как $\tilde{F}/\Phi$ – цоколь группы G/Φ и $\tilde{F} \not\subseteq M$, то в G/Φ найдется минимальная нормальная подгруппа R/Φ такая, что $R \not\subseteq M$. Тогда $G = MR$.

Покажем, что R/Φ – f_ω-эксцентральный главный ωd-фактор группы G. Так как M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G, то $G = MG^{\mathfrak{F}}$ и ввиду $\pi(G^{\mathfrak{F}}) \subseteq \omega$ имеем

$$|G : M| = |MG^{\mathfrak{F}} : M| = |G^{\mathfrak{F}} : G^{\mathfrak{F}} \cap M| \text{ – } \omega\text{-число.}$$

Из $G = MR$ получаем, что $|G : M| = |R : R \cap M|$ – ω-число. Поскольку $|R/\Phi| = |R : R \cap M| \cdot |R \cap M : \Phi|$, то R/Φ – ωd-группа. Так как M не покрывает R/Φ, то по лемме 1.2.5(2) R/Φ является f_ω-эксцентральным главным фактором группы G.

Согласно лемме 1.2.6 M не покрывает f_ω-эксцентральный главный фактор $R \cap G^{\mathfrak{F}}/\Phi \cap G^{\mathfrak{F}}$ группы G, G-изоморфный главному фактору R/Φ. Это означает, что $R \cap G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq M(\Phi \cap G^{\mathfrak{F}}) = M$ и поэтому $G = M(R \cap G^{\mathfrak{F}})$. Поскольку $\Phi \subseteq R$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq O_\omega(G)$, то $R \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi \cap O_\omega(G) = \Phi \cap G^{\mathfrak{F}}$ и, значит, $R \cap G^{\mathfrak{F}}/R \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi \cap O_\omega(G)$ – главный фактор группы G. Тогда $R \cap G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа группы G. В силу равенства $G = M(R \cap G^{\mathfrak{F}})$ заключаем, что M – $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в G.

2) Пусть M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G и $G = MF(G)$. Так как $F(G) \leq \tilde{F}(G)$, то $G = M\tilde{F}(G)$ и по пункту 1) M – $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в G. *Лемма доказана.*

Лемма 2.4.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, $G = MR$, M – максимальная подгруппа группы G, R – $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G,*

L – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G такая, что $R \subseteq L$. Тогда $M \cap L$ – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы M.

Доказательство. Покажем, что $M \cap L < \cdot M$. Действительно, по лемме 3.17(3) [18] $L/R < \cdot G/R$. Так как $G = MR$, то $G/R \cong M/M \cap R$. Поскольку $L = MR \cap L = R(M \cap L)$, то $L/R = R(M \cap L)/R \cong (M \cap L)/(M \cap L \cap R) = (L \cap M)/(M \cap R)$. Тогда из $G/R \cong M/M \cap R$, $L/R \cong (M \cap L)/(M \cap R)$ и $L/R < \cdot G/R$ получаем $(M \cap L)/(M \cap R) < \cdot M/(M \cap R)$. Это, согласно лемме 3.17(5) [18], означает, что $M \cap L < \cdot M$.

Установим, что $M = (M \cap L)M^{\mathfrak{F}}$. Так как R – $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельная нормальная подгруппа группы G, то $R \leq G^{\mathfrak{F}}$. Тогда из $G = MR$ по лемме 1.2(3) [47] имеем $G^{\mathfrak{F}} = M^{\mathfrak{F}}R$. Если $M^{\mathfrak{F}} \subseteq M \cap L$, то ввиду $R \subseteq L$ получаем $G^{\mathfrak{F}} = M^{\mathfrak{F}}R \subseteq L$, что, в силу $\mathfrak{F}$-абнормальности L в G, невозможно. Следовательно, $M^{\mathfrak{F}} \not\subseteq M \cap L$ и поэтому $M = (M \cap L)M^{\mathfrak{F}}$. Тем самым установлено, что $M \cap L$ – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в M. *Лемма доказана.*

Лемма 2.4.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, $G = M_1R_1 = M_2R_2$, где M_1 и M_2 – максимальные подгруппы группы G, R_1 и R_2 – различные нильпотентные $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельные нормальные подгруппы группы G, $G^{\mathfrak{F}}$ – ω-группа, $G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \subseteq R_1 \cap R_2$. Если $R_1 \subseteq M_2$, то $M_1 \cap M_2$ – $\mathfrak{F}^{\omega}$-критическая подгруппа в M_1 и в M_2.*

Доказательство. Пусть f – внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, $\Phi := G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \cap O_{\omega}(G)$ и $T := R_1 \cap \Phi(G) \cap O_{\omega}(G)$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ – ω-группа и $R_1 \leq G^{\mathfrak{F}}$, то $\Phi = G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$, $T = R_1 \cap \Phi(G)$ и $T \subseteq \Phi$. По условию $\Phi \subseteq R_1$ и, значит, $\Phi \subseteq T$. Следовательно, $T = \Phi$. Поскольку R_1 – $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельная нормальная подгруппа в G, то $R_1/T = R_1/\Phi$ – главный ω-фактор в G. Так как $G = M_1R_1 = M_1G^{\mathfrak{F}}$, то M_1 является $\mathfrak{F}$-абнормальной в G. В силу леммы 1.2.5(2) главный фактор R_1/Φ f_{ω}-эксцентрален в G. Пусть $\pi(R_1/\Phi) = \{p\}$, где $p \in \omega$. Тогда $G/C_G(R_1/\Phi) \notin f(p)$.

I. Покажем, что подгруппа $M_1 \cap M_2$ является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической в M_2. Так как $G = M_2R_2$ и R_2 нильпотентна, то по следствию 4.1.1 [47] $C_G(R_1/\Phi) \geq F(G) \geq R_2$ и, значит, $G = M_2C_G(R_1/\Phi)$. Тогда $M_2/C_{M_2}(R_1/\Phi) \cong G/C_G(R_1/\Phi) \notin f(p)$. Отсюда следует, что R_1/Φ является f_{ω}-эксцентральным главным фактором группы M_2. Поскольку $(M_1 \cap M_2)R_1 = M_1R_1 \cap M_2 = M_2$, то $M_1 \cap M_2 < \cdot M_2$. Так как $M_1 \cap M_2$ не покрывает f_{ω}-эксцентральный главный фактор R_1/Φ группы

M_2, то в силу леммы 1.2.5(1) подгруппа $M_1 \cap M_2$ $\mathfrak{F}$-абнормальна в M_2, причем $M_2 = (M_1 \cap M_2)F(M_2)$. Из $G = M_2R_2$ по лемме 1.2(3) [47] следует, что $M_2^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ и, значит, $M_2^{\mathfrak{F}}$ – ω-группа. Тогда по лемме 2.4.2(2) $M_1 \cap M_2$ является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической подгруппой в M_2.

II. Покажем, что $M_1 \cap M_2$ – $\mathfrak{F}^{\omega}$-критическая подгруппа в M_1. Если $R_2 \subseteq M_1$, то, как и выше в пункте I, получим, что $M_1 \cap M_2$ является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической подгруппой в M_1. Пусть $R_2 \not\subseteq M_1$. Так как $G = M_1R_1$, M_2 – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G и $R_1 \subseteq M_2$, то согласно лемме 2.4.3 $M_1 \cap M_2$ – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в M_1. Ввиду леммы 1.2(3) [47] $M_1^{\mathfrak{F}}$ является ω-группой. Пусть $R := M_1 \cap R_1R_2$. По лемме 2.4.1 R – $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельная нормальная подгруппа в G и $R_1R = R_1R_2$. Если $R \subseteq M_2$, то $R_2 \subseteq R_1R_2 = R_1R \subseteq M_2$, что, в силу $G = M_2R_2$, невозможно. Поэтому $R \not\subseteq M_2$ и, значит, $M_1 = (M_1 \cap M_2)R$. Так как $R \subseteq F(M_1)$, то $M_1 = (M_1 \cap M_2)F(M_1)$. Следовательно, по лемме 2.4.2(2) подгруппа $M_1 \cap M_2$ является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической подгруппой в M_1. *Лемма доказана.*

Все результаты параграфа 2.4 опубликованы в работе [97].

§ 2.5. $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторы конечных групп

Определение 2.5.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и G – группа.

$\mathfrak{F}$-подгруппу H группы G назовем $\mathfrak{F}^{\omega}$-*нормализатором* в G, если существует цепь подгрупп группы G вида

$$H = H_t \subset H_{t-1} \subset \ldots \subset H_1 \subset H_0 = G, \tag{2.5.1}$$

где $t \geq 0$, такая, что H_i – $\mathfrak{F}^{\omega}$-критическая подгруппа в группе H_{i-1} для любого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$.

Рассмотрим основные свойства $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторов групп.

Теорема 2.5.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, G – группа с $\mathfrak{F}$-корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$, являющимся ω-группой. Тогда в G существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор H и $G = G^{\mathfrak{F}}H$.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G. Если $G \in \mathfrak{F}$, то по определению 2.5.1 G является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором группы G и $G =$

$G^{\mathfrak{F}}G$.

Пусть $G \notin \mathfrak{F}$ и $T := G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. Согласно теореме 1 [40] формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной и поэтому $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. Следовательно, в G/T существует минимальная нормальная подгруппа R/T такая, что $R \leq G^{\mathfrak{F}}$. Тогда $R/T = R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ и по определению 2.4.1 R является $\mathfrak{F}^\omega$-предельной нормальной подгруппой в G.

Поскольку $R \subseteq O_\omega(G)$, то $R \not\subseteq \Phi(G)$ и, значит, в G существует максимальная подгруппа M такая, что $R \not\subseteq M$. Тогда $G = RM$ и по определению 2.4.1 M является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой в G. Так как $G = G^{\mathfrak{F}}M$, то по лемме 1.2(3) [47] $M^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$. По индукции в M существует $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор H и $M = M^{\mathfrak{F}}H$. В силу определения 2.5.1 H является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G, причем $G = G^{\mathfrak{F}}M = G^{\mathfrak{F}}M^{\mathfrak{F}}H = G^{\mathfrak{F}}H$. *Теорема доказана.*

Лемма 2.5.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Если H – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G и α – эпиморфизм группы G на группу U, то H^α – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы U.*

Доказательство. Пусть H – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G и α – эпиморфизм группы G на группу U. Покажем, что H^α является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в U. Пусть $Ker(\alpha) := K$. Так как $G^\alpha = U \cong G/K$ и $H^\alpha \cong HK/K$, то достаточно установить, что HK/K является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G/K. Применим индукцию по порядку группы G.

Согласно определению 2.5.1 $H \in \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ – формация, то $HK/K \in \mathfrak{F}$. Если $H = G$, то $HK/K = G/K$ – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в G/K. Пусть $H \neq G$. Тогда ввиду определения 2.5.1 существует $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа M в G такая, что H является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в M. По индукции HK/K – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в MK/K. Если $MK = G$, то утверждение верно. Пусть $G \neq MK$. Тогда $K \subseteq M$ и HK/K – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в M/K.

Установим, что M/K – $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в G/K. Так как M – $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в G, то $G = MR$, где R – $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G. Тогда $G/K = (M/K) \cdot (RK/K)$. Так как $R \leq G^{\mathfrak{F}}$, то по лемме 1.2(1) [47] $RK/K \leq G^{\mathfrak{F}}K/K = (G/K)^{\mathfrak{F}}$.

Пусть $T/K := RK/K \cap \Phi(G/K) \cap O_\omega(G/K)$. Покажем, что $(RK/K)/(T/K)$ является главным фактором группы G/K. Пусть $L := R \cap$

$\Phi(G) \cap O_\omega(G)$. По определению 2.4.1 R/L – главный фактор группы G. Если $RK \subseteq M$, то $G = MR = M$, что невозможно. Поэтому $RK \not\subseteq M$. Из $LK \subseteq M$ и $RK \not\subseteq M$ получаем $RK \neq LK$. Тогда $RK/LK = RLK/LK \cong R/R \cap LK = R/L(R \cap K) \neq 1$. Поскольку $L \subseteq L(R \cap K) \subset R$ и R/L – главный фактор группы G, то $L(R \cap K) = L$ и, значит, RK/LK – главный фактор в G. Тогда $(RK/K)/(LK/K)$ – главный фактор в G/K. Проверим, что $T/K = LK/K$. Действительно, так как

$$LK/K = (R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G))K/K \leq (RK/K) \cap (\Phi(G)K/K) \cap (O_\omega(G)K/K),$$

по теореме 3.22(2) [18] $\Phi(G)K/K \leq \Phi(G/K)$ и $O_\omega(G)K/K \leq O_\omega(G/K)$, то $LK/K \leq T/K \leq RK/K$ и, значит, либо $T/K = RK/K$, либо $T/K = LK/K$. Допустим, что $T/K = RK/K$. Тогда $RK/K \leq \Phi(G/K) \leq M/K$ и $R \leq M$, что, ввиду $G = MR$, невозможно. Следовательно, $LK/K = T/K$ и поэтому $(RK/K)/(T/K)$ – главный фактор группы G/K.

Таким образом, RK/K – $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа группы G/K. Тем самым установлено, что M/K – $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа в G/K и, значит, HK/K является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G/K. *Лемма доказана.*

Теорема 2.5.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$-корадикал $G^\mathfrak{F}$ группы G является π-разрешимой ω-группой. Тогда любые два $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатора группы G сопряжены в G.*

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка, H_1 и H_2 – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторы группы G, не являющиеся сопряженными в G. Если $G^\mathfrak{F} = 1$, то $G \in \mathfrak{F}$ и по определению 2.5.1 $H_1 = H_2 = G$, что невозможно. Следовательно, $G^\mathfrak{F} \neq 1$.

Пусть $i \in \{1, 2\}$. Так как H_i – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G, то $H_i \in \mathfrak{F}$ и существует цепь подгрупп группы G вида $H_i \subset \ldots \subset M_i \subset G$, удовлетворяющая определению 2.5.1. Это означает, что H_i является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором группы M_i. По теореме 2.5.1 $G = H_iG^\mathfrak{F} = M_iG^\mathfrak{F}$. Отсюда ввиду леммы 1.2(3) [47] получаем $M_i^\mathfrak{F} \leq G^\mathfrak{F}$. Тогда $M_i^\mathfrak{F}$ – π-разрешимая ω-группа, и по индукции любые два $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатора группы M_i сопряжены в M_i. Как и при доказательстве теоремы 1.4.1 нетрудно проверить, что M_1 и M_2 не сопряжены в G.

Пусть $N := O_{\pi'}(G)$. Предположим, что $N \neq 1$. Так как по лемме 1.2(1) [47] $(G/N)^\mathfrak{F} = G^\mathfrak{F}N/N \cong G^\mathfrak{F}/G^\mathfrak{F} \cap N$ – π-разрешимая ω-группа, то, применяя лемму 2.5.1, по индукции получим, $H_1N/N = H_2^aN/N$ для некоторого $a \in G$. Тогда $H_2^a \le H_1N$, причем H_1 и H_2^a, в силу определения 2.4.1, являются π-группами. По теореме 4.32 [18] H_1 и H_2^a сопряжены в группе H_1N и, значит, H_1 и H_2 сопряжены в G. Получили противоречие. Следовательно, $O_{\pi'}(G) = 1$.

Пусть $G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) := \Phi$ и R – $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельная нормальная подгруппа группы G. По определению 2.4.1 $R \le G^{\mathfrak{F}}$ и $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ является главным фактором в G. Так как по условию $G^{\mathfrak{F}} \le O_\omega(G)$, то $R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G) = R \cap \Phi(G) = R \cap G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) = R \cap \Phi$, R – π-разрешимая ω-группа и $R/R \cap \Phi \cong R\Phi(G)/\Phi(G)$ – главный фактор группы G. Допустим, что $R/R \cap \Phi$ является π'-группой. Тогда по лемме 1.3.1(3) группа R π'-разложима и, значит, $O_{\pi'}(R) \ne 1$. Так как $R \triangleleft G$, то $O_{\pi'}(R) \triangleleft G$. Получили противоречие. Следовательно, $R/R \cap \Phi$ является элементарной абелевой p-группой для некоторого $p \in \pi \cap \omega$. По лемме 1.3.1(3) группа R p-разложима и, значит, R является нильпотентной $(\pi \cap \omega)$-группой. Так как $R\Phi/\Phi \cong R\Phi(G)/\Phi(G) \triangleleft G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G) \cong G^{\mathfrak{F}}/\Phi$, то $R\Phi/\Phi \le F(G^{\mathfrak{F}}/\Phi) := F/\Phi$, причем в силу леммы 1.3.1(3) $F = F(G^{\mathfrak{F}})$. Применяя лемму 2.37 [18], нетрудно показать, что F/Φ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы G/Φ, содержащихся в $G^{\mathfrak{F}}/\Phi$.

Так как M_i является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической подгруппой группы G, то по определению 2.4.1 в G существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельная нормальная подгруппа R_i, причем $R_i \le F$ и $G = M_iR_i = M_iF$ для любого $i = 1, 2$.

1. Рассмотрим случай, когда $F/\Phi \cdot\!\triangleleft G/\Phi$. Пусть $S_i = G^{\mathfrak{F}} \cap Core_G(M_i)$, $i = 1, 2$. Так как $\Phi \subseteq F$ и $\Phi \subseteq S_i$, то $\Phi \subseteq F \cap S_i \subseteq F$. Из $F/\Phi \cdot\!\triangleleft G/\Phi$ следует, что либо $F \cap S_i = F$, либо $F \cap S_i = \Phi$. Если $F \cap S_i = F$, то $F \subseteq S_i$ и поэтому $G = M_iF = M_i$, что невозможно. Следовательно, $F \cap S_i = \Phi$ и, значит, $\Phi \subseteq S_i$ для любого $i = 1, 2$.

1.1. Пусть $S_1 = S_2 = \Phi$. Так как $G = M_iF$, то $|G : M_i| = |F : F \cap M_i| = k_i \ne 1$, $i = 1, 2$. Поскольку $\Phi \subseteq F \cap M_i$, то $|F : \Phi| = |F : F \cap M_i||F \cap M_i : \Phi|$, $i = 1, 2$. Так как F/Φ – абелева p-группа, то $k_i = |G : M_i|$ – p-число, $i = 1, 2$. Пусть f – ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Ввиду теоремы 1.1.7 формация $\mathfrak{F}$ является p-локальной, поэтому ω-спутник f является p-однородным экраном. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ – p-разрешимая группа, то по теореме 8.5 [47] подгруппы M_1 и M_2 являются сопряженными в G. Получили противоречие.

1.2. Пусть хотя бы одна из подгрупп S_1 или S_2 не совпадает с Φ. Пусть, например, $S_1 \neq \Phi$. Тогда S_1/Φ – неединичная нормальная подгруппа группы G/Φ и поэтому существует минимальная нормальная подгруппа N/Φ в G/Φ, содержащаяся в S_1/Φ. Так как $N/\Phi \leq G^{\mathfrak{F}}/\Phi$ и $F/\Phi \cdot\triangleleft G/\Phi$, то $N/\Phi = F/\Phi$. Отсюда получаем, что $N = F$. Тогда из $N \subseteq S_1 \subseteq M_1$ имеем $G = M_1F = M_1N = M_1$, что невозможно.

2. Пусть теперь F/Φ не является минимальной нормальной подгруппой группы G/Φ и $\Sigma = \{L_i/\Phi | i \in I\}$ – совокупность всех минимальных нормальных подгрупп группы G/Φ, содержащихся в F/Φ.

2.1. Рассмотрим случай, когда M_1 и M_2 дополняют один и тот же главный фактор группы G из Σ, например, главный фактор L_1/Φ. Тогда имеем $G = M_1L_1 = M_2L_1$.

Предположим, что $L_j \not\subseteq M_1$ для любого $j \in I$, $j \neq 1$. Можем считать, что $2 \in I$. Тогда $L_2 \not\subseteq M_1$ и $G = M_1L_2$. Пусть $i \in \{1, 2\}$. Так как $L_i/\Phi \leq F/\Phi = F(G^{\mathfrak{F}}/\Phi)$, то по лемме 1.3.1(4) группа L_i нильпотентна и $L_i \leq G^{\mathfrak{F}}$. Так как $L_i \cap \Phi(G) = \Phi$, то $L_i/L_i \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ – главный фактор группы G. Это означает, что L_i – $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа группы G для любого $i = 1, 2$. Тогда по лемме 2.4.1 $L = M_1 \cap L_1L_2$ – $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа в G и $L/\Phi \cong L_1/\Phi$. Последнее означает, что $L/\Phi \in \Sigma$ и $L \subseteq M_1$, что противоречит предположению. Следовательно, найдется такое $j \in I$, $j \neq 1$, что $L_j \subseteq M_1$. Можем считать, $L_2 \subseteq M_1$.

В силу задания Σ L_1L_2/Φ – неединичная нильпотентная нормальная подгруппа группы G/Φ. Кроме того, $(L_1L_2/\Phi) \cap \Phi(G/\Phi) = (L_1L_2/\Phi) \cap \Phi(G)/\Phi = (L_1L_2 \cap \Phi(G))/\Phi \leq (G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G))/\Phi = \Phi/\Phi = 1$. Тогда согласно лемме 7.9 [47] подгруппа L_1L_2/Φ дополняема в G/Φ. Пусть D/Φ – дополнение к L_1L_2/Φ в G/Φ и $M := L_1D$. Тогда $G = DL_1L_2 = ML_2$ и $M < \cdot G$.

Поскольку $G = M_1L_1 = M_2L_1 = ML_2$, $L_2 \subseteq M_1$, $L_1 \subseteq M$ и $G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \subseteq L_1 \cap L_2$, то по лемме 2.4.4 $M_i \cap M$ – $\mathfrak{F}^\omega$-критическая максимальная подгруппа группы M и группы M_i, $i = 1, 2$. Ввиду леммы 1.2(3) [47] $(M_i \cap M)^{\mathfrak{F}}$ является ω-группой и, значит, по теореме 2.5.1 в группе $M_i \cap M$ существует $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор K_i, $i = 1, 2$. Тогда K_i является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором группы M и K_i является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором группы M_i, $i = 1, 2$. Так как по индукции H_1 и K_1 сопряжены в M_1, K_1 и K_2 сопряжены в M, K_2 и H_2 сопряжены в M_2, то отсюда следует, что H_1 и H_2 сопряжены в G. Получили противоречие.

2.2. Пусть M_1 и M_2 дополняют соответственно главные факторы L_1/Φ и L_2/Φ группы G из Σ, $L_1/\Phi \neq L_2/\Phi$. Тогда $G = M_1L_1 = M_2L_2$. Если $L_1 \nsubseteq M_2$ (или $L_2 \nsubseteq M_1$), то $G = M_2L_1$ (соответственно $G = M_1L_2$) и мы приходим к случаю, рассмотренному в пункте 2.1. Таким образом, можем считать, что $L_1 \subseteq M_2$ и $L_2 \subseteq M_1$. Как и в пункте 2.1, нетрудно проверить, что L_1 и L_2 – нильпотентные $\mathfrak{F}^\omega$-предельные нормальные подгруппы в G. Тогда по лемме 2.4.4 $M_1 \cap M_2$ – $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа группы M_i, $i = 1, 2$. Используя теорему 2.5.1 и индукционное предположение, получаем, что H_1 и H_2 сопряжены в G. Противоречие. *Теорема доказана.*

Согласно следствию 1.1.2 всякая локальная формация является ω-локальной для любого ω. Тогда при $\omega = \pi(G)$ из теоремы 2.5.2 непосредственно получаем следующие известные результаты.

Следствие 2.5.1. (Шеметков [46]; см. также [47], теорема 21.4). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда любые два $\mathfrak{F}$-нормализатора группы G сопряжены в G.*

Следствие 2.5.2. (Картер, Хоукс [59]; см. также [60], теорема V, 3.2). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – разрешимая группа. Тогда любые два $\mathfrak{F}$-нормализатора группы G сопряжены в G.*

В следующей теореме установим свойства $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов группы, связанные с покрытием и изолированием ее главных факторов.

Теорема 2.5.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация с внутренним ω-спутником f, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, H – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G. Тогда H покрывает каждый f_ω-центральный и изолирует каждый f_ω-эксцентральный главный ωd-фактор группы G, если выполняется одно из следующих условий*:

1) $G^{\mathfrak{F}}$ *– π-разрешимая группа*;

2) $G^{\mathfrak{F}}$ *– ω-разрешимая группа.*

Доказательство. 1) Пусть $G^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая группа. Если G является ω'-группой, то G не имеет главных ωd-факторов, и значит, утверждение верно. Пусть G – ωd-группа. По определению 2.5.1 $H \in \mathfrak{F}$ и существует максимальная цепь вида (2.5.1) группы G. Докажем теорему индукцией по параметру t.

Пусть $t = 0$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$. В этом случае каждый главный ωd-фактор группы G, согласно лемме 1.2.1, является f_ω-центральным в G. Кроме того, группа G покрывает каждый свой главный фактор. Таким образом, при $t = 0$ утверждение верно.

Пусть $t > 0$. Так как H_1 – $\mathfrak{F}^\omega$-критическая подгруппа группы G, то согласно определению 2.4.1 существует $\mathfrak{F}^\omega$-предельная нормальная подгруппа R группы G такая, что $G = H_1R$. Так как $R \leq G^{\mathfrak{F}}$, то $G = H_1G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда по лемме 1.2(3) [47] получаем, что $H_1^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ и, значит, $H_1^{\mathfrak{F}}$ является π-разрешимой группой. Поскольку H – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G, то в силу (**??**) H является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в H_1. Таким образом, по индукции для H_1 справедливо утверждение. Пусть L/K – произвольный главный ωd-фактор группы G и $C := C_G(L/K)$.

Рассмотрим случай, когда $K \neq 1$. Так как ввиду леммы 1.2(1) [47] $\mathfrak{F}$-корадикал группы G/K π-разрешим и по лемме 2.5.1 HK/K – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в G/K, то по индукции для G/K утверждение верно. Если L/K f_ω-централен в G, то $(L/K)/(K/K)$ f_ω-централен в G/K и по индукции HK/K покрывает $(L/K)/(K/K)$. Это означает, что $L/K \subseteq (HK/K)(K/K)$. Отсюда получаем, что $L \subseteq HK$ и H покрывает L/K. Если L/K f_ω-эксцентрален в G, то $(L/K)/(K/K)$ f_ω-эксцентрален в G/K и по индукции HK/K изолирует $(L/K)/(K/K)$. Тогда $L/K \cap (HK/K) \subseteq K/K$. Это означает, что $L \cap HK = K(L \cap H) \subseteq K$ и поэтому H изолирует L/K.

Пусть $K = 1$. Рассмотрим случай, когда H_1 не покрывает L. Это означает, что $L \nsubseteq H_1$ и $G = H_1L$. Из $G = H_1G^{\mathfrak{F}}$ следует, что H_1 – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G и поэтому в силу леммы 1.2.5(2) главный фактор $L/1$ является f_ω-эксцентральным в G. Согласно лемме 1.2.6 справедливо $L \cong L \cap G^{\mathfrak{F}}$ и, значит, L π-разрешима. Если L – π'-группа, то ввиду $H \in \mathfrak{F}$ имеем $H \cap L = 1$. Следовательно, H изолирует L. Пусть L является абелевой p-группой для некоторого $p \in \pi$. Поскольку $G = H_1L$, то $H_1 \cap L = 1$. Так как $H \subseteq H_1$, то $H \cap L = 1$. Таким образом, в этом случае H также изолирует L.

Пусть H_1 покрывает L. Тогда $L \subseteq H_1$. Рассмотрим случай, когда $L/1$ – f_ω-центральный главный фактор группы G. Так как f – внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, то $G/C \in \mathfrak{F}$ и, значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C$. Тогда $G = H_1G^{\mathfrak{F}} = H_1C$. Отсюда получаем, что $L = L \cap H_1$ – f_ω-центральный главный фактор группы H_1. По индукции H покрывает $L \cap H_1$. Следовательно, $L = L \cap H_1 \subseteq H$ и поэтому H покрывает L.

Пусть теперь главный фактор $L/1$ группы G f_ω-эксцентрален в G. Как и выше, в силу леммы 1.2.6 L является π-разрешимой группой. Если L – π'-группа, то $H \cap L = 1$ и H изолирует L. Пусть L является абелевой p-группой для некоторого $p \in \pi$. Предположим, что $C \subseteq H_1$. Рассмотрим случай, когда $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ – π'-группа. Тогда $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ π'-разложима и по лемме 1.3.1(3) R π'-разложима. Это означает, что $R = A \times B$, где $A = R_{\pi'}$, $B = R_\pi$. Тогда $B \subseteq R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. Так как B нильпотентна, то $B_{p'}$ нормальна в B. Следовательно, B – нормальная p'-замкнутая подгруппа в G. По лемме 1.8.5 [66] $B \subseteq C_G(L)$. Поскольку $A \cap L = 1$, то $A \subseteq C_G(L)$. Таким образом, $R \subseteq C_G(L)$. Тогда $G = H_1R = H_1C = H_1$, что невозможно.

Если $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ – πd-группа, то в силу $R \leq G^{\mathfrak{F}}$ получаем, что $R/R \cap \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ – абелева q-группа для некоторого $q \in \pi$. Тогда по лемме 1.3.1(4) группа R нильпотентна и поэтому $R \subseteq F(G) \subseteq C$. Теперь, как и выше, получаем, что $G = H_1$. Противоречие.

Следовательно, $C \nsubseteq H_1$. Тогда $G = H_1C$ и $L = L \cap H_1$ – f_ω-эксцентральный главный фактор группы H_1. По индукции H изолирует $L \cap H_1$. Это означает, что $H \cap L \cap H_1 \subseteq K = 1$. Таким образом, $H \cap L = 1$ и поэтому H изолирует L.

2) Доказательство проводится аналогично доказательству пункта 1). *Теорема доказана.*

Следствие 2.5.3. (Шеметков [46]; см. также [47], следствие 21.1.1). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Если H – $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G, то H покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный и изолирует каждый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G.*

Следствие 2.5.4. (Картер, Хоукс [59]; см. также [60], теорема V, 3.2). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, H – $\mathfrak{F}$-нормализатор разрешимой группы G. Тогда H покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный и изолирует каждый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G.*

В следующей теореме получен критерий $\mathfrak{F}$-абнормальности максимальной подгруппы группы, связанный с включением в нее $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатора группы.

Теорема 2.5.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, M – максимальная подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}}$ – ω-группа. Тогда M является $\mathfrak{F}$-абнормальной в G в том и только в том случае, когда M содержит хотя бы один $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G.*

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть M – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G. Согласно теореме 2.5.1 группа G обладает $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторами. Покажем, что M содержит хотя бы один $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G. Отметим, что из $G = MG^{\mathfrak{F}}$ следует, что каждый $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G отличен от G. Применим индукцию по порядку группы G. По теореме 2.5.1 в M существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор K. Если M – $\mathfrak{F}^{\omega}$-критическая подгруппа в G, то ввиду определения 2.5.1 K является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в группе G.

Пусть теперь M не является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической подгруппой в G. Если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G)$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$ и M $\mathfrak{F}$-нормальна в G. Получили противоречие. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq \Phi(G)$ и поэтому в $G/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$ существует минимальная нормальная подгруппа $R/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$ такая, что $R \leq G^{\mathfrak{F}}$. Это означает, что R – $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельная нормальная подгруппа группы G. Так как M не является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической подгруппой в G, то $MR \neq G$ и поэтому $R \subseteq M$. Если $R \subseteq \Phi(G)$, то $R/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) = 1$, что невозможно. Таким образом, $R \not\subseteq \Phi(G)$ и, значит, существует максимальная подгруппа L в G, не содержащая R. Отсюда следует, что $G = LR$ и L – $\mathfrak{F}^{\omega}$-критическая подгруппа в G. Так как $R \subseteq M$ и M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G, то по лемме 2.4.3 $M \cap L$ – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в L. Поскольку $G = LG^{\mathfrak{F}}$, то по лемме 1.2(3) [47] $L^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и, значит, $L^{\mathfrak{F}}$ – ω-группа. По индукции $M \cap L$ содержит $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы L, который в силу определения 2.5.1 является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором группы G.

2. *Достаточность.* Пусть M содержит $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор H группы G. Так как по теореме 2.5.1 $G = HG^{\mathfrak{F}}$, то $G = MG^{\mathfrak{F}}$ и поэтому M – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G. *Теорема доказана.*

Следствие 2.5.5. (Подуфалова [21]; см. также [47], теорема 21.7). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, M – максимальная подгруппа группы G. Тогда M является $\mathfrak{F}$-абнормальной в G в том и только в том случае, когда M содержит хотя бы один $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G.*

В следующей теореме получим достаточные условия дополняемости $\mathfrak{F}$-

корадикала группы G ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторами, тем самым получим решение проблемы Виландта [81] о дополняемости в конечной группе её $\mathfrak{F}$-корадикала без условия абелевости его силовских подгрупп для ω-локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ (решение Проблемы **(A)**).

Теорема 2.5.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация Фиттинга, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $G = A_1A_2\cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является π-разрешимой ω-группой, а его силовские p-подгруппы абелевы для любого $p \in \omega$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то каждый $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G является дополнением к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$ в G.*

Доказательство. Пусть $A_i^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа и силовские p-подгруппы группы $A_i^{\mathfrak{F}}$ являются абелевыми для любого $p \in \omega$, $i = 1, 2, \ldots, n$, f – максимальный внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда по теореме 1.2.1 $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}}A_2^{\mathfrak{F}}\cdots A_n^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа, не содержащая G-главных f_{ω}-центральных факторов.

Согласно теореме 2.5.1 в G существует по крайней мере один $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор H и $G = G^{\mathfrak{F}}H$. По теореме 2.5.3 H покрывает каждый f_{ω}-центральный и изолирует каждый f_{ω}-эксцентральный главный ωd-фактор группы G. Следовательно, H изолирует каждый главный фактор группы G ниже $G^{\mathfrak{F}}$. Рассмотрим главный ряд группы G, проходящий через $G^{\mathfrak{F}}$ вида:

$$G = G_0 > \ldots > G_k = G^{\mathfrak{F}} > G_{k+1} > \ldots > G_s = 1.$$

Пусть $D := G^{\mathfrak{F}} \cap H$ и $D_i := D \cap G_i$, $i = k, \ldots, s$. Тогда $D = D_k \geq D_{k+1} \geq \ldots \geq D_s = 1$ – нормальный ряд группы D. Пусть $l \in \{k, \ldots, s-1\}$. Так как H изолирует главный фактор G_l/G_{l+1}, то $H \cap G_l \subseteq G_{l+1}$ и поэтому $D_l = H \cap D_l = H \cap D \cap G_l = D \cap (H \cap G_l) \subseteq D_{l+1}$. Это означает, что $D_l/D_{l+1} = 1$ для любого $l \in \{k, \ldots, s-1\}$. Следовательно, $D = 1$.

Поскольку $G = G^{\mathfrak{F}}H$ и $|G^{\mathfrak{F}} \cap H| = 1$, то H является дополнением к $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G. *Теорема доказана.*

Следствие 2.5.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация Фиттинга и $G = A_1A_2\cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым с абе-*

левыми силовскими подгруппами для любого $i = 1, 2, \dots, n$, *то каждый* $\mathfrak{F}$-*нормализатор группы* G *является дополнением к* $\mathfrak{F}$-*корадикалу* $G^{\mathfrak{F}}$ *в* G.

Замечание 2.5.1. Теоремы 1.4.2 и 2.5.5 являются развитием основных результатов работ [16] и [17].

Все результаты параграфа 2.5 опубликованы в работе [97].

§ 2.6. Связь $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторов с $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающими подгруппами конечных групп

В данном параграфе для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ получим ряд результатов о взаимосвязи $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторов с $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающими подгруппами группы.

Лемма 2.6.1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – ω-*локальная формация,* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, G – *группа и* $G^{\mathfrak{F}}$ – π-*разрешимая* ω-*группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *Если* $G = SF$ *и* F – *нильпотентная нормальная* ω-*подгруппа в* G, *то каждый* $\mathfrak{F}^{\omega}$-*нормализатор* T *подгруппы* S *представим в виде* $T = H \cap S$, *где* H – *некоторый* $\mathfrak{F}^{\omega}$-*нормализатор группы* G;

2) *если* $G = SO_{\pi'}(G)$, *то каждый* $\mathfrak{F}^{\omega}$-*нормализатор подгруппы* S *является* $\mathfrak{F}^{\omega}$-*нормализатором группы* G;

3) *если* M – $\mathfrak{F}$-*абнормальная максимальная подгруппа группы* G, *то каждый* $\mathfrak{F}^{\omega}$-*нормализатор подгруппы* M *содержит некоторый* $\mathfrak{F}^{\omega}$-*нормализатор группы* G.

Доказательство. По теореме 2.5.1 в группе G существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор. Пусть f – внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$.

1) Допустим, что G – контрпример минимального порядка. Тогда $G = SF$, где F – нильпотентная нормальная ω-подгруппа в G, и найдется такой $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор T группы S, который не допускает представление в виде, указанном в заключении утверждения 1). Предположим, что $G \in \mathfrak{F}$. Тогда G является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в G. По теореме 2.3 [47] $S \in formG \subseteq \mathfrak{F}$ и, значит, $T = S = G \cap S$. Получили противоречие. Следовательно, $G \notin \mathfrak{F}$.

(a) Рассмотрим случай, когда $S < \cdot G$. Так как $F \subseteq F(G)$, то $G = SF(G)$. Если S $\mathfrak{F}$-абнормальна в G, то по лемме 2.4.2(2) S является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической в

G. Тогда T является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в G и $T = T \cap S$. Противоречие. Таким образом, S $\mathfrak{F}$-нормальна в G и по определению 1.2.2 $G^{\mathfrak{F}} \subseteq S$. Согласно лемме 1.2(2) [47] $FG^{\mathfrak{F}} = FS^{\mathfrak{F}}$ и поэтому $S^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа.

Предположим, что $O_{\pi'}(G) \neq 1$ и K – минимальная нормальная подгруппа в G, являющаяся π'-группой. Так как $G/G^{\mathfrak{F}}$ – π-группа, то $K \leq G^{\mathfrak{F}}$ и, значит, $K \leq S$. Поскольку $G/K = S/K \cdot FK/K$, FK/K – нильпотентная нормальная ω-подгруппа в G/K и в силу леммы 1.2(1) [47] $(G/K)^{\mathfrak{F}}$ является π-разрешимой ω-группой, то по индукции для G/K утверждение верно. Согласно лемме 2.5.1 TK/K является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в S/K и поэтому $TK/K = X/K \cap S/K$ для некоторого $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатора X/K группы G/K. Ввиду теоремы 2.5.2 и леммы 2.5.1 $X/K = HK/K$, где H – некоторый $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G. Тогда $TK = HK \cap S = (H \cap S)K$. Поскольку T и $H \cap S$ – π-группы, то по теореме Шура-Цассенхауза $T = (H \cap S)^x = H^x \cap S$ для некоторого $x \in K$, причем по лемме 2.5.1 H^x – $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G. Получили противоречие. Следовательно, $O_{\pi'}(G) = 1$.

Пусть $\Phi := \Phi(G)$. Так как по теореме 1 [40] формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной, то $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq \Phi$ и поэтому $G^{\mathfrak{F}}\Phi/\Phi \neq 1$. Пусть R/Φ – минимальная нормальная подгруппа группы G/Φ, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}\Phi/\Phi$. Тогда R/Φ – π-разрешимая ω-группа. Если R/Φ является π'-группой, то по лемме 1.3.1(3) группа R π'-разложима и, значит, $O_{\pi'}(R) \neq 1$, что, ввиду $O_{\pi'}(G) = 1$, невозможно. Поэтому R/Φ – элементарная абелева p-группа для некоторого $p \in \pi \cap \omega$. По лемме 1.3.1(3) R является p-разложимой группой и, следовательно, R – нильпотентная π-группа, причем $R \leq G^{\mathfrak{F}}\Phi \leq S\Phi = S$. Поскольку $\Phi(G/\Phi) = \Phi/\Phi = 1$, то в G/Φ существует максимальная подгруппа M/Φ такая, что $G/\Phi = M/\Phi \cdot R/\Phi$. Таким образом, имеем $G = MR = M\Phi G^{\mathfrak{F}} = MG^{\mathfrak{F}} = MF(G)$, $S = (M \cap S)R = (M \cap S)F(S)$, $M^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа и M – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G. По лемме 2.4.2 (2) M является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической в G.

В силу леммы 1.2.5(2) R/Φ – f_{ω}-эксцентральный главный фактор группы G и, значит, $G/C_G(R/\Phi) \notin f(p)$. Так как $G = SF(G)$ и $F(G) \leq C_G(R/\Phi)$, то $G/C_G(R/\Phi) \cong S/C_S(R/\Phi) \notin f(p)$ и поэтому R/Φ также является f_{ω}-эксцентральным главным фактором в S.

Поскольку $G = SF$, то $F \not\subseteq \Phi$ и $F/F \cap \Phi \neq 1$. Пусть $F \cap \Phi := \Phi_1$. Так как F/Φ_1 – неединичная нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G/Φ_1 и $F/\Phi_1 \cap \Phi(G/\Phi_1) = F/\Phi_1 \cap \Phi/\Phi_1 = \Phi_1/\Phi_1 = 1$, то по лемме 7.9 [47] F/Φ_1 – прямое произведение некоторого числа минимальных нормальных подгрупп группы G/Φ_1. Из $G/\Phi_1 = S/\Phi_1 \cdot F/\Phi_1$ следует, что в G/Φ_1 найдется минимальная нормальная подгруппа L/Φ_1, содержащаяся в F/Φ_1 такая, что $G/\Phi_1 = S/\Phi_1 \cdot L/\Phi_1$. Тогда $G = SL$ и L – нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G. В силу леммы 1.2.5(1) L/Φ_1 – f_ω-центральный главный фактор в G. По лемме 1.2.5(2) M покрывает L/Φ_1 и поэтому $L \subseteq M$. Тогда $M = M \cap SL = (M \cap S)L$.

Пусть T_1 – произвольный $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор подгруппы $M \cap S$. Так как $M^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа, $M = (M \cap S)L$ и L – нильпотентная нормальная ω-подгруппа в M, то по индукции T_1 представим в виде $T_1 = N \cap (M \cap S)$, где N – некоторый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы M, являющийся, в силу $\mathfrak{F}^\omega$-критичности M в G, $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором группы G. Таким образом, $T_1 = N \cap S$, где N – некоторый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G.

Установим, что T_1 является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в S. Так как $S = (M \cap S)R$ и R/Φ – главный фактор в S, то $M \cap S < \cdot S$. Если $M \cap S$ $\mathfrak{F}$-нормальна в S, то по лемме 1.2.5(1) $M \cap S$ покрывает R/Φ и, значит, $R \subseteq (M \cap S)\Phi \subseteq M$, что невозможно. Следовательно, $M \cap S$ $\mathfrak{F}$-абнормальна в S. Поскольку $S^{\mathfrak{F}}$ – ω-группа и $S = (M \cap S)F(S)$, то согласно лемме 2.4.2 (2) $M \cap S$ является $\mathfrak{F}^\omega$-критической в S. Это означает, что каждый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы $M \cap S$ является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в S и поэтому T_1 – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы S.

Так как T и T_1 – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторы группы S, то по теореме 2.5.2 $T = T_1^s$ для некоторого $s \in S$. Тогда $T = N^s \cap S$, где N^s – некоторый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G ввиду леммы 2.5.1. Получили противоречие.

(b) Пусть S не является максимальной подгруппой в G и $S_1 < \cdot G$, $S \subseteq S_1$. Тогда $G = S_1F$, $S_1 = S(S_1 \cap F)$ и $S_1 \cap F$ – нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы S_1. Как и в пункте (a), ввиду леммы 1.2(2) [47] $S_1^{\mathfrak{F}}$ является π-разрешимой ω-группой. По индукции $T = H_1 \cap S$, где H_1 – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы S_1. Так как $G = S_1F$, то по доказанному в пункте (a) $H_1 = H \cap S_1$, где H – некоторый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G. Тогда $T = (H \cap S_1) \cap S = H \cap S$. Получили противоречие. Утверждение 1) доказано.

2) Пусть $K := O_{\pi'}(G)$ и $G = SK$. Поскольку $G/G^{\mathfrak{F}}$ является π-группой, то

$K \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Из $G = SG^{\mathfrak{F}}$ ввиду леммы 1.2(3) [47] получаем, что $S^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа, и по теореме 2.5.1 в S существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор.

Допустим, что группа G – контрпример минимального порядка и T – такой $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы S, который не является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в G. Тогда $S \subset G$. Пусть S_1 – максимальная подгруппа в G такая, что $S \subseteq S_1$. Тогда имеем $S_1 = S(S_1 \cap K) = SO_{\pi'}(S_1)$, $G = S_1K = S_1G^{\mathfrak{F}}$, $S_1^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа и S_1 – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G. По индукции каждый $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы S является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором группы S_1. Таким образом, T является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в S_1. Если S_1 является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической подгруппой в G, то T является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором группы G, что противоречит выбору T. Следовательно, S_1 не является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической подгруппой в G.

Пусть $\Phi := \Phi(G)$. Так как $G = S_1K$, то $K \not\subseteq \Phi$ и в группе $K/K \cap \Phi$ существует минимальная нормальная подгруппа $R/K\cap\Phi = R(K\cap\Phi)/(K\cap\Phi) \cong R/R \cap K \cap \Phi = R/R \cap \Phi$ группы $G/K \cap \Phi$. Поскольку $R \cap \Phi = R \cap \Phi \cap O_{\omega}(G)$, то $R/R \cap \Phi \cap O_{\omega}(G)$ – главный фактор группы G и, значит, R – $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельная нормальная подгруппа в G. Так как $R \not\subseteq \Phi$, то в G существует максимальная подгруппа M такая, что $G = MR = MK = MG^{\mathfrak{F}}$. Тогда M является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической подгруппой в G и $M^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа.

Пусть $D := M \cap S_1$. Поскольку S_1 не является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической подгруппой в G, то $S_1R = S_1$ и $R \subseteq S_1$. По лемме 2.4.3 D – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в M. Допустим, что $M \cap K \subseteq S_1$. Так как $K = R(M \cap K)$ и $R \subseteq S_1$, то $K \subseteq S_1$ и поэтому $G = KS_1 = S_1$. Получили противоречие. Следовательно, $M \cap K \not\subseteq S_1$ и, значит, $M \cap K \not\subseteq D$. Тогда $M = D(M \cap K) = DO_{\pi'}(M)$. Пусть T_1 – $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы D. По индукции T_1 является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в M, а значит, и $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в G.

Поскольку $R \subseteq S_1$, то $S_1 = (M \cap S_1)R = DR = DO_{\pi'}(S_1)$. Тогда по индукции T_1 является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором группы S_1. Таким образом, T и T_1 – $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторы группы S_1. По теореме 2.5.2 $T = T_1^a$ для некоторого $a \in S_1$. Так как T_1 – $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор в G, то по лемме 2.5.1 T_1^a также является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в G. Получили противоречие. Утверждение 2) доказано.

3) Пусть M – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G. Тогда $G = MG^{\mathfrak{F}}$ и в силу леммы 1.2(3) [47] $M^{\mathfrak{F}}$ является π-разрешимой ω-

группой. По теореме 2.5.1 в M существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор. Если M – $\mathfrak{F}^{\omega}$-критическая подгруппа группы G, то всякий $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы M является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в G и утверждение верно.

Пусть M не является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической подгруппой в G. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} = 1$ и $G = M$, что невозможно. Следовательно, $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G отличен от G и ввиду определения 2.5.1 в G существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-критическая подгруппа L. Это означает, что $G = RL$, где R – $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельная нормальная подгруппа в G. Тогда $R \leq G^{\mathfrak{F}}$, $L^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа и $R/R \cap \Phi \cap O_{\omega}(G) = R/R \cap \Phi$ – главный фактор группы G, где $\Phi := \Phi(G)$. Так как M не является $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической подгруппой в G, то $R \subseteq M$ и $M = R(M \cap L)$. По лемме 2.4.3 $M \cap L$ – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы L. Пусть T – $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор в $M \cap L$. Тогда по индукции $H \subseteq T$, где H – некоторый $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы L, являющийся, ввиду $\mathfrak{F}^{\omega}$-критичности L в G, $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в G. Так как $R \leq G^{\mathfrak{F}}$, то $R/R \cap \Phi$ – π-разрешимая ω-группа.

(a) Пусть $R/R \cap \Phi$ является абелевой p-группой для некоторого $p \in \omega \cap \pi$. Так как по лемме 1.3.1(4) R – нильпотентная ω-группа и $M = M \cap RL = (M \cap L)R$, то по утверждению 1) $T \subseteq K$, где K – $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор в M. Тем самым установлено, что $H \subseteq K$. Пусть C – произвольный $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы M. По теореме 2.5.2 $C = K^m$ для некоторого $m \in M$ и H^m – $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор в G. Тогда из $H \subseteq K$ получаем $H^m \subseteq K^m = C$. Следовательно, в этом случае каждый $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы M содержит некоторый $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G.

(b) Пусть $R/R \cap \Phi$ – π'-группа. Тогда $R/R \cap \Phi$ π'-разложима и по лемме 1.3.1(3) R – π'-разложимая группа. Это означает, что $R = A \times B$, где $A = R_{\pi}$, $B = R_{\pi'}$. Так как $M = R(M \cap L)$, то $M/R \cap \Phi = (R/R \cap \Phi) \cdot (M \cap L/R \cap \Phi)$ и, значит, $|M : M \cap L|$ – π'-число. Тогда $A \subseteq M \cap L$ и $M = (M \cap L)R = (M \cap L)AB = (M \cap L)B$. Так как $B \subseteq O_{\pi'}(M)$, то $M = (M \cap L)O_{\pi'}(M)$ и по утверждению 2) T является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в M. Как и в пункте (a), из $H \subseteq T$ ввиду теоремы 2.5.2 получаем, что утверждение 3) верно. *Лемма доказана.*

Определение 2.6.1. ([47], определение 21.2). Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Максимальная $(G - L)$-цепь вида

$$L = L_t < L_{t-1} < \ldots < L_1 < L_0 = G, \text{ где } t > 0, \tag{2.6.1}$$

называется $\mathfrak{F}$-*субабнормальной* $(G-L)$-*цепью*, если L_i $\mathfrak{F}$-абнормальна в L_{i-1} для любого $i = 1, 2, \dots, t$. Подгруппа L группы G называется $\mathfrak{F}$-*субабнормальной* в G, если либо $L = G$, либо $L \neq G$ и существует $\mathfrak{F}$-субабнормальная $(G-L)$-цепь.

Теорема 2.6.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, G – группа и $G^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *всякая $\mathfrak{F}$-субабнормальная подгруппа группы G содержит по крайней мере один $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G;*

2) *всякая $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G содержит по крайней мере один $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G;*

3) *каждый $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G содержится по крайней мере в одной $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппе группы G.*

Доказательство. Согласно теореме 2.5.1 в группе G существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор.

1) Пусть L – $\mathfrak{F}$-субабнормальная подгруппа группы G. Тогда по определению 2.6.1 либо $L = G$, либо $L \neq G$ и существует $\mathfrak{F}$-субабнормальная $(G-L)$-цепь вида (2.6.1). Если $G \in \mathfrak{F}$, то G является $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в G. Из $G^{\mathfrak{F}} = 1$ получаем, что $L = G$ – единственная $\mathfrak{F}$-субабнормальная подгруппа в G и, значит, утверждение верно.

Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Если $L = G$, то утверждение верно. Пусть $L \neq G$ и существует $\mathfrak{F}$-субабнормальная $(G-L)$-цепь (2.6.1). Пусть $i \in \{1, \dots, t\}$. По определению 2.6.1 L_i – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы L_{i-1}. Ввиду леммы 1.2(3) [47] $L_{i-1}^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа. Тогда согласно лемме 2.6.1(3) $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор H_i группы L_i содержит некоторый $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор H_{i-1} группы L_{i-1}. Таким образом, $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_t \subseteq L_t = L$, где H_0 – $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы $L_0 = G$. Утверждение 1) доказано.

2) Пусть F – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G. Если $G \in \mathfrak{F}$, то, как и в пункте 1), утверждение верно. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда $F < G$ и по теореме 2.3.6 F является $\mathfrak{F}$-абнормальной подгруппой в G. Согласно определениям 1.2.2 и 2.6.1 F – $\mathfrak{F}$-субабнормальная подгруппа в G и по утверждению 1) F содержит по крайней мере один $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G. Утверждение 2) доказано.

3) Пусть H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G, F – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G. Согласно утверждению 2) F содержит некоторый $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор

K группы G. По теореме 2.5.2 $H = K^g$ для некоторого $g \in G$. Так как $K \subseteq F$, то $H = K^g \subseteq F^g$, где F^g – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G ввиду теоремы 2.3.5. Утверждение 3) доказано. *Теорема доказана.*

Следствие 2.6.1. (Шеметков [47], теорема 21.8). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, G – группа с π-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *всякая $\mathfrak{F}$-субабнормальная подгруппа группы G содержит по крайней мере один $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G*;

2) *всякая $\mathfrak{F}$-покрывающая подгруппа группы G содержит по крайней мере один $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G*;

3) *каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G содержится по крайней мере в одной $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе группы G.*

В следующей теореме для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлено совпадение множества $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов с множеством всех $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающих подгрупп в группе с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом, являющимся ω-группой.

Теорема 2.6.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, $G^{\mathfrak{F}}$ – нильпотентная ω-подгруппа группы G. Тогда множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов группы G совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающих подгрупп.*

Доказательство. 1. Пусть H – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G. Покажем, что H является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G. Если $G \in \mathfrak{F}$, то ввиду леммы 2.3.1 $H = G$ и по определению 2.5.1 $H = G$ является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором группы G. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда $H < G$ и поэтому существует максимальная подгруппа M в G такая, что $H \subseteq M$.

Согласно определению 2.3.1 из того, что $H \leq U \leq G$, V – нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$, следует $U = HV$. Тогда при $U = G$ и $V = G^{\mathfrak{F}}$ имеем $G = HG^{\mathfrak{F}}$. Отсюда в силу $H \subseteq M$ получаем $G = MG^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, M – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G. Поскольку $G^{\mathfrak{F}}$ нильпотентна, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq F(G)$ и, значит, $G = MF(G)$. Тогда по лемме 2.4.2(2) M является $\mathfrak{F}^\omega$-критической подгруппой в G. Согласно лемме 2.3.2(2) H – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в M. Ввиду леммы 1.2(3) [47] $M^{\mathfrak{F}}$ – нильпотентная ω-группа. Тогда по индукции H является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в M. Отсюда в силу $\mathfrak{F}^\omega$-критичности подгруппы M в G получаем, что H – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в G.

2. Пусть L – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G. Так как по теореме 2.5.1 $G = LG^{\mathfrak{F}}$, то ввиду следствия теоремы 2.3.2 $L \subseteq K$, где K – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G. Согласно пункту 1, K является $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатором в G. По теореме 2.5.2 K и L сопряжены в G. Следовательно, $|L| = |K|$. Это, в силу $L \subseteq K$, означает, что $L = K$. Тем самым установлено, что L – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G. *Теорема доказана.*

Следствие 2.6.2. (Шеметков [46], см. также [47], следствие 21.5.2). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда множество всех $\mathfrak{F}$-нормализаторов группы G совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп.*

Следствие 2.6.3. (Картер, Хоукс [59], теорема 5.6). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – разрешимая группа. Если $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, то множество всех $\mathfrak{F}$-нормализаторов группы G совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп.*

Пример 2.6.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\omega \times \mathfrak{B}_2$, где $2 \notin \omega$, $\mathfrak{S}_\omega$ – класс всех разрешимых ω-групп, $\mathfrak{B}_2$ – класс всех групп экспоненты ≤ 2 и G – произвольная 2-группа, не принадлежащая $\mathfrak{B}_2$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация и $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{B}_2} = \Phi(G) \neq 1$. Тогда каждая $\mathfrak{F}^\omega$-предельная подгруппа R группы G содержится в $\Phi(G)$ и, значит, в G не существует $\mathfrak{F}^\omega$-критических подгрупп. Поэтому в группе G не существует $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов и условие "быть ω-группой"для $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ в теоремах 2.5.1 – 2.6.2 является существенным.

В заключение для двух ω-локальных формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ исследуем влияние свойств множеств всех $\mathfrak{F}_i^\omega$-покрывающих подгрупп, $i = 1, 2$, на множества всех $\mathfrak{F}_i^\omega$-нормализаторов, $i = 1, 2$, группы G. Предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 2.6.2. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – непустые формации, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, G – группа, H_2 – $\mathfrak{F}_2^\omega$-нормализатор группы G. Тогда каждый $\mathfrak{F}_1^\omega$-нормализатор группы H_2 является $\mathfrak{F}_1^\omega$-нормализатором группы G.*

Доказательство. Пусть H_1 – $\mathfrak{F}_1^\omega$-нормализатор группы H_2. Тогда по определению 2.5.1 $H_1 \in \mathfrak{F}_1$ и существует цепь подгрупп группы H_2 вида

$$H_1 = L_r \subset L_{r-1} \subset \cdots \subset L_1 \subset L_0 = H_2, \tag{2.6.2}$$

где $r \geq 0$, такая, что L_i – $\mathfrak{F}_1^\omega$-критическая подгруппа в группе L_{i-1} для любого $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Так как H_2 – $\mathfrak{F}_2^\omega$-нормализатор группы G, то по определению 2.5.1 существует цепь подгрупп группы G вида

$$H_2 = K_s \subset K_{s-1} \subset \cdots \subset K_1 \subset K_0 = G, \tag{2.6.3}$$

где $s \geq 0$, такая, что K_j – $\mathfrak{F}_2^\omega$-критическая подгруппа в группе K_{j-1} для любого $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Пусть $1 \leq j \leq s$. Покажем, что K_j – $\mathfrak{F}_1^\omega$-критическая подгруппа в группе K_{j-1}. Действительно, по определению 2.4.1 $K_{j-1} = K_j R_j$, где R_j – $\mathfrak{F}_2^\omega$-предельная нормальная подгруппа группы K_{j-1}. Поскольку $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $(K_{j-1})^{\mathfrak{F}_2} \subseteq (K_{j-1})^{\mathfrak{F}_1}$. Это означает, что R_j является $\mathfrak{F}_1^\omega$-предельной нормальной подгруппой группы K_{j-1} и поэтому K_j – $\mathfrak{F}_1^\omega$-критическая подгруппа в группе K_{j-1}. Тогда из (2.6.2) и (2.6.3) по определению 2.5.1 получаем, что H_1 является $\mathfrak{F}_1^\omega$-нормализатором группы G. *Лемма доказана.*

Лемма 2.6.3. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – ω-локальные формации, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, G – группа, у которой множество всех $\mathfrak{F}_2^\omega$-покрывающих подгрупп содержится во множестве всех ее $\mathfrak{F}_1^\omega$-покрывающих подгрупп, $G^{\mathfrak{F}_1}$ – нильпотентная ω-группа. Если H_2 – $\mathfrak{F}_2^\omega$-нормализатор группы G и H_1 – $\mathfrak{F}_1^\omega$-нормализатор в H_2, то $H_1 = H_2$ – $\mathfrak{F}_1^\omega$-нормализатор группы G.*

Доказательство. Пусть H_2 – $\mathfrak{F}_2^\omega$-нормализатор группы G и H_1 – $\mathfrak{F}_1^\omega$-нормализатор в H_2. По лемме 2.6.2 H_1 является $\mathfrak{F}_1^\omega$-нормализатором в G, причем $H_1 \subseteq H_2$. Покажем, что $H_1 = H_2$.

Если $G \in \mathfrak{F}_2$, то $G = H_2$. Так как $G \in \mathfrak{F}_2$, то G – $\mathfrak{F}_2^\omega$-покрывающая подгруппа в G. Тогда по условию G является $\mathfrak{F}_1^\omega$-покрывающей подгруппой в G и поэтому $G \in \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $G = H_1$ и в этом случае $H_1 = H_2$.

Пусть теперь $G \notin \mathfrak{F}_2$. Так как H_2 – $\mathfrak{F}_2^\omega$-нормализатор группы G, то ввиду определения 2.5.1 существует $\mathfrak{F}_2^\omega$-критическая подгруппа M группы G такая, что H_2 – $\mathfrak{F}_2^\omega$-нормализатор в M.

Покажем, что M удовлетворяет условию леммы. По определению 2.4.1 $G = MR$, где R – $\mathfrak{F}_2^\omega$-предельная нормальная подгруппа группы G, и поэтому $R \subseteq G^{\mathfrak{F}_2} \subseteq G^{\mathfrak{F}_1}$. Согласно лемме 1.2(3) [47] $M^{\mathfrak{F}_1} \subseteq G^{\mathfrak{F}_1}$ и, значит, $M^{\mathfrak{F}_1}$ – нильпотентная ω-группа. По теореме 2.3.7 всякая $\mathfrak{F}_2^\omega$-покрывающая подгруппа группы M имеет вид $M \cap K_2$, где K_2 – некоторая $\mathfrak{F}_2^\omega$-покрывающая подгруппа группы G, и всякая $\mathfrak{F}_1^\omega$-покрывающая подгруппа группы M имеет вид $M \cap K_1$, где K_1 – некоторая $\mathfrak{F}_1^\omega$-покрывающая подгруппа группы G. Тогда в силу условия множество всех $\mathfrak{F}_2^\omega$-покрывающих подгрупп группы M содержится во множестве всех ее $\mathfrak{F}_1^\omega$-покрывающих подгрупп. Следовательно, группа M удовлетворяет условию леммы. Поскольку H_2 – $\mathfrak{F}_2^\omega$-нормализатор в M и H_1 – $\mathfrak{F}_1^\omega$-нормализатор в H_2, то по индукции $H_1 = H_2$. *Лемма доказана.*

Теорема 2.6.3. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – ω-локальные формации, G – группа, у которой множество всех $\mathfrak{F}_1^\omega$-покрывающих подгрупп совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}_2^\omega$-покрывающих подгрупп, $G^{\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2}$ – нильпотентная ω-группа. Тогда множество всех $\mathfrak{F}_1^\omega$-нормализаторов группы G совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}_2^\omega$-нормализаторов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$. По лемме 1.1.5 формация $\mathfrak{F}$ является ω-локальной. Покажем, что всякая $\mathfrak{F}_1^\omega$-покрывающая подгруппа группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей в G. Пусть F – $\mathfrak{F}_1^\omega$-покрывающая подгруппа группы G. Согласно условию F является $\mathfrak{F}_2^\omega$-покрывающей подгруппой в G. Таким образом, $F \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}$. Так как F – $\mathfrak{F}_1^\omega$-покрывающая подгруппа группы G, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$ и $F \in \mathfrak{F}$, то F – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G. Итак, множество всех $\mathfrak{F}_1^\omega$-покрывающих подгрупп группы G содержится во множестве всех ее $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающих подгрупп. Аналогично, множество всех $\mathfrak{F}_2^\omega$-покрывающих подгрупп группы G содержится во множестве всех ее $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающих подгрупп.

Пусть $\mathfrak{M}_i$ – множество всех $\mathfrak{F}_i^\omega$-нормализаторов группы G, $i = 1, 2$. Так как $G^{\mathfrak{F}_i} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то согласно теореме 2.5.1 $\mathfrak{M}_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Покажем, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$. Пусть $H_1 \in \mathfrak{M}_1$. Поскольку согласно теореме 2.5.1 $G = G^{\mathfrak{F}} H_1$, то по лемме 1.2(3) [47] $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ является ω-группой и, значит, в H_1 существует $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор A. По лемме 2.6.3 $A = H_1$ – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в G. Пусть H_2 – $\mathfrak{F}_2^\omega$-нормализатор группы G и B – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор в H_2. В силу леммы 2.6.3 $B = H_2$ – $\mathfrak{F}^\omega$-

нормализатор в G. По теореме 2.5.2 A и B сопряжены в G. Следовательно, $A = B^g$ для некоторого $g \in G$. Поэтому $H_1 = A = B^g = H_2^g$. Согласно лемме 2.5.1 $H_2^g = H_1$ – $\mathfrak{F}_2^\omega$-нормализатор группы G и, значит, $H_1 \in \mathfrak{M}_2$. Таким образом, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$. Аналогично доказывается включение $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1$. *Теорема доказана.*

Замечание 2.6.1. В [59] получен результат, подобный теореме 2.6.3, в случае, когда G – разрешимая группа и $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ – локальные формации (см. [59], теорема 5.14).

Все результаты параграфа 2.6 опубликованы в работе [97].

§ 2.7. Известные результаты, используемые в Главе 2

В Главе 2 используются следующие известные результаты.

[13], Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга, когда для любых двух перестановочных субнормальных подгрупп A и B произвольной группы G имеет место равенство $(AB)^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$.*

[18], Лемма 1.44. *Если G – группа, $H < G$, то $H^xH \neq G$ при любом $x \in G$.*

[18], Лемма 2.36(3). *Пусть $N \cdot\!\!\triangleleft\, G$. Если $K \triangleleft G$ и $N \not\subseteq K$, то $NK/K \cdot\!\!\triangleleft\, G/K$.*

[18], Лемма 2.37. *Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторое множество минимальных нормальных подгрупп группы G и $M = \Pi_{N\in\mathfrak{M}}N$. Тогда*: 1) *если $K \triangleleft G$, то существуют подгруппы $N_1, N_2, \ldots, N_k \in \mathfrak{M}$ такие, что $KM = K \times N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$*; 2) *существуют $N_1, \ldots, N_m \in \mathfrak{M}$ такие, что $M = N_1 \times \ldots \times N_m$*; 3) *если $\mathfrak{M}$ – множество всех минимальных нормальных подгрупп, то существуют подгруппы $N_1, \ldots, N_s \in \mathfrak{M}$ такие, что $Soc\ G = N_1 \times \ldots \times N_s$.*

[18], Теорема 3.12(2). *В нильпотентной группе каждая собственная подгруппа отлична от своего нормализатора.*

[18], Лемма 3.17. *Пусть $M < \cdot\ G$ и $K \triangleleft\ G$. Тогда*: 1) *если $\alpha \in Aut\ G$, то $\alpha(M) < \cdot\ G$*; 2) *если $x \in G$, то $M^x < \cdot\ G$*; 3) *если $K \leq M$, то $M/K < \cdot\ G/K$*; 4) *если K не содержится в M, то $MK = G$*; 5) *если $\bar{U}$ – максимальная подгруппа фактор-группы $\bar{G} = G/K$, то существует $U < \cdot\ G$ такая, что $K \leq U$ и $\bar{U} = U/K$*; 6) *если $M \triangleleft\ G$, то $|\ G : M\ |$ – простое число.*

[18], Лемма 3.18(2). $\Phi(G) = \cap_{M<\cdot G}Core_G(M)$.

[18], Теорема 3.22. *Пусть* $K \lhd G$. *Тогда*: 1) $\Phi(K) \leq \Phi(G)$; 2) $\Phi(G)K/K \leq \Phi(G/K)$; 3) *если* $K \leq \Phi(G)$, *то* $\Phi(G)/K = \Phi(G/K)$; 4) *если* $A \leq G$ *и* $K \leq \Phi(A)$, *то* $K \leq \Phi(G)$.

[18], Теорема 3.24. *Пусть* $D \lhd K \lhd G$, $D \leq \Phi(G)$ *и* $D \lhd G$. *Если фактор-группа* K/D *нильпотентна, то* K *нильпотентна.*

[18], Лемма 4.39. Если $M < \cdot\, G$ и N – неединичная нормальная подгруппа группы G такая, что $M \cap N = 1$, то $N \cdot\!\lhd G$.

[18], Теорема 4.32. *Пусть* $N \lhd G$, $|N| = n$ *и* $|G : N| = m$ *взаимно просты. Тогда в* G *существует подгруппа порядка* m *и любые две подгруппы порядка* m *сопряжены между собой.*

[40], Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация. Тогда следующие условия равносильны*: 1) *формация* $\mathfrak{F}$ ω*-насыщена*; 2) $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$ *для всех* $p \in \omega$; 3) $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ *для всех* $p \in \omega$; 4) *формация* $\mathfrak{F}$ ω*-локальна.*

[47], Лемма 1.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустная формация,* $K \lhd G$. *Тогда справедливы следующие утверждения*: 1) $(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$; 2) *если* $G = HK$, *то* $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}K$; 3) *если* $G = HK$ *и* $K \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, *то* $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}$.

[47], Теорема 2.3. *Если* $S \leq G$ *и* $SF(G) = G$, *то* $S \in formG$.

[47], Следствие 4.1.1. *В любой группе* G *подгруппа Фиттинга* $F(G)$ *совпадает с пересечением централизаторов в* G *всех главных факторов группы* G.

[47], Лемма 7.9. *Пусть* H *– нильпотентная нормальная подгруппа группы* G. *Если* $H \neq 1$ *и* $H \cap \Phi(G) = 1$, *то* H *дополняема в* G *и равна прямому произведению некоторого числа минимальных нормальных* G.

[47], Теорема 8.5. *Пусть* f*-корадикал группы* G p*-разрешим,* f *–* p*-однородный экран,* M *и* H *–* f*-абнормальные максимальные подгруппы группы* G. *Если* $Core_G(M) \cap G^f = Core_G(H) \cap G^f$ *и* p *делит* $(\ |G : M|,\ |G : H|\ )$, *то* M *и* H *сопряжены между собой в* G.

[47], Лемма 11.1. *Подгруппа* H *тогда и только тогда является добавлением к нормальной подгруппе* K *группы* G, *когда* $HK = G$ *и* $H \cap K \subseteq \Phi(H)$.

[66], Лемма 1.8.5. *Если* H/K *–* pd*-главный фактор группы* G *и* N *– нормальная* p'*-замкнутая подгруппа группы* G, *то* $N \subseteq C_G(H/K)$.

[79], Лемма 1(7). *Если* $\mathfrak{F}$ *– формация Фиттинга,* $\mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, G *– группа,* $N \lhd G$ *и* $N \in \mathfrak{E}_{A'}$, *то* $(G/N)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/N$.

ГЛАВА 3
ФОРМАЦИОННЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ω-ВЕЕРНЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В данной Главе ω-веерные формации применяются к изучению подформационного строения формаций конечных групп в рамках исследования $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций. Глава состоит из пяти параграфов. В параграфах 3.1 и 3.2 изучаются n-кратно ω-веерные формации. В теоремах 3.1.1 и 3.1.2 решается проблема Л.А. Шеметкова [48] изучения $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций для n-кратно ω-веерных формаций с bp-направлением (решение Проблемы **(C)**). В параграфах 3.3 и 3.4 изучаются τ-замкнутые ω-веерные формации. В теоремах 3.4.1 и 3.4.2 решается Проблема **(C)** для τ-замкнутых ω-веерных формаций с bp-направлением. В параграфе 3.5 содержатся известные результаты, используемые в Главе 3. Все основные результаты Главы 3 опубликованы в работах [88], [89]. Основные результаты данных работ, в частности, Теоремы 3.1.1 и 3.1.2, 3.4.1 и 3.4.2, принадлежат М.М. Сорокиной.

§ 3.1. Критические n-кратно ω-веерные формации

В настоящем параграфе рассмотрим критические n-кратно ω-веерные формации конечных групп с направлением δ, удовлетворяющим условию $\delta \le \delta_3$.

Следуя [35], сформулируем определение n-кратно ω-веерной (n-кратно веерной) формации с направлением δ.

Определение 3.1.1. Пусть δ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Всякую непустую формацию будем считать *0-кратно ω-веерной* (*0-кратно веерной*) *с направлением* δ. При $n \neq 0$ формацию $\mathfrak{F}$ назовем *n-кратно ω-веерной* (*n-кратно веерной*) *с направлением* δ, если $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один $\omega\delta_{(n-1)}$-спутник ($\delta_{(n-1)}$-спутник), то есть такой ω-спутник (спутник), все непустые значения которого являются $(n-1)$-кратно ω-веерными (n-кратно веерными) формациями с направлением δ.

Через $\omega F_n(\mathfrak{X}, \delta)$ ($\mathbb{P}F_n(\mathfrak{X}, \delta)$) обозначим n-кратно ω-веерную (n-кратно веерную) формацию с направлением δ, порожденную множеством групп $\mathfrak{X}$.

Доказательство следующей леммы проводится аналогично доказательству теоремы 1.1.6.

Лемма 3.1.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, $\mathfrak{F} = \omega F_n(\mathfrak{X}, \delta)$, где $\delta_0 \le \delta$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным $\omega\delta_{(n-1)}$-спутником f таким, что*

$$f(\omega') = \omega F_{(n-1)}(\ (\ G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ ),\ \delta\ ),$$
$$f(p)\ = \omega F_{(n-1)}(\ (\ G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{X}\ ),\ \delta\ ) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X}),$$
$$f(p)\ = \varnothing, \text{ если } p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X}).$$

Следствие 3.1.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}_i$ – n-кратно ω-веерная формация с направлением δ, где $\delta_0 \le \delta$, и f_i – минимальный $\omega\delta_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \le f_2$.*

С помощью метода математической индукции нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.1.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если $\mathfrak{F}$ – n-кратно ω-веерная формация с направлением δ, то $\mathfrak{F}$ является $(n-1)$-кратно ω-веерной формацией с направлением δ.*

Определение 3.1.2. Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп, θ – совокупность формаций, $\mathfrak{F} \in \theta$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *$\mathfrak{H}_\theta$-критической формацией* [33] (или, иначе, *минимальной не $\mathfrak{H}$ θ-формацией* [48]), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные θ-подформации из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{H}$ содержатся.

$\mathfrak{H}_\theta$-критическую формацию в случае, когда θ – совокупность всех n-кратно ω-веерных (n-кратно веерных) формаций с направлением δ, назовем *$\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критической* (*$\mathfrak{H}_{\delta_n}$-критической*) *формацией.* В случае, когда $n = 1$, $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критическую ($\mathfrak{H}_{\delta_n}$-критическую) формацию будем называть *$\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критической* (*$\mathfrak{H}_\delta$-критической*) формацией. *$\mathfrak{H}$-критическая формация* – это $\mathfrak{H}_\theta$-критическая формация, если θ – совокупность всех формаций.

Исследуем критические n-кратно ω-веерные формации с bp-направлением δ, удовлетворяющим условию $\delta \le \delta_3$.

Теорема 3.1.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \le \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – n-кратно ω-веерная формация с направлением*

δ и минимальным $\omega\delta_{(n-1)}$-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критической, то $\mathfrak{F} = \omega F_n(G, \delta)$, где G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \subseteq \omega$, то формация $f(p)$ является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической формацией.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критическая формация. Согласно определению 3.1.2 $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G является монолитической группой с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку $\omega F_n(G, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\omega F_n(G, \delta) \not\subseteq \mathfrak{H}$, то по определению 3.1.2 $\mathfrak{F} = \omega F_n(G, \delta)$. Так как δ является p-направлением, то согласно лемме 3.1.1 $f(\omega') = \omega F_{(n-1)}((G/O_\omega(G)), \delta)$, $f(p) = \omega F_{(n-1)}((G/G_{\delta(p)}), \delta)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ и $f(p) = \varnothing$, если $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Поскольку δ является bp-направлением, удовлетворяющим условию $\delta \leq \delta_3$, то по теореме 6 [8] $h(\omega') = \mathfrak{H}$ и для любого $p \in \omega$ справедливо $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p h_1(p)$, где h_1 – произвольный внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $\pi(P) \subseteq \omega$. Предположим, что $f(q) \subseteq h(q)$ для любого $q \in \pi(P)$. Тогда из $G \in \mathfrak{F}$ следует $G/G_{\delta(q)} \in f(q) \subseteq h(q)$ для всех $q \in \pi(P)$. Кроме того, $G/P \in \mathfrak{H}$ и ввиду $P \subseteq O_\omega(G)$ имеем $G/O_\omega(G) \cong (G/P)/(O_\omega(G)/P) \in \mathfrak{H} = h(\omega')$. Тогда согласно лемме 2(3) [8] $G \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Поэтому существует такое $p \in \pi(P)$, что $f(p) \not\subseteq h(p)$. Покажем, что формация $f(p)$ является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической.

Рассмотрим случай, когда $h(p) = \varnothing$. Покажем, что $Z_p \notin \mathfrak{H}$. Пусть h_2 – минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{H}$. Допустим, что $p \in \pi(\mathfrak{H})$. Тогда по теореме 1.1.6 $h_2(p) \neq \varnothing$ и поэтому $h(p) = \mathfrak{N}_p h_2(p) \neq \varnothing$. Противоречие. Следовательно, $p \notin \pi(\mathfrak{H})$ и $Z_p \notin \mathfrak{H}$. Так как $p \in \pi(G) \cap \omega$, то $f(p) \neq \varnothing$. Ввиду леммы 7(2) [8] справедливо $Z_p \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $Z_p \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ и в силу выбора группы G получаем $G = Z_p$. Поскольку δ является b-направлением, то $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и, значит, $Z_p \in \delta(p)$. Тогда $(Z_p)_{\delta(p)} = Z_p$ и $f(p) = \omega F_{(n-1)}((Z_p/(Z_p)_{\delta(p)}), \delta) = (1)$. Тем самым установлено, что формация $f(p)$ является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической.

Пусть теперь $h(p) \neq \varnothing$ и $\mathfrak{M}$ – собственная $(n-1)$-кратно ω-веерная подформация с направлением δ из $f(p)$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq h(p)$ и M – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{M} \setminus h(p)$. Тогда M является монолитической группой с монолитом $R = M^{h(p)}$. Допустим, что $R \subseteq O_p(M)$. Тогда $M \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$, что невозможно. Следовательно, $O_p(M) = 1$ и по лемме 18.8 [50] существует точный неприводимый $F_p[M]$-модуль K. Пусть $T = [K]M$. Тогда группа T монолитична с монолитом $K = C_T(K)$. Покажем, что $T_{\delta(p)} = K$. В самом деле, поскольку δ является b-направлением, то $K \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и $K \subseteq T_{\delta(p)}$. С другой стороны, $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ и $T_{\delta(p)} \subseteq T_{\delta_3(p)} = F_{cp}(T) \subseteq C_T(K) = K$. Следовательно, $T_{\delta(p)} = K$. Так как $T/K \cong M \in \mathfrak{M}$, то ввиду леммы 7(2) [8] $T \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\omega F_n(T, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\omega F_n(T, \delta) = \mathfrak{F}$, то $f(p) = \omega F_{(n-1)}((T/T_{\delta(p)}), \delta) = \omega F_{(n-1)}((T/K), \delta) = \omega F_{(n-1)}(M, \delta) \subseteq \mathfrak{M}$, что невозможно. Поэтому $\omega F_{(n-1)}(T, \delta) \subset \mathfrak{F}$ и по определению 3.1.2 $\omega F_{(n-1)}(T, \delta) \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $M \cong T/T_{\delta(p)} \in h(p)$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq h(p)$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической.

Пусть $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Покажем, что в этом случае $f(\omega')$ – $h(\omega')_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критическая формация. Так как $P \not\subseteq O_\omega(G)$, то $O_\omega(G) = 1$ и $f(\omega') = \omega F_{(n-1)}(G/O_\omega(G), \delta) = \omega F_{(n-1)}(G, \delta) \not\subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$. Пусть $\mathfrak{M}$ – собственная $(n-1)$-кратно ω-веерная подформация с направлением δ из $f(\omega')$ и $\mathfrak{M}_1 = \omega F_n(\mathfrak{M}, \delta)$. Из $\mathfrak{M} \subset f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$ получаем $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$. Тогда $f(\omega') = \omega F_{(n-1)}((M/O_\omega(M) \mid M \in \mathfrak{M}), \delta) \subseteq \mathfrak{M}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$ и согласно определению 3.1.2 $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$ и формация $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической. *Теорема доказана.*

Следствие 3.1.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – bp-направление веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F}$ – n-кратно веерная формация с направлением δ и минимальным $\delta_{(n-1)}$-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\delta_n}$-критической, то $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F_n(G, \delta)$, где G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что формация $f(p)$ является $h(p)_{\delta_{(n-1)}}$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$.*

При $n = 1$ получаем следующие результаты.

Следствие 3.1.3. *Пусть δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – ω-веерная формация с направлением δ и минимальным ω-*

спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критической, то $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \subseteq \omega$, то формация $f(p)$ является $h(p)$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \nsubseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')$-критической формацией.

Следствие 3.1.4. *Пусть δ – bp-направление веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F}$ – веерная формация с направлением δ и минимальным спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\delta}$-критической, то $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(G, \delta)$, где G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что формация $f(p)$ является $h(p)$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$.*

Установим достаточное условие $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критичности n-кратно ω-веерной формации $\mathfrak{F}$ с bp-направлением $\delta \leq \delta_3$. Отметим, что в теореме 3.1.1 $\mathfrak{H}$ – произвольная ω-веерная формация с направлением δ. В следующей теореме в качестве $\mathfrak{H}$ будем рассматривать n-кратно ω-веерную формацию с направлением δ.

Теорема 3.1.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – n-кратно ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F} = \omega F_n(G, \delta)$ – формация с минимальным $\omega\delta_{(n-1)}$-спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической, а если $\pi(P) \cap \omega = \varnothing$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической формацией. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критической.*

Доказательство. Поскольку $P = G^{\mathfrak{H}}$, то $G \notin \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная n-кратно ω-веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$ и b – ее минимальный $\omega\delta_{(n-1)}$-спутник. По следствию 3.1.1 справедливо $b \leq f$. Покажем, что $b \leq h$. Отметим, что так как $\mathfrak{H}$ – n-кратно ω-веерная формация, то по определению 3.1.1 $\mathfrak{H}$ обладает хотя бы одним $\omega\delta_{(n-1)}$-спутником. Пусть g – минимальный $\omega\delta_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 3.1.1 g является внутренним ω-спутником формации $\mathfrak{H}$.

I. Покажем, что $b(p) \subseteq h(p)$ для любого $p \in \omega$. Если $p \in \omega \setminus \pi(G)$, то $f(p) = \varnothing$ и, значит, $b(p) = \varnothing \subseteq h(p)$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(G)$. Рассмотрим случай, когда $p \in (\omega \cap \pi(G)) \setminus \pi(P)$. Так как $P \in \mathfrak{E}_{p'} \subseteq \mathfrak{E}_{p'}\delta(p) = \delta(p)$, то ввиду леммы 1(8) [8] справедливо $(G/P)_{\delta(p)} = G_{\delta(p)}/P$ и $b(p) \subseteq f(p) = \omega F_{(n-1)}(G/G_{\delta(p)}, \delta) = \omega F_{(n-1)}(((G/P)/(G_{\delta(p)}/P)), \delta) = \omega F_{(n-1)}(((G/P)/(G/P)_{\delta(p)}), \delta) \subseteq g(p) \subseteq h(p)$. Таким образом, $b(p) \subseteq h(p)$.

Пусть $p \in \pi(P)$. Тогда $\pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$ и по условию $\pi(P) = \{p\}$, т.е. P – абелева p-группа. Покажем, что $G_{\delta(p)} = P$. С одной стороны, $P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и, значит, $P \subseteq G_{\delta(p)}$. С другой стороны, $P = F_{cp}(G)$. Действительно, так как по условию $\Phi(G) = 1$, то $G = [P]L$. Допустим, что $F_{cp}(G) \cap L = L_1 \neq 1$. Тогда $L_1 \subseteq C_G(P)$ и $N_G(L_1) = G$, что, ввиду монолитичности группы G, невозможно. Следовательно, $L_1 = 1$ и $P = F_{cp}(G)$. Так как $\delta \leq \delta_3$, то $G_{\delta(p)} \subseteq F_{cp}(G) = P$. Таким образом, $G_{\delta(p)} = P$. Предположим, что $b(p) = f(p)$. Тогда $G/P = G/G_{\delta(p)} \in f(p) = b(p)$ и по лемме 7(2) [8] $G \in \mathfrak{N}_p b(p) \subseteq \mathfrak{B}$. Отсюда получаем, что $\mathfrak{F} = \omega F_n(G, \delta) \subseteq \mathfrak{B}$. Противоречие. Следовательно, $b(p) \subset f(p)$ и в силу $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критичности формации $f(p)$ имеем $b(p) \subseteq h(p)$.

Таким образом, $b(p) \subseteq h(p)$ для любого $p \in \omega$.

II. Покажем, что $b(\omega') \subseteq h(\omega')$. Если $\pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$, то по условию $\pi(P) = \{p\}$ и поэтому $P \subseteq O_\omega(G)$. По лемме 3.1.2 формация $\mathfrak{H}$ является $(n-1)$-кратно ω-веерной с направлением δ. Тогда $b(\omega') \subseteq f(\omega') = \omega F_{(n-1)}(G/O_\omega(G), \delta) = \omega F_{(n-1)}(((G/P)/(O_\omega(G)/P)), \delta) \subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$. Пусть $\pi(P) \cap \omega = \emptyset$. Тогда по условию формация $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической. Предположим, что $b(\omega') = f(\omega')$. Так как $P \not\subseteq O_\omega(G)$, то $G \in \omega F_{(n-1)}(G, \delta) = \omega F_{(n-1)}((G/O_\omega(G)), \delta) = f(\omega') = b(\omega') \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Следовательно, $b(\omega') \subset f(\omega')$ и поэтому $b(\omega') \subseteq h(\omega')$.

Из I и II следует, что $b \leq h$ и, значит, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Тем самым установлено, что формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критической. *Теорема доказана.*

Следствие 3.1.5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – bp-направление веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – n-кратно веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F_n(G, \delta)$ – формация с минимальным $\delta_{(n-1)}$-спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{\delta_{(n-1)}}$-критической. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\delta_n}$-критической.*

При $n = 1$ получаем следующие результаты.

Следствие 3.1.6. *Пусть δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$ – формация с минимальным ω-спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)$-критической, а если $\pi(P) \cap \omega = \emptyset$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')$-критической формацией. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критической.*

Следствие 3.1.7. *Пусть δ – bp-направление веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(G, \delta)$ – формация с минимальным спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)$-критической. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\delta}$-критической.*

Замечание 3.1.1. Направления δ_1, δ_2, δ_3 соответственно ω-локальной, ω-специальной и ω-центральной формаций являются bp-направлениями, причем $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \delta_3$. Поэтому из теорем 3.1.1 и 3.1.2 вытекают результаты для n-кратно ω-локальных, n-кратно ω-специальных и n-кратно ω-центральных формаций конечных групп.

Всякое br-направление ω-веерной формации является bp-направлением, обратное неверно. Рассмотрим критические n-кратно ω-веерные формации с br-направлением $\delta \leq \delta_3$.

Теорема 3.1.3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – br-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – n-кратно ω-веерная формация с направлением δ и минимальным $\omega\delta_{(n-1)}$-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критической, то $\mathfrak{F} = \omega F_n(G, \delta)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической формацией.*

Доказательство. Так как всякое r-направление является p-направлением, то согласно теореме 3.1.1 $\mathfrak{F} = \omega F_n(G, \delta)$, где G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \subseteq \omega$, то формация $f(p)$

является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической формацией.

Пусть $\pi(P) \subseteq \omega$. Предположим, что $|\pi(P)| > 1$. Тогда $P \in \mathfrak{E}_{(Z_q)'}$ для любого $q \in \pi(P)$. Так как δ – r-направление, то по лемме 1(8) [8] $(G/P)_{\delta(q)} = G_{\delta(q)}/P$ и $G/G_{\delta(q)} \cong (G/P)/(G_{\delta(q)}/P) = (G/P)/(G/P)_{\delta(q)} \in h(q)$ для всех $q \in \pi(P) = \pi(P) \cap \omega$. Поскольку $P \subseteq O_\omega(G)$, то $G/O_\omega(G) \cong (G/P)/(O_\omega(G)/P) \in \mathfrak{H} = h(\omega')$. Тогда по лемме 2(3) [8] $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Таким образом, $|\pi(P)| = 1$ и $\pi(P) = \{p\}$ для некоторого $p \in \omega$.

Покажем, что $\Phi(G) = 1$. Пусть N – группа наименьшего порядка из $f(p) \setminus h(p)$. Тогда группа N является монолитической. Так как $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p)$, то $O_p(N) = 1$. Используя лемму 18.8 [50], построим группу $B = [L]N$, где L – точный неприводимый $F_p[N]$-модуль, причем B – монолитическая группа и $C_B(L) = L$. Проверим, что $B_{\delta(p)} = L$. Поскольку $L \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$, то $L \subseteq B_{\delta(p)}$. С другой стороны, $B_{\delta(p)} \subseteq B_{\delta_3(p)} = F_{cp}(B) \subseteq C_B(L) = L$. Следовательно, $B_{\delta(p)} = L$. Так как $B \in \mathfrak{N}_p f(p)$, то по лемме 7(2) [8] $\omega F_n(B, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\omega F_n(B, \delta) \subset \mathfrak{F}$, то ввиду определения 3.1.2 $B \in \mathfrak{H}$ и $N \cong B/L = B/B_{\delta(p)} \in h(p)$, что невозможно. Следовательно, $\omega F_n(B, \delta) = \mathfrak{F}$ и в качестве группы G можно выбрать группу B, причем $\Phi(B) = 1$. *Теорема доказана.*

Следствие 3.1.8. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – br-направление веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F}$ – n-кратно веерная формация с направлением δ и минимальным $\delta_{(n-1)}$-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\delta_n}$-критической, то $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F_n(G, \delta)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{\delta_{(n-1)}}$-критической.*

При $n = 1$ получаем следующие результаты.

Следствие 3.1.9. *Пусть δ – br-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – ω-веерная формация с направлением δ и минимальным ω-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критической, то $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)$-критической, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')$-критической формацией.*

Следствие 3.1.10. *Пусть δ – br-направление веерной формации, $\delta \le \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F}$ – веерная формация с направлением δ и минимальным спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_\delta$-критической, то $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(G,\delta)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)$-критической.*

Теорема 3.1.4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – br-направление ω-веерной формации, $\delta \le \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – n-кратно ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F} = \omega F_n(G,\delta)$ – формация с минимальным $\omega\delta_{(n-1)}$-спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической формацией. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критической формацией.*

Доказательство. Поскольку $P = G^{\mathfrak{H}}$, то $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная n-кратно ω-веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$ и b – ее минимальный $\omega\delta_{(n-1)}$-спутник, g – минимальный $\omega\delta_{(n-1)}$-спутник формации $\mathfrak{H}$. По следствию 3.1.1 справедливо $b \le f$. Покажем, что $b \le h$.

Установим, что $b(p) \subseteq h(p)$ для любого $p \in \omega$. Если $p \in \omega \setminus \pi(G)$, то $b(p) = \emptyset \subseteq h(p)$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(G)$. Если $p \notin \pi(P)$, то $P \in \mathfrak{E}_{(Z_p)'} \subseteq \mathfrak{E}_{(Z_p)'}\delta(p) = \delta(p)$ и ввиду леммы 1(8) [8] имеем $b(p) \subseteq f(p) = \omega F_{(n-1)}((G/P)/(G/P)_{\delta(p)},\delta) \subseteq h(p)$.

Пусть $p \in \pi(P)$. Если P – неабелева pd-группа, то $P \in \mathfrak{E}_{(Z_p)'}$ и согласно лемме 1(8) [8], как и выше, справедливо $b(p) \subseteq f(p) \subseteq g(p) \subseteq h(p)$.

Пусть P – абелева p-группа. Тогда $\pi(P) \subseteq \omega$ и по условию формация $f(p)$ является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической. Если $b(p) = f(p)$, то как и при доказательстве теоремы 3.1.2, ввиду $\Phi(G) = 1$, имеем $G_{\delta(p)} = P$. Тогда $G/P \in f(p) = b(p)$ и по лемме 7(2) [8] $G \in \mathfrak{N}_p b(p) \subseteq \mathfrak{B}$. Отсюда получаем, что $\mathfrak{F} = \omega F_n(G,\delta) \subseteq \mathfrak{B}$. Противоречие. Следовательно, $b(p) \subset f(p)$ и в силу $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критичности формации $f(p)$ справедливо включение $b(p) \subseteq h(p)$.

Покажем, что $b(\omega') \subseteq h(\omega')$. Если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $P \subseteq O_\omega(G)$ и $b(\omega') \subseteq f(\omega') = \omega F_{(n-1)}((G/P)/(O_\omega(G)/P),\delta) \subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$. Пусть $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Если $b(\omega') = f(\omega')$, то $G \cong G/O_\omega(G) \in \omega F_{(n-1)}(G/O_\omega(G),\delta) = f(\omega') = b(\omega') \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Следовательно, $b(\omega') \subset f(\omega')$ и поэтому $b(\omega') \subseteq h(\omega')$.

Таким образом, $b \leq h$ и, значит, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Тем самым установлено, что формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критической. *Теорема доказана.*

Следствие 3.1.11. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – br-направление веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – n-кратно веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F_n(G,\delta)$ – формация с минимальным $\delta_{(n-1)}$-спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, $\Phi(G) = 1$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{\delta_{(n-1)}}$-критической. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\delta_n}$-критической формацией.*

При $n = 1$ получаем следующие результаты.

Следствие 3.1.12. *Пусть δ – br-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F} = \omega F(G,\delta)$ – формация с минимальным ω-спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$ и формация $f(p)$ является $h(p)$-критической, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')$-критической формацией. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критической формацией.*

Следствие 3.1.13. *Пусть δ – br-направление веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(G,\delta)$ – формация с минимальным спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, $\Phi(G) = 1$ и формация $f(p)$ является $h(p)$-критической. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\delta}$-критической формацией.*

Замечание 3.1.2. Направления δ_2 и δ_3 соответственно ω-специальной и ω-центральной формаций являются br-направлениями. Поэтому из теорем 3.1.3 и 3.1.4 вытекают результаты для n-кратно ω-специальных и n-кратно ω-центральных формаций.

Все основные результаты параграфа 3.1 опубликованы в работе [88].

§ 3.2. Описание критических ω-веерных формаций

В данном параграфе изучим частный случай критических n-кратно ω-веерных формаций с bp-направлением при $n = 1$.

Определение 3.2.1. Формационно критическую группу G назовем *f-базисной*, если формация $form\ G$ содержит единственную максимальную подформацию. Формационно критическую группу G назовем *$\omega\delta$-базисной* (*δ-базисной*), если формация $\omega F(G,\delta)$ (формация $\mathbb{P}F(G,\delta)$) содержит единственную максимальную ω-веерную (веерную) подформацию с направлением δ.

Лемма 3.2.1. *Пусть δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \le \delta_3$, $G = [P]H$ – монолитическая группа с монолитом $P = C_G(P)$, где P – p-группа, $p \in \omega$, H – f-базисная группа и $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация из $form\ H$. Тогда G является $\omega\delta$-базисной группой, причем единственная максимальная ω-веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F} = \omega F(G,\delta)$ обладает ω-спутником h, имеющим следующее строение*:

$$h(\omega') = form(G/O_\omega(G)),$$
$$h(p) = \mathfrak{M},$$
$$h(q) = form(G/G_{\delta(q)}) \text{ для любого } q \in (\pi(G)\cap\omega)\setminus\{p\},$$
$$h(q) = \varnothing \text{ для любого } q \in \omega\setminus\pi(G).$$

Доказательство. Пусть f – минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{F} = \omega F(G,\delta)$, h – ωF-функция, описанная в заключении леммы, и $\mathfrak{H} = \omega F(h,\delta)$. Проверим, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Согласно теореме 1.1.6 $f(\omega') = h(\omega')$, $f(q) = h(q)$ для всех $q \in \omega\setminus\{p\}$. Пусть $q = p$. Так как δ – b-направление, то $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и $P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)$. Тогда $P \subseteq G_{\delta(p)}$. С другой стороны, $G_{\delta(p)} \subseteq F_{cp}(G) \subseteq C_G(P) = P$. Таким образом, $G_{\delta(p)} = P$ и $h(p) = \mathfrak{M} \subset formH = form(G/P) = form(G/G_{\delta(p)}) = f(p)$. Поэтому $h \le f$ и $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная ω-веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная ω-веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$ и b – ее минимальный ω-спутник. По следствию 1.1.4 $b \le f$. Предположим, что $b(p) = f(p)$. Тогда $G/P \in b(p)$ и по лемме 7(2) [8] $G \in \mathfrak{N}_p b(p) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Поэтому $b(p) \subset f(p) = formH$ и $b(p) \subseteq \mathfrak{M} = h(p)$. Следовательно, $b \le h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная ω-веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$. Согласно теореме 53.44 [19] группа G является критической, а, значит, и формационно критической. Тем самым установлено, что G – $\omega\delta$-базисная группа. *Лемма доказана.*

Следствие 3.2.1. *Пусть δ – bp-направление веерной формации, $\delta \le \delta_3$,*

$G = [P]H$ – монолитическая группа с монолитом $P = C_G(P)$, где P – p-группа, H – f-базисная группа и $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация из $form\ H$. Тогда G является δ-базисной группой, причем единственная максимальная веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(G, \delta)$ обладает спутником h, имеющим следующее строение:

$$h(p) = \mathfrak{M},$$
$$h(q) = form(G/G_{\delta(q)}) \text{ для любого } q \in \pi(G) \setminus \{p\},$$
$$h(q) = \emptyset \text{ для любого } q \in \mathbb{P} \setminus \pi(G).$$

Лемма 3.2.2. *Пусть δ – p-направление ω-веерной формации, G – монолитическая группа с неабелевым монолитом P, $\pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$, $G_{\delta(p)} = 1$ для некоторого $p \in \pi(P) \cap \omega$. Тогда G является $\omega\delta$-базисной группой, причем единственная максимальная ω-веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$ обладает ω-спутником h, имеющим следующее строение:*

$$h(\omega') = form(G/O_\omega(G)),$$
$$h(p) = form(G/P),$$
$$h(q) = form(G/G_{\delta(q)}) \text{ для любого } q \in (\pi(G) \cap \omega) \setminus \{p\},$$
$$h(q) = \emptyset \text{ для любого } q \in \omega \setminus \pi(G).$$

Доказательство. Пусть p – такое простое число из $\pi(P) \cap \omega$, для которого $G_{\delta(p)} = 1$, f – минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, h – ωF-функция из заключения леммы и $\mathfrak{H} = \omega F(h, \delta)$. Согласно теореме 1.1.6 $f(\omega') = h(\omega')$ и $f(q) = h(q)$ для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$. Пусть $q = p$. Так как $G_{\delta(p)} = 1$, то ввиду леммы 18.2 [50] справедливо $h(p) = form(G/P) \subset formG = form(G/G_{\delta(p)}) = f(p)$. Поэтому $h \leq f$ и $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная ω-веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная ω-веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$ и b – ее минимальный ω-спутник. По следствию 1.1.4 справедливо $b \leq f$. Если $b(p) = f(p)$, то $G \cong G/G_{\delta(p)} \in b(p) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Поэтому $b(p) \subset f(p)$ и ввиду леммы 18.2 [50] $b(p) \subseteq form(G/P) = h(p)$. Следовательно, $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная ω-веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$. Согласно следствию 52.34 [19] группа G является критической, а, значит, и формационно критической. Тем самым установлено, что G – $\omega\delta$-базисная группа. *Лемма доказана.*

Следствие 3.2.2. *Пусть δ – p-направление веерной формации, G – монолитическая группа с неабелевым монолитом P, $G_{\delta(p)} = 1$ для некоторого $p \in \pi(P)$. Тогда G является δ-базисной группой, причем единственная максимальная веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(G,\delta)$ обладает спутником h, имеющим следующее строение:*

$$h(p) = form(G/P),$$
$$h(q) = form(G/G_{\delta(q)}) \text{ для любого } q \in \pi(G) \setminus \{p\},$$
$$h(q) = \varnothing \text{ для любого } q \in \mathbb{P} \setminus \pi(G).$$

Теорема 3.2.1. *Пусть δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – ω-веерная формация с направлением δ и минимальным ω-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критической, то $\mathfrak{F} = \omega F(G,\delta)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:*

1) $G = P$ – $\omega\delta$-базисная группа простого порядка $p \in \omega$;

2) $G = [P]H$ – $\omega\delta$-базисная группа, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \omega$, H – f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $formH$ содержится в $h(p)$;

3) P – неабелева группа, $\pi(P) \subseteq \omega$, $f(p)$ является $h(p)$-критической формацией для некоторого $p \in \pi(P)$, причем если $G_{\delta(p)} = 1$, то G – $\omega\delta$-базисная группа и $P = G^{h(p)}$;

4) G – $\omega\delta$-базисная группа, являющаяся f-базисной группой, $\pi(P) \nsubseteq \omega$, $P = G^{h(\omega')}$ и максимальная подформация из $formG$ содержится в $h(\omega')$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критическая формация. По следствию 3.1.3 $\mathfrak{F} = \omega F(G,\delta)$, где G – монолитическая группа из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем если $\pi(P) \subseteq \omega$, то формация $f(p)$ является $h(p)$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \nsubseteq \omega$, то формация $f(\omega')$ является $h(\omega')$-критической. По теореме 1.1.6 $f(\omega') = form(G/O_\omega(G))$, $f(p) = form(G/G_{\delta(p)})$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ и $f(p) = \varnothing$, если $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Согласно теореме 6 [8] $h(\omega') = \mathfrak{H}$ и для любого $p \in \omega$ справедливо $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p h_1(p)$, где h_1 – произвольный внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $\pi(P) \subseteq \omega$. Тогда $f(p)$ – $h(p)$-критическая формация для некоторого $p \in \pi(P)$. Предположим, что P – неабелева группа. Так как $G \notin \mathfrak{H}$, то $G \notin h(p)$ и, значит, $G^{h(p)} \neq 1$. Пусть $G_{\delta(p)} = 1$. Тогда по лемме 3.2.2 группа G является $\omega\delta$-базисной, причем максимальная ω-веерная подформация $\mathfrak{B}$ с направлением δ из $\mathfrak{F}$ обладает таким ω-спутником b, что $b(p) = form(G/P)$. По лемме 18.2 [50] $b(p)$ – единственная максимальная подформация формации $formG = f(p)$. Следовательно, в силу $h(p)$-критичности формации $f(p)$ справедливо $form(G/P) \subseteq h(p)$ и поэтому $P = G^{h(p)}$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3).

Пусть P – абелева p-группа. Рассмотрим случай, когда $p \notin \pi(\mathfrak{H})$. Так как $p \in \pi(G) \cap \omega$, то $f(p) \neq \varnothing$ и согласно лемме 7(2) [8] $P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $P \notin \mathfrak{H}$, то $P \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ и поэтому $G = P$ – группа простого порядка $p \in \omega$.

Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$. Как отмечено выше, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Проверим, что $\mathfrak{N}_p$ – ω-веерная формация с направлением δ. Пусть $\mathfrak{T} = \omega F(t, \delta)$, где $t(p) = (1)$, $t(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $t(\omega') = \mathfrak{N}_p$. Покажем, что $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{T}$. С одной стороны, если $A \in \mathfrak{N}_p$, то ввиду равенства $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ имеем $A \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)$ и, значит, $A/A_{\delta(p)} = 1 \in t(p)$. Кроме того $A/O_\omega(A) \in \mathfrak{N}_p = t(\omega')$. Следовательно, $A \in \mathfrak{T}$ и поэтому $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{T}$. Допустим, что $\mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{T}$ и B – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{T} \setminus \mathfrak{N}_p$. Тогда группа B монолитична с монолитом $C = B^{\mathfrak{N}_p}$. Если найдется такое число $q \in (\omega \cap \pi(B)) \setminus \{p\}$, то из $B \in \mathfrak{T}$ получим $B/B_{\delta(q)} \in t(q) = \varnothing$, что невозможно. Следовательно, $\pi(B) \cap \omega = \{p\}$. Предположим, что $C \nsubseteq O_\omega(B)$. Тогда из $B \in \mathfrak{T}$ получим $B \cong B/O_\omega(B) \in t(\omega') = \mathfrak{N}_p$. Противоречие. Поэтому $C \subseteq O_\omega(B)$ и, значит, $\pi(C) \subseteq \omega \cap \pi(B) = \{p\}$. Из $C \in \mathfrak{N}_p$ и $B/C \in \mathfrak{N}_p$ следует, что $B \in \mathfrak{N}_p$. Противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{T}$. Поскольку $\mathfrak{N}_p$ – ω-веерная формация с направлением δ и $P \in \mathfrak{N}_p$, то $\mathfrak{F} = \omega F(P, \delta) \subseteq \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$.

Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ обладает единственной максимальной ω-веерной подформацией с направлением δ. Пусть $\mathfrak{F}_1 \neq \varnothing$ – собственная ω-веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$, f_1 – ее минимальный ω-спутник. Тогда $\pi(\mathfrak{F}_1) \subseteq \pi(\mathfrak{F}) = \{p\}$. Предположим, что $\pi(\mathfrak{F}_1) = \{p\}$. Тогда $P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f_1(p) \subseteq \mathfrak{F}_1$. Противоречие. Следовательно, $\pi(\mathfrak{F}_1) = \varnothing$ и $\mathfrak{F}_1 = (1)$ – единственная максимальная ω-веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$. Согласно следствию 51.34 [19] группа G является критической, а, следовательно, и формационно критической. Таким образом, $G = P$ – $\omega\delta$-базисная группа, и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1).

Пусть $p \in \pi(\mathfrak{H})$ и H – группа наименьшего порядка из $f(p) \setminus h(p)$. Тогда H – монолитическая группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$. Если $O_p(H) \neq 1$, то $Q \subseteq O_p(H)$ и $H \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$. Противоречие. Поэтому $O_p(H) = 1$ и ввиду леммы 18.8 [50] существует точный неприводимый $F_p[H]$-модуль T. Пусть $R = [T]H$. Тогда группа R монолитична с монолитом $T = C_R(T)$. Согласно лемме 7(2) [8] $R \in \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\omega F(R, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\omega F(R, \delta) \subset \mathfrak{F}$, то $R \in \mathfrak{H}$ и $R/R_{\delta(p)} \in h(p)$. Покажем, что $T = R_{\delta(p)}$. Так как $T \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$, то $T \subseteq R_{\delta(p)}$. Из $\delta \leq \delta_3$ следует, что $R_{\delta(p)} \subseteq F_{cp}(R) \subseteq C_R(T) = T$. Таким образом, $T = R_{\delta(p)}$ и поэтому $R/R_{\delta(p)} = R/T \cong H \in h(p)$, что невозможно. Следовательно, $\omega F(R, \delta) = \mathfrak{F}$ и в качестве группы G можно выбрать группу R.

Покажем, что H – f-базисная группа. Пусть $\mathfrak{X}$ – множество всех тех собственных секций группы H, которые принадлежат формации $formH = f(p)$. В силу выбора группы H справедливо включение $\mathfrak{X} \subseteq h(p)$. Поэтому $H \notin form\mathfrak{X}$ и H является формационно критической группой. По лемме 3.3 [50] формация $f(p) = formH$ обладает максимальными подформациями. Допустим, что $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ – различные максимальные подформации из $f(p)$. Тогда $\mathfrak{M}_1 \subseteq h(p)$ и $\mathfrak{M}_2 \subseteq h(p)$, а, значит, и $\mathfrak{C} = form(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \subseteq h(p)$. Так как $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_1$ – максимальные подформации из $f(p)$, то $\mathfrak{C} = f(p) \subseteq h(p)$, что невозможно. Следовательно, формация $formH$ обладает единственной максимальной подформацией и поэтому H является f-базисной группой. Ввиду леммы 3.2.1 группа R является $\omega\delta$-базисной. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Пусть $\pi(P) \nsubseteq \omega$. Тогда $f(\omega') = form(G/O_\omega(G)) = formG$. Так как $h(\omega') = \mathfrak{H}$, то формация $f(\omega')$ является $\mathfrak{H}$-критической. Пусть S – группа наименьшего порядка из $f(\omega') \setminus \mathfrak{H}$. Тогда S – монолитическая группа с монолитом $L = S^{\mathfrak{H}} = S^{h(\omega')}$. Так как $f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$, то $S \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Из того, что $S \in \mathfrak{F}$ следует, что $\omega F(S, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $S \notin \mathfrak{H}$, то $\omega F(S, \delta) \nsubseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\omega F(S, \delta) = \mathfrak{F}$. Кроме того, можем считать, что $\pi(L) \nsubseteq \omega$.

Покажем, что S – f-базисная группа. Пусть $\mathfrak{X}$ – множество всех тех собственных секций группы S, которые принадлежат формации $formS$. Тогда $S \notin form\mathfrak{X}$ и S является формационно критической группой. По лемме 3.3

[50] формация $formS = f(\omega')$ обладает максимальными подформациями. Допустим, что $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ – различные максимальные подформации из $f(\omega')$. Тогда $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому $f(\omega') = form(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, $f(\omega') = formS$ обладает единственной максимальной подформацией и S является f-базисной группой. Ввиду теоремы 1.1.6 и следствия 1.1.4 формация $\omega F(S,\delta) = \mathfrak{F}$ содержит лишь конечное множество ω-веерных подформаций с направлением δ. Допустим, что $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – различные максимальные ω-веерные подформации с направлением δ из $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} = \omega F((\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2),\delta) \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$ и S является $\omega\delta$-базисной группой. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 4). *Теорема доказана.*

Следствие 3.2.3. *Пусть δ – bp-направление веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F}$ – веерная формация с направлением δ и минимальным спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_\delta$-критической, то $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(G,\delta)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:*

1) $G = P$ – δ-базисная группа простого порядка p;

2) $G = [P]H$ – δ-базисная группа, где $P = C_G(P)$ – p-группа, H – f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $formH$ содержится в $h(p)$;

3) P – неабелева группа, $f(p)$ является $h(p)$-критической формацией для некоторого $p \in \pi(P)$, причем если $G_{\delta(p)} = 1$, то G – δ-базисная группа и $P = G^{h(p)}$.

В качестве следствия из теоремы 3.2.1 получаем результат для ω-локальных формаций. $\mathfrak{H}_{\omega\delta_1}$-критическую формацию будем называть $\mathfrak{H}_{\omega L}$-критической формацией; $\omega\delta_1$-базисную группу – ωL-базисной группой. Аналогично для веерных формаций получаем следующие термины: $\mathfrak{H}_L$-критическая формация; L-базисная группа.

Следствие 3.2.4. *Пусть $\mathfrak{H}$ – ω-локальная формация с максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация с минимальным ω-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega L}$-критической, то $\mathfrak{F} = \omega LF(G)$,* *где G – такая ωL-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:*

1) $G = P$ – группа простого порядка $p \in \omega$;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \omega$, H – f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $formH$ содержится в $h(p)$;

3) P – неабелева группа, $\pi(P) \subseteq \omega$ и для некоторого $p \in \pi(P)$ формация $f(p)$ является $h(p)$-критической и $P = G^{h(p)}$;

4) G – f-базисная группа, $\pi(P) \nsubseteq \omega$, $P = G^{h(\omega')}$ и максимальная подформация из $formG$ содержится в $h(\omega')$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\omega L}$-критическая формация. По теореме 3.2.1 $\mathfrak{F} = \omega LF(G)$, где G – такая ωL-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий 1) – 4) теоремы 3.2.1.

Пусть группа G удовлетворяет условию 3) теоремы 3.2.1. Так как $F_p(G) = 1$, то G – ωL-базисная группа, удовлетворяющая условию 3) данного следствия. *Следствие доказано.*

Следствие 3.2.5. *Пусть $\mathfrak{H}$ – локальная формация с максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F}$ – локальная формация с минимальным спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_L$-критической, то $\mathfrak{F} = LF(G)$, где G – такая L-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:*

1) $G = P$ – группа простого порядка p;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, H – f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $formH$ содержится в $h(p)$;

3) P – неабелева группа и для некоторого $p \in \pi(P)$ формация $f(p)$ является $h(p)$-критической и $P = G^{h(p)}$.

Теорема 3.2.2. *Пусть δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – ω-веерная формация с направлением δ. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критической, если $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G – такая $\omega\delta$-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:*

1) $G = P$ – группа простого порядка $p \in \omega$;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \omega$, H – f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $formH$ содержится в $h(p)$;

3) P – неабелева группа, $\pi(P) \subseteq \omega$ и для любого $p \in \pi(P)$ справедливо $G_{\delta(p)} = 1$ и $P = G^{h(p)}$;

4) G – f-базисная группа, $\pi(P) \cap \omega = \emptyset$, $P = G^{h(\omega')}$ и максимальная подформация из $formG$ содержится в $h(\omega')$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G – $\omega\delta$-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, удовлетворяющая одному из условий 1) – 4), и f – минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда $G \notin \mathfrak{H}$ и поэтому $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критической.

Пусть G – группа типа 1). Проверим, что $f(p)$ является $h(p)$-критической формацией. Так как $G \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$, то $G = G_{\delta(p)}$ и $f(p) = (1)$. Если $p \in \pi(\mathfrak{H})$, то по лемме 7(2) [8] $G \in \mathfrak{N}_p h(p) \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $p \notin \pi(\mathfrak{H})$ и в силу строения h получаем $h(p) = \emptyset$. По следствию 3.1.6 $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критической формацией.

Пусть G – группа типа 2). Так как $G_{\delta(p)} = P$, то $f(p) = form(G/P) = formH \not\subseteq h(p)$. Поскольку единственная максимальная подформация из $formH = f(p)$ содержится в $h(p)$, то формация $f(p)$ является $h(p)$-критической. По следствию 3.1.6 формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критической.

Пусть G – группа типа 3). Тогда $G_{\delta(p)} = 1$ и $P = G^{h(p)}$ для любого $p \in \pi(P) \cap \omega$. Согласно лемме 3.2.2 единственная максимальная ω-веерная подформация $\mathfrak{B}$ с направлением δ из $\mathfrak{F}$ обладает таким ω-спутником b, что $b(p) = form(G/P)$ и поэтому $b(p) \subseteq h(p)$. Пусть $q \in (\pi(G) \cap \omega) \setminus \pi(P)$. Тогда $P \in \mathfrak{E}_{q'}$ и $P \subseteq G_{\delta(q)}$. Следовательно, $b(q) = form((G/P)/(G_{\delta(p)}/P)) \subseteq h(q)$. Если $q \in \omega \setminus \pi(G)$, то $b(q) = \emptyset \subseteq h(q)$. Кроме того, $b(\omega') = form(G/O_\omega(G)) = form((G/P)/(O_\omega(G)/P)) \subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$. Это означает, что $b \leq h$. Таким образом, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$ и формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критической.

Пусть G – группа типа 4). Тогда $f(\omega') = formG \not\subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$. Так как единственная максимальная подформация из $formG$ содержится в $h(\omega')$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')$-критической формацией. По следствию 3.1.6 $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-

критическая формация. *Теорема доказана.*

Следствие 3.2.6. *Пусть δ – bp-направление веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F}$ – веерная формация с направлением δ. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_\delta$-критической, если $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(G, \delta)$, где G – такая δ-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:*

1) $G = P$ – группа простого порядка;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, H – f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $formH$ содержится в $h(p)$;

3) P – неабелева группа и для любого $p \in \pi(P)$ справедливо $G_{\delta(p)} = 1$ и $P = G^{h(p)}$.

Следствие 3.2.7. *Пусть $\mathfrak{H}$ – ω-локальная формация с максимальным внутренним ω-спутником h. ω-локальная формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega L}$-критической, если $\mathfrak{F} = \omega LF(G)$, где G – такая ωL-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:*

1) $G = P$ – группа простого порядка $p \in \omega$;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \omega$, H – f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $formH$ содержится в $h(p)$;

3) P – неабелева группа, $\pi(P) \subseteq \omega$, $P = G^{h(p)}$ для любого $p \in \pi(P)$;

4) G – f-базисная группа, $\pi(P) \cap \omega = \emptyset$, $P = G^{h(\omega')}$ и максимальная подформация из $formG$ содержится в $h(\omega')$.

Следствие 3.2.8. *Пусть $\mathfrak{H}$ – локальная формация с максимальным внутренним спутником h. Локальная формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_L$-критической, если $\mathfrak{F} = LF(G)$, где G – такая L-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:*

1) $G = P$ – группа простого порядка p;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, H – f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $formH$ содержится в $h(p)$;

3) P – неабелева группа и $P = G^{h(p)}$ для любого $p \in \pi(P)$.

В качестве следствий из теорем 3.2.1 и 3.2.2 получаются результаты о критические ω-веерных формациях с br-направлением $\delta \leq \delta_3$.

Следствие 3.2.9. *Пусть δ – br-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h. ω-веерная формация $\mathfrak{F}$ с направлением δ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G – такая $\omega\delta$-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий*:

1) *$G = P$ – группа простого порядка $p \in \omega$;*

2) *$G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \omega$, H – f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $formH$ содержится в $h(p)$;*

3) *G – f-базисная группа, $\pi(P) \nsubseteq \omega$, $P = G^{h(\omega')}$ и максимальная подформация из $formG$ содержится в $h(\omega')$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критическая формация. Тогда по теореме 3.2.1 $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, удовлетворяющая одному из условий 1) – 4) теоремы 3.2.1.

Предположим, что группа G удовлетворяет условию 3) теоремы 3.2.1. Пусть $p \in \pi(P)$. Тогда $P \in \mathfrak{E}_{(Z_p)'}$. Так как δ является r-направлением, то $\mathfrak{E}_{(Z_p)'}\delta(p) = \delta(p)$ и по лемме 1(8) [8] $G/G_{\delta(p)} \cong (G/P)/(G/P)_{\delta(p)} \in h(p)$. Пусть $q \in (\pi(G) \cap \omega) \setminus \pi(P)$. Тогда $P \in \mathfrak{E}_{(Z_q)'}$ и ввиду леммы 1(8) [8] справедливо $G/G_{\delta(q)} \in h(q)$. Так как $\pi(P) \subseteq \omega$, то $P \subseteq O_\omega(G)$ и $G/O_\omega(G) \cong (G/P)/(O_\omega(G)/P) \in \mathfrak{H} = h(\omega')$. Согласно определению 1.1.2 $G \in \mathfrak{H}$. Получили противоречие. Следовательно, случай 3) теоремы 3.2.1 для группы G невозможен.

Достаточность. Пусть f – минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Если группа G удовлетворяет условию 1) или 2) теоремы, то по теореме 3.2.2 $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критическая формация.

Пусть группа G удовлетворяет условию 3) теоремы. Тогда формация $f(\omega') = formG$ является $h(\omega')$-критической и по следствию 1.3.12 $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критическая формация. *Следствие доказано.*

Из следствия 3.2.9 вытекают результаты для ω-специальных и ω-центральных формаций.

Следствие 3.2.10. *Пусть δ – br-направление веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h. Веерная формация $\mathfrak{F}$ с направлением δ является $\mathfrak{H}_\delta$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \mathbb{P}F(G, \delta)$, где G – такая δ-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:*

1) $G = P$ – группа простого порядка p;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, H – f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $formH$ содержится в $h(p)$.

Из следствия 3.2.10 вытекают результаты для специальных и центральных формаций.

Все результаты параграфа 3.2 содержатся в работах [87], [116]. Отметим, что в работах [107], [120], [121] исследовались различные виды критических ω-веерных формаций.

§ 3.3. Свойства τ-замкнутых ω-веерных формаций

Определение 3.3.1. (см., например, [15]). Пусть τ – отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп. Говорят, что τ – *подгрупповой функтор*, если $(\tau(G))^\alpha = \tau(G^\alpha)$ для любого изоморфизма α каждой группы G.

Определение 3.3.2. (см., например, [15]). Подгрупповой функтор τ называется *регулярным* или, иначе, *подгрупповым функтором Скибы*, если выполняются следующие два условия:

1) из $M \in \tau(G)$ и $N \triangleleft G$ следует, что $MN/N \in \tau(G/N)$;

2) из $M/N \in \tau(G/N)$ следует, что $M \in \tau(G)$.

Определение 3.3.3. Пусть δ – некоторая $\mathbb{P}FR$-функция. Подгрупповой функтор τ назовем

δ-радикальным, если для любой группы G и любой $N \in \tau(G)$ справедливо равенство $G_{\delta(p)} \cap N = N_{\delta(p)}$ для всех $p \in \mathbb{P}$;

ω-радикальным, если для любой группы G и любой $N \in \tau(G)$ справедливо равенство $O_\omega(G) \cap N = O_\omega(N)$;

$\omega\delta$-радикальным, если τ является ω-радикальным и δ-радикальным.

Замечание 3.3.1. $\omega\delta$-радикальными подгрупповыми функторами, где δ – произвольная $\mathbb{P}FR$-функция, являются, например, нормальный подгрупповой функтор S_n, субнормальный подгрупповой функтор sn, подгрупповые функторы $res_{\mathfrak{F}}$ и $rad_{\mathfrak{H}}$, где $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – формация и класс Фиттинга соответственно.

Определение 3.3.4. (см., например, [39], 1.2.19). Пусть τ – подгрупповой функтор. Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой*, если из $G \in \mathfrak{F}$ следует, что $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$.

Определение 3.3.5. Пусть τ – подгрупповой функтор. ω-спутник (спутник) f ω-веерной (веерной) формации назовем *τ-замкнутым*, если для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$ (для любого $p \in \mathbb{P}$) формация $f(p)$ является τ-замкнутой.

В следующей теореме устанавливается взаимосвязь между τ-замкнутостью ω-веерной формации и τ-замкнутостью ее ω-спутника.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-веерная формация с $\mathfrak{b}p$-направлением δ, $\delta \leq \delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор. Формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним τ-замкнутым ω-спутником.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая формация. Поскольку δ – такое $\mathfrak{b}p$-направление, что $\delta \leq \delta_3$, то согласно теореме 6 [8] формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний ω-спутник h, причем $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p)$ для всех $p \in \omega$ и $h(\omega') = \mathfrak{F}$. Поэтому формация $h(\omega')$ является τ-замкнутой. Покажем, что $h(p)$ – τ-замкнутая формация для всех $p \in \omega$. Предположим, что найдется такое $p \in \omega$, что формация $h(p)$ не является τ-замкнутой. Пусть G – группа наименьшего порядка из $h(p)$, обладающая такой подгруппой N, что $N \in \tau(G)$, $N \notin h(p)$. Тогда $G \neq 1$. Если G – не монолитическая группа, то найдутся две различные минимальные нормальные подгруппы R и M группы G, причем ввиду $G \in h(p)$ имеем $G/R \in h(p)$ и $G/M \in h(p)$. Поскольку τ – регулярный подгрупповой функтор, то $NR/R \in \tau(G/R)$. Тогда по индукции $NR/R \in h(p)$ и, значит, $N/N \cap R \in h(p)$. Аналогично, $NM/M \cong N/N \cap M \in h(p)$. Следовательно, $N/(N \cap R \cap M) \cong N \in h(p)$.

Противоречие. Поэтому G – монолитическая группа. Пусть M – монолит группы G.

Предположим, что $O_p(G) \neq 1$. Тогда $M \subseteq O_p(G)$. Как показано выше, $N/N \cap M \in h(p)$. Так как $N \cap M$ – p-группа, то $N \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$. Противоречие. Следовательно, $O_p(G) = 1$. Согласно лемме 18.8 [50] существует точный неприводимый $F_p[G]$-модуль K. Пусть $T = [K]G$. Тогда группа T монолитична с монолитом $K = C_T(K)$. Покажем, что $T_{\delta(p)} = K$. Поскольку δ является b-направлением, то $K \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)$ и $K \subseteq T_{\delta(p)}$. С другой стороны, $T_{\delta(p)} \subseteq T_{\delta_3(p)} \subseteq C_T(K) = K$. Следовательно, $T_{\delta(p)} = K$. Из $T/K \cong G \in h(p)$ получаем $T \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и ввиду τ-замкнутости формации $\mathfrak{F}$ имеем $\tau(T) \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем, что $NK \in \tau(T)$. Так как $T/K \cong G$, то существует изоморфизм $\alpha : G \to T/K$, при этом, $N^\alpha = NK/K$. Поскольку τ – подгрупповой функтор и $N \in \tau(G)$, то $NK/K = N^\alpha \in (\tau(G))^\alpha = \tau(G^\alpha) = \tau(T/K)$. Так как τ – регулярный подгрупповой функтор и $NK/K \in \tau(T/K)$, то $NK \in \tau(T)$ и, значит, $NK \in \mathfrak{F}$. Поэтому $NK/(NK)_{\delta(p)} \in h(p)$. Поскольку τ – δ-радикальный подгрупповой функтор и $NK \in \tau(T)$, то $(NK)_{\delta(p)} = T_{\delta(p)} \cap NK = K \cap NK = K$ и $NK/(NK)_{\delta(p)} = NK/K \cong N \in h(p)$. Противоречие. Таким образом, формация $h(p)$ является τ-замкнутой для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$ и, значит, h – τ-замкнутый ω-спутник формации $\mathfrak{F}$.

Достаточность. Пусть f – τ-замкнутый ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{F}$ и $N \in \tau(G)$. Покажем, что $N \in \mathfrak{F}$. Так как $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$, то из $NG_{\delta(p)}/G_{\delta(p)} \in \tau(G/G_{\delta(p)})$ и τ-замкнутости формации $f(p)$ следует, что $NG_{\delta(p)}/G_{\delta(p)} \cong N/(N \cap G_{\delta(p)}) \in f(p)$. Так как подгрупповой функтор τ является δ-радикальным, то $N/(N \cap G_{\delta(p)}) = N/N_{\delta(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(N)$. Далее, из $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$, $NO_\omega(G)/O_\omega(G) \in \tau(G/O_\omega(G))$ и τ-замкнутости формации $f(\omega')$ следует $NO_\omega(G)/O_\omega(G) \cong N/(N \cap O_\omega(G)) \in f(\omega')$. Так как $N \cap O_\omega(G) \subseteq O_\omega(N)$, то $N/O_\omega(N) \cong (N/N \cap O_\omega(G))/(O_\omega(N)/N \cap O_\omega(G)) \in f(\omega')$. Таким образом, по определению 1.1.2 $N \in \mathfrak{F}$ и, значит, формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой. *Теорема доказана.*

Следствие 3.3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – веерная формация с bp-направлением δ, $\delta \leq \delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор. Формация $\mathfrak{F}$*

является τ-замкнутой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним τ-замкнутым спутником.

Из доказательства теоремы 3.3.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.3.2. *Пусть δ – $\mathfrak{b}p$-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-веерная формация с направлением δ. Тогда максимальный внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутым.*

Следствие 3.3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-веерная (веерная) формация с $\mathfrak{b}p$-направлением δ, $\delta \leq \delta_3$. Формация $\mathfrak{F}$ является нормально наследственной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним нормально наследственным ω-спутником (спутником).*

Следствие 3.3.4. *ω-локальная (ω-специальная, ω-центральная) формация $\mathfrak{F}$ является нормально наследственной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним нормально наследственным ω-спутником.*

Следствие 3.3.5. *Локальная (специальная, центральная) формация $\mathfrak{F}$ является нормально наследственной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним нормально наследственным спутником.*

Пусть $\tau\omega F(\mathfrak{X},\delta)$ ($\tau\mathbb{P}F(\mathfrak{X},\delta)$) – τ-замкнутая ω-веерная (веерная) формация с направлением δ, порожденная классом групп $\mathfrak{X}$; $\omega F^{\tau}(\mathfrak{X},\delta)$ ($\mathbb{P}F^{\tau}(\mathfrak{X},\delta)$) – ω-веерная (веерная) формация с направлением δ, обладающая хотя бы одним τ-замкнутым ω-спутником (τ-замкнутым спутником), порожденная классом групп $\mathfrak{X}$.

Из теоремы 3.3.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.3.6. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество групп, δ – $\mathfrak{b}p$-направление ω-веерной (веерной) формации, $\delta \leq \delta_3$, и τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор. Тогда $\tau\omega F(\mathfrak{X},\delta) = \omega F^{\tau}(\mathfrak{X},\delta)$ (соответственно $\tau F(\mathfrak{X},\delta) = \mathbb{P}F^{\tau}(\mathfrak{X},\delta)$).*

Доказательство следующей леммы проводится аналогично доказательству теоремы 1.1.6.

Лемма 3.3.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, δ – такое направление ω-веерной формации, что $\delta_0 \leq \delta$, τ – регулярный подгрупповой функтор. Тогда формация $\mathfrak{F} = \omega F^{\tau}(\mathfrak{X}, \delta)$ обладает единственным минимальным τ-замкнутым ω-спутником f таким, что*

$$f(\omega') = \tau form(\ G/O_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ ),$$
$$f(p)\ = \tau form(\ G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{X}\ ) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X}) \text{ и}$$
$$f(p)\ = \varnothing, \text{ если } p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X}).$$

Следствие 3.3.7. *Пусть δ – такое направление ω-веерной (веерной) формации, что $\delta_0 \leq \delta$, τ – регулярный подгрупповой функтор, f_i – минимальный τ-замкнутый ω-спутник (спутник) ω-веерной (веерной) формации $\mathfrak{F}_i$ с направлением δ, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.*

На VIII Всесоюзном симпозиуме по теории групп в 1982 году (г. Сумы) Л.А. Шеметковым была поставлена общая проблема изучения локальных формаций, обладающих некоторым определенным свойством. На этом направлении возникла задача исследования для формации $\mathfrak{F}$ минимальных не $\mathfrak{F}$-групп, т.е. таких групп $G \notin \mathfrak{F}$, что все собственные подгруппы группы G принадлежат $\mathfrak{F}$ (см., например, [51]). Наиболее значимые результаты о минимальных не $\mathfrak{F}$-группах были получены В.Н. Семенчуком (см., например, [28], [29], [30]). Исследованиями в данном направлении также занимались А.Д. Ходалевич, А.Ф. Васильев, А.В. Сидоров и другие (см., например, [2], [31], [43]).

Как отмечается в [2], [31], интерес представляет случай, когда для группы $G \notin \mathfrak{F}$ некоторая фиксированная система ее собственных подгрупп содержится в $\mathfrak{F}$. Такой случай приводит к рассмотрению понятия τ-минимальной не $\mathfrak{F}$-группы, где τ – подгрупповой функтор (см., например, [39], глава 2).

Определение 3.3.6. ([39], глава 2). Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп, τ – подгрупповой функтор. Группа G называется *τ-минимальной не $\mathfrak{F}$-группой* или *$\mathfrak{F}^{\tau}$-критической группой*, если $G \notin \mathfrak{F}$, но каждая собственная τ-подгруппа группы G принадлежит классу $\mathfrak{F}$.

Для τ-замкнутой ω-веерной формации $\mathfrak{F}$ рассмотрим свойства τ-минимальных не $\mathfrak{F}$-групп.

Теорема 3.3.2. *Пусть δ – p-направление ω-веерной формации, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-веерная* *формация с направлением δ и ω-спутником f, G – группа, $p \in \omega \cap \pi(G)$, $G/O_p(G) \in \mathfrak{F}$ и $HG_{\delta(p)} \neq G$ для любой собственной τ-подгруппы H группы G. Если $G/G_{\delta(p)}$ – τ-минимальная не $f(p)$-группа, то G является τ-минимальной не $\mathfrak{F}$-группой.*

Доказательство. Пусть $G/G_{\delta(p)}$ – τ-минимальная не $f(p)$-группа. Тогда $G/G_{\delta(p)} \notin f(p)$ и по определению ω-веерной формации $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть H – собственная τ-подгруппа группы G. Покажем, что $H \in \mathfrak{F}$.

Установим, что $H/O_p(H) \in \mathfrak{F}$. Поскольку $H \in \tau(G)$, то ввиду регулярности подгруппового функтора τ получаем, что $HO_p(G)/O_p(G) \in \tau(G/O_p(G))$. Так как по условию теоремы $G/O_p(G) \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая формация, то $HO_p(G)/O_p(G) \in \mathfrak{F}$ и, значит, $H/H \cap O_p(G) \in \mathfrak{F}$. Поскольку $H \cap O_p(G)$ – нормальная p-подгруппа группы H, то $H/O_p(H) \cong (H/H \cap O_p(G))/(O_p(H)/H \cap O_p(G)) \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $H/O_p(H) \in \mathfrak{F}$.

Покажем, что $H/H_{\delta(p)} \in f(p)$. Из $H \in \tau(G)$ и регулярности подгруппового функтора τ получаем, что $HG_{\delta(p)}/G_{\delta(p)} \in \tau(G/G_{\delta(p)})$. Если $HG_{\delta(p)}/G_{\delta(p)} = G/G_{\delta(p)}$, то $HG_{\delta(p)} = G$, что противоречит условию. Поэтому $HG_{\delta(p)}/G_{\delta(p)} < G/G_{\delta(p)}$. Так как $G/G_{\delta(p)}$ – τ-минимальная не $f(p)$-группа, то $HG_{\delta(p)}/G_{\delta(p)} \cong H/H \cap G_{\delta(p)} \in f(p)$. Тогда в силу δ-радикальности подгруппового функтора τ справедливо $H/H_{\delta(p)} \in f(p)$.

Поскольку направление δ формации $\mathfrak{F}$ является p-направлением, то по лемме 2(1) [8] получаем, что $H \in \mathfrak{F}$. Следовательно, G – τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. *Теорема доказана.*

Следствие 3.3.8. *Пусть δ – p-направление веерной формации, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая веерная формация с направлением δ и спутником f, G – группа, $p \in \pi(G)$, $G/O_p(G) \in \mathfrak{F}$ и $HG_{\delta(p)} \neq G$ для любой собственной τ-подгруппы H группы G. Если $G/G_{\delta(p)}$ – τ-минимальная не $f(p)$-группа, то G – τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа.*

Теорема 3.3.3. *Пусть δ – p-направление ω-веерной формации, τ – регулярный $\omega\delta$-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-веерная формация с направлением δ и минимальным ω-спутником f, $\omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Если G – τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то справедливо по крайней мере одно из следующих утверждений:*

1) *$G/O_\omega(G)$ – τ-минимальная не $f(\omega')$-группа;*

2) *$G/G_{\delta(p)}$ – τ-минимальная не $f(p)$-группа для некоторого $p \in \omega \cap \pi(G)$.*

Доказательство. Пусть G – τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Если $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, $G/O_\omega(G) \notin f(\omega')$ или $G/G_{\delta(p)} \notin f(p)$ для некоторого $p \in \omega \cap \pi(G)$.

Рассмотрим случай, когда $G/O_\omega(G) \notin f(\omega')$. Пусть $H/O_\omega(G)$ – собственная τ-подгруппа группы $G/O_\omega(G)$. Установим, что $H/O_\omega(G) \in f(\omega')$. Так как $H/O_\omega(G) < G/O_\omega(G)$, то $H < G$ и ввиду регулярности подгруппового функтора τ справедливо $H \in \tau(G)$. Поскольку G – τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $H \in \mathfrak{F}$ и, значит, $H/O_\omega(H) \in f(\omega')$. Так как подгрупповой функтор τ является ω-радикальным, то $H \cap O_\omega(G) = O_\omega(H)$. Следовательно, $H/O_\omega(H) = H/H \cap O_\omega(G) \cong HO_\omega(G)/O_\omega(G) = H/O_\omega(G) \in f(\omega')$. Таким образом, $G/O_\omega(G)$ – τ-минимальная не $f(\omega')$-группа.

Теперь рассмотрим случай, когда $G/G_{\delta(p)} \notin f(p)$ для некоторого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Пусть $L/G_{\delta(p)} \in \tau(G/G_{\delta(p)})$ и $L/G_{\delta(p)} < G/G_{\delta(p)}$. Покажем, что $L/G_{\delta(p)} \in f(p)$. Ввиду регулярности подгруппового функтора τ L является собственной τ-подгруппой группы G. Так как G – τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $L \in \mathfrak{F}$ и, значит, $L/L_{\delta(q)} \in f(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(L)$. Пусть $p \in \pi(L)$. Так как подгрупповой функтор τ является δ-радикальным, то $L \cap G_{\delta(p)} = L_{\delta(p)}$ и $L/L_{\delta(p)} = L/L \cap G_{\delta(p)} \cong LG_{\delta(p)}/G_{\delta(p)} = L/G_{\delta(p)} \in f(p)$. Пусть теперь $p \notin \pi(L)$. Поскольку направление δ формации $\mathfrak{F}$ является p-направлением, то $L \in \mathfrak{E}_{p'} \subseteq \mathfrak{E}_{p'}\delta(p) = \delta(p)$ и, значит, $L_{\delta(p)} = L$. Так как f – минимальный ω-спутник формации $\mathfrak{F}$ и $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$, то по теореме 1.1.6 $f(p) \neq \varnothing$ и поэтому $L/G_{\delta(p)} = LG_{\delta(p)}/G_{\delta(p)} \cong L/L \cap G_{\delta(p)} = L/L_{\delta(p)} \cong 1 \in f(p)$. Таким образом, в этом случае $G/G_{\delta(p)}$ – τ-минимальная не $f(p)$-группа. *Теорема доказана.*

Следствие 3.3.9. *Пусть δ – p-направление веерной формации, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая веерная формация с направлением δ и минимальным спутником f, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Если G – τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $G/G_{\delta(p)}$ – τ-минимальная не $f(p)$-группа для некоторого $p \in \pi(G)$.*

Все основные результаты параграфа 3.3 опубликованы в работах [89],

[94]. Применение методов теории подгрупповых функторов к исследованию τ-замкнутых формаций изучалось автором в [93], [109], [114], [115].

§ 3.4. Критические τ-замкнутые ω-веерные формации

В данном параграфе рассмотрим τ-замкнутые ω-веерные формации с bp-направлением $\delta \leq \delta_3$. Центральными результатами здесь являются теоремы 3.4.1 и 3.4.2, в которых для данного вида формаций решается проблема Л.А. Шеметкова [48] изучения $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций (Проблема **(C)**).

Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп, τ – подгрупповой функтор. $\mathfrak{H}_\tau$-*критической* формацией называется $\mathfrak{H}_\theta$-критическая формация в случае, когда θ – совокупность всех τ-замкнутых формаций (см., например, [39]). $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$-*критической* (*$\mathfrak{H}_{\tau\delta}$-критической*) формацией назовем $\mathfrak{H}_\theta$-критическую формацию в случае, когда θ – совокупность всех τ-замкнутых ω-веерных (веерных) формаций с направлением δ.

Рассмотрим критические τ-замкнутые ω-веерные формации с bp-направлением $\delta \leq \delta_3$.

Теорема 3.4.1. *Пусть δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-веерная формация с направлением δ и минимальным τ-замкнутым ω-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$-критической, то $\mathfrak{F} = \tau\omega F(G, \delta)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем, если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_\tau$-критической формацией.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$-критическая формация и G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G является монолитической группой с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку $\tau\omega F(G, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\tau\omega F(G, \delta) \not\subseteq \mathfrak{H}$, то ввиду $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$-критичности формации $\mathfrak{F}$ получаем $\mathfrak{F} = \tau\omega F(G, \delta)$.

Так как δ – p-направление, то согласно лемме 3.3.1 $f(\omega') = \tau form(G/O_\omega(G))$, $f(p) = \tau form(G/G_{\delta(p)})$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ и $f(p) = \varnothing$, если $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Поскольку δ является bp-направлением, удовлетворяющим условию $\delta \leq \delta_3$, то по теореме 6 [8] $h(\omega') = \mathfrak{H}$ и для любого $p \in \omega$ справедливо $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p h_1(p)$, где h_1 – произвольный внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{H}$. Кроме того, по следствию 3.3.2 h является τ-замкнутым ω-спутником формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $\pi(P) \subseteq \omega$. Предположим, что $f(q) \subseteq h(q)$ для любого $q \in \pi(P)$. Тогда в силу $G \in \mathfrak{F}$ имеем $G/G_{\delta(q)} \in f(q) \subseteq h(q)$ для всех $q \in \pi(P)$. Кроме того, $G/P = G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$. Далее, из $\pi(P) \subseteq \omega$ получаем $P \subseteq O_\omega(G)$ и $G/O_\omega(G) \cong (G/P)/(O_\omega(G)/P) \in \mathfrak{H} = h(\omega')$. Следовательно, ввиду леммы 2(3) [8] $G \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Поэтому существует такое $p \in \pi(P)$, что $f(p) \not\subseteq h(p)$. Покажем, что формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$-критической.

Рассмотрим случай, когда $h(p) = \emptyset$. Покажем, что $Z_p \notin \mathfrak{H}$. Пусть h_2 – минимальный τ-замкнутый ω-спутник формации $\mathfrak{H}$. Если $p \in \pi(\mathfrak{H})$, то по лемме 3.3.1 $h_2(p) \neq \emptyset$ и поэтому $h(p) = \mathfrak{N}_p h_2(p) \neq \emptyset$. Противоречие. Следовательно, $p \notin \pi(\mathfrak{H})$ и $Z_p \notin \mathfrak{H}$. Так как $p \in \pi(G) \cap \omega$, то $f(p) \neq \emptyset$. Ввиду леммы 7(2) [8] $Z_p \in \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $Z_p \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ и поэтому $G = Z_p$. Отметим, что $\Phi(Z_p) = 1$. Поскольку δ является b-направлением, то $Z_p \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)$. Тогда $f(p) = \tau form(Z_p/(Z_p)_{\delta(p)}) = (1)$. Тем самым установлено, что формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$-критической.

Пусть теперь $h(p) \neq \emptyset$ и $\mathfrak{M}$ – собственная τ-замкнутая подформация из $f(p)$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq h(p)$ и M – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{M} \setminus h(p)$. Тогда M является монолитической группой с монолитом $R = M^{h(p)}$. Если $R \subseteq O_p(M)$, то $M \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$, что невозможно. Следовательно, $O_p(M) = 1$ и по лемме 18.8 [50] существует точный неприводимый $F_p[M]$-модуль K. Пусть $T = [K]M$. Тогда группа T монолитична с монолитом $K = C_T(K)$. Рассуждая как и при доказательстве теоремы 3.1.1, получим, что $T_{\delta(p)} = K$. Так как $T/K \cong M \in \mathfrak{M}$, то ввиду леммы 7(2) [8] справедливо $T \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\tau\omega F(T,\delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\tau\omega F(T,\delta) = \mathfrak{F}$, то $f(p) = \tau form(T/T_{\delta(p)}) = \tau form M \subseteq \mathfrak{M}$, что невозможно. Поэтому $\tau\omega F(T,\delta) \subset \mathfrak{F}$ и ввиду $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$-критичности формации $\mathfrak{F}$ имеем $\tau\omega F(T,\delta) \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $T \in \mathfrak{H}$ и $M \cong T/T_{\delta(p)} \in h(p)$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq h(p)$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$-критической.

Покажем, что $\Phi(G) = 1$. Пусть N – группа наименьшего порядка из $f(p) \setminus h(p)$. Тогда группа N является монолитической. Как и выше, нетрудно показать, что $O_p(N) = 1$. Используя лемму 18.8 [50], построим группу $B = [L]N$, где L – точный неприводимый $F_p[N]$-модуль, причем B – монолитическая группа, $L = C_B(L)$ и $B_{\delta(p)} = L$. Кроме того, $B \in \mathfrak{N}_p f(p)$ и поэтому ввиду леммы 7(2) [8] $\tau\omega F(B, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\tau\omega F(B, \delta) \subset \mathfrak{F}$, то $B \in \mathfrak{H}$ и $N \cong B/L = B/B_{\delta(p)} \in h(p)$, что невозможно. Следовательно, $\tau\omega F(B, \delta) = \mathfrak{F}$ и в качестве группы G можно выбрать группу B, причем $\Phi(B) = 1$.

Пусть $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Покажем, что $f(\omega')$ – $h(\omega')_\tau$-критическая формация. Так как $P \not\subseteq O_\omega(G)$, то $O_\omega(G) = 1$ и $f(\omega') = \tau form(G/O_\omega(G)) = \tau formG \not\subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$. Пусть $\mathfrak{M}$ – собственная τ-замкнутая подформация из $f(\omega')$ и $\mathfrak{M}_1 = \tau\omega F(\mathfrak{M}, \delta)$. Из $\mathfrak{M} \subset f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$ получаем $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$, то $f(\omega') = \tau form(\ M/O_\omega(M) \mid M \in \mathfrak{M}\ ) \subseteq \mathfrak{M}$, что противоречит выбору $\mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$ и формация $f(\omega')$ является $h(\omega')_\tau$-критической. *Теорема доказана.*

Следствие 3.4.1. *Пусть δ – $\mathfrak{b}p$-направление веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая веерная формация с направлением δ и минимальным τ-замкнутым спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\delta}$-критической, то $\mathfrak{F} = \tau\mathbb{P}F(G, \delta)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем $\Phi(G) = 1$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$.*

Из теоремы 3.4.1 непосредственно вытекают результаты для критических τ-замкнутых ω-локальных, ω-специальных и ω-центральных формаций, в частности, для критических нормально наследственных ω-локальных, ω-специальных и ω-центральных формаций.

$\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$-критическую формацию при $\delta = \delta_1$ ($\delta = \delta_2$, $\delta = \delta_3$) будем называть $\mathfrak{H}_{\tau\omega L}$-критической (соответственно $\mathfrak{H}_{\tau\omega S}$-критической, $\mathfrak{H}_{\tau\omega Z}$-критической) формацией. Аналогично для веерных формаций получаем следующие термины: $\mathfrak{H}_{\tau L}$-критическая (соответственно $\mathfrak{H}_{\tau S}$-критическая, $\mathfrak{H}_{\tau Z}$-критическая) формация. Также будем использовать следующие обозначения: $\tau\omega LF(\mathfrak{X})$ ($\tau\omega SF(\mathfrak{X})$, $\tau\omega ZF(\mathfrak{X})$) — τ-замкнутая ω-локальная (соответственно ω-специальная, ω-

центральная) формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$; $\tau LF(\mathfrak{X})$ ($\tau SF(\mathfrak{X})$, $\tau ZF(\mathfrak{X})$) — τ-замкнутая локальная (соответственно специальная, центральная) формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

Следствие 3.4.2. *Пусть τ – регулярный δ_1-радикальный (δ_2-радикальный, δ_3-радикальный) подгрупповой функтор, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая ω-локальная (соответственно ω-специальная, ω-центральная) формация с максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-локальная (соответственно ω-специальная, ω-центральная) формация с минимальным τ-замкнутым ω-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\omega L}$-критической (соответственно $\mathfrak{H}_{\tau\omega S}$-критической, $\mathfrak{H}_{\tau\omega Z}$-критической), то $\mathfrak{F} = \tau\omega LF(G)$ (соответственно $\mathfrak{F} = \tau\omega SF(G)$, $\mathfrak{F} = \tau\omega ZF(G)$), где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем, если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \nsubseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_\tau$-критической формацией.*

Следствие 3.4.3. *Пусть τ – регулярный δ_1-радикальный (δ_2-радикальный, δ_3-радикальный) подгрупповой функтор, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая локальная (соответственно специальная, центральная) формация с максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая локальная (соответственно специальная, центральная) формация с минимальным τ-замкнутым спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau L}$-критической (соответственно $\mathfrak{H}_{\tau S}$-критической, $\mathfrak{H}_{\tau Z}$-критической), то $\mathfrak{F} = \tau LF(G)$ (соответственно $\mathfrak{F} = \tau SF(G)$, $\mathfrak{F} = \tau ZF(G)$), где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем $\Phi(G) = 1$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$.*

В качестве следствия из теоремы 3.4.1 получается результат для τ-замкнутых ω-веерных формаций в случае, когда $\tau = S_n$ – нормально наследственный подгрупповой функтор. Напомним, что S_n-замкнутая формация также называется нормально наследственной.

Следствие 3.4.4. *Пусть δ – br-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – нормально наследственная ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная ω-веерная формация с направлением δ и минимальным S_n-замкнутым*

ω-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{S_n\omega\delta}$-критической, то $\mathfrak{F} = S_n\omega F(G,\delta)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ такая, что если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{S_n}$-критической, а если $\pi(P) \nsubseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{S_n}$-критической.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{S_n\omega\delta}$-критическая формация. Согласно теореме 3.4.1 $\mathfrak{F} = S_n\omega F(G,\delta)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем, если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{S_n}$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \nsubseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{S_n}$-критической формацией.

Покажем, что $\pi(P) = \{p\}$. Предположим, что $|\pi(P)| > 1$. Тогда $P \in \mathfrak{E}_{(Z_q)'}$ для любого $q \in \pi(P)$. Так как δ – r-направление, то по лемме 1(8) [8] $G/G_{\delta(q)} \cong (G/P)/(G_{\delta(q)}/P) = (G/P)/(G/P)_{\delta(q)} \in h(q)$ для всех $q \in \pi(P) = \pi(P) \cap \omega$. Поскольку $P \subseteq O_\omega(G)$, то $G/O_\omega(G) \cong (G/P)/(O_\omega(G)/P) \in \mathfrak{H} = h(\omega')$. Согласно лемме 2(3) [8] $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Таким образом, $|\pi(P)| = 1$ и $\pi(P) = \{p\}$. *Следствие доказано.*

Следствие 3.4.5. *Пусть δ – br-направление веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – нормально наследственная веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация с направлением δ и минимальным S_n-замкнутым спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{S_n\delta}$-критической, то $\mathfrak{F} = S_n\mathbb{P}F(G,\delta)$, где G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ такая, что $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{S_n}$-критической.*

Теорема 3.4.2. *Пусть δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F} = \tau\omega F(G,\delta)$ – формация с минимальным τ-замкнутым ω-спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем, если $\pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$-критической, а если $\pi(P) \cap\ \omega = \varnothing$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_\tau$-критической формацией. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$-критической.*

Доказательство. Поскольку $P = G^{\mathfrak{H}}$, то $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная τ-замкнутая ω-веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$ и b – ее минимальный τ-замкнутый ω-спутник. По следствию 3.3.7 $b \leq f$. Покажем, что $b \leq h$. Отметим, что согласно следствию 3.3.2 h – τ-замкнутый ω-спутник формации $\mathfrak{H}$. Если $p \in \omega \setminus \pi(G)$, то $b(p) \subseteq f(p) = \varnothing \subseteq h(p)$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(G)$. Если $p \in (\pi(G) \cap \omega) \setminus \pi(P)$, то $P \in \mathfrak{E}_{p'} \subseteq \mathfrak{E}_{p'}\delta(p) = \delta(p)$ и ввиду леммы 1(8) [8] справедливо $b(p) \subseteq f(p) = \tau form(G/G_{\delta(p)}) = \tau form(\ (G/P)/(G/P)_{\delta(p)}\ ) \subseteq h(p)$.

Пусть $p \in \pi(P) \cap \omega$. Поскольку по условию теоремы $\pi(P) = \{p\}$, то P – абелева p-группа. Рассуждая как и при доказательстве теоремы 3.1.2, получим, что $G_{\delta(p)} = P$. Если $b(p) = f(p)$, то $G/P = G/G_{\delta(p)} \in f(p) = b(p)$ и по лемме 7(2) [8] $G \in \mathfrak{N}_p b(p) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Следовательно, $b(p) \subset f(p)$ и в силу $h(p)_\tau$-критичности формации $f(p)$ получаем $b(p) \subseteq h(p)$.

Покажем, что $b(\omega') \subseteq h(\omega')$. Если $\pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$, то ввиду условия теоремы $P \subseteq O_\omega(G)$ и $b(\omega') \subseteq f(\omega') = \tau form(G/O_\omega(G)) = \tau form(\ (G/P)/(O_\omega(G)/P)\ ) \subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$. Пусть $\pi(P) \cap \omega = \varnothing$. Если $b(\omega') = f(\omega')$, то $G \in \tau form G = \tau form(G/O_\omega(G)) = f(\omega') = b(\omega') \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Следовательно, $b(\omega') \subset f(\omega')$ и поэтому ввиду $h(\omega')_\tau$-критичности формации $f(\omega')$ справедливо $b(\omega') \subseteq h(\omega')$. Таким образом, $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Тем самым установлено, что формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$-критической. *Теорема доказана.*

Следствие 3.4.6. *Пусть δ – bp-направление веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F} = \tau\mathbb{P}F(G,\delta)$ – формация с минимальным τ-замкнутым спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$-критической. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\delta}$-критической формацией.*

Из теоремы 3.4.2 непосредственно вытекают результаты для критических τ-замкнутых ω-локальных, ω-специальных и ω-центральных формаций, в частности, для критических нормально наследственных ω-локальных, ω-специальных и ω-центральных формаций.

Все основные результаты параграфа 3.4 опубликованы в [89].

§ 3.5. Известные результаты, используемые в Главе 3

В Главе 3 используются следующие известные результаты.

[4], гл. 2, Лемма 4.13. *Формационно критическая группа монолитична.*

[4], гл. 2, Лемма 4.14. *Конечная простая группа является формационно критической.*

[8], Лемма 1(8). *Если $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга, $\mathfrak{H}$ – класс групп, $\mathfrak{H}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, G – группа, $N \lhd G$ и $N \in \mathfrak{H}$, то $(G/N)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/N$.*

[8], Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ с p-направлением δ. Тогда* 1) *если $p \in \omega$, $G/O_p(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$, то $G \in \mathfrak{F}$;* 2) *если $G/O_{\omega'}(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$, то $G \in \mathfrak{F}$;* 3) *если $G/M \in \mathfrak{F}$, $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(M)$ и $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

[8], Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-веерная формация с ω-спутником f и b_p-направлением δ. Тогда*: 1) *$O_p(G/G_{\delta(p)}) = 1$ для любой группы G;* 2) *$\mathfrak{F}$ обладает ω-спутником g таким, что $g(q) = f(q)$ для всех $q \in \{\omega'\} \cup (\omega \setminus \{p\})$ и $g(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$.*

[8], Лемма 7(2). *Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ с внутренним ω-спутником f и направлением δ таким, что $\delta_1 \leq \delta$. Тогда $\mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$.*

[8], Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – ω-веерные формации с внутренними ω-спутниками m и h соответственно и с p-направлением δ таким, что $\delta \leq \delta_1$. Тогда формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ является ω-веерной формацией с направлением δ и внутренним ω-спутником f таким, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(p) = m(p) \circ \mathfrak{H}$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$ и $f(p) = h(p)$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M})$.*

[8], Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ с внутренним ω-спутником f и bp-направлением δ таким, что $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним ω-спутником h таким, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$, $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого $p \in \omega$.*

[19], Теорема 53.44. *Конечная монолитическая группа является критической, если или централизатор монолита содержится в монолите, или ее подгруппа Фраттини тривиальна.*

[19], Следствие 51.34. *Конечная простая группа является критической.*

[19], Следствие 52.34. *Конечная монолитическая группа с неабелевым монолитом является критической.*

[39], Лемма 2.1.5. *Пусть* A *– монолитическая группа с монолитом* $R \nsubseteq \Phi(A)$. *Тогда формация* $\mathfrak{F} = \tau form A$ τ*-неприводима и в ней имеется единственная максимальная* τ*-замкнутая подформация* $\mathfrak{M} = \tau form((A/R) \cup \mathfrak{X})$, *где* $\mathfrak{X}$ *– множество всех собственных* τ*-подгрупп группы* A.

[39], Лемма 3.1.9. *Пусть* $G = A \wr B = KB$, *где* $K = \Pi_{b \in B} A_1^b$ *– база сплетения* G *и* A_1 *– первая копия* A *в* K. *Тогда*: 1) *если* L *– минимальная нормальная подгруппа группы* G, L_1 *– проекция этой подгруппы в* A_1 *и* $L_1 \nsubseteq Z(A_1)$, *то* $L = \Pi_{b \in B}(L \cap A_1)^b$; 2) *если* R *– минимальная нормальная подгруппа в* A_1 *и* $R \notin Z(A_1)$, *то* $R_1 = \Pi_{b \in B} R^b$ *– минимальная нормальная подгруппа в* G; 3) $SocG \subseteq \Pi_{b \in B} M^b$, *где* $M = SocA_1$; 4) *если* L *– нормальная подгруппа группы* G, $L \subseteq K$ *и* M *– проекция этой подгруппы в* A_1, *то сплетение* $(A_1/M) \wr B$ *является гомоморфным образом фактор-группы* G/L.

[50], Лемма 3.3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– однопорожденная формация. Тогда всякая собственная подформация формации* $\mathfrak{F}$ *содержится в некоторой максимальной подформации из* $\mathfrak{F}$.

[50], Лемма 18.2. *Пусть* G *– монолитическая группа с монолитом* P. *Тогда если* $P \nsubseteq \Phi(G)$, *то* $form(G/P)$ *– единственная максимальная подформация формации* $formG$.

[50], Лемма 18.8. *Если в группе* G *имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и* $O_p(G) = 1$, *то существует точный неприводимый* $F_p[G]$*-модуль, где* F_p *– поле из* p *элементов.*

[79], Лемма 1(7). *Если* $\mathfrak{F}$ *– формация Фиттинга,* $\mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, G *– группа,* $N \triangleleft G$ *и* $N \in \mathfrak{E}_{A'}$, *то* $(G/N)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/N$.

ГЛАВА 4
Ω-РАССЛОЕННЫЕ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ИХ ФОРМАЦИОННЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Данная Глава посвящена построению теории Ω-расслоенных формаций конечных групп и ее применению к исследованию подформационного строения формаций. Глава состоит из пяти параграфов. В параграфе 4.1 разработаны основные положения данной теории (решение Задачи **(D2)**). В параграфе 4.2 изучаются максимальные подформации Ω-расслоенных формаций. В параграфе 4.3 получены свойства τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций, где τ – подгрупповой функтор. В параграфе 4.4 для τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций с br-направлением решается проблема Л.А. Шеметкова [48] изучения $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций (Проблема **(C)**). В параграфе 4.5 содержатся известные результаты, используемые в Главе 4. Все основные результаты Главы 4 опубликованы в [83], [86], [91], [92]. Все результаты работы [83] получены в неразделимом соавторстве с В.А. Ведерниковым. Все результаты работы [86] получены в неразделимом соавторстве с М.А. Корпачевой. Основные результаты работы [91], в частности, Теоремы 4.4.1, 4.4.2 принадлежат М.М. Сорокиной.

§ 4.1. Определение и основные свойства Ω-расслоенных формаций

В данном параграфе представлены основные понятия и разработаны основные положения теории Ω-расслоенных формаций конечных групп.

Пусть $\mathfrak{I}$ – класс всех конечных простых групп; Ω – непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$; Ω' – дополнение к Ω в $\mathfrak{I}$; $\{\ \Omega'\ \}$ – одноэлементное множество, состоящее из одного элемента Ω'. Группа G называется *Ω-группой*, если $K(G) \subseteq \Omega$, где $K(G)$ – класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G. Через $\mathfrak{E}_\Omega$ обозначается множество всех Ω-групп; $O_\Omega(G) = G_{\mathfrak{E}_\Omega}$ [7].

Определение 4.1.1. Функцию $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{$ формации групп $\}$, где $f(\Omega')$ – непустая формация, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах из Ω, назовем *Ω-формационной функцией* или, коротко, *ΩF-функцией.*

Функцию $g : \mathfrak{I} \to \{$ формации групп $\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах из $\mathfrak{I}$, назовем *формационной функцией* или, коротко, *F-функцией.*

Функцию $\varphi : \mathfrak{I} \to \{$ непустые формации Фиттинга $\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах из $\mathfrak{I}$, назовем *формационно-радикальной функцией*, или коротко, *FR-функцией.*

Лемма 4.1.1. *Пусть f – ΩF-функция, φ – FR-функция и*

$$\mathfrak{F} = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\ ).$$

Тогда $\mathfrak{F}$ является непустой формацией.

Доказательство. Поскольку $1 \in f(\Omega')$ и $K(1) = \emptyset$, то $1 \in \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$. Так как $O_{\Omega}(G)N/N \cong O_{\Omega}(G)/(O_{\Omega}(G) \cap N) \in \mathfrak{E}_{\Omega}$, то $O_{\Omega}(G)N/N \subseteq O_{\Omega}(G/N) := R/N$. Поэтому $(G/N)/O_{\Omega}(G/N) \cong (G/O_{\Omega}(G))/(R/O_{\Omega}(G)) \in f(\Omega')$. Поскольку для любого $A \in \Omega \cap K(G/N)$ справедливо $G_{\varphi(A)}N/N \cong G_{\varphi(A)}/(G_{\varphi(A)} \cap N) \in \varphi(A)$, то $G_{\varphi(A)}N/N \subseteq (G/N)_{\varphi(A)} := T/N$ и $(G/N)/(G/N)_{\varphi(A)} \cong (G/G_{\varphi(A)})/(T/G_{\varphi(A)}) \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G/N)$. Следовательно, по определению **??** $G/N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G/N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$, и $D := N_1 \cap N_2$. Рассуждая как и при доказательстве леммы 1.1.1, получим, что $(G/D)/O_{\Omega}(G/D) \in f(\Omega')$ и $(G/D)/(G/D)_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G/D)$. Это, согласно определению 4.1.1, означает, что $G/D \in \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F}$ является формацией. *Лемма доказана.*

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 4.1.2. *Пусть f – F-функция, φ – FR-функция и*

$$\mathfrak{F} = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\ ).$$

Тогда $\mathfrak{F}$ является непустой формацией.

Определение 4.1.2. Пусть f, g и φ – некоторые ΩF-функция, F-функция и FR-функция соответственно. Формацию

$$\mathfrak{F} = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\ )$$

назовем *Ω-расслоенной формацией* и обозначим $\Omega F(f, \varphi)$; функцию f будем называть *ΩF-спутником* (или, коротко, *Ω-спутником*), а функцию φ – *направлением* Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$.

Формацию $\mathfrak{F} = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\varphi(A)} \in g(A)$ для всех $A \in K(G)\ )$ назовем *расслоенной формацией с направлением* φ и обозначим $F(g, \varphi)$, а g будем называть F-*спутником* (или, коротко, *спутником*) расслоенной формации $\mathfrak{F} = F(g, \varphi)$.

Лемма 4.1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = \emptyset$. Тогда $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, где f – ΩF-функция такая, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = \emptyset$ для всех $A \in \Omega$, и φ – произвольная FR-функция. В частности, единичная формация* (1) *является Ω-расслоенной для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} := \Omega F(f, \varphi)$, где f и φ – функции из заключения леммы. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$ и из $A \in \Omega \cap K(G) = \emptyset$ следует, что $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$. Поэтому $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда H – монолитическая группа с монолитом $P = H^{\mathfrak{F}}$. Так как $H/O_\Omega(H) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $P \subseteq O_\Omega(H)$. Пусть $K(P) = (B)$. Тогда $B \in K(H) \cap \Omega$ и из $H \in \mathfrak{H}$ имеем $H/H_{\varphi(B)} \in f(B) = \emptyset$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. *Лемма доказана.*

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $\mathfrak{E}_A = \mathfrak{E}_{(A)}$, $\mathfrak{E}_{A'} = \mathfrak{E}_{(A)'}$; $O_A(G) = G_{\mathfrak{E}_A}$, $O_{A'}(G) = G_{\mathfrak{E}_{A'}}$, $O_{A',A}(G) = G_{\mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A}$, где $A \in \mathfrak{I}$.

Определение 4.1.3. Формацию $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ назовем Ω-*свободной* или, коротко, ΩFr-*формацией* (от англ. “free”), если $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, и будем обозначать $\mathfrak{F} = \Omega Fr(f)$, т.е. $\Omega Fr(f) =$

$$= (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/O_{A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\ ).$$

Направление Ω-свободной формации обозначим через φ_0.

Пусть f – F-функция. Формацию

$$\mathfrak{F} = F(f, \varphi_0) = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_{A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\ )$$

назовем *свободной формацией* и обозначим $\mathfrak{F} = Fr(f)$.

Теорема 4.1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая неединичная формация и $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является Ω-свободной формацией.*

Доказательство. Пусть f – такая ΩF-функция, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = form(\ G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{F}\ )$ для всех $A \in \Omega$, и $\mathfrak{F}_1 = \Omega Fr(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Если $H \in \mathfrak{F}$, то $H/O_{\Omega}(H) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$ и $H/O_{A'}(H) \in (\ G/O_{A'}(G) \mid G \ \in \ \mathfrak{F}\ ) \subseteq f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(H)$. Это означает, что $H \in \Omega Fr(f) = \mathfrak{F}_1$ и поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T – монолитическая группа с монолитом $M = T^{\mathfrak{F}}$. Так как $T/O_{\Omega}(T) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $M \subseteq O_{\Omega}(T)$. Пусть $K(M) = (A)$. Тогда $A \in \Omega$ и по определению формации $\mathfrak{F}_1$ имеем $T/O_{A'}(T) \in f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $M \subseteq O_{A'}(T)$. Получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. *Теорема доказана.*

Замечание 4.1.1. Из теоремы 4.1.1 и леммы 4.1.3 следует, что каждая непустая формация является Ω-свободной для некоторого непустого класса простых групп Ω.

Лемма 4.1.4. *Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, где φ – произвольная FR-функция. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\mathfrak{F} = \Omega F(g, \varphi)$, *где* $g(A) = f(A) \cap \mathfrak{F}$ *для любого* $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$;

2) $\mathfrak{F} = \Omega F(h, \varphi)$, *где* $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(A) = f(A)$ *для любого* $A \in \Omega$.

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega F(g, \varphi)$, где g – ΩF-функция из пункта 1) леммы. Так как $g(A) \subseteq f(A)$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, то по определению 4.1.2 $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega') \cap \mathfrak{F} = g(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \cap \mathfrak{F} = g(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

2) Пусть h – ΩF-функция из пункта 2) леммы и $\mathfrak{H} = \Omega F(h, \varphi)$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_{\Omega}(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и для любого $A \in \Omega \cap K(G)$ справедливо $G/G_{\varphi(A)} \in f(A) = h(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H монолитична с монолитом $P = H^{\mathfrak{F}}$. Из $H/O_{\Omega}(H) \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$ следует, что $P \subseteq O_{\Omega}(H)$ и $H/O_{\Omega}(H) \cong (H/P)/O_{\Omega}(H/P) \in f(\Omega')$. Поскольку для любого $A \in \Omega \cap K(H)$ выполняется $H/H_{\varphi(A)} \in h(A) = f(A)$, то $H \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. *Лемма доказана.*

Замечание 4.1.2. Пусть $A \in \mathfrak{I}$. Главный фактор M/N группы G называется главным A-фактором, если $K(M/N) = (A)$. Через $F_A(G)$ обозначается пересечение централизаторов всех главных A-факторов группы G; если в G нет главных A-факторов, то полагают $F_A(G) = G$ [36]. Через $\mathfrak{S}_{cA}$ обозначается класс всех тех конечных групп, у которых каждый главный A-фактор централен. Если A – неабелева простая группа, то $\mathfrak{S}_{cA} = \mathfrak{E}_{A'}$. Нетрудно показать, что класс $\mathfrak{S}_{cA}$ является формацией Фиттинга и $\mathfrak{S}_{cA}$-радикал группы G равен $F_A(G)$ (см. теоремы 5 и 7 [5]).

Определение 4.1.4. (см. [7], определение 2). Формация $\mathfrak{F} = \Omega F(f,\varphi)$ называется *Ω-композиционной* или, коротко, *ΩC-формацией*, если $\varphi(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, и записывают $\mathfrak{F} = \Omega CF(f) =$

$$= (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/F_A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\ ),$$

а f называют *ΩC-спутником* формации $\mathfrak{F}$. Направление Ω-композиционной формации обозначим через φ_3.

В случае, когда f является F-функцией, получают определение *композиционной формации*

$$\mathfrak{F} = CF(f) = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/F_A(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\ ).$$

Определение 4.1.5. Формацию $\mathfrak{F} = \Omega F(f,\varphi)$ назовем *Ω-канонической* или, коротко, *ΩK-формацией*, если $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'} \cdot \mathfrak{E}_A$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, и будем обозначать $\mathfrak{F} = \Omega KF(f)$, т.е. $\Omega KF(f) =$

$$(\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)\ ).$$

Направление Ω-канонической формации обозначим через φ_2'.

Пусть f – F-функция. Формацию

$$\mathfrak{F} = F(f,\varphi_2') = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G)\ )$$

назовем *канонической формацией* и обозначим $\mathfrak{F} = KF(f)$.

Пример 4.1.1. Пусть $\mathfrak{F} = formA$, где A – простая неабелева группа. Тогда $K(\mathfrak{F}) = (A)$. Пусть $\Omega = (A)$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ не является Ω-канонической формацией. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega KF(f) = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_A(G) \in f(\Omega')$ и $G/O_{A',A}(G) \in f(A)$ для $A \in \Omega \cap K(G)\ )$. Если $f(A) = \emptyset$, то условие $G/O_{A',A}(G) \in f(A)$ для $A \in \Omega \cap K(G)$ будет выполняться лишь для A'-групп. Поэтому $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{E}_{A'}$ и $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{F}$. Пусть $f(A) \neq \emptyset$ и H – произвольная (A)-группа. Тогда $H/O_A(H) \in f(\Omega')$ и $H/O_{A',A}(H) \in f(A)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}_1$. Так как сплетение $A \wr A \in \mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1$. Формация $\mathfrak{F}$ является композиционной. Поэтому композиционная формация $\mathfrak{F}$ не обязана быть Ω-канонической. Заметим, что $lformA = \mathfrak{N}_{\pi(A)}formA \neq \mathfrak{F}_1$. Поэтому и локальная формация $\mathfrak{L}$ не обязана быть Ω-канонической в случае $\Omega = K(\mathfrak{L})$.

В.А. Ведерников в работе [79] ввел в рассмотрение ещё один важный тип Ω-расслоенной формации, направление которой интегрирует в себе компоненты двух направлений, а именно, композиционной и канонической формаций.

Определение 4.1.6. ([79], определение 3). Формация $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ называется Ω-*биканонической* или, коротко, ΩB-*формацией*, если

$\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'}$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{I}$ и

$\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$,

и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega BF(f)$, т.е. $\mathfrak{F} = \Omega BF(f) = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$, $G/O_{A'}(G) \in f(A)$ для всех $A \in (\Omega \setminus \mathfrak{A}) \cap K(G)$ и $G/O_{A',A}(G) \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(G)\ )$. Направление Ω-биканонической формации обозначается через φ_2.

Пусть f – F-функция. Формация $\mathfrak{F} = F(f, \varphi_2) = (\ G \in\ \mathfrak{E} \mid G/O_{A'}(G) \in f(A)$ для всех $A \in K(G) \setminus \mathfrak{A}$ и $G/O_{A',A}(G) \in f(A)$ для всех $A \in K(G) \cap \mathfrak{A}\ )$ называется *биканонической формацией* и обозначается $\mathfrak{F} = BF(f)$.

Теорема 4.1.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая нееdиничная формация и $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с направлением φ и Ω-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – расслоенная формация с направлением φ и спутником f_1 таким, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \varnothing$ для всех $A \in \mathfrak{I} \setminus \Omega$. Такие Ω-спутник f и спутник f_1 формации $\mathfrak{F}$ будем называть Ω-равными.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, f_1 – F-функция такая, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$, $f_1(A) = \varnothing$ для любого $A \in \mathfrak{I} \setminus \Omega$, и $\mathfrak{F}_1 = F(f_1, \varphi)$. Отметим, что по определению 4.1.1 $f(\Omega') \neq \varnothing$. Поскольку $\mathfrak{F} \neq (1)$, то $\Omega = K(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то G является Ω-группой и, значит, $G/G_{\varphi(A)} \in f(A) = f_1(A)$ для любого $A \in K(G) \subseteq \Omega$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и T – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа T монолитична с монолитом $M = T^{\mathfrak{F}}$. В силу леммы 4.1.4 можем считать, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Пусть $K(M) = (B)$. Так как $T \in \mathfrak{F}_1$, то $T/T_{\varphi(B)} \in f_1(B)$ и $f_1(B) \neq \varnothing$. Тогда по определению f_1 имеем $B \in \Omega$ и $M \subseteq O_\Omega(T)$. Это означает, что $T/O_\Omega(T) \cong (T/M)/(O_\Omega(T)/M) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Поскольку $T/T_{\varphi(A)} \in f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in K(T) = \Omega \cap K(T)$, то $T \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = F(g, \varphi)$, h – ΩF-функция такая, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$, $h(A) = g(A)$ для любого $A \in \Omega$, и $\mathfrak{H} = \Omega F(h, \varphi)$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и для любого $A \in \Omega \cap K(G)$ справедливо $G/G_{\varphi(A)} \in g(A) = h(A)$. Поэтому $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда H – монолитическая группа с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Так как $H/O_\Omega(H) \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $M \subseteq O_\Omega(H)$. Поскольку $\Omega = K(\mathfrak{F})$, то H/M является Ω-группой и, значит, H – Ω-группа. Так как $H \in \mathfrak{H}$, то $H/H_{\varphi(A)} \in h(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(H) = K(H)$ и по определению функции h получим $H/H_{\varphi(A)} \in g(A)$ для любого $A \in K(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. *Теорема доказана.*

Следствие 4.1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая нееденичная формация и $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-свободной (Ω-канонической, Ω-биканонической, Ω-композиционной) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – свободная (соответственно каноническая, биканоническая, композиционная) формация.*

Определение 4.1.7. Направление φ Ω-расслоенной формации назовем *правильным* или, коротко, *r-направлением* (от англ. “right”), если

$$\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'} \cdot \varphi(A) \text{ для любого } A \in \mathfrak{I}.$$

В.А. Ведерников в работе [79] ввел в рассмотрение следующие важные виды направлений Ω-расслоенной формации.

Определение 4.1.8. ([79], определение 1). Направление φ Ω-расслоенной формации называется:

a-направлением, если $A \in \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$;

b-направлением, если $\varphi(A)\mathfrak{E}_A = \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$;

b_A-направлением, где $A \in \mathfrak{I}$, если $\varphi(A)\mathfrak{E}_A = \varphi(A)$;

n-направлением, если $A \notin \varphi(A)$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{I}$.

Пусть $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ – множество направлений Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$. FR-функция φ называется *$i_1 i_2 \ldots i_k$-направлением* Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$, если φ является i_j-направлением формации $\mathfrak{F}$ для любого $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Замечание 4.1.3. Отметим, что всякое b-направление Ω-расслоенной формации является a-направлением и b_A-направлением для любого $A \in \mathfrak{I} \cap \mathfrak{A}$.

Замечание 4.1.4. Направление φ_0 Ω-свободной формации является nr-направлением, но не является ни a-, ни b-направлением; направление φ_2' Ω-канонической формации является br-направлением, но не является n-направлением; направления φ_2 и φ_3 соответственно Ω-биканонической и Ω-композиционной формаций являются bnr-направлениями.

Теорема 4.1.3. *Пусть φ – r-направление Ω-расслоенной формации. Если $\mathfrak{F}$ – расслоенная формация с направлением φ, то $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной формацией с направлением φ для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Доказательство. Пусть Ω – непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{F} = F(f, \varphi)$ – расслоенная формация с направлением φ. Рассмотрим ΩF-функцию h такую, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega F(h, \varphi)$. Рассуждая как и при доказательстве теоремы 4.1.2, получим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H монолитична с монолитом $M = H^{\mathfrak{F}}$. Пусть $K(M) = (B)$. Как и при доказательстве теоремы 4.1.2, $M \subseteq O_\Omega(H)$ и поэтому $B \in \Omega$. Тогда $H/H_{\varphi(B)} \in h(B) = f(B)$. Пусть $A \in K(H) \setminus (B)$ и $(H/M)_{\varphi(A)} := T/M$. Так как $T/M \in \varphi(A)$ и $M \in \mathfrak{E}_{A'}$, то $T \in \mathfrak{E}_{A'} \cdot \varphi(A) = \varphi(A)$. Отсюда получаем равенство $(H/M)_{\varphi(A)} = H_{\varphi(A)}/M$ и, значит, $H/H_{\varphi(A)} \cong (H/M)/(H/M)_{\varphi(A)} \in f(A)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. *Теорема доказана.*

Следствие 4.1.2. (Ведерников, Коптюх [7], теорема 1). *Если $\mathfrak{F}$ – композиционная формация, то $\mathfrak{F}$ является Ω-композиционной формацией для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Следствие 4.1.3. *Если $\mathfrak{F}$ – свободная (каноническая, биканоническая) формация, то $\mathfrak{F}$ является Ω-свободной (соответственно Ω-канонической, Ω-биканонической) формацией для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Теорема 4.1.4. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-канонической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является Ω-композиционной.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $A \in K(G)$. Тогда $A \in \mathfrak{A}$. Пусть $A \cong Z_p$. Покажем, что $F_{Z_p}(G) = O_{(Z_p)', Z_p}(G)$. Действительно, поскольку $G \in \mathfrak{S}$, то каждый главный pd-фактор группы G является главным Z_p-фактором группы G и поэтому $F_{Z_p}(G) = F_p(G)$. Так как $F_p(G) \in \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$, то $F_{Z_p}(G) \subseteq O_{(Z_p)',Z_p}(G)$. С другой стороны, $F_p(G)$ – наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G. Следовательно, $F_{Z_p}(G) = O_{(Z_p)',Z_p}(G)$. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega KF(f) =$

$= (G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/O_{A',A}(G) \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G))$. Это, в силу $F_A(G) = O_{A',A}(G)$ для всех $A \in K(G)$, справедливо тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/F_A(G) \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)\ ) = \Omega CF(f)$. *Теорема доказана.*

Следствие 4.1.4. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Формация $\mathfrak{F}$ является канонической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является локальной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – каноническая формация. В силу следствия 4.1.3 формация $\mathfrak{F}$ является Ω-канонической для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$. Тогда по теореме 4.1.4 $\mathfrak{F}$ – Ω-композиционная формация. Пусть $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Согласно следствию 4.1.1 формация $\mathfrak{F}$ является композиционной. Так как в разрешимом случае понятия композиционной и локальной формаций совпадают, то формация $\mathfrak{F}$ локальна. *Следствие доказано.*

Пусть ψ_1 и ψ_2 – произвольные ΩF-функции (F-функции, FR-функции). Будем говорить, что $\psi_1 \le \psi_2$, если $\psi_1(A) \subseteq \psi_2(A)$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ (для всех $A \in \mathfrak{I}$). Поэтому можем считать, что всякое множество ΩF-функций (F-функций, FR-функций) является частично упорядоченным, и имеет смысл говорить о его минимальных и максимальных элементах.

Определение 4.1.9. ΩF-функцию (F-функцию) f назовем *минимальным Ω-спутником* (*спутником*) Ω-расслоенной (расслоенной) формации $\mathfrak{F}$, если f является минимальным элементом множества всех Ω-спутников (спутников) формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\{\ f_i \mid i \in I\ \}$ – произвольный набор ΩF-функций (F-функций). Обозначим через $\cap_{i \in I} f_i$ такую ΩF-функцию (F-функцию) f, что $f(A) = \cap_{i \in I} f_i(A)$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ (для всех $A \in \mathfrak{I}$).

Лемма 4.1.5. *Пусть φ – произвольная FR-функция, $\mathfrak{F}_i = \Omega F(f_i, \varphi)$ ($\mathfrak{F}_i = F(f_i, \varphi)$), $i \in I$, $\mathfrak{F} = \cap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ и $f = \cap_{i \in I} f_i$. Тогда $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ ($\mathfrak{F} = F(f, \varphi)$).*

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}_i$ и поэтому $G/O_\Omega(G) \in f_i(\Omega')$ и для любого $A \in \Omega \cap K(G)$ имеем $G/G_{\varphi(A)} \in f_i(A)$, $i \in I$. Это означает, что $G/O_\Omega(G) \in \cap_{i\in I} f_i(\Omega') = f(\Omega')$ и для любого $A \in \Omega \cap K(G)$ справедливо $G/G_{\varphi(A)} \in \cap_{i\in I} f_i(A) = f(A)$. Следовательно, $G \in \Omega F(f,\varphi)$ и $\mathfrak{F} \subseteq \Omega F(f,\varphi)$.

Пусть $B \in \Omega F(f,\varphi)$. Тогда $B/O_\Omega(B) \in f_i(\Omega')$ и $B/B_{\varphi(A)} \in f_i(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(B)$, $i \in I$. Поэтому $B \in \mathfrak{F}_i$, $i \in I$ и, значит, $B \in \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. Таким образом, $\Omega F(f,\varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \Omega F(f,\varphi)$.

Для расслоенных формаций утверждение доказывается аналогично. *Лемма доказана.*

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество групп. Обозначим через $\Omega F(\mathfrak{X},\varphi)$ ($F(\mathfrak{X},\varphi)$) Ω-расслоенную (расслоенную) формацию с направлением φ, порожденную множеством $\mathfrak{X}$; т.е. $\Omega F(\mathfrak{X},\varphi)$ ($F(\mathfrak{X},\varphi)$) – пересечение всех Ω-расслоенных (расслоенных) формаций с направлением φ, содержащих $\mathfrak{X}$. При фиксированном φ для формаций $\Omega F(\mathfrak{X},\varphi)$ и $F(\mathfrak{X},\varphi)$ будем также использовать следующие обозначения:

$\Omega Fr(\mathfrak{X})$ ($\Omega KF(\mathfrak{X})$, $\Omega BF(\mathfrak{X})$, $\Omega CF(\mathfrak{X})$) – Ω-свободная (соответственно Ω-каноническая, Ω-биканоническая, Ω-композиционная) формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$;

$Fr(\mathfrak{X})$ ($KF(\mathfrak{X})$, $BF(\mathfrak{X})$, $CF(\mathfrak{X})$) – свободная (соответственно каноническая, биканоническая, композиционная) формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

Теорема 4.1.5. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, $\mathfrak{F} = \Omega F(\mathfrak{X},\varphi)$ – Ω-расслоенная формация с направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным Ω-спутником f таким, что*

$f(\Omega') = form(\ G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$,

$f(A) = form(\ G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *для всех* $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ *и*

$f(A) = \varnothing$, *если* $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Класс $\mathfrak{E}$ является Ω-расслоенной формацией с направлением φ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}$. Следовательно, формация $\mathfrak{F} = \Omega F(\mathfrak{X},\varphi)$ существует. Пусть L – множество всех Ω-спутников формации $\mathfrak{F}$ и f_1 пересечение всех элементов из L. Ввиду леммы 4.1.5 $f_1 \in L$. Так как для любого $h \in L$ справедливо $f_1 \leq h$, то f_1 является единственным минимальным Ω-спутником формации $\mathfrak{F}$.

Пусть f – ΩF-функция из заключения теоремы. Проверим, что $f = f_1$. Если $M \in \mathfrak{X}$, то $M/O_\Omega(M) \in f(\Omega')$ и из $K(M) \subseteq K(\mathfrak{X})$ имеем $M/M_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(M)$. Это означает, что $M \in \Omega F(f, \varphi)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \Omega F(f, \varphi)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \Omega F(f, \varphi)$.

Покажем, что $f \leq f_1$. Пусть $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая группа $H \in \mathfrak{F}$, что $A \in \Omega \cap K(H)$ и, значит, $H/H_{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Поэтому $f_1(A) \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $A \in \Omega \cap K(G)$, то $G/G_{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Если $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{X})) \setminus (\Omega \cap K(G))$, то $G \in \mathfrak{E}_{A'} = \varphi_0(A) \subseteq \varphi(A)$ и поэтому $G/G_{\varphi(A)} \cong 1 \in f_1(A)$. Таким образом,

$$f(A) = form(\ G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X}\ ) \subseteq f_1(A).$$

Если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$, то $f(A) = \emptyset \subseteq f_1(A)$. Кроме того, из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ имеем

$$f(\Omega') = form(\ G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ ) \subseteq f_1(\Omega').$$

Следовательно, $f \leq f_1$ и $\Omega F(f, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ и $f \in L$. Поскольку f_1 – минимальный Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, то из $f \leq f_1$ получаем, что $f = f_1$. *Теорема доказана.*

Следствие 4.1.5. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, $\mathfrak{F} = F(\mathfrak{X}, \varphi)$ – расслоенная формация с направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным спутником f таким, что*

$f(A) = form(\ G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *для всех* $A \in K(\mathfrak{X})$ *и*

$f(A) = \emptyset$, *если* $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 4.1.6. *Пусть f_i – минимальный Ω-спутник (спутник) Ω-расслоенной (расслоенной) формации $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.*

Следствие 4.1.7. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда Ω-свободная (Ω-каноническая, Ω-биканоническая) формация $\mathfrak{F} = \Omega Fr(\mathfrak{X})$ (соответственно $\mathfrak{F} = \Omega KF(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F} = \Omega BF(\mathfrak{X})$) обладает единственным минимальным Ω-спутником f таким, что*

$f(\Omega') = form(\ G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$,

$f(A) = \emptyset$, *если* $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$ *и*

$f(A) = form(\ G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *для всех* $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$

(*соответственно* $f(A) = form(\ G/O_{A',A}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *для всех* $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$;

$f(A) = form(\ G/O_{A',A}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *для всех* $A \in \Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{X})$ *и*

$f(A) = form(\ G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *для всех* $A \in (\Omega \setminus \mathfrak{A}) \cap K(\mathfrak{X})\ )$.

Следствие 4.1.8. (Ведерников, Коптюх [7], лемма 5). *Пусть* $\mathfrak{X}$ – *непустой класс групп. Тогда* Ω-*композиционная формация* $\mathfrak{F} = \Omega CF(\mathfrak{X})$ *обладает единственным минимальным* Ω-*спутником* f *таким, что*

$f(\Omega') = form(\ G/O_{\Omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$,

$f(A) = form(\ G/F_A(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *для всех* $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X}\ )$ *и*

$f(A) = \emptyset$, *если* $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

Следствие 4.1.9. *Пусть* $\mathfrak{X}$ – *непустой класс групп. Тогда свободная (каноническая, биканоническая) формация* $\mathfrak{F} = Fr(\mathfrak{X})$ (*соответственно* $\mathfrak{F} = KF(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F} = BF(\mathfrak{X})$) *обладает единственным минимальным спутником* f *таким, что*

$f(A) = \emptyset$, *если* $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{X})$ *и*

$f(A) = form(\ G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *для всех* $A \in K(\mathfrak{X})$

(*соответственно* $f(A) = form(\ G/O_{A',A}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *для всех* $A \in K(\mathfrak{X})$;

$f(A) = form(\ G/O_{A',A}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *для всех* $A \in K(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{A}$ *и*

$f(A) = form(\ G/O_{A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *для всех* $A \in K(\mathfrak{X}) \setminus \mathfrak{A}\ )$.

Доказательство. Пусть $\Omega = \mathfrak{I}$. Согласно следствию 4.1.3 формация $\mathfrak{F}$ является Ω-свободной и, значит, по следствию 4.1.7 $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным Ω-спутником f_1. Пусть f – F-функция, описанная в заключении следствия. Тогда $f(A) = f_1(A)$ для всех $A \in \mathfrak{I} = \Omega$. Покажем, что $\mathfrak{F} = Fr(f)$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то для любого $A \in K(G) = \Omega \cap K(G)$ справедливо $G/O_{A'}(G) \in f_1(A) = f(A)$. Поэтому $G \in Fr(f)$ и $\mathfrak{F} \subseteq Fr(f)$. Пусть теперь $H \in Fr(f)$ и $A \in \Omega \cap K(H) = K(H)$. Тогда $H/O_{A'}(H) \in f(A) = f_1(A)$. Кроме того, из $H \in \mathfrak{E}_{\Omega}$ получаем $H/O_{\Omega}(H) \cong 1 \in f_1(\Omega')$. Таким образом, $H \in \mathfrak{F}$ и $Fr(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = Fr(f)$, т.е. f – спутник формации $\mathfrak{F}$.

Предположим, что найдется такой спутник h формации $\mathfrak{F}$, что $f(B) \not\subseteq h(B)$ для некоторого $B \in \mathfrak{I}$. Пусть h_1 – такая ΩF-функция, что $h_1(A) = h(A)$ для всех $A \in \Omega$ и $h_1(\Omega') = f_1(\Omega')$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \Omega Fr(h_1)$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_{\Omega}(G) \in f_1(\Omega') = h_1(\Omega')$ и для любого $A \in \Omega \cap K(G) = K(G)$ справедливо $G/O_{A'}(G) \in h(A) = h_1(A)$. Это означает, что $G \in \Omega Fr(h_1)$. Пусть $L \in \Omega Fr(h_1)$ и $A \in K(L)$. Тогда из $K(L) = \Omega \cap K(L)$ следует, что $L/O_{A'}(L) \in h_1(A) =$

$h(A)$. Поэтому $L \in Fr(h) = \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \Omega Fr(h_1)$. Поскольку f_1 – единственный минимальный Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, то $f_1(A) \subseteq h_1(A)$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$. Однако $f_1(B) = f(B) \not\subseteq h(B) = h_1(B)$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что f – единственный минимальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

Доказательство утверждения для канонических и биканонических формаций проводится аналогично. *Следствие доказано.*

Следствие 4.1.10. (Скиба, Шеметков [36], теорема 1). *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда композиционная формация $\mathfrak{F} = CF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным спутником f таким, что*

$f(A) = form(\ G/F_A(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ )$ *для всех* $A \in K(\mathfrak{X})$ *и*

$f(A) = \varnothing$, *если* $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{X})$.

Используя строение минимального Ω-спутника, получим некоторые свойства Ω-расслоенных формаций. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 4.1.6. *Пусть φ – r-направление Ω-расслоенной формации. Если формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с направлением φ, то $\mathfrak{F}$ является (Z_p)-расслоенной формацией с направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ – Ω-расслоенная формация с направлением φ и $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является (Z_p)-расслоенной формацией с направлением φ. Пусть f_p – такая $(Z_p)F$-функция, что $f_p(Z_p) = f(Z_p)$, $f_p((Z_p)') = \mathfrak{F}$, и $\mathfrak{F}_1 = (Z_p)F(f_p, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_{Z_p}(G) \in \mathfrak{F} = f_p((Z_p)')$. Если $Z_p \in K(G)$, то $G/G_{\varphi(Z_p)} \in f(Z_p) = f_p(Z_p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что H – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа H монолитична с монолитом $P = H^{\mathfrak{F}}$. Ввиду леммы 4.1.4 можем считать, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Тогда $H/O_\Omega(H) \cong (H/O_p(H))/(O_\Omega(H)/O_p(H)) \in f_p((Z_p)') = \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap K(H)$. Если $A \cong Z_p$, то $H/H_{\varphi(Z_p)} \in f_p(Z_p) = f(Z_p)$. Пусть $A \not\cong Z_p$. Из $H/O_p(H) \in \mathfrak{F}$ следует, что $P \subseteq O_p(H)$ и $P \in \mathfrak{E}_{A'}$. Пусть $(H/P)_{\varphi(A)} := T/P$. Тогда $T \in \mathfrak{E}_{A'} \cdot \varphi(A) = \varphi(A)$ и поэтому $T = H_{\varphi(A)}$. Отсюда получаем $H/H_{\varphi(A)} \cong (H/P)/(H/P)_{\varphi(A)} \in f(A)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. *Лемма доказана.*

Замечание 4.1.5. Лемма 4.1.6 не допускает обращения. Действительно, в силу примера 4.1.1, формация $\mathfrak{F} = formA$, где A – простая неабелева группа, не является Ω-канонической формацией для $\Omega = (A)$. Однако по лемме 4.1.3 $\mathfrak{F}$ является (Z_p)-канонической для любого простого числа p, и в частности, (Z_p)-канонической для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.

Теорема 4.1.6. *Пусть φ – nr-направление Ω-расслоенной формации. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является (Z_p)-расслоенной формацией с направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. *Необходимость* следует из леммы 4.1.6.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = (Z_p)F(b_p, \varphi)$ – (Z_p)-расслоенная формация с направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. В силу леммы 4.1.4 и теоремы 4.1.5 можем считать, что $b_p((Z_p)') = \mathfrak{F}$ и $b_p(Z_p) = form(\ G/G_{\varphi(Z_p)} \mid G \in \mathfrak{F}\ )$ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Пусть b – такая ΩF-функция, что $b(\Omega') = \mathfrak{F}$, $b(Z_p) = b_p(Z_p)$ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$, $b(Z_p) = \emptyset$ для всех $Z_p \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F})$, $b(A) = \mathfrak{F}$ для всех $A \in \Omega \setminus \mathfrak{A}$, и $\mathfrak{B} = \Omega F(b, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{F} = b(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap K(G)$. Если $A \cong Z_p$, то $G/G_{\varphi(Z_p)} \in b_p(Z_p) = b(Z_p)$. Если $A \notin \mathfrak{A}$, то $G/G_{\varphi(A)} \in \mathfrak{F} = b(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$.

Предположим, что $B \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{F}$ и B – группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда группа B монолитична с монолитом $R = B^{\mathfrak{F}}$. Пусть $K(R) = (A)$. Поскольку $B/O_\Omega(B) \in b(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $R \subseteq O_\Omega(B)$ и $A \in \Omega$. Так как $B/B_{\varphi(A)} \in b(A)$, то $b(A) \neq \emptyset$. Пусть A – неабелева группа. Так как φ – n-направление, то $A \notin \varphi(A)$ и $B_{\varphi(A)} = 1$. Отсюда следует, что $B \cong B/B_{\varphi(A)} \in b(A) = \mathfrak{F}$, что невозможно. Поэтому $A \cong Z_p$. Тогда $B/B_{\varphi(Z_p)} \in b(Z_p) = b_p(Z_p)$. Кроме того, $B/O_p(B) \cong (B/R)/(O_p(B)/R) \in \mathfrak{F} = b_p((Z_p)')$. Таким образом, $B \in (Z_p)F(b_p, \varphi) = \mathfrak{F}$. Противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. *Теорема доказана.*

Следствие 4.1.11. *Пусть φ – nr-направление Ω-расслоенной формации и $\Omega_1 = \Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является Ω_1-расслоенной формацией с направлением φ.*

Доказательство. По теореме 4.1.6 формация $\mathfrak{F}$ Ω-расслоенна с направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является (A)-расслоенной формацией с направлением φ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F}) = \Omega_1 \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F})$, но это, согласно теореме 4.1.6, выполняется тогда и только тогда, когда формация $\mathfrak{F}$ Ω_1-расслоенна с направлением φ. *Следствие доказано.*

Следствие 4.1.12. *Пусть Ω – непустой класс простых групп. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-свободной (Ω-биканонической, Ω-композиционной) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является (Z_p)-свободной (соответственно (Z_p)-биканонической, (Z_p)-композиционной) формацией для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.*

В.А. Ведерников в [79] получил описание строения максимального внутреннего Ω-спутника Ω-расслоенной формации. Напомним, что Ω-спутник f Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ называется внутренним Ω-спутником, если $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $A \in \{\Omega'\} \cup \Omega$. Следуя [50], введем определение полувнутреннего Ω-спутника Ω-расслоенной формации.

Определение 4.1.10. Ω-спутник f Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ назовем *полувнутренним Ω-спутником*, если из $f(A) \neq \mathfrak{E}$ следует, что $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$, для всех $A \in \{\Omega'\} \cup \Omega$. Аналогично, f – *полувнутренний спутник* расслоенной формации $\mathfrak{F}$, если из $f(A) \neq \mathfrak{E}$ следует, что $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$, для любой группы $A \in \mathfrak{I}$.

Максимальным полувнутренним Ω-спутником (спутником) Ω-расслоенной (расслоенной) формации $\mathfrak{F}$ называется максимальный элемент множества всех полувнутренних Ω-спутников (спутников) формации $\mathfrak{F}$. Рассмотрим строение максимального полувнутреннего Ω-спутника Ω-расслоенной формации с $b_A r$-направлением, где A – некоторая простая группа из Ω.

Теорема 4.1.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – Ω-расслоенная формация с $b_A r$-направлением φ, где $A \in \Omega$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным полувнутренним Ω-спутником f, удовлетворяющим условию: если $f(A) \neq \mathfrak{E}$, то $f(A) = \mathfrak{E}_A h(A)$, где h – произвольный полувнутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Ввиду леммы 4.1.4 множество всех полувнутренних Ω-спутников формации $\mathfrak{F}$ непусто. Пусть h – произвольный полувнутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Так как φ – b_A-направление, то по лемме 6(2) [79] формация $\mathfrak{F}$ обладает Ω-спутником f таким, что $f(A) = \mathfrak{E}_A h(A)$ и $f(B) = h(B)$, для всех $B \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus (A))$.

Покажем, что f является полувнутренним Ω-спутником формации $\mathfrak{F}$. Действительно, для любого $B \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \backslash (A))$ либо $f(B) = h(B) = \mathfrak{E}$, либо $f(B) = h(B) \subseteq \mathfrak{F}$. Далее, если $h(A) = \mathfrak{E}$, то $f(A) = \mathfrak{E}$. Пусть $h(A) \neq \mathfrak{E}$. Это, согласно определению 4.1.10, означает, что $h(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, $f(A) \nsubseteq \mathfrak{F}$ и G – группа наименьшего порядка из $f(A) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G является монолитической группой с монолитом $P = G^{\mathfrak{F}}$.

Покажем, что $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$. Если $O_A(G) = 1$, то из $G \in f(A) = \mathfrak{E}_A h(A)$ следует, что $G \in h(A)$, и ввиду $h(A) \subseteq \mathfrak{F}$ получаем $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, $O_A(G) \neq 1$. Тогда $G/O_A(G) \cong (G/P)/(O_A(G)/P) \in \mathfrak{F}$.

Поскольку $G \in f(A)$, то $G/G_{\varphi(A)} \in f(A) = \mathfrak{E}_A h(A)$. Так как согласно лемме 6(1) [79] $O_A(G/G_{\varphi(A)}) = 1$, то $G/G_{\varphi(A)} \cong (G/G_{\varphi(A)})/O_A(G/G_{\varphi(A)}) \in h(A)$. Тогда по лемме 2(1) [79] $G \in \Omega F(h, \varphi) = \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что f является полувнутренним Ω-спутником формации $\mathfrak{F}$. Из строения Ω-спутника f вытекает, что $h \leq f$. Поэтому f – единственный максимальный полувнутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. *Теорема доказана.*

Следствие 4.1.13. *Пусть $\mathfrak{F}$ – расслоенная формация с $b_A r$-направлением φ, где $A \in \mathfrak{I}$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным полувнутренним спутником f, удовлетворяющим условию: если $f(A) \neq \mathfrak{E}$, то $f(A) = \mathfrak{E}_A h(A)$, где h – произвольный полувнутренний спутник формации $\mathfrak{F}$.*

Все основные результаты параграфа 4.1 опубликованы в [83], [92].

§ 4.2. Максимальные подформации Ω-расслоенных формаций

Параграфы 4.2 – 4.4 посвящены применению Ω-расслоенных формаций к изучению подформационного строения формаций конечных групп.

В данном параграфе рассмотрим максимальные подформации Ω-расслоенных формаций, а именно, установим условия, при которых однопорожденная Ω-расслоенная формация имеет единственную максимальную Ω-расслоенную подформацию.

Теорема 4.2.1. *Пусть φ – br-направление Ω-расслоенной формации такое, что $\varphi \leq \varphi_3$, $G = [P]H$ – монолитическая группа с монолитом P, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $Z_p \in \Omega$, H – f-базисная группа и $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация из $formH$. Тогда Ω-расслоенная формация $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \varphi)$ обладает единственной максимальной Ω-расслоенной подформацией с направлением φ и Ω-спутником h, имеющим следующее строение:*

$$h(\Omega') = form(G/O_\Omega(G)),$$
$$h(Z_p) = \mathfrak{M},$$
$$h(A) = form(G/G_{\varphi(A)}) \text{ для всех } A \in (\Omega \cap K(G)) \setminus (Z_p),$$
$$h(A) = \varnothing, \text{ если } A \in \Omega \setminus K(G).$$

Доказательство. Пусть f – минимальный Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H} := \Omega F(h, \varphi)$, где h – ΩF-функция из заключения теоремы. Согласно теореме 4.1.5 $f(A) = h(A)$ для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus (Z_p))$ и $f(Z_p) = form(G/G_{\varphi(Z_p)})$. Поскольку φ – b-направление, то $\varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p)$ и $P \subseteq G_{\varphi(Z_p)}$. С другой стороны, из того, что $\varphi \leq \varphi_3$ и $P = C_G(P)$, получаем $G_{\varphi(Z_p)} \subseteq F_{Z_p}(G) \subseteq P$. Таким образом, $G_{\varphi(Z_p)} = P$ и $f(Z_p) = formH$. Из строения Ω-спутника h следует, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$, b – ее минимальный Ω-спутник. Согласно следствию 4.1.6 $b \leq f$. Тогда для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus (Z_p))$ справедливо $b(A) \subseteq f(A) = h(A)$. Предположим, что $b(Z_p) = f(Z_p)$. Тогда $G/G_{\varphi(Z_p)} \in b(Z_p)$. Ввиду равенства $G_{\varphi(Z_p)} = P$ по следствию 3(1) [79] справедливо $G \in \mathfrak{N}_p b(Z_p) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Поэтому $b(Z_p) \subset f(Z_p) = formH$ и по условию леммы $b(Z_p) \subseteq \mathfrak{M} = h(Z_p)$. Таким образом, $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$. *Теорема доказана.*

В качестве следствий из теоремы 4.2.1 получаем результаты о максимальных подформациях Ω-биканонических и Ω-композиционных формаций.

Следствие 4.2.1. *Пусть $G = [P]H$ – монолитическая группа с монолитом P, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $Z_p \in \Omega$, H – f-базисная группа и $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация из $formH$. Тогда Ω-биканоническая формация $\mathfrak{F} = \Omega BF(G)$ обладает единственной максимальной Ω-биканонической под-*

формацией с Ω*-спутником* h*, имеющим следующее строение:*

$h(\Omega') = form(G/O_{\Omega}(G))$,

$h(Z_p) = \mathfrak{M}$,

$h(A) = form(G/O_{A'}(G))$ *для всех неабелевых* $A \in (\Omega \cap K(G)) \backslash (Z_p)$,

$h(A) = form(G/O_{A',A}(G))$ *для всех абелевых* $A \in (\Omega \cap K(G)) \backslash (Z_p)$,

$h(A) = \emptyset$*, если* $A \in \Omega \setminus K(G)$*.*

Следствие 4.2.2. *Пусть* $G = [P]H$ *– монолитическая группа с монолитом* P*, где* $P = C_G(P)$ *–* p*-группа,* $Z_p \in \Omega$*,* H *–* f*-базисная группа и* $\mathfrak{M}$ *– максимальная подформация из* $formH$*. Тогда* Ω*-композиционная формация* $\mathfrak{F} = \Omega CF(G)$ *обладает единственной максимальной* Ω*-композиционной подформацией с* Ω*-спутником* h*, имеющим следующее строение:*

$h(\Omega') = form(G/O_{\Omega}(G))$,

$h(Z_p) = \mathfrak{M}$,

$h(A) = form(G/F_A(G))$ *для всех* $A \in (\Omega \cap K(G)) \setminus (Z_p)$,

$h(A) = \emptyset$*, если* $A \in \Omega \setminus K(G)$*.*

Следствие 4.2.3. *Пусть* φ *–* br*-направление расслоенной формации такое, что* $\varphi \leq \varphi_3$*,* $G = [P]H$ *– монолитическая группа с монолитом* P*, где* $P = C_G(P)$ *–* p*-группа,* H *–* f*-базисная группа и* $\mathfrak{M}$ *– максимальная подформация из* $formH$*. Тогда расслоенная формация* $\mathfrak{F} = F(G,\varphi)$ *обладает единственной максимальной расслоенной подформацией с направлением* φ *и спутником* h*, имеющим следующее строение:*

$h(Z_p) = \mathfrak{M}$,

$h(A) = form(G/G_{\varphi(A)})$ *для всех* $A \in K(G) \setminus (Z_p)$,

$h(A) = \emptyset$*, если* $A \in \mathfrak{I} \setminus K(G)$*.*

Следствие 4.2.4. *Пусть* $G = [P]H$ *– монолитическая группа с монолитом* P*, где* $P = C_G(P)$ *–* p*-группа,* H *–* f*-базисная группа и* $\mathfrak{M}$ *– максимальная подформация из* $formH$*. Тогда биканоническая формация* $\mathfrak{F} = BF(G)$ *обладает единственной максимальной биканонической подформацией со спутником* h*, имеющим следующее строение:*

$h(Z_p) = \mathfrak{M}$,

$h(A) = form(G/O_{A'}(G))$ *для всех неабелевых* $A \in K(G) \backslash (Z_p)$,

$h(A) = form(G/O_{A',A}(G))$ *для всех абелевых* $A \in K(G) \backslash (Z_p)$,

$h(A) = \emptyset$, *если* $A \in \mathfrak{I} \setminus K(G)$.

Следствие 4.2.5. *Пусть* $G = [P]H$ *– монолитическая группа с монолитом* P, *где* $P = C_G(P)$ *–* p*-группа,* H *–* f*-базисная группа и* $\mathfrak{M}$ *– максимальная подформация из* $formH$. *Тогда композиционная формация* $\mathfrak{F} = CF(G)$ *обладает единственной максимальной композиционной подформацией с спутником* h, *имеющим следующее строение*:

$h(Z_p) = \mathfrak{M}$,

$h(A) = form(G/F_A(G))$ *для всех* $A \in K(G) \setminus (Z_p)$,

$h(A) = \emptyset$, *если* $A \in \mathfrak{I} \setminus K(G)$.

Теорема 4.2.2. *Пусть* φ *–* r*-направление* Ω*-расслоенной формации такое, что* $\varphi \leq \varphi_3$, G *– монолитическая группа с неабелевым монолитом* P, $K(P) \subseteq \Omega$. *Тогда* Ω*-расслоенная формация* $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \varphi)$ *обладает единственной максимальной* Ω*-расслоенной подформацией с направлением* φ *и* Ω*-спутником* h, *имеющим следующее строение*:

$h(\Omega') = form(G/O_\Omega(G))$,

$h(A) = form(G/P)$, *если* $A \in K(P)$,

$h(A) = form(G/G_{\varphi(A)})$ *для всех* $A \in (\Omega \cap K(G)) \setminus K(P)$,

$h(A) = \emptyset$, *если* $A \in \Omega \setminus K(G)$.

Доказательство. Пусть f – минимальный Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H} := \Omega F(h, \varphi)$, где h – ΩF-функция из заключения теоремы. Поскольку φ является r-направлением, то согласно теореме 4.1.5 $f(A) = h(A)$ для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus K(P))$. Пусть $A \in K(P)$. Так как $\varphi \leq \varphi_3$, то $G_{\varphi(A)} \subseteq G_{\varphi_3(A)} = O_{A'}(G)$ и поэтому $P \not\subseteq G_{\varphi(A)}$. Следовательно, $G_{\varphi(A)} = 1$ и $f(A) = formG$. По лемме 18.2 [50] $h(A) = form(G/P) \subset f(A)$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$ и b – ее минимальный Ω-спутник. Согласно следствию 4.1.6 $b \leq f$. Тогда для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus K(P))$ справедливо $b(A) \subseteq f(A) = h(A)$. Пусть $A \in K(P)$. Если $b(A) = f(A)$, то $G \in formG = b(A) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Поэтому $b(A) \subset f(A)$ и ввиду леммы 18.2 [50] $b(A) \subseteq form(G/P) = h(A)$. Таким образом, $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$. *Теорема доказана.*

В качестве следствий из теоремы 4.2.2 получаем результаты о максимальных подформациях Ω-биканонических и Ω-композиционных формаций.

Следствие 4.2.6. *Пусть G – монолитическая группа с неабелевым монолитом P, $K(P) \subseteq \Omega$. Тогда Ω-биканоничская формация $\mathfrak{F} = \Omega BF(G)$ обладает единственной максимальной Ω-биканонической подформацией с Ω-спутником h, имеющим следующее строение:*

$$h(\Omega') = form(G/O_\Omega(G)),$$
$$h(A) = form(G/P), \text{ если } A \in K(P),$$
$$h(A) = form(G/O_{A'}(G)) \text{ для всех неабелевых } A \in (\Omega \cap K(G)) \backslash (Z_p),$$
$$h(A) = form(G/O_{A',A}(G)) \text{ для всех абелевых } A \in (\Omega \cap K(G)) \backslash (Z_p),$$
$$h(A) = \varnothing, \text{ если } A \in \Omega \setminus K(G).$$

Следствие 4.2.7. *Пусть G – монолитическая группа с неабелевым монолитом P, $K(P) \subseteq \Omega$. Тогда Ω-композиционная формация $\mathfrak{F} = \Omega CF(G)$ обладает единственной максимальной Ω-композиционной подформацией с Ω-спутником h, имеющим следующее строение:*

$$h(\Omega') = form(G/O_\Omega(G)),$$
$$h(A) = form(G/P), \text{ если } A \in K(P),$$
$$h(A) = form(G/F_A(G)) \text{ для всех } A \in (\Omega \cap K(G)) \setminus K(P),$$
$$h(A) = \varnothing, \text{ если } A \in \Omega \setminus K(G).$$

Следствие 4.2.8. *Пусть φ – r-направление расслоенной формации такое, что $\varphi \leq \varphi_3$, G – монолитическая группа с неабелевым монолитом P. Тогда расслоенная формация $\mathfrak{F} = F(G, \varphi)$ обладает единственной максимальной расслоенной подформацией с направлением φ и спутником h, имеющим следующее строение:*

$$h(A) = form(G/P), \text{ если } A \in K(P),$$
$$h(A) = form(G/G_{\varphi(A)}) \text{ для всех } A \in K(G) \setminus K(P),$$
$$h(A) = \varnothing, \text{ если } A \in \mathfrak{I} \setminus K(G).$$

Следствие 4.2.9. *Пусть G – монолитическая группа с неабелевым монолитом P. Тогда биканоничская формация $\mathfrak{F} = BF(G)$ обладает единственной максимальной биканонической подформацией со спутником h, имеющим* *следующее строение*:

$h(A) = form(G/P)$, *если* $A \in K(P)$,

$h(A) = form(G/O_{A'}(G))$ *для всех неабелевых* $A \in K(G) \backslash K(P)$,

$h(A) = form(G/O_{A',A}(G))$ *для всех абелевых* $A \in K(G) \backslash K(P)$,

$h(A) = \emptyset$, *если* $A \in \mathfrak{I} \backslash K(G)$.

Следствие 4.2.10. *Пусть G – монолитическая группа с неабелевым монолитом P. Тогда композиционная формация $\mathfrak{F} = CF(G)$ обладает единственной максимальной композиционной подформацией со спутником h, имеющим следующее строение*:

$h(A) = form(G/P)$, *если* $A \in K(P)$,

$h(A) = form(G/F_A(G))$ *для всех* $A \in K(G) \backslash K(P)$,

$h(A) = \emptyset$, *если* $A \in \mathfrak{I} \setminus K(G)$.

Все основные результаты параграфа 4.2 опубликованы в [86].

§ 4.3. Свойства τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций

Определение 4.3.1. Пусть φ – некоторая FR-функция. Подгрупповой функтор τ назовем

φ-радикальным, если для любой группы G и любой $N \in \tau(G)$ справедливо равенство $G_{\varphi(A)} \cap N = N_{\varphi(A)}$ для всех $A \in \mathfrak{I}$;

Ω-радикальным, если для любой группы G и любой $N \in \tau(G)$ справедливо равенство $O_\Omega(G) \cap N = O_\Omega(N)$;

$\Omega\varphi$-радикальным, если он является Ω-радикальным и φ-радикальным;

замкнутым относительно композиционных факторов, если для любой группы G и любой $N \in \tau(G)$ справедливо включение $K(N) \subseteq K(G)$.

Замечание 4.3.1. Примерами $\Omega\varphi$-радикальных подгрупповых функторов, замкнутых относительно композиционных факторов, являются нормальный подгрупповой функтор S_n, субнормальный подгрупповой функтор sn.

Установим взаимосвязь между τ-замкнутостью Ω-расслоенной формации и τ-замкнутостью ее Ω-спутника.

Теорема 4.3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – Ω-расслоенная формация с br-направлением φ, $\varphi \leq \varphi_3$, τ – регулярный $\Omega\varphi$-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый* *относительно композиционных факторов. Формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним τ-замкнутым Ω-спутником.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая формация. Поскольку φ – br-направление и $\varphi \leq \varphi_3$, то по следствию 5.8 [9] $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний Ω-спутник h, причем $h(A) = \mathfrak{F}$ для всех $A \in (\Omega \setminus \mathfrak{A}) \cup \{\Omega'\}$ и $h(Z_p) = \mathfrak{N}_p f(Z_p)$ для всех $Z_p \in \Omega$, где f – произвольный внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Поэтому формация $h(A)$ является τ-замкнутой для любой группы $A \in (\Omega \setminus \mathfrak{A}) \cup \{\Omega'\}$.

Покажем, что $h(A)$ – τ-замкнутая формация для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$. Предположим, что найдется такая группа $Z_p \in \Omega$, что формация $h(Z_p)$ не является τ-замкнутой. Пусть G – группа наименьшего порядка из $h(Z_p)$, обладающая такой подгруппой N, что $N \in \tau(G)$ и $N \notin h(Z_p)$. Тогда $G \neq 1$. Так как τ – регулярный подгрупповой функтор, то, рассуждая как и при доказательстве теоремы 3.3.1, получим, что G – монолитическая группа с монолитом M, причем $NM/M \cong N/N \cap M \in h(Z_p)$.

Предположим, что $O_p(G) \neq 1$. Тогда $M \subseteq O_p(G)$, $N \cap M$ – p-группа и $N \in \mathfrak{N}_p h(Z_p) = h(Z_p)$. Противоречие. Следовательно, $O_p(G) = 1$. Согласно лемме 18.8 [50] существует точный неприводимый $F_p[G]$-модуль K. Пусть $T = [K]G$. Тогда группа T монолитична с монолитом $K = C_T(K)$. Поскольку φ является b-направлением и $\varphi \leq \varphi_3$, то $K \subseteq T_{\varphi(Z_p)} \subseteq T_{\varphi_3(Z_p)} = F_{Z_p}(T) \subseteq C_T(K) = K$. Следовательно, $T_{\varphi(Z_p)} = K$. Из $T/K \cong G \in h(Z_p)$ получаем $T \in \mathfrak{N}_p h(Z_p) = h(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$ и ввиду τ-замкнутости формации $\mathfrak{F}$ имеем $\tau(T) \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем, что $NK \in \tau(T)$. Так как $T/K \cong G$, то существует изоморфизм $\alpha : G \to T/K$. Поскольку τ – подгрупповой функтор и $N \in \tau(G)$, то $NK/K = N^\alpha \in (\tau(G))^\alpha = \tau(G^\alpha) = \tau(T/K)$. Так как τ – регулярный подгрупповой функтор, то $NK \in \tau(T)$ и, значит, $NK \in \mathfrak{F}$. Поэтому $NK/(NK)_{\varphi(Z_p)} \in h(Z_p)$. Поскольку τ – φ-радикальный подгрупповой функтор, то $(NK)_{\varphi(Z_p)} = T_{\varphi(Z_p)} \cap NK = K \cap NK = K$ и $NK/(NK)_{\varphi(Z_p)} = NK/K \cong N \in h(Z_p)$. Противоречие. Таким образом, формация $h(A)$ является τ-замкнутой для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ и поэтому h – τ-замкнутый Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$.

Достаточность. Пусть f – τ-замкнутый Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{F}$

и $N \in \tau(G)$. Покажем, что $N \in \mathfrak{F}$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$. Поскольку $N \in \tau(G)$ и τ – подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, то $K(N) \subseteq K(G)$ и, значит, $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(N)$. Пусть $A \in \Omega \cap K(N)$. Из $N \in \tau(G)$ ввиду регулярности подгруппового функтора τ получаем $NG_{\varphi(A)}/G_{\varphi(A)} \in \tau(G/G_{\varphi(A)})$. Отсюда в силу τ-замкнутости формации $f(A)$ следует, что $NG_{\varphi(A)}/G_{\varphi(A)} \cong N/(N \cap G_{\varphi(A)}) \in f(A)$. Так как подгрупповой функтор τ является φ-радикальным и $N \in \tau(G)$, то $N \cap G_{\varphi(A)} = N_{\varphi(A)}$ и $N/(N \cap G_{\varphi(A)}) = N/N_{\varphi(A)} \in f(A)$. Далее, из $G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$, $NO_\Omega(G)/O_\Omega(G) \in \tau(G/O_\Omega(G))$, Ω-радикальности подгруппового функтора τ и τ-замкнутости формации $f(\Omega')$ имеем $N/O_\Omega(N) = N/(N \cap O_\Omega(G)) \cong NO_\Omega(G)/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$. Таким образом, по определению 4.1.2 $N \in \mathfrak{F}$ и, значит, формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой. *Теорема доказана.*

Следствие 4.3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – расслоенная формация с $\mathfrak{br}$-направлением φ, $\varphi \leq \varphi_3$, τ – регулярный φ-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов. Формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним τ-замкнутым спутником.*

Следствие 4.3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая Ω-расслоенная (расслоенная) формация с $\mathfrak{br}$-направлением φ, $\varphi \leq \varphi_3$, τ – регулярный $\Omega\varphi$-радикальный (φ-радикальный) подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов. Тогда максимальный внутренний Ω-спутник (спутник) формации $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутым.*

Через $\tau\Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ ($\tau F(\mathfrak{X}, \varphi)$) обозначим τ-замкнутую Ω-расслоенную (расслоенную) формацию с направлением φ, порожденную множеством групп $\mathfrak{X}$; через $\Omega F^\tau(\mathfrak{X}, \varphi)$ ($F^\tau(\mathfrak{X}, \varphi)$) – Ω-расслоенную (расслоенную) формацию с направлением φ, обладающую хотя бы одним τ-замкнутым Ω-спутником (спутником), порожденную множеством групп $\mathfrak{X}$.

Следствие 4.3.3. *Пусть φ – $\mathfrak{br}$-направление Ω-расслоенной (расслоенной) формации, $\varphi \leq \varphi_3$, τ – регулярный $\Omega\varphi$-радикальный (φ-радикальный) подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов. Тогда $\Omega\tau F(\mathfrak{X}, \varphi) = \Omega F^\tau(\mathfrak{X}, \varphi)$ ($\tau F(\mathfrak{X}, \varphi) = F^\tau(\mathfrak{X}, \varphi)$).*

Доказательство следующей леммы проводится аналогично доказательству теоремы 4.1.5.

Лемма 4.3.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, φ – такое направление Ω-расслоенной формации, что $\varphi_0 \le \varphi$, τ – регулярный подгрупповой функтор. Тогда формация $\mathfrak{F} = \Omega F^{\tau}(\mathfrak{X}, \varphi)$ обладает единственным минимальным τ-замкнутым Ω-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \tau form(\ G/O_{\Omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\ ),$$
$$f(A) = \tau form(\ G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X}\ ) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X}) \text{ и}$$
$$f(A) = \emptyset, \text{ если } A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X}).$$

Следствие 4.3.4. *Пусть τ – регулярный подгрупповой функтор, f_i – минимальный τ-замкнутый Ω-спутник (спутник) Ω-расслоенной (расслоенной) формации $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ, где $\varphi_0 \le \varphi$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \le f_2$.*

Для τ-замкнутой Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ рассмотрим свойства τ-минимальных не $\mathfrak{F}$-групп.

Теорема 4.3.2. *Пусть φ – r-направление Ω-расслоенной формации, τ – регулярный φ-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая Ω-расслоенная формация с направлением φ и Ω-спутником f, G – группа, $A \in \Omega \cap K(G)$, $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ и $HG_{\varphi(A)} \ne G$ для любой собственной τ-подгруппы H группы G. Если $G/G_{\varphi(A)}$ – τ-минимальная не $f(A)$-группа, то G является τ-минимальной не $\mathfrak{F}$-группой.*

Доказательство. Пусть $G/G_{\varphi(A)}$ – τ-минимальная не $f(A)$-группа. Тогда $G/G_{\varphi(A)} \notin f(A)$ и по определению Ω-расслоенной формации $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть H – собственная τ-подгруппа группы G. Покажем, что $H \in \mathfrak{F}$.

Установим, что $H/O_A(H) \in \mathfrak{F}$. Поскольку $H \in \tau(G)$, то ввиду регулярности подгруппового функтора τ получаем, что $HO_A(G)/O_A(G) \in \tau(G/O_A(G))$. Так как по условию теоремы $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая формация, то $HO_A(G)/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ и, значит, $H/H \cap O_A(G) \in \mathfrak{F}$. Поскольку подгрупповой функтор τ замкнут относительно композиционных факторов, то $H \cap O_A(G)$ – нормальная (A)-подгруппа группы H и $H/O_A(H) \cong (H/H \cap O_A(G))/(O_A(H)/H \cap O_A(G)) \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $H/O_A(H) \in \mathfrak{F}$.

Покажем, что $H/H_{\varphi(A)} \in f(A)$. Из $H \in \tau(G)$ и регулярности подгруппового функтора τ получаем, что $HG_{\varphi(A)}/G_{\varphi(A)} \in \tau(G/G_{\varphi(A)})$. Если $HG_{\varphi(A)}/G_{\varphi(A)} = G/G_{\varphi(A)}$, то $HG_{\varphi(A)} = G$, что противоречит условию. Поэтому $HG_{\varphi(A)}/G_{\varphi(A)} < G/G_{\varphi(A)}$. Так как $G/G_{\varphi(A)}$ – τ-минимальная не $f(A)$-группа, то $HG_{\varphi(A)}/G_{\varphi(A)} \cong H/H \cap G_{\varphi(A)} \in f(A)$. Тогда в силу φ-радикальности подгруппового функтора τ справедливо $H/H_{\varphi(A)} \in f(A)$.

Поскольку направление φ формации $\mathfrak{F}$ является r-направлением, то по лемме 2(1) [79] получаем, что $H \in \mathfrak{F}$. Следовательно, G – τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. *Теорема доказана.*

Следствие 4.3.5. *Пусть φ – r-направление расслоенной формации, τ – регулярный φ-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая расслоенная формация с r-направлением φ и спутником f, G – группа, $A \in K(G)$, $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ и $HG_{\varphi(A)} \neq G$ для любой собственной τ-подгруппы H группы G. Если $G/G_{\varphi(A)}$ – τ-минимальная не $f(A)$-группа, то G – τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа.*

Теорема 4.3.3. *Пусть φ – r-направление Ω-расслоенной формации, τ – регулярный $\Omega\varphi$-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая Ω-расслоенная формация с направлением φ и минимальным Ω-спутником f, $\Omega \subseteq K(\mathfrak{F})$. Если G – τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то справедливо по крайней мере одно из следующих утверждений*:

1) *$G/O_\Omega(G)$ – τ-минимальная не $f(\Omega')$-группа*;

2) *$G/G_{\varphi(A)}$ – τ-минимальная не $f(A)$-группа для некоторого $A \in \Omega \cap K(G)$.*

Доказательство. Пусть G – τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Если $G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, $G/O_\Omega(G) \notin f(\Omega')$ или $G/G_{\varphi(A)} \notin f(A)$ для некоторого $A \in \Omega \cap K(G)$.

Рассмотрим случай, когда $G/O_\Omega(G) \notin f(\Omega')$. Пусть $H/O_\Omega(G)$ – собственная τ-подгруппа группы $G/O_\Omega(G)$. Установим, что $H/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$. Так как $H/O_\Omega(G) < G/O_\Omega(G)$, то $H < G$ и ввиду регулярности подгруппового функтора τ справедливо $H \in \tau(G)$. Поскольку G – τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $H \in \mathfrak{F}$ и, значит, $H/O_\Omega(H) \in f(\Omega')$. Так как подгрупповой функтор τ является Ω-радикальным, то $H \cap O_\Omega(G) = O_\Omega(H)$. Следовательно, $H/O_\Omega(H) = H/H \cap O_\Omega(G) \cong HO_\Omega(G)/O_\Omega(G) = H/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$. Таким образом, $G/O_\Omega(G)$ – τ-минимальная не $f(\Omega')$-группа.

Теперь рассмотрим случай, когда $G/G_{\varphi(A)} \notin f(A)$ для некоторого $A \in \Omega \cap K(G)$. Пусть $L/G_{\varphi(A)} \in \tau(G/G_{\varphi(A)})$ и $L/G_{\varphi(A)} < G/G_{\varphi(A)}$. Покажем, что $L/G_{\varphi(A)} \in f(A)$. Ввиду регулярности подгруппового функтора τ L является собственной τ-подгруппой группы G. Так как G – τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $L \in \mathfrak{F}$ и, значит, $L/L_{\varphi(B)} \in f(B)$ для любого $B \in \Omega \cap K(L)$. Пусть $A \in K(L)$. Так как подгрупповой функтор τ является φ-радикальным, то $L \cap G_{\varphi(A)} = L_{\varphi(A)}$ и $L/L_{\varphi(A)} = L/L \cap G_{\varphi(A)} \cong LG_{\varphi(A)}/G_{\varphi(A)} = L/G_{\varphi(A)} \in f(A)$. Пусть теперь $A \notin K(L)$. Поскольку направление φ формации $\mathfrak{F}$ является r-направлением, то $L \in \mathfrak{E}_{A'} \subseteq \mathfrak{E}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ и, значит, $L_{\varphi(A)} = L$. Так как f – минимальный Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$ и $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$, то по теореме 4.1.5 $f(A) \neq \emptyset$ и поэтому $L/G_{\varphi(A)} = LG_{\varphi(A)}/G_{\varphi(A)} \cong L/L \cap G_{\varphi(A)} = L/L_{\varphi(A)} \cong 1 \in f(A)$. Таким образом, в этом случае $G/G_{\varphi(A)}$ – τ-минимальная не $f(A)$-группа. *Теорема доказана.*

Следствие 4.3.6. *Пусть φ – r-направление расслоенной формации, τ – регулярный φ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая расслоенная формация с направлением φ и минимальным спутником f, $K(\mathfrak{F}) = \mathfrak{I}$. Если G – τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $G/G_{\varphi(A)}$ – τ-минимальная не $f(A)$-группа для некоторого $A \in K(G)$.*

Все основные результаты параграфа 4.3 опубликованы в [91], [125]. Основные результаты данных работ принадлежат М.М. Сорокиной.

§ 4.4. Критические τ-замкнутые Ω-расслоенные формации

В данном параграфе рассмотрим τ-замкнутые Ω-расслоенные формации с br-направлением $\varphi \leq \varphi_3$. Центральными результатами здесь являются теоремы 4.4.1 и 4.4.2, в которых для данного вида формаций решается проблема Л.А. Шеметкова [48] изучения $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций (Проблема **(C)**).

Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп, τ – подгрупповой функтор. $\mathfrak{H}_\theta$-критическую формацию назовем *$\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi}$-критической* (*$\mathfrak{H}_{\tau\varphi}$-критической*) формацией, если θ – совокупность всех τ-замкнутых Ω-расслоенных (расслоенных) формаций с направлением φ.

Определение 4.4.1. Пусть τ – подгрупповой функтор, φ – направление Ω-расслоенной формации. Формационно критическую группу G назовем *$\tau\Omega\varphi$-базисной* (*$\tau\varphi$-базисной*) группой, если формация $\tau\Omega F(G,\varphi)$ ($\tau F(G,\varphi)$) содержит единственную максимальную τ-замкнутую Ω-расслоенную (расслоенную) подформацию с направлением φ.

Рассмотрим критические τ-замкнутые Ω-расслоенные формации с br-направлением $\varphi \leq \varphi_3$.

Теорема 4.4.1. *Пусть φ – br-направление Ω-расслоенной формации, $\varphi \leq \varphi_3$, τ – регулярный $\Omega\varphi$-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая Ω-расслоенная формация с направлением φ и максимальным внутренним Ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая Ω-расслоенная формация с направлением φ и минимальным τ-замкнутым Ω-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi}$-критической, то $\mathfrak{F} = \tau\Omega F(G,\varphi)$, где G – монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем если $K(P) \subseteq \Omega$, то формация $f(A)$ является $h(A)_\tau$-критической для $A \in K(P)$, а если $K(P) \not\subseteq \Omega$, то $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_\tau$-критической формацией.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi}$-критическая формация и G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G является монолитической группой с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку $\tau\Omega F(G,\varphi) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\tau\Omega F(G,\varphi) \not\subseteq \mathfrak{H}$, то в силу $\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi}$-критичности формации $\mathfrak{F}$ получаем $\tau\Omega F(G,\varphi) = \mathfrak{F}$.

Покажем, что G – τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа. Пусть $H \in \tau(G)$ и $H \neq G$. Достаточно установить, что $H \in \mathfrak{H}$. Действительно, так как $H \in \tau(G)$, то ввиду τ-замкнутости формации $\mathfrak{F}$ имеем $H \in \mathfrak{F}$. Тогда в силу $|H| < |G|$ справедливо $H \in \mathfrak{H}$. Следовательно, G является τ-минимальной не $\mathfrak{H}$-группой.

Согласно лемме 4.3.1 $f(\Omega') = \tau form(G/O_\Omega(G))$, $f(A) = \tau form(G/G_{\varphi(A)})$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$. По следствию 5.8 [9] $h(\Omega') = \mathfrak{H}$, $h(A) = \mathfrak{H}$ для всех $A \in \Omega \setminus \mathfrak{A}$ и $h(Z_p) = \mathfrak{N}_p h_1(Z_p)$ для любого $Z_p \in \Omega$, где h_1 – произвольный внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{H}$. Кроме того, по следствию 4.3.2 h – τ-замкнутый Ω-спутник формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $K(P) \subseteq \Omega$ и $A \in K(P)$. Покажем, что $f(A)$ – $h(A)_\tau$-критическая формация. Пусть A – неабелева группа. Так как $\varphi(A) \subseteq \varphi_3(A) = \mathfrak{S}_{cA} = \mathfrak{E}_{A'}$, то $P \nsubseteq G_{\varphi(A)}$ и, значит, $G_{\varphi(A)} = 1$. Следовательно, $f(A) = \tau formG$, $h(A) = \mathfrak{H}$ и ввиду $G \notin \mathfrak{H}$ получаем $f(A) \nsubseteq h(A)$. Поскольку A – неабелева группа, то $P \nsubseteq \Phi(G)$. Тогда согласно лемме 2.1.5 [39] $\mathfrak{M} = \tau form(\ (G/P) \cup \mathfrak{X}\ )$ – единственная максимальная τ-замкнутая подформация формации $\tau formG = f(A)$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Так как $G^{\mathfrak{H}} = P$, то $G/P \in \mathfrak{H}$. Поскольку G – τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} = h(A)$ и поэтому формация $f(A)$ является $h(A)_\tau$-критической.

Пусть $A \cong Z_p$. Рассмотрим случай, когда $h(Z_p) = \emptyset$. Ввиду леммы 4.3.1 $Z_p \notin K(\mathfrak{H})$ и поэтому $Z_p \notin \mathfrak{H}$. Так как $Z_p \in \Omega$, то по следствию 3(1) [79] имеем $Z_p \in \mathfrak{N}_p f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $Z_p \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ и в силу выбора группы G справедливо $G = Z_p$. Так как φ – b-направление, то $Z_p \in \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p)$. Тогда $f(Z_p) = \tau form(G/G) = \tau form(1) = (1)$. Поэтому формация $f(Z_p)$ является $h(Z_p)_\tau$-критической.

Пусть теперь $h(Z_p) \neq \emptyset$. Если $f(Z_p) \subseteq h(Z_p)$, то $G/G_{\varphi(Z_p)} \in h(Z_p)$. Так как $G/O_{Z_p}(G) \cong (G/P)/(O_{Z_p}(G)/P) \in \mathfrak{H}$, то ввиду леммы 2(1) [79] получаем, что $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Поэтому $f(Z_p) \nsubseteq h(Z_p)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – собственная τ-замкнутая подформация из $f(Z_p)$. Предположим, что $\mathfrak{M} \nsubseteq h(Z_p)$ и M – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{M} \setminus h(Z_p)$. Тогда M является монолитической группой с монолитом $R = M^{h(Z_p)}$. Допустим, что $R \subseteq O_p(M)$. Тогда $M \in \mathfrak{N}_p h(Z_p) = h(Z_p)$, что невозможно. Следовательно, $O_p(M) = 1$ и по лемме 18.8 [50] существует точный неприводимый $F_p[M]$-модуль K. Рассмотрим группу $T = [K]M$. Группа T является монолитической с монолитом $K = C_T(K)$. Поскольку φ – b-направление, то $\varphi(Z_p) = \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p$ и, значит, $K \subseteq T_{\varphi(Z_p)} \subseteq T_{\varphi_3(Z_p)} = F_{Z_p}(T) \subseteq C_T(K) = K$. Тем самым установлено, что $K = T_{\varphi(Z_p)}$. Так как $T/K \cong M \in \mathfrak{M}$, то ввиду следствия 3(1) [79] $T \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\tau\Omega F(T, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\tau\Omega F(T, \varphi) = \mathfrak{F}$, то $f(Z_p) = \tau form(T/T_{\varphi(Z_p)}) = \tau formM \subseteq \mathfrak{M}$, что невозможно. Таким образом, $\tau\Omega F(T, \varphi) \subset \mathfrak{F}$ и, значит, $\tau\Omega F(T, \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $M \cong T/T_{\varphi(Z_p)} \in h(Z_p)$. Противоречие. Следовательно, $M \subseteq h(Z_p)$ и формация $f(Z_p)$ является $h(Z_p)_\tau$-критической.

Пусть $K(P) \not\subseteq \Omega$. Покажем, что $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_\tau$-критической формацией. Поскольку $K(P) \not\subseteq \Omega$, то $f(\Omega') = \tau formG \not\subseteq \mathfrak{H} = h(\Omega')$. Пусть $\mathfrak{M}$ – собственная τ-замкнутая подформация из $f(\Omega')$ и $\mathfrak{M}_1 = \tau\Omega F(\mathfrak{M}, \varphi)$. Тогда $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$, то $f(\Omega') = \tau form(\ L/O_\Omega(L) \mid L \in \mathfrak{M}\ ) \subseteq \mathfrak{M} \subset f(\Omega')$, что противоречит выбору формации $\mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} = h(\Omega')$. Тем самым установлено, что формация $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_\tau$-критической. *Теорема доказана.*

Следствие 4.4.1. *Пусть φ – br-направление расслоенной формации, $\varphi \leq \varphi_3$, τ – регулярный φ-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая расслоенная формация с направлением φ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая расслоенная формация с направлением φ и минимальным τ-замкнутым спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\varphi}$-критической, то $\mathfrak{F} = \tau F(G, \varphi)$, где G – монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем формация $f(A)$ является $h(A)_\tau$-критической для $A \in K(P)$.*

В случае, когда $\varphi = \varphi_2$ ($\varphi = \varphi_3$), $\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi}$-критическую формацию будем называть $\mathfrak{H}_{\tau\Omega B}$-критической ($\mathfrak{H}_{\tau\Omega C}$-критической); $\mathfrak{H}_{\tau\varphi}$-критическую формацию – $\mathfrak{H}_{\tau B}$-критической ($\mathfrak{H}_{\tau C}$-критической). Формацию $\tau\Omega F(\mathfrak{X}, \varphi_2)$ ($\tau\Omega F(\mathfrak{X}, \varphi_3)$) будем обозначать $\tau\Omega BF(\mathfrak{X})$ ($\tau\Omega CF(\mathfrak{X})$); формацию $\tau F(\mathfrak{X}, \varphi_2)$ ($\tau F(\mathfrak{X}, \varphi_3)$) будем обозначать $\tau BF(\mathfrak{X})$ ($\tau CF(\mathfrak{X})$).

Следствие 4.4.2. *Пусть τ – регулярный $\Omega\varphi_2$-радикальный ($\Omega\varphi_3$-радикальный) подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая Ω-биканоническая (Ω-композиционная) формация с максимальным внутренним Ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая Ω-биканоническая (Ω-композиционная) формация с минимальным τ-замкнутым Ω-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\Omega B}$-критической ($\mathfrak{H}_{\tau\Omega C}$-критической), то $\mathfrak{F} = \tau\Omega BF(G)$ ($\mathfrak{F} = \tau\Omega CF(G)$), где G – монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем если $K(P) \subseteq \Omega$, то формация $f(A)$ является $h(A)_\tau$-критической для $A \in K(P)$, а если $K(P) \not\subseteq \Omega$, то $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_\tau$-критической формацией.*

Следствие 4.4.3. *Пусть τ – регулярный φ_2-радикальный (φ_3-радикальный) подгрупповой функтор, замкнутый относительно композици-*

онных факторов, $\mathfrak{H}$ *–* τ*-замкнутая биканоническая (композиционная) формация с максимальным внутренним спутником* h*,* $\mathfrak{F}$ *–* τ*-замкнутая биканоническая (композиционная) формация с минимальным* τ*-замкнутым спутником* f*. Если формация* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{H}_{\tau B}$*-критической (*$\mathfrak{H}_{\tau C}$*-критической), то* $\mathfrak{F} = \tau BF(G)$ *(* $\mathfrak{F} = \tau CF(G)$ *), где* G *– монолитическая* τ*-минимальная не* $\mathfrak{H}$*-группа с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$*, причем формация* $f(A)$ *является* $h(A)_\tau$*-критической для* $A \in K(P)$*.*

Теорема 4.4.2. *Пусть* φ *–* br*-направление* Ω*-расслоенной формации,* $\varphi \leq \varphi_3$*,* τ *– регулярный* $\Omega\varphi$*-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов,* $\mathfrak{H}$ *–* τ*-замкнутая* Ω*-расслоенная формация с направлением* φ *и максимальным внутренним* Ω*-спутником* h*,* $\mathfrak{F} = \tau\Omega F(G, \varphi)$ *–* τ*-замкнутая* Ω*-расслоенная формация с минимальным* τ*-замкнутым* Ω*-спутником* f*, где* G *– монолитическая группа с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$*, причем если* $K(P) \subseteq \Omega$*, то* $\Phi(G) = 1$ *и формация* $f(A)$ *является* $h(A)_\tau$*-критической для* $A \in K(P)$*, а если* $K(P) \not\subseteq \Omega$*, то* $f(\Omega')$ *является* $h(\Omega')_\tau$*-критической формацией. Тогда* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi}$*-критической формацией.*

Доказательство. Поскольку $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Согласно лемме 4.3.1 $f(\Omega') = \tau form(G/O_\Omega(G))$, $f(A) = \tau form(G/G_{\varphi(A)})$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$. По следствию 5.8 [9] $h(A) = \mathfrak{H}$ для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$ и для любого $Z_p \in \Omega$ справедливо $h(Z_p) = \mathfrak{N}_p h_1(Z_p)$, где h_1 – произвольный внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{H}$. Отметим, что по следствию 4.3.2 Ω-спутник h формации $\mathfrak{H}$ является τ-замкнутым.

Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная τ-замкнутая Ω-расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$ и b – ее минимальный τ-замкнутый Ω-спутник. Согласно следствию 4.3.4 $b \leq f$. Покажем, что $b \leq h$. Если $A \in \Omega \setminus K(G)$, то $b(A) = f(A) = \varnothing \subseteq h(A)$.

Пусть $A \in \Omega \cap K(G)$. Рассмотрим случай, когда $A \notin K(P)$. Так как φ – r-направление, то по лемме 1(7) [79] $G_{\varphi(A)}/P = (G/P)_{\varphi(A)}$. Тогда $b(A) \subseteq f(A) = \tau form(G/G_{\varphi(A)}) = \tau form((G/P)/(G/P)_{\varphi(A)}) \subseteq h(A)$.

Пусть $A \in K(P)$. Предположим, что $b(A) = f(A)$. Если A – неабелева группа, то $A \notin \varphi(A)$ и поэтому $G_{\varphi(A)} = 1$. Тогда $G \cong G/G_{\varphi(A)} \in f(A) =$

$b(A) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Следовательно, $A \cong Z_p$. Поскольку $\Phi(G) = 1$, то $G = [P]L$. Рассуждая как и при доказательстве теоремы 3.1.2, получим, что $G_{\varphi(Z_p)} = P$ и $G/P = G/G_{\varphi(Z_p)} \in f(Z_p) = b(Z_p)$. По следствию 3(1) [79] $G \in \mathfrak{N}_p b(Z_p) \subseteq \mathfrak{B}$. Противоречие. Следовательно, $b(Z_p) \subset f(Z_p)$ и ввиду $h(Z_p)_\tau$-критичности формации $f(Z_p)$ имеем $b(Z_p) \subseteq h(Z_p)$. Тем самым установлено, что $b(A) \subseteq h(A)$ для всех $A \in \Omega$.

Покажем, что $b(\Omega') \subseteq h(\Omega')$. Если $K(P) \subseteq \Omega$, то $b(\Omega') \subseteq f(\Omega') = \tau form(G/O_\Omega(G)) = \tau form((G/P)/(O_\Omega(G)/P)) \subseteq \mathfrak{H} = h(\Omega')$. Пусть $K(P) \not\subseteq \Omega$. Если $b(\Omega') = f(\Omega')$, то $G \in formG = \tau form(G/O_\Omega(G)) = f(\Omega') = b(\Omega') \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Следовательно, $b(\Omega') \subset f(\Omega')$ и поэтому $b(\Omega') \subseteq h(\Omega')$. Это означает, что $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Тем самым установлено, что формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi}$-критической. *Теорема доказана.*

Следствие 4.4.4. *Пусть φ – br-направление расслоенной формации, $\varphi \leq \varphi_3$, τ – регулярный φ-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая расслоенная формация с направлением φ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F} = \tau F(G,\varphi)$ – τ-замкнутая расслоенная формация с минимальным τ-замкнутым спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}} \not\subseteq \Phi(G)$, причем формация $f(A)$ является $h(A)_\tau$-критической для $A \in K(P)$. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\varphi}$-критической формацией.*

Следствие 4.4.5. *Пусть τ – регулярный $\Omega\varphi_2$-радикальный ($\Omega\varphi_3$-радикальный) подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая Ω-биканоническая (Ω-композиционная) формация с направлением φ и максимальным внутренним Ω-спутником h, $\mathfrak{F} = \tau\Omega BF(G)$ ($\mathfrak{F} = \tau\Omega CF(G)$) – τ-замкнутая Ω-биканоническая (Ω-композиционная) формация с минимальным τ-замкнутым Ω-спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем если $K(P) \subseteq \Omega$, то $\Phi(G) = 1$ и формация $f(A)$ является $h(A)_\tau$-критической для $A \in K(P)$, а если $K(P) \not\subseteq \Omega$, то $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_\tau$-критической формацией. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\Omega B}$-критической ($\mathfrak{H}_{\tau\Omega C}$-критической) формацией.*

Следствие 4.4.6. *Пусть τ – регулярный φ_2-радикальный (φ_3-радикальный) подгрупповой функтор, замкнутый относительно композицион-*

ных факторов, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая биканоническая (композиционная) формация с направлением φ и максимальным внутренним спутником h, $\mathfrak{F} = \tau BF(G)$ ($\mathfrak{F} = \tau CF(G)$) – τ-замкнутая биканоническая (композиционная) формация с минимальным τ-замкнутым спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}} \nsubseteq \Phi(G)$ и формация $f(A)$ является $h(A)_\tau$-критической для $A \in K(P)$. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau B}$-критической ($\mathfrak{H}_{\tau C}$-критической) формацией.

Замечание 4.4.1. Подгрупповой функтор S_n является регулярным и $\Omega\varphi$-радикальным для любой FR-функции φ, а также замкнут относительно композиционных факторов. Поэтому из теорем 4.4.1 и 4.4.2 вытекают результаты для нормально наследственных Ω-расслоенных формаций с br-направлением φ, удовлетворяющим условию $\varphi \leq \varphi_3$, в частности, результаты для нормально наследственных Ω-биканонических (биканонических) и нормально наследственных Ω-композиционных (композиционных) формаций.

Основные результаты параграфа 4.4 опубликованы в [91].

Первыми работами автора о критических Ω-расслоенных формациях являются работы [85], [102], опубликованные совместно с Н.В. Силенок. Позднее в серии работ (см., например, [86], [90]) автором совместно с М.А. Корпачевой исследовались критические Ω-расслоенные формации конечных групп различных направлений, а также критические Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп. Исследованию τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций посвящены работы [109], [114].

§ 4.5. Известные результаты, используемые в Главе 4

В Главе 4 используются следующие известные результаты.

[4], гл. 2, Лемма 4.13. *Формационно критическая группа монолитична.*

[4], гл. 2, Лемма 4.14. *Конечная простая группа является формационно критической.*

[8], Лемма 1(8). *Если $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга, $\mathfrak{H}$ – класс групп, $\mathfrak{H}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, G – группа, $N \lhd G$ и $N \in \mathfrak{H}$, то $(G/N)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/N$.*

[9], Следствие 5.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ – Ω-расслоенная формация с br-направлением*

$\varphi \leq \varphi_3$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним Ω-спутником h таким, что $h(A) = \mathfrak{F}$ для любого $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$ и $h(A) = \mathfrak{E}_A form(\ G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{F}\ )$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$.

[19], Теорема 53.44. *Конечная монолитическая группа является критической, если или централизатор монолита содержится в монолите, или ее подгруппа Фраттини тривиальна.*

[19], Следствие 51.34. *Конечная простая группа является критической.*

[19], Следствие 52.34. *Конечная монолитическая группа с неабелевым монолитом является критической.*

[39], Лемма 2.1.5. *Пусть A – монолитическая группа с монолитом $R \not\subseteq \Phi(A)$. Тогда формация $\mathfrak{F} = \tau form A$ τ-неприводима и в ней имеется единственная максимальная τ-замкнутая подформация $\mathfrak{M} = \tau form((A/R) \cup \mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы A.*

[39], Лемма 3.1.9. *Пусть $G = A \wr B = KB$, где $K = \Pi_{b\in B} A_1^b$ – база сплетения G и A_1 – первая копия A в K. Тогда*: 1) *если L – минимальная нормальная подгруппа группы G, L_1 – проекция этой подгруппы в A_1 и $L_1 \not\subseteq Z(A_1)$, то $L = \Pi_{b\in B}(L \cap A_1)^b$*; 2) *если R – минимальная нормальная подгруппа в A_1 и $R \notin Z(A_1)$, то $R_1 = \Pi_{b\in B} R^b$ – минимальная нормальная подгруппа в G*; 3) *$SocG \subseteq \Pi_{b\in B} M^b$, где $M = SocA_1$*; 4) *если L – нормальная подгруппа группы G, $L \subseteq K$ и M – проекция этой подгруппы в A_1, то сплетение $(A_1/M) \wr B$ является гомоморфным образом фактор-группы G/L.*

[50], Лемма 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – однопорожденная формация. Тогда всякая собственная подформация формации $\mathfrak{F}$ содержится в некоторой максимальной подформации из $\mathfrak{F}$.*

[50], Лемма 18.2. *Пусть G – монолитическая группа с монолитом P. Тогда если $P \not\subseteq \Phi(G)$, то $form(G/P)$ – единственная максимальная подформация формации $formG$.*

[50], Лемма 18.8. *Если в группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и $O_p(G) = 1$, то существует точный неприводимый $F_p[G]$-модуль, где F_p – поле из p элементов.*

[79], Лемма 1(7). *Если $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга, $\mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, G – группа, $N \triangleleft G$ и $N \in \mathfrak{E}_{A'}$, то $(G/N)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/N$.*

[79], Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ *с* r*-направлением* φ*. Тогда* 1) *если* $A \in \Omega$, $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ *и* $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$*, то* $G \in \mathfrak{F}$; 2) *если* $G/O_{\Omega'}(G) \in \mathfrak{F}$ *и* $G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega')$*, то* $G \in \mathfrak{F}$.

[79], Лемма 6. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *–* Ω*-расслоенная формация с* Ω*-спутником* f *и* b_A*-направлением* φ*. Тогда*: 1) $O_A(G/G_{\varphi(A)}) = 1$ *для любой группы* G; 2) $\mathfrak{F}$ *имеет* Ω*-спутник* g *такой, что* $g(B) = f(B)$ *для всех* $B \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus (A))$ *и* $g(A) = \mathfrak{E}_A f(A)$.

[79], Лемма 7(1). *Пусть* f *– внутренний* Ω *спутник* Ω*-канонической формации* $\mathfrak{F}$*. Тогда* $\mathfrak{E}_A f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ *для любого* $A \in \Omega$.

[79], Теорема 2. *Пусть* f *– внутренний* Ω*-спутник* Ω*-канонической формации* $\mathfrak{F}$*. Тогда* $\mathfrak{F}$ *имеет единственный максимальный внутренний* Ω*-спутник* h *такой, что* $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(A) = \mathfrak{E}_A h(A) = \mathfrak{E}_A f(A)$ *для любого* $A \in \Omega$.

[79], Следствие 3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *–* Ω*-расслоенная формация с внутренним* Ω*-спутником* f *и* br*-направлением* φ*. Тогда*: 1) $\mathfrak{N}_p f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$ *для всех* p *таких, что* $Z_p \in \Omega$; 2) $\mathfrak{F}$ *имеет внутренний* Ω*-спутник* g *такой, что* $g(A) = f(A)$ *для всех* $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$ *и* $g(Z_p) = \mathfrak{N}_p f(Z_p)$ *для всех* p *таких, что* $Z_p \in \Omega$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выводы. В диссертации решены следующие задачи:

1. Получено (совместно с В.А. Ведерниковым) решение проблемы Виландта [81] о дополняемости в конечной группе $\mathfrak{F}$-корадикала без условия абелевости его силовских подгрупп для ω-локальной (локальной) формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ (решение Проблемы **(A)**).

2. Получено решение проблемы Дерка и Хоукса [60] о расширении универсума, в котором работает теория проекторов, за пределы класса всех конечных разрешимых групп (решение Проблемы **(B)**).

3. Решена проблема Л.А. Шеметкова [48] изучения $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций для n-кратно ω-веерных, τ-замкнутых ω-веерных, τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций (решение Проблемы **(C)**).

4. Разработаны (совместно с В.А. Ведерниковым) теории ω-веерных и Ω-расслоенных формаций конечных групп (решение Задачи **(D)**).

5. Построена теория $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов, где $\mathfrak{F}$ – произвольная ω-локальная формация (решение Задачи **(E)**).

Я выражаю глубокую благодарность и искреннюю признательность своему учителю – доктору физико-математических наук, профессору Виктору Александровичу Ведерникову, оказавшему большое влияние на формирование моих научных интересов. Задачи, поставленные передо мной Виктором Александровичем, послужили толчком для многих исследований и впоследствии привели к написанию данной работы. Я глубоко признательна Виктору Александровичу за ценные идеи, реализованные здесь. На протяжении многих лет я всегда чувствовала постоянную поддержку своего научного руководителя и его неизменное внимание к моей работе.

Перечень условных обозначений и определений

Рассматриваются только конечные группы.

$H \le G$ — H является подгруппой группы G.

$H < G$ — H является собственной подгруппой группы G.

$H \lhd G$ — H является нормальной подгруппой группы G.

$H \cdot\!\lhd G$ — H является минимальной нормальной подгруппой в G.

$H \lhd\lhd G$ — H является субнормальной подгруппой группы G.

$H < \cdot\, G$ — H является максимальной подгруппой группы G.

$|G|$ — порядок группы G.

$H := K$ — равенство $H = K$ верно по определению.

$G = [H]K$ — группа G является полупрямым произведением своих подгрупп H и K, где $H \lhd G$.

$Core_G(H)$ — ядро подгруппы H в группе G.

$Comp_G(H)$ — совокупность всех дополнений к подгруппе H в G, где $H \lhd G$.

$A \wr B$ — регулярное сплетение группы A с группой B.

1 — единичная группа.

$\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.

$F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G.

$C_G(H/K)$ — централизатор фактора H/K в G.

$\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел.

π — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$.

$\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G.

$\pi(\mathfrak{X}) = \cup_{G\in\mathfrak{X}}\pi(G)$.

Z_p — группа простого порядка p.

$K(G)$ — класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G.

$K(\mathfrak{X}) = \cup_{G\in\mathfrak{X}}K(G)$.

Монолитическая группа — группа, имеющая единственную минимальную нормальную подгруппу (монолит).

Цоколь группы G — произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы G, обозначается $\mathrm{Soc}(G)$.

Добавление к нормальной подгруппе K группы G — подгруппа H группы G такая, что $HK = G$, но $H_1K \neq G$ для любой собственной подгруппы H_1 из H.

π-группа (*πd-группа*, *π'-группа*) — группа G, такая, что $\pi(G) \subseteq \pi$ (соответственно $\pi(G) \cap \pi \neq \emptyset$, $\pi(G) \cap \pi = \emptyset$).

G_π — π-холлова подгруппа (иначе, S_π-подгруппа) группы G.

π-замкнутая группа — группа, обладающая нормальной π-холловой подгруппой.

Разложимая (*π-разложимая*) *группа* — группа G, представимая в виде прямого произведения $G = A \times B$ своих собственных подгрупп A и B (π-подгруппы A и π'-подгруппы B).

π-дополнение к подгруппе K в группе G — подгруппа H группы G такая, что $HK = G$ и $|H \cap K|$ не делится на числа из π.

Класс групп — совокупность групп, содержащая с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

$\mathfrak{X}$-группа — группа, принадлежащая классу групп $\mathfrak{X}$.

$(\mathfrak{X})$ — класс групп, порожденный множеством групп $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех классов групп, содержащих $\mathfrak{X}$.

(G) — класс групп, порожденный множеством групп $\mathfrak{X} = \{G\}$, в частности, (1) — класс всех единичных групп.

$\mathfrak{E}$ — класс всех групп.

$\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп.

$\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп.

$\mathfrak{F}_\pi$ — класс всех π-групп, принадлежащих классу $\mathfrak{F}$.

$\mathfrak{N}_p$ — класс всех p-групп, где $p \in \mathbb{P}$.

$\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп.

$\mathfrak{S}_{cp}$ — класс всех групп, у которых каждый главный p-фактор централен, где $p \in \mathbb{P}$.

ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$.

ω' — дополнение к подмножеству ω во множестве $\mathbb{P}$.

$\{\omega'\}$ — одноэлементное множество, состоящее из одного элемента ω'.

$\mathfrak{E}_\omega$ — класс всех ω-групп.

$\mathfrak{E}_{p'}$ — класс всех p'-групп, где $p \in \mathbb{P}$.

$\mathfrak{I}$ — класс всех простых групп.

Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$.

$\mathfrak{E}_{\Omega}$ — класс всех Ω-групп, т.е. таких групп G, что $K(G) \subseteq \Omega$.

$\mathfrak{E}_A = \mathfrak{E}_{(A)}$, где $A \in \mathfrak{I}$.

$A' = \mathfrak{I} \setminus (A)$, где $A \in \mathfrak{I}$.

Главный A-фактор — главный фактор M/N группы G такой, что $K(M/N) = (A)$.

$\mathfrak{S}_{cA}$ — класс всех групп, у которых каждый главный A-фактор централен.

Гомоморф — класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий условию: из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Наследственный (нормально наследственный) класс групп — класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий условию: из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \leq G$ (соответственно $N \triangleleft G$) следует, что $N \in \mathfrak{F}$.

Формация — гомоморф $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий условию: из $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

$form\, \mathfrak{X}$ — формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех формаций, содержащих $\mathfrak{X}$.

$form\, G = form\, \{G\}$.

Класс Фиттинга — нормально наследственный класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий условию: из $G = N_1N_2$, $N_i \in \mathfrak{F}$ и $N_i \triangleleft G$, $i = 1, 2$, следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга — формация, являющаяся классом Фиттинга.

$G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ – непустая формация.

$\mathfrak{F}$-корадикальная нормальная подгруппа группы G — нормальная подгруппа K группы G такая, что $G/K \in \mathfrak{F}$ и из $G/N \in \mathfrak{F}$, где $N \leq K$, следует, что $N = K$, где $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп.

$G_{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-радикал группы G, т.е. наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G, где $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга.

$O_{\omega}(G)$ — $\mathfrak{E}_{\omega}$-радикал группы G.

$O_p(G)$ — $\mathfrak{N}_p$-радикал группы G.

$O_\Omega(G)$ — $\mathfrak{E}_\Omega$-радикал группы G.

$O_A(G)$ — $\mathfrak{E}_A$-радикал группы G.

$O_{A',A}(G)$ — $\mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A$-радикал группы G.

$F_p(G)$ — $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$-радикал группы G.

$F_{cp}(G)$ — $\mathfrak{S}_{cp}$-радикал группы G.

$F_A(G)$ — $\mathfrak{S}_{cA}$-радикал группы G.

$\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (\ G \in \mathfrak{E} \mid$ существует $N \triangleleft G$ такая, что $N \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{H}$) — гащюцово произведение классов групп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

$\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F} \ )$ — формационное произведение $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{F}$ – класс групп, $\mathfrak{H}$ – формация.

Насыщенный в $\mathfrak{X}$ класс — класс групп $\mathfrak{F}$, содержащийся в классе групп $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий условию: для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и любой $N \triangleleft G$ такой, что $N \leq \Phi(G)$, из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Насыщенный класс — класс групп, насыщенный в $\mathfrak{E}$.

ω-насыщенный в $\mathfrak{X}$ класс — класс групп $\mathfrak{F}$, содержащийся в классе групп $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий условию: для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и любой $N \triangleleft G$ такой, что $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$, из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

ω-насыщенный класс — класс групп, ω-насыщенный в $\mathfrak{E}$.

Примитивно замкнутый в $\mathfrak{X}$ класс (иначе, *P-замкнутый в $\mathfrak{X}$ класс*) — класс групп $\mathfrak{F}$, содержащийся в классе групп $\mathfrak{X}$, такой, что для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ справедливо: из $G/Core_G(M) \in \mathfrak{F}$ для любой $M < \cdot \ G$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Примитивно замкнутый класс (иначе, *P-замкнутый класс*) — класс групп, примитивно замкнутый в $\mathfrak{E}$.

Класс Шунка — примитивно замкнутый гомоморф (иначе, P-гомоморф).

ω-примитивно замкнутый в $\mathfrak{X}$ класс (иначе, *ωP-замкнутый в $\mathfrak{X}$ класс*) — класс групп $\mathfrak{F}$, содержащийся в классе групп $\mathfrak{X}$, такой, что для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ справедливо: из $G/Core_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$ для любой $M < \cdot \ G$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

ω-примитивно замкнутый класс (иначе, *ωP-замкнутый класс*) — класс групп, ω-примитивно замкнутый в $\mathfrak{E}$.

ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$ — ω-примитивно замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф.

ωP-гомоморф — ωP-гомоморф в $\mathfrak{E}$.

$\mathfrak{F}$-нормальная ($\mathfrak{F}$-абнормальная) максимальная подгруппа группы G — максимальная подгруппа M группы G такая, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$ (соответственно $MG^{\mathfrak{F}} = G$), где $\mathfrak{F}$ – непустая формация.

$\mathfrak{F}$-субнормальная ($\mathfrak{F}$-абнормальная) максимальная цепь — максимальная $(G-H)$-цепь $H = H_m < H_{m-1} < \ldots < H_1 < H_0 = G$, если для любого $i \geq 1$ подгруппа H_i $\mathfrak{F}$-нормальна (соответственно $\mathfrak{F}$-абнормальна) в H_{i-1}.

$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G — подгруппа H группы G, для которой существует хотя бы одна $\mathfrak{F}$-субнормальная максимальная $(G-H)$-цепь.

$\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G — подгруппа H группы G, для которой любая максимальная $(G-H)$-цепь является $\mathfrak{F}$-абнормальной.

$\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G — подгруппа H группы G такая, что $H \in \mathfrak{F}$ и из $H \leq U \leq G$ и $U \in \mathfrak{F}$ следует, что $U = H$, где $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп.

$\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа группы G — нормальная подгруппа R группы G такая, что $R \leq G^{\mathfrak{F}}$ и $R/R \cap \Phi(G)$ является главным фактором группы G, где $\mathfrak{F}$ – непустая формация.

$\mathfrak{F}^{\omega}$-предельная нормальная подгруппа группы G — нормальная подгруппа R группы G такая, что $R \leq G^{\mathfrak{F}}$ и $R/R \cap \Phi(G) \cap O_{\omega}(G)$ является главным фактором группы G, где $\mathfrak{F}$ – непустая формация.

$\mathfrak{F}$-критическая подгруппа группы G — максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = MR$ для некоторой $\mathfrak{F}$-предельной нормальной подгруппы R из G, где $\mathfrak{F}$ – непустая формация.

$\mathfrak{F}^{\omega}$-критическая подгруппа группы G — максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = MR$ для некоторой $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельной нормальной подгруппы R из G, где $\mathfrak{F}$ – непустая формация.

$\mathfrak{F}$-нормализатор группы G — $\mathfrak{F}$-подгруппа H группы G такая, что существует цепь подгрупп группы G вида $H = H_t \subset H_{t-1} \subset \ldots \subset H_1 \subset H_0 = G$, где $t \geq 0$, такая, что H_i – $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа в группе H_{i-1} для любого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, где $\mathfrak{F}$ – непустая формация.

$\omega\mathfrak{F}$-нормализатор группы G — подгруппа H группы G такая, что

$H/\Phi(H) \cap O_{\omega'}(H) \in \mathfrak{F}$ и существует цепь подгрупп группы G вида $H = H_t \subset H_{t-1} \subset \cdots \subset H_1 \subset H_0 = G$, где $t \geq 0$, такая, что H_i – $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа в группе H_{i-1} для любого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, где $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация.

$\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор группы G — $\mathfrak{F}$-подгруппа H группы G такая, что существует цепь подгрупп группы G вида $H = H_t \subset H_{t-1} \subset \ldots \subset H_1 \subset H_0 = G$, где $t \geq 0$, такая, что H_i – $\mathfrak{F}^{\omega}$-критическая подгруппа в группе H_{i-1} для любого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, где $\mathfrak{F}$ – непустая формация.

$\mathfrak{F}$-проектор группы G — подгруппа H группы G такая, что для любой нормальной подгруппы N группы G подгруппа HN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в фактор-группе G/N, где $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп.

$\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G — подгруппа H группы G такая, что для любой нормальной ω-подгруппы N группы G подгруппа HN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в фактор-группе G/N, где $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп.

$Proj_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G)$ — совокупность всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторов группы G.

$\mathfrak{F}$-покрывающая подгруппа группы G — подгруппа H группы G такая, что $H \in \mathfrak{F}$ и из того, что $H \leq U \leq G$, V – нормальная подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$ следует, что $U = HV$, где $\mathfrak{F}$ – класс групп.

$\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G — подгруппа H группы G такая, что $H \in \mathfrak{F}$ и из того, что $H \leq U \leq G$, V – нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$ следует, что $U = HV$, где $\mathfrak{F}$ – класс групп.

$Cov_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G)$ — совокупность всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающих подгрупп группы G.

Примитивная группа — группа G, в которой существует максимальная подгруппа M (примитиватор) такая, что $Core_G(M) = 1$.

ω-примитивная группа — группа G такая, что в G существует максимальная подгруппа M (ω-примитиватор) такая, что $Core_G(M) \cap O_{\omega}(G) = 1$.

ωF-функция — функция $f : \omega \cup \{\omega'\} \longrightarrow \{$ формации групп $\}$, где $f(\omega') \neq \emptyset$.

$\mathbb{P}F$-функция — функция $g : \mathbb{P} \longrightarrow \{$ формации групп $\}$.

$\mathbb{P}FR$-функция — $\delta : \mathbb{P} \longrightarrow \{$ непустые формации Фиттинга $\}$.

f_p-центральный (f_p-эксцентральный) главный фактор группы G — главный pd-фактор A/B группы G такой, что $G/C_G(A/B) \in f(p)$ ($G/C_G(A/B) \notin f(p)$), где f – ωF-функция, $p \in \omega$.

f_ω-центральный (f_ω-эксцентральный) главный фактор группы G — главный ωd-фактор A/B группы G такой, что $G/C_G(A/B) \in f(p)$ для любого простого числа $p \in \omega \cap \pi(A/B)$ ($G/C_G(A/B) \notin f(p)$ для некоторого простого числа $p \in \omega \cap \pi(A/B)$), где f – ωF-функция.

ω-веерная формация с ω-спутником f и направлением δ — формация $\omega F(f,\delta) = (G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$), где f и δ – ωF-функция и $\mathbb{P}FR$-функция соответственно.

Веерная формация со спутником f и направлением δ — формация $\mathbb{P}F(f,\delta) = (G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \pi(G)$), где f и δ – $\mathbb{P}F$-функция и $\mathbb{P}FR$-функция соответственно.

a-направление ω-веерной (веерной) формации — $\mathbb{P}FR$-функция δ, удовлетворяющая условию: $Z_q \in \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$.

b-направление ω-веерной (веерной) формации — $\mathbb{P}FR$-функция δ, удовлетворяющая условию: $\delta(q)\mathfrak{N}_q = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$.

b_p-направление ω-веерной (веерной) формации, где $p \in \mathbb{P}$, — $\mathbb{P}FR$-функция δ, удовлетворяющая условию: $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$.

p-направление ω-веерной (веерной) формации — $\mathbb{P}FR$-функция δ, удовлетворяющая условию: $\mathfrak{E}_{q'}\delta(q) = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$.

r-направление ω-веерной (веерной) формации — $\mathbb{P}FR$-функция δ, удовлетворяющая условию: $\mathfrak{E}_{(Z_q)'}\delta(q) = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$.

s-направление ω-веерной (веерной) формации — $\mathbb{P}FR$-функция δ, удовлетворяющая условию: формация Фиттинга $\delta(q)$ q-разрешима для любого $q \in \mathbb{P}$.

$i_1 i_2 ... i_n$-направление ω-веерной (веерной) формации $\mathfrak{F}$ — $\mathbb{P}FR$-функция δ, которая является i_j-направлением формации $\mathfrak{F}$ для любого $j \in \{ 1, ..., n \}$.

ω-полная (полная) формация — ω-веерная (веерная) формация с направлением δ_0, где $\delta_0(p) = \mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \mathbb{P}$; обозначается $\omega AF(f)$ (соответственно $AF(f)$).

ω-локальная (локальная) формация — ω-веерная (веерная) формация с направлением δ_1, где $\delta_1(p) = \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \mathbb{P}$; обозначается $\omega LF(f)$ (соответственно $LF(f)$).

ω-специальная (специальная) формация — ω-веерная (веерная) формация с направлением δ_2, где $\delta_2(p) = \mathfrak{E}_{(Z_p)'}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \mathbb{P}$; обозначается $\omega SF(f)$

(соответственно $SF(f)$).

ω-центральная (центральная) формация — ω-веерная (веерная) формация с направлением δ_3, где $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ для всех $p \in \mathbb{P}$; обозначается $\omega ZF(f)$ (соответственно $ZF(f)$).

$\omega F(\mathfrak{X}, \delta)$ ($\mathbb{P}F(\mathfrak{X}, \delta)$) — ω-веерная (веерная) формация с направлением δ, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

$\omega AF(\mathfrak{X})$ ($\omega LF(\mathfrak{X})$, $\omega SF(\mathfrak{X})$, $\omega ZF(\mathfrak{X})$) — ω-полная (соответственно ω-локальная, ω-специальная, ω-центральная) формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

$AF(\mathfrak{X})$ ($LF(\mathfrak{X})$, $SF(\mathfrak{X})$, $ZF(\mathfrak{X})$) — полная (соответственно локальная, специальная, центральная) формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

n-кратно ω-веерная (n-кратно веерная) формация с направлением δ — ω-веерная формация $\mathfrak{F}$, обладающая хотя бы одним $\omega\delta_{(n-1)}$-спутником ($\delta_{(n-1)}$-спутником), то есть таким ω-спутником (спутником), все непустые значения которого являются $(n-1)$-кратно ω-веерными ($(n-1)$-кратно веерными) формациями с направлением δ, где δ – $\mathbb{P}FR$-функция, $n \in \mathbb{N}$. При этом, всякую непустую формацию считают *0-кратно ω-веерной* (*0-кратно веерной*) с направлением δ.

$\omega F_n(\mathfrak{X}, \delta)$ ($\mathbb{P}F_n(\mathfrak{X}, \delta)$) — n-кратно ω-веерная (n-кратно веерная) формация с направлением δ, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

ΩF-функция — функция $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \longrightarrow \{$ формации групп $\}$, где $f(\Omega') \neq \emptyset$.

F-функция — функция $g : \mathfrak{I} \longrightarrow \{$ формации групп $\}$.

FR-функция — $\delta : \mathfrak{I} \longrightarrow \{$ непустые формации Фиттинга $\}$.

Ω-расслоенная формация с Ω-спутником f и направлением φ — формация $\Omega F(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$), где f и φ – ΩF-функция и FR-функция соответственно.

Расслоенная формация со спутником f и направлением φ — формация $F(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in K(G)$), где f и φ – F-функция и FR-функция соответственно.

a-направление Ω-расслоенной (расслоенной) формации — FR-функция φ, удовлетворяющая условию: $A \in \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$.

b-направление Ω-расслоенной (расслоенной) формации — FR-функция φ, удовлетворяющая условию: $\varphi(A) = \varphi(A)\mathfrak{E}_A$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$.

b_A-направление Ω-расслоенной (расслоенной) формации, где $A \in \mathfrak{I}$, — FR-функция φ, удовлетворяющая условию: $\varphi(A) = \varphi(A)\mathfrak{E}_A$.

r-направление Ω-расслоенной (расслоенной) формации — FR-функция φ, удовлетворяющая условию: $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'}\varphi(A)$ для любой группы $A \in \mathfrak{I}$.

n-направление Ω-расслоенной (расслоенной) формации — FR-функция φ, удовлетворяющая условию: $A \notin \varphi(A)$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{I}$.

$i_1i_2...i_n$-направление Ω-расслоенной (расслоенной) формации $\mathfrak{F}$ — FR-функция φ, которая является i_j-направлением формации $\mathfrak{F}$ для любого $j \in \{ 1, ..., n \}$.

Ω-свободная (свободная) формация — Ω-расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ_0, где $\varphi_0(A) = \mathfrak{E}_{A'}$ для всех $A \in \mathfrak{I}$; обозначается $\Omega Fr(f)$ (соответственно $Fr(f)$).

Ω-каноническая (каноническая) формация — Ω-расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ_2', где $\varphi_2'(A) = \mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A$ для всех $A \in \mathfrak{I}$; обозначается $\Omega KF(f)$ (соответственно $KF(f)$).

Ω-биканоническая (биканоническая) формация — Ω-расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ_2, где $\varphi_2(A) = \mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A$ для всех $A \in \mathfrak{I} \cap \mathfrak{A}$ и $\varphi_2(A) = \mathfrak{E}_{A'}$ для всех $A \in \mathfrak{I} \setminus \mathfrak{A}$; обозначается $\Omega BF(f)$ (соответственно $BF(f)$).

Ω-композиционная (композиционная) формация — Ω-расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ_3, где $\varphi_3(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для всех $A \in \mathfrak{I}$; обозначается $\Omega CF(f)$ (соответственно $CF(f)$).

$\Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ ($F(\mathfrak{X}, \varphi)$) — Ω-расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

$\Omega Fr(\mathfrak{X})$ ($\Omega KF(\mathfrak{X})$, $\Omega BF(\mathfrak{X})$, $\Omega CF(\mathfrak{X})$) — Ω-свободная (соответственно Ω-каноническая, Ω-биканоническая, Ω-композиционная) формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

$Fr(\mathfrak{X})$ ($KF(\mathfrak{X})$, $BF(\mathfrak{X})$, $CF(\mathfrak{X})$) — свободная (соответственно каноническая, биканоническая, композиционная) формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

Подгрупповой функтор — отображение τ, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп, удовлетворяющее условию: $(\tau(G))^\alpha = \tau(G^\alpha)$ для любого изоморфизма α каждой группы G.

τ-подгруппа группы G — подгруппа группы G, принадлежащая $\tau(G)$, где τ – подгрупповой функтор.

τ-минимальная не $\mathfrak{F}$-группа — группа G, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, всякая собственная τ-подгруппа которой классу $\mathfrak{F}$ принадлежит, где τ – подгрупповой функтор.

Регулярный подгрупповой функтор — подгрупповой функтор τ, удовлетворяющий условиям:

1) из $M \in \tau(G)$ и $N \triangleleft G$ следует, что $MN/N \in \tau(G/N)$;

2) из $M/N \in \tau(G/N)$ следует, что $M \in \tau(G)$.

ω-радикальный (Ω-радикальный) подгрупповой функтор — подгрупповой функтор τ такой, что для любой группы G и любой $N \in \tau(G)$ справедливо равенство $O_\omega(G) \cap N = O_\omega(N)$ ($O_\Omega(G) \cap N = O_\Omega(N)$).

δ-радикальный (φ-радикальный) подгрупповой функтор — подгрупповой функтор τ такой, что для любой группы G и любой $N \in \tau(G)$ справедливо равенство $G_{\delta(p)} \cap N = N_{\delta(p)}$ для всех $p \in \mathbb{P}$ ($G_{\varphi(A)} \cap N = N_{\varphi(A)}$ для всех $A \in \mathfrak{I}$), где δ (соответственно φ) – $\mathbb{P}FR$-функция (FR-функция).

$\omega\delta$-радикальный ($\Omega\varphi$-радикальный) подгрупповой функтор — подгрупповой функтор τ, являющийся ω-радикальным и δ-радикальным (Ω-радикальным и φ-радикальным).

Подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, — подгрупповой функтор τ такой, что для любой группы G и любой $N \in \tau(G)$ справедливо включение $K(N) \subseteq K(G)$.

Подгрупповой функтор S_n (sn) — подгрупповой функтор, ставящий в соответствие каждой группе G совокупность $S_n(G)$ ($sn(G)$) всех нормальных (субнормальных) подгрупп группы G.

Подгрупповой функтор $res_\mathfrak{F}$ ($rad_\mathfrak{F}$) — подгрупповой функтор, ставящий в соответствие каждой группе G множество $res_\mathfrak{F}(G) = \{G^\mathfrak{F}\}$ ($rad_\mathfrak{F}(G) = \{G_\mathfrak{F}\}$), где $\mathfrak{F}$ – непустая формация (непустой класс Фиттинга).

τ-замкнутая формация — формация $\mathfrak{F}$, содержащая вместе с каждой

группой G и все ее τ-подгруппы, где τ – подгрупповой функтор.

$\tau form\, \mathfrak{X}$ — τ-замкнутая формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех τ-замкнутых формаций, содержащих $\mathfrak{X}$.

$\tau form\, G = \tau form\, \{G\}$.

$\tau\omega F(\mathfrak{X}, \delta)$ ($\tau\mathbb{P}F(\mathfrak{X}, \delta)$) — τ-замкнутая ω-веерная (веерная) формация с направлением δ, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

$\tau\omega AF(\mathfrak{X})$ ($\tau\omega LF(\mathfrak{X})$, $\tau\omega SF(\mathfrak{X})$, $\tau\omega ZF(\mathfrak{X})$) — τ-замкнутая ω-полная (соответственно ω-локальная, ω-специальная, ω-центральная) формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

$\tau AF(\mathfrak{X})$ ($\tau LF(\mathfrak{X})$, $\tau SF(\mathfrak{X})$, $\tau ZF(\mathfrak{X})$) — τ-замкнутая полная (соответственно локальная, специальная, центральная) формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

$\tau\Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ ($\tau F(\mathfrak{X}, \varphi)$) — τ-замкнутая Ω-расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

$\tau\Omega Fr(\mathfrak{X})$ ($\tau\Omega KF(\mathfrak{X})$, $\tau\Omega BF(\mathfrak{X})$, $\tau\Omega CF(\mathfrak{X})$) — τ-замкнутая Ω-свободная (соответственно Ω-каноническая, Ω-биканоническая, Ω-композиционная) формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

$\tau Fr(\mathfrak{X})$ ($\tau KF(\mathfrak{X})$, $\tau BF(\mathfrak{X})$, $\tau CF(\mathfrak{X})$) — τ-замкнутая свободная (соответственно каноническая, биканоническая, композиционная) формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$.

θ-формация (*θ-подформация*) — формация (подформация), принадлежащая θ, где θ – некоторая совокупность формаций.

Максимальная θ-подформация формации $\mathfrak{F}$ — такая собственная θ-подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$, что для любой θ-формации $\mathfrak{B}$, удовлетворяющей включению $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}$, имеет место равенство $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$.

Критическая группа — конечная группа G, не принадлежащая многообразию, порожденному собственными секциями группы G.

Формационно критическая группа — конечная группа G, не принадлежащая формации, порожденной теми собственными секциями группы G, которые принадлежат $formG$.

f-базисная группа — формационно критическая группа G, для которой формация $formG$ содержит единственную максимальную подформацию.

τ-базисная группа — формационно критическая группа G, для которой формация $\tau formG$ содержит единственную максимальную τ-замкнутую подформацию.

$\omega\delta$-базисная (δ*-базисная*) *группа* — формационно критическая группа G, для которой формация $\omega F(G,\delta)$ ($\mathbb{P}F(G,\delta)$) содержит единственную максимальную ω-веерную (веерную) подформацию с направлением δ.

$\tau\omega\delta$-базисная ($\tau\delta$*-базисная*) *группа* — формационно критическая группа G, для которой формация $\tau\omega F(G,\delta)$ ($\tau\mathbb{P}F(G,\delta)$) содержит единственную максимальную τ-замкнутую ω-веерную (веерную) подформацию с направлением δ.

$\mathfrak{H}_\theta$-критическая формация — θ-формация $\mathfrak{F}$ такая, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные θ-подформации из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{H}$ содержатся, где $\mathfrak{H}$ – класс групп, θ – совокупность формаций.

$\mathfrak{H}$-критическая формация — $\mathfrak{H}_\theta$-критическая формация в случае, когда θ – совокупность всех формаций.

$\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критическая (*$\mathfrak{H}_{\delta_n}$-критическая*) *формация* — $\mathfrak{H}_\theta$-критическая формация в случае, когда θ – совокупность всех n-кратно ω-веерных (n-кратно веерных) формаций с направлением δ, где $n \in \mathbb{N}$.

$\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta_n}$-критическая (*$\mathfrak{H}_{\tau\delta_n}$-критическая*) *формация* — $\mathfrak{H}_\theta$-критическая формация в случае, когда θ – совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-веерных (n-кратно веерных) формаций с направлением δ, где $n \in \mathbb{N}$.

$\mathfrak{H}_{\Omega\varphi_n}$-критическая (*$\mathfrak{H}_{\varphi_n}$-критическая*) *формация* — $\mathfrak{H}_\theta$-критическая формация в случае, когда θ – совокупность всех n-кратно Ω-расслоенных (n-кратно расслоенных) формаций с направлением φ, где $n \in \mathbb{N}$.

$\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi_n}$-критическая (*$\mathfrak{H}_{\tau\varphi_n}$-критическая*) *формация* — $\mathfrak{H}_\theta$-критическая формация в случае, когда θ – совокупность всех τ-замкнутых n-кратно Ω-расслоенных (n-кратно расслоенных) формаций с направлением φ, где $n \in \mathbb{N}$.

$\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-критическая (*$\mathfrak{H}_{\delta}$-критическая, $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$-критическая, $\mathfrak{H}_{\tau\delta}$-критическая, $\mathfrak{H}_{\Omega\varphi}$-критическая, $\mathfrak{H}_{\varphi}$-критическая, $\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi}$-критическая, $\mathfrak{H}_{\tau\varphi}$-критическая*) *формация* — $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критическая (соответственно $\mathfrak{H}_{\delta_n}$-критическая, $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta_n}$-критическая, $\mathfrak{H}_{\tau\delta_n}$-критическая, $\mathfrak{H}_{\Omega\varphi_n}$-критическая, $\mathfrak{H}_{\varphi_n}$-критическая, $\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi_n}$-критическая, $\mathfrak{H}_{\tau\varphi_n}$-критическая) формация при $n = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Близнец И.В., Воробьев Н.Н.* О прямых разложениях композиционных формаций // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1998. Вып. 12. – С. 106–112.

2. *Васильев А.Ф.* $(\mathfrak{X}, h)$-различимые локальные формации // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1986. Вып. 2. – С. 34–40.

3. *Ведерников В.А.* О $\mathfrak{F}$-проекторах групп // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1985. Вып. 1. – С. 9–22.

4. *Ведерников В.А.* Элементы теории классов групп. – Смоленск: СГПИ, 1988. – 95 с.

5. *Ведерников В.А.* О некоторых классах конечных групп // ДАН БССР. 1988. Т. 32. № 10. – С. 872–875.

6. *Ведерников В.А.* Подпрямые произведения и формации конечных групп // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 5. – С. 523–548.

7. *Ведерников В.А., Коптюх Д.Г.* Частично композиционные формации групп // Препринт: Брянск, БГПУ. 1999. № 2. – С. 1–28.

8. *Ведерников В.А.* О новых типах ω-веерных формаций конечных групп // Український математичный конгресс – 2001. Секція 1. Праці. Київ. 2002. – С. 36–45.

9. *Ведерников В.А., Демина Е.Н.* Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51. № 5. – С. 990–1009.

10. *Воробьев Н.Н.* О прямых разложениях ω-локальных формаций и классов Фиттинга // Вестник Витебского государственного университета. 1997. № 3. – С. 75–78.

11. *Воробьев Н.Н., Скиба А.Н.* О булевых решетках n-кратно локальных классов Фиттинга // Сибирский математический журнал. 1999. Т. 40. № 3. – С. 523–530.

12. *Жаркова (Корпачева) М.А.* О критических ω-локальных нормально наследственных формациях // Материалы Международной конференции «Алгебра и ее приложения» (тезисы докладов). – Красноярск, 2002. – С. 49–50.

13. *Каморников С.Ф.* О некоторых свойствах формации квазинильпотентных групп // Математические заметки. 1993. Т. 53. № 2. – С. 71–77.

14. *Каморников С.Ф., Шеметков Л.А.* О корадикалах субнормальных подгрупп // Алгебра и логика. 1995. № 5. – С. 493–513.

15. *Каморников С.Ф., Селькин М.В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. – Мн.: Беларуская навука, 2003. – 254 с.

16. *Каморников С.Ф.* О дополнении корадикала конечной группы // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. 2013. № 6. – С. 17–23.

17. *Каморников С.Ф., Шеметкова О.Л.* О существовании дополнений к корадикалам конечных групп // Труды института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 1. – С. 122–127.

18. *Монахов В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. – Мн.: Выш. шк., 2006. – 207 с.

19. *Нейман Х.* Многообразия групп. – М.: Мир, 1969. – 264 с.

20. *Плоткин Б.И.* Радикалы в группах, операции на классах групп и радикальные классы // Избранные вопросы алгебры и логики: Сборник, посв. памяти А.И. Мальцева. – Новосибирск: Наука, 1973. – С. 205–244.

21. *Подуфалова В.Д.* О подгруппах, обладающих формационными свойствами // Доклады АН БССР. 1977. Т. 21. № 2. – С. 105–107.

22. *Сафонов В.Г.* О минимальных кратно локальных не $\mathfrak{H}$-формациях конечных групп // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1995. Вып. 8. – С. 109–138.

23. *Сафонова И.Н.* О минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1999. № 2. – С. 23–27.

24. *Сафонова И.Н.* К теории $\mathfrak{H}_l^\omega$-критических формаций конечных групп // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 2001. Вып. 3(6). – С. 124–133.

25. *Селькин В.М.* О минимальных локальных нормально наследственных не $\mathfrak{H}$-формациях // Вести АН РБ. Сер. физ.-мат. н. 1996. № 3. – С. 73–83.

26. *Селькин В.М., Скиба А.Н.* О наследственных критических формациях // Сиб. Матем. журн. 1996. Т. 37. № 5. – С. 1145–1153.

27. *Селькин В.М., Скиба А.Н.* О $\mathfrak{H}_\Theta\omega$-критических формациях // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1999. Вып. 14. – С. 127–131.

28. *Семенчук В.Н.* Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы // Алгебра и логика. 1979. Т. 18. № 3. – С. 348–382.

29. *Семенчук В.Н.* Конечные группы с системой минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп // Подгрупповое строение конечных групп. – Мн.: Наука и техника, 1981. – С. 138–149.

30. *Семенчук В.Н.* Описание конечных разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для произвольной локальной формации $\mathfrak{F}$ // Математические заметки. 1988. Т. 43. № 4. – С. 452–459.

31. *Сидоров А.В.* О группах, близких к минимальным не $\mathfrak{F}$-группам // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1986. Вып. 2. – С. 55–61.

32. *Скачкова Ю.А.* (*Еловикова Ю.А.*) Булевы решетки кратно Ω-расслоенных формаций // Дискретная математика. 2002. Т. 14. № 3. – С. 42–46.

33. *Скиба А.Н.* О критических формациях // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1980. № 4. – С. 27–33.

34. *Скиба А.Н.* О критических формациях // Доклады АН БССР. 1983. Т. 27. № 9. – С. 780–782.

35. *Скиба А.Н.* Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. – Минск. 1987. Вып. 3. – С. 21–31.

36. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* О минимальном композиционном экране композиционной формации // Вопросы алгебры. – Гомель: ГГУ, 1992. Вып. 7. – С. 39–43.

37. *Скиба А.Н.* О критических формациях // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: ИМ АН Украины, 1993. – С. 258–268.

38. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* О частично локальных формациях // ДАН Беларуси. 1995. Т. 39. № 3. – С. 123–143.

39. *Скиба А.Н.* Алгебра формаций. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

40. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды. 1999. Т. 2. № 2. – С. 114–147.

41. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Частично композиционные формации конечных групп // Доклады НАН Беларуси. 1999. Т. 43. № 4. – С. 5–8.

42. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52. № 6. – С. 783–797.

43. *Ходалевич А.Д.* Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 5. – С. 389–391.

44. *Чунихин С.А.* Подгруппы конечных групп. – Мн.: Наука и техника, 1964. – 158 с.

45. *Шеметков Л.А.* Ступенчатые формации групп // Математический сборник. 1974. Т. 94. № 4. – С. 628–648.

46. *Шеметков Л.А.* Факторизации непростых конечных групп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. № 6. – С. 684–715.

47. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

48. *Шеметков Л.А.* Экраны ступенчатых формаций // Тр. VI Всесоюз. Симпозиума по теории групп. – Киев: Наукова думка, 1980. – С. 37–50.

49. *Шеметков Л.А.* О произведении формаций // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 2. – С. 101–103.

50. *Шеметков Л.А., Скиба А.Н.* Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 256 с.

51. *Шеметков Л.А.* Новые идеи и результаты теории формаций // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1989. Вып. 4. – С. 65–76.

52. *Шеметков Л.А.* Локальные задания формаций конечных групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16. № 8. – С. 229–244.

53. *Шмигирев Э.Ф.* О некоторых вопросах теории формаций // В кн.: Конечные группы. – Мн.: Наука и техника, 1975. – С. 213–225.

54. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1. – P. 115–187.

55. *Bauman S.* A note on covering and avoidance properties in solvable groups // Proc. Amtr. Math. Soc. 1969. V. 21. – P. 173–174.

56. *Beidleman S., Brewster B.* $\mathfrak{F}$-Covering subgroups of finite groups // Boll. Unione mat. ital. 1969. V. 3. N 6. – P. 987–992.

57. *Carter R.* Nilpotent self-normalizing subgroups and system normalizers // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43. – P. 507–528.

58. *Carter R.* Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups // Math. Z. 1961. V. 75. – P. 136–139.

59. *Carter R., Hawkes T.* The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. V. 5. N 2. – P. 175–201.

60. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Walter de Gruyter, Berlin – New Jork, 1992. – 891 с.

61. *Erickson R.* Projectors of finite groups // Comm. Algebra. 1982. V. 10. – P. 1919–1938.

62. *Förster P.* Projektive Klassen endlicher Gruppen I. Schunck- und Gaschützklassen // Math. Z. 1984. V. 186. – P. 249–278.

63. *Gaschütz W.* Zur Erweiterungstheorie endlicher Gruppen // J. Reine Angew. Math. 1952. V. 190. – P. 93–107.

64. *Gaschütz W.* Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. V. 80. N 4. – P. 300–305.

65. *Gaschütz W.* Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups – Canberra: Notes on Pure Mathematics 11, Australian Nat. Univ., 1979. – 98 p.

66. *Guo W.* The theory of classes of groups. – Beijing, New York: Kluwer Academic Publishers Science Press, 2000. – 259 p.

67. *Hall P.* A note on soluble groups // J. London Math. Soc. 1928. V. 3. – P. 98–105.

68. *Hall P.* On the Sylow system of a soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43. – P. 316–323.

69. *Hall P.* On the system normalizers of a soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43. – P. 507–528.

70. *Hall P.* The construction of soluble groups // J. Reine Angew. Math. 1940. V. 182. – P. 206–214.

71. *Hartley B.* On Fischer's analization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. V. 3. N 9. – P. 193–207.

72. *Hawkes T.* On formation subgroups of finite soluble group // J. London Math. Soc. 1968. V. 44. N 2. – P. 243–250.

73. *Huppert B.* Subnormale Untergruppen und p-Sylowgruppen // Acta Sci. Math. 1961. V. 22. – P. 46–61.

74. *Huppert B.* Endliche Gruppen, I – Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1967. – 793 p.

75. *Mann A.* $\mathfrak{H}$-normalizers of a finite solvable groups // J. Algebra. 1970. V. 14. N 3. – P. 312–325.

76. *Schmid P.* Lokale Formationen endlicher Gruppen // Math. Z. 1974. V. 137. N 1. – P. 31–48.

77. *Schunck H.* $\mathfrak{H}$-Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1967. V. 97. N 4. – P. 326–330.

78. *Shemetkov L.A.* On partially saturated formations and residuals of finite groups // Commun. Algebra. 2001. V. 29. N 9. – P. 4125–4137.

79. *Vedernikov V.A.* Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes // Proc. of the Steklov Institute of Math. 2001. V. 2. – P. 217–233.

80. *Wielandt H.* Vertauschbare nachinvariante Untergruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 1958. V. 22. – P. 215–228.

81. *Wielandt H.* Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen // Proc. Intern. Congress Math., Edinburgh, 1958. – London: Cambridge Univ. Press, 1960. – P. 268–278. (Перевод на рус. яз.: Пути развития структурной теории конечных групп // Международный математический конгресс в Эдинбурге, 1958 г. (обзорные доклады). – М.: Физматгиз, 1962. – С. 263–276).

Работы автора по теме диссертации[1]

82. *Сорокина М.М.* О композиционных и локальных критических формациях // Известия вузов. Математика. 2000. № 7. – С. 1–8.

83. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика. 2001. Т. 13. № 3. – С. 125–144.

84. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 71. № 1. – С. 43–60.

85. *Сорокина М.М., Силенок Н.В.* Критические Ω-расслоенные формации конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 72. № 2. – С. 269–282.

86. *Сорокина М.М., Корпачева М.А.* О критических Ω-расслоенных формациях конечных групп // Дискретная математика. 2006. Т. 18. № 1. – С. 106–115.

87. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* О критических ω-веерных формациях конечных групп // Математические заметки. 2006. Т. 79. № 1. – С. 87–94.

[1] Статьи [82] – [97] опубликованы в изданиях, входящих (на момент выхода статей) в перечень ВАК для основных результатов докторских диссертаций.

88. *Сорокина М.М., Корпачева М.А.* Критические n-кратно ω-веерные формации конечных групп // Вестник Брянского государственного университета. 2010. № 4. – С. 47–52.

89. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* Критические ω-веерные τ-замкнутые формации конечных групп // Дискретная математика. 2011. Т. 23. № 1. – С. 94–101.

90. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* Критические Ω-канонические формации мультиоператорных T-групп // Вестник Брянского государственного университета: Точные и естественные науки. 2011. № 4. – С. 18–21.

91. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* Критические Ω-расслоенные τ-замкнутые формации конечных групп // Вестник Брянского государственного университета: Точные и естественные науки. 2012. № 4. – С. 75–79.

92. *Сорокина М.М.* Полувнутренние Ω-спутники Ω-расслоенных формаций конечных групп // Вестник Брянского государственного университета: Точные и естественные науки. 2013. № 4. – С. 46–48.

93. *Каморников С.Ф., Сорокина М.М.* О дополняемости элементов решетки разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов // Вестник Брянского государственного университета: Точные и естественные науки. 2014. № 4. – С. 9–14.

94. *Сорокина М.М.* τ-минимальные не $\mathfrak{F}$-группы для ω-веерных формаций и классов Фиттинга // Вестник Брянского государственного университета. 2015. № 3 (26). – С. 420–422.

95. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* О дополнениях к корадикалам конечных групп // Математический сборник. 2016. Т. 207. № 6. – С. 27–52.

96. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* $\mathfrak{F}$-проекторы и $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57. № 6. – С. 1224–1239.

97. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторы конечных групп // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. № 1. – С. 64–82.

98. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Препринт: Брянск, БГПУ. 1999. № 5. – 25 с.

99. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Препринт: Брянск, БГПУ. 1999. № 6. – 23 с.

100. *Сорокина М.М.* О расслоенных критических формациях // Гашюцова теория классов групп и других алгебраических систем: междунар. научн. конф., посвящ. 80-летию проф. В. Гашюца, Гомель, 16–21 октября 2000 г.: тез. докл. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им Ф. Скорины. – Гомель, ГГУ, 2000. – С. 58–59.

101. *Сорокина М.М., Силенок Н.В.* О Ω-канонических и Ω-биканонических критических формациях // Международный семинар по теории групп, посвящ. 70-летию А. И. Старостина и 80-летию Н. Ф. Сесекина, Екатеринбург, 17–21 декабря 2001 г.: тез. докл. / Ин-т математики и механики УрО РАН. – Екатеринбург, 2001. – С. 208–209.

102. *Сорокина М.М., Силенок Н.В.* Критические Ω-биканонические нормально наследственные формации конечных групп // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, № 5 (14), Вопросы алгебры – 18, 2002. – С. 125–133.

103. *Сорокина М.М.* О критических Ω-биканонических нормально наследственных формациях // Международная математическая конференция, посвящ. столетию начала работы Д. А. Граве (1863–1939) в Киевском ун-те, Киев, 17–22 июня 2002 г.: тез. докл. / Киевский нац. ун-т им. Т. Шевченко, Ин-т математики НАН Украины. – Киев, 2002. – С. 125–126.

104. *Сорокина М.М.* О критических Ω-расслоенных формациях конечных групп // Алгебра и ее приложения : международная конференция, Красноярск, 5–9 августа 2002 г.: тез. докл. / Красноярский гос. ун-т, Ин-т вычислительного моделирования СО РАН, Ин-т математики СО РАН. – Красноярск, 2002. – С. 111–112.

105. *Сорокина М.М.* О максимальных Ω-расслоенных подформациях Ω-расслоенных формаций // Международная алгебраическая конференция,

посвящ. памяти З.И. Боревича, Санкт-Петербург, 17–23 сентября 2002 г.: тез. докл. / Санкт-Петербургский гос. ун-т, Санкт-Петербургск. отделение математического ин-та им. В. А. Стеклова РАН, Междунар. математич. ин-т им. Л. Эйлера, Санкт-Петербугск. математич. общ-во, ТПО "Северный очаг". – Санкт-Петербург, 2002. – С. 68–69.

106. *Сорокина М.М.* О критических ω-веерных формациях конечных групп // Колмогоров и современная математика: международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А. Н. Колмогорова, Москва, 16–21 июня 2003 г.: тез. докл. / Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН. – Москва, 2003. – С. 903.

107. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* Минимальные ω-специальные не $\mathfrak{H}$-формации // Вестник Брянского государственного университета. 2003. № 2. – С. 144–148.

108. *Сорокина М.М., Котлярова М.В.* ω-центральные формации конечных групп // Вестник Брянского государственного университета. 2004. № 3. – С. 112–115.

109. *Сорокина М.М. Корпачева М.А.* О τ-замкнутости классов групп // Вестник Брянского государственного университета. 2005. № 4. – С. 192–194.

110. *Сорокина М.М. Корпачева М.А.* О τ-замкнутых классах групп // Классы групп и алгебр: международная алгебраическая конференция, посвящ. 100-летию со дня рождения С.А. Чунихина, Гомель, 5–7 октября 2005 г.: тез. докл. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Ин-т математики НАН Беларуси, Луганский нац. пед. ун-т им. Т. Шевченко. – Гомель: ГГУ, 2005. – С. 102–103.

111. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* О критических ω-веерных τ-замкнутых формациях // Классы групп, алгебр и их приложения: международная алгебраическая конференция, посвящ. 70-летию со дня рождения Л. А. Шеметкова, Гомель, 9–11 июля 2007 г.: тез докл. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Ин-т математики НАН Беларуси. – Гомель: ГГУ, 2007. – С. 87–88.

112. *Сорокина М.М., Корпачева М.А.* О n-кратно ω-веерных формациях конечных групп // Алгебра и ее приложения : международная конференция, посвящ. 75-летию В. П. Шункова, Красноярск, 12–18 августа 2007 г.: тез. докл. – Красноярск, 2007. – С. 126–127.

113. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* О Ω-расслоенных τ-замкнутых формациях конечных групп // Международная алгебраическая конференция, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша, Москва, 28 мая – 3 июня 2008 г.: тез. докл. / Московский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. – Москва: МГУ, 2008. – С. 137–138.

114. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* О максимальных τ-замкнутых подформациях τ-замкнутых формаций // Вестник Брянского государственного университета. 2009. № 4. – С. 36–41.

115. *Сорокина М.М., Сазоненко С.М., Симохина А.П.* О подгрупповых функторах // Вестник Брянского государственного университета. 2009. № 4. – С. 96–100.

116. *Сорокина М.М.* О критических ω-веерных формациях конечных групп // Препринт: Брянск, БГУ, 2009. № 10. – 12 с.

117. *Сорокина М.М., Корпачева М.М.* О критических ω-веерных формациях конечных групп // Алгебра, логика и приложения: международная алгебраическая конференция, Красноярск, 19–25 июля 2010 г.: тез. докл. / Сибирский федеральный ун-т. – Красноярск: СФУ, 2010. – С. 122.

118. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* О n-кратно Ω-расслоенных формациях конечных групп // IX Международная школа-конференция по теории групп, посвящ. 90-летию со дня рождения З. И. Боревича, Владикавказ, 9–15 июля 2012 г.: тез. докл. / Ин-т математики и механики УРО РАН, Южный математический ин-т ВНЦ РАН и РСО-А, Северо-Осетинский гос. ун-т им. К. Л. Хетагурова. – Владикавказ, 2012. – С. 74–75.

119. *Сорокина М.М.* О Ω-спутниках Ω-расслоенных формаций конечных групп // Алгебра и логика: теория и приложения: международная конференция, посвящ. 80-летию и памяти В.П. Шункова, Красноярск, 21-27 июля 2013

г.: тез. докл. / Сибирский федеральный ун-т, Ин-т математики СО РАН, Ин-т вычислительного моделирования СО РАН. – Красноярск: СФУ, 2013. – С. 125.

120. *Сорокина М.М.* Критические τ-замкнутые n-кратно ω-специальные формации конечных групп // Международный периодический научный журнал «Science and Education A New Dimension: Natural and Technical Science». – Будапешт, 2013. V. 8. – С. 71–75.

121. *Сорокина М.М., Петрушин П.В., Макухин Р.А.* О τ-замкнутых n-кратно ω-центральных и n-кратно Ω-композиционных формациях конечных групп // Международный периодический научный журнал «Science and Education A New Dimension: Natural and Technical Science», II(4) Issue 32. – Будапешт, 2014. – С. 48–51.

122. *Сорокина М.М.* О свойствах ω-веерных формаций конечных групп // Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования: всероссийская научная конференция, посвящ. 60-летию проф. В.А. Койбаева, Владикавказ, 26–27 июня 2015 г.: тез. докл. / Северо-Осетинский гос. ун-т им. К.Л. Хетагурова; Владикавказский научный центр РАН; Южный математический ин-т ВНЦ РАН. – Владикавказ, 2015. – С. 98.

123. *Сорокина М.М., Ведерников В.А.* On complements for $\mathfrak{F}$-residuals in finite groups // Groups and Graphs, Algorithms and Automata: Abstracts of the International Conference and PhD Summer School in honor of the 80th Birthday of Professor Vyacheslav A. Belonogov and of the 70th Birthday of Professor Vitaly A. Baransky, Yekaterinburg, 9–15 August 2015. – Yekaterinburg: UrFU, 2015. – P. 88.

124. *Сорокина М.М., Макухин Р.А.* О максимальном полувнутреннем ω-спутнике ω-веерной формации конечных групп // Межд. периодический научный журнал «Science and Education A New Dimension: Natural and Technical Science», III(8) Issue 73. – Будапешт, 2015. – С. 75–78.

125. *Петрушин П.В., Сорокина М.М.* О τ-минимальных не $\mathfrak{F}$-группах для Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ [Электронный ресурс] // Ученые записки Брян-

ского государственного университета. 2016. № 1. – С. 36–41. – Режим доступа: http://scim-brgu.ru/wp-content/arhiv/UZ-2016-N1.pdf.

126. *Сорокина М.М., Корочкина Г.О., Кочергина А.Н.* О вложении классов конечных групп в Ω-расслоенные и ω-веерные формации // Естественные и матем. науки в совр. мире. № 12 (47): сб. статей по материалам XLIX Межд. научно-практической конф. – Новосибирск: Изд. «СибАК», 2016. – С. 96–102.

127. *Vedernikov V.A., Sorokina M.M.* On $\mathfrak{F}^{\omega}$-projectors and $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroups of finite groups // Алгебра и логика: теория и приложения: международная конференция, посвящ. 70-летию со дня рождения В.М. Левчука, Красноярск, 24–29 июля 2016 г.: тез. докл. / Сибирский федерельный ун-т, Ин-т математики СО РАН, Ин-т вычислительного моделирования СО РАН. – Красноярск: СФУ, 2016. – С. 122–123.

128. *Vedernikov V.A., Sorokina M.M.* On $\mathfrak{F}^{\omega}$-normalizers of finite groups // Международная XI школа-конференция по теории групп, посвящ. 70-летию со дня рождения А.Ю. Ольшанского, Красноярск, 27 июля – 2 августа 2016 г.: тез. докл. / Сибирский федеральный ун-т, Ин-т математики СО РАН, Ин-т вычислительного моделирования СО РАН, Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. – Красноярск: СФУ, 2016. – С. 87–88.

129. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторы и $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающие подгруппы конечных групп // Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, посвященная юбилеям П.А. и А.П. Широковых, Казань, 26 июня – 2 июля 2016 г.: тез. докл. / Казанский федеральный университет, Академия наук Республики Татарстан. – Казань: КФУ, 2016. – С. 125–126.

130. *Vedernikov V.A., Sorokina M.M.* On properties of $\mathfrak{F}^{\omega}$-projectors and $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroups of finite groups // Актуальные проблемы прикладной математики и физики: международная научная конференция, Нальчик, 17–21 мая 2017 г.: тез. докл. / Ин-т прикладной математики автоматиза-

ции, Кабардино-Балкарский государственный ун-т им. Х.М. Бербекова. – Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2017. – С. 262–263.

131. *Sorokina M.M., Vedernikov V.A.* On the $\mathfrak{F}$-coradicals of finite groups // Groups and Graphs, Metrics and Manifolds, 2017: Abstracts of the International Conf. and PhD-Master Summer School, Yekaterinburg, 22–30 July 2017 / Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin. – Yekaterinburg: UrFU, 2017. – P. 97.

132. *Sorokina M.M.* The $\mathfrak{F}_\Omega$-covering subgroups and $\mathfrak{F}_\Omega$-projectors of finite groups // Groups and Graphs, Metrics and Manifolds, 2017: Abstracts of the International Conf. and PhD-Master Summer School, Yekaterinburg, 22–30 July 2017 / Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin. – Yekaterinburg: UrFU, 2017. – P. 96.