ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

ШЛЕПКИН АЛЕКСЕЙ АНАТОЛЬЕВИЧ

ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ КОНЕЧНЫМИ ГРУППАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физ.-мат. наук,
профессор Д.В. Лыткина

Красноярск 2018

Оглавление

Введение

Актуальность темы. В диссертационной работе рассматриваются два класса бесконечных групп — периодические группы и группы Шункова, обладающие насыщающими множествами, состоящими из конечных групп специального вида. Напомним, что под периодической группой понимается группа, в которой любой её элемент имеет конечный порядок. Класс групп Шункова был введен В.П. Шунковым в 70-е годы прошлого века, и первоначально сам В.П. Шунков называл такие группы сопряженно-бипримитивно конечными [33, 40].

Группа G называется группой Шункова (сопряженно-бипримитивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу.

Как следует из работ А.В. Рожкова и других математиков, группы Шункова отличны от локально конечных групп [37]. Кроме того, построены примеры групп Шункова, содержащих элементы бесконечного порядка и не обладающих периодической частью [48]. Под периодической частью группы понимается множество всех элементов конечного порядка группы при условии, что они образуют подгруппу.

Понятие насыщенности впервые появилось в работе А.К. Шлепкина [51] в 1993 г.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Множество $\mathfrak{X}$ в этом случае будем называть насыщающим множеством.

Появление понятия насыщенности было обусловлено следующими двумя причинами.

Первое. Большинство конструкций периодических не локально конечных групп, известных к тому времени, показали, что между классом локально конечных групп и классом всех периодических групп существует бесконечно много промежуточных классов групп с достаточно слабыми условиями конечности. В качестве примера можно привести конструкции С.В. Алешина [2], Е.С. Голода [5], Р.И. Григорчука [7], И.Г. Лысенка [20], С.В. Иванова [73], П.С. Новикова, С.И. Адяна [1], А.Ю. Ольшанского [31], А.В. Рожкова [37] и А.И. Созутова [41]. Однако сразу выявилась характерная особенность этих конструкций. Как правило, это были группы, не содержащие конечных простых неабелевых подгрупп.

Второе. При исследовании групп с различными вариантами условия минимальности (локально конечные группы с условием минимальности [58], группы Шункова с условием примарной минимальности [54]) возникал контрпример, который являлся группой с системой конкретных конечных простых неабелевых подгрупп.

Отметим, что условие насыщенности не требует, чтобы насыщающее множество состояло из подгрупп группы G. Более того, насыщающее множество определяется неоднозначно для группы G и может содержать группы, не имеющие изоморфных копий в группе G. Однако всегда можно рассматривать насыщающее множество, состоящее из групп, имеющих изоморфные копии в G.

Пусть G – группа, K – подгруппа G, $\mathfrak{X}$ – множество групп. Через $\mathfrak{X}_G(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если 1 – единичная подгруппа группы G, то $\mathfrak{X}_G(1)$ будет обозначать множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно, о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$, и соответственно вместо $\mathfrak{X}_G(1)$ будем писать $\mathfrak{X}(1)$.

Таким образом, при заданном насыщающем множестве $\mathfrak{X}$ группы G множество $\mathfrak{X}_G(1)$ также является насыщающим множеством для G, но состоящим из подгрупп группы G, являющихся изоморфными копиями групп из множества $\mathfrak{X}$.

Как оказалось впоследствии, понятие насыщенности тесно связано с понятиями покрытия [17] и локальной системы [74].

Пусть G — группа, $\mathfrak{L}$ — множество ее подгрупп. Назовем множество $\mathfrak{L}$ локальной системой, если любая конечно порожденная подгруппа группы G лежит в подгруппе из множества $\mathfrak{L}$.

В 60-е годы прошлого столетия П.Г. Конторович, А.С. Пекелис и А.И. Старостин [13–15] стали рассматривать покрытия в классах бесконечных групп. Локально конечные группы, обладающие локальными системами из конечных групп, рассматривались в [74].

В отличие от насыщающего множества локальная система группы может состоять только из подгрупп группы G. Отметим, что в классе локально конечных групп понятия насыщенности и локальной системы эквивалентны. Приведем ряд примеров и результатов, иллюстрирующих введенные выше понятия насыщенности и локальной системы, а также связь и различие между ними.

Свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ [1]. Данная группа, как следует из результата П.С. Новикова и С.И. Адяна, насыщена группами из множества $\mathfrak{X} = \{\langle a\rangle | a^n = 1,\ n$ – простое, $n \geq 665\}$. Множество $\mathfrak{X}(1) = \{H | H < B(m,n),\ |H| = n\}$, очевидно, не является локальной системой для $B(m,n)$. Отметим, что $B(m,n)$ — периодическая не простая не локально конечная группа.

Группа Ольшанского $G(\infty)$ [31]. Данная группа является двупорожденной периодической простой; она, как следует из результатов А.Ю. Ольшанского, насыщена группами из множества $\mathfrak{X} = \{\langle a\rangle | a^p = 1,\ p$ простое, $p > 10^{74}\}$. Множество $\mathfrak{X}(1) = \{H | H < G(\infty),\ |H| = p\}$, очевидно, не является локальной системой $G(\infty)$.

Группа $L_2(P)$. Пусть P — бесконечное локально конечное поле,

$$P_1 < P_2 < ... < P_i < \ -$$

бесконечная цепочка конечных подполей поля P, такая, что $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$. Тогда $L_2(P)$ насыщена группами из множества $\mathfrak{X} = \{L_2(P_i) | i = 1, 2, ...\}$. В отличие от первых двух случаев, множество $\mathfrak{X}(1) = \{H | H < G, H \widetilde{\in} \mathfrak{X}\}$ — локальная система группы $L_2(P)$. С другой стороны, цепочка $L_2(P_1) < L_2(P_2) < ... < L_2(P_i) < ...$, совпадающая с $\mathfrak{X}$, также является локальной системой группы $L_2(P)$ и $L_2(P) = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_2(P_i)$. Отметим, что насыщающее множество для группы $L_2(P)$, а также две ранее указанные локальные системы состоят из групп лиева типа ранга 1.

Последний пример приводит к следующим обобщениям для локально конечных групп, обладающих локальными системами, состоящими из возрастающей цепочки конечных простых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности.

Теорема (О.Н. Кегель, Б.А. Верфриц) [74]. *Если локально конечная группа обладает локальной системой, состоящей из возрастающей цепочки конечных простых групп лиева типа ранга* 1, *то она изоморфна некоторой группе лиева типа ранга* 1.

Теорема (В.В. Беляев, А.В. Боровик, С. Томас, Б. Хартли и Г. Шют) [3, 4, 70, 76]. *Если локально конечная группа обладает локальной системой, состоящей из возрастающей цепочки конечных простых подгрупп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, то и сама группа является группой лиева типа.*

Сформулируем приведенный выше результат в терминах насыщенности.

Теорема. *Если локально конечная группа обладает насыщающим множеством, состоящим из конечных простых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, то и сама группа является группой лиева типа.*

Следующий результат Ф. Холла подчеркивает, в данном случае, важность условия насыщенности локально конечной группы конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности.

Теорема (Ф. Холл) [69]. *Существует счетная локально конечная группа, содержащая любую счетную локально конечную группу* (*с точностью до изоморфизма*).

Из данного результата вытекает существование простых локально конечных групп, обладающих насыщающими множествами, состоящими из конечных простых групп, но не являющихся простыми локально конечными группами лиева типа над подходящим локально конечным полем.

В свете приведенных выше результатов естественно было поставить вопрос о строении периодической группы, насыщенной конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности.

Коуровская тетрадь, вопрос 14.101 [16]. *Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является простой группой лиева типа?*

Приведенный ниже результат А.Ю. Ольшанского подчеркивает, в данном случае, важность условия насыщенности периодической группы конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности. Из него вытекает существование периодических простых не локально конечных групп, содержащих конечные простые неабелевы подгруппы, но не обладающих насыщающими множествами, состоящими из конечных простых неабелевых групп, в частности, из конечных простых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности.

Теорема (А.Ю. Ольшанский) [32]. *Любая счетная периодическая группа вкладывается в простую периодическую группу с двумя порождающими.*

Как отмечалось выше, класс групп Шункова отличен от класса периодических групп. Кроме того, вопрос о расположении элементов конечного порядка в группе Шункова представляет отдельную задачу. Как оказалось, группы Шункова, насыщенные некоторыми группами лиева типа, обладают периодической частью, изоморфной соответствующей группе лиева типа над подходящим локально конечным полем. Поэтому уместно рассмотреть редакцию вопроса 14.101 для групп Шункова.

Вопрос: *Верно ли, что группа Шункова, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, обладает периодической частью, изоморфной простой группе лиева типа?*

При решении вопроса 14.101 возникла необходимость характеризации групп, обладающих насыщающим множеством, состоящим не обязательно из конечных простых групп лиева типа (прямые произведения, центральные расширения, сплетенные группы, группы диэдра). А.К. Шлёпкин в [54], изучая периодическую группу G, насыщенную конечными простыми группами $Re(3^n)$, рассматривал централизатор инволюции x из G. Как оказалось, $C_G(x)$ насыщен прямыми произведениями конечных групп вида $L_2(3^n) \times Z_2$, где Z_2 есть группа порядка два. Используя этот факт, удалось показать, что $C_G(x) \simeq L_2(Q) \times Z_2$, где Q — локально конечное поле характеристики три, а затем и доказать требуемый изоморфизм $G \simeq Re(Q)$. Кроме того, как показали С.В. Иванов [73] и И.Г. Лысенок [20], бернсайдовы группы $B(m, n)$ достаточно большого четного периода n не локально конечны и насыщены прямыми произведениями групп диэдра, взятых в конечном числе, причем число множителей прямого произведения может быть сколь угодно большим. Далее Б. Амберг и Л.С. Казарин [59] доказали, что периодическая группа, насыщенная группами диэдра, локально конечна. Таким образом, актуален общий вопрос о строении группы, насыщенной различными конечными группами. Группы, насыщенные различными множествами конечных групп, изучались А.И. Созутовым, К.А. Филипповым, В.Д. Мазуровым, Д.В. Лыткиной, Д.Н. Панюшкиным [21–27, 34–36, 45]. В обзоре [18] и монографии [19] приведена библиография работ, в которых исследовались группы с условием насыщенности, и сформулированы основные проблемы, связанные с изучением групп, насыщенных группами из заданного множества групп.

Основные результаты диссертации

1. Доказано, что периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M} = \{GL_2(q) \mid q$ — степень простого числа$\}$, изоморфна $GL_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле (теорема 3.4.1).

2. Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M} = \{PGL_2(q) \mid q$ — степень простого числа$\}$, изоморфна $PGL_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле (теорема 3.3.1).

3. Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q) \mid q$ — степень простого нечетного числа$\}$, изоморфна $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q (теорема 4.3.1).

4. Доказано, что группа Шункова G, насыщенная группами из множества

$$\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q) \mid q \text{ — степень простого нечетного числа}\},$$

обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q (теорема 4.2.1).

5. Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга 1, изоморфна простой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем (теорема 6.2.1).

6. Доказано, что группа Шункова G, насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга 1, обладает периодической частью, изоморфной простой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем (теорема 5.2.1).

Диссертация состоит из введения, 7 глав и списка литературы. Нумерация определений, теорем, предложений, примеров соответствует разбиению на главы и параграфы. Например, теорема 7.2.1 — это первая теорема из второго параграфа седьмой главы. Текст диссертации представлен на 142 страницах. Список литературы включает 105 наименований. Результаты диссертации опубликованы в работах [78] — [96], из них 19 работ опубликованы в изданиях из списка ВАК.

Во введении рассматривается актуальность темы диссертационного исследования и формулируются основные результаты.

В первой главе рассматриваются известные факты и вспомогательные утверждения.

Во второй главе изучаются группы, насыщенные различными множествами групп.

В параграфе 2.1 исследуются периодические группы, насыщенные сплетенными группами.

Теорема 2.1.1. *Бесконечная 2-группа, насыщенная сплетенными группами, изоморфна сплетению бесконечной локально циклической 2-группы и группы порядка 2.*

Построен пример 2.1.11, показывающий, что теорема 2.1.1 для произвольных периодических групп неверна. Однако для некоторых классов групп, в частности, для локально конечных групп и групп Шункова, такое обобщение возможно.

Теорема 2.1.12. *Пусть G — локально конечная группа, насыщенная сплетенными группами. Тогда $G = (A \times B) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где $A^v = B$, A — локально циклическая группа, $|v| = 2$.*

Теорема 2.1.13. *Пусть G — группа Шункова, насыщенная сплетенными группами. Тогда G обладает периодической частью $T(G) = (A \times B) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где $A^v = B$, A — локально циклическая группа и $|v| = 2$.*

Теоремы 2.1.1, 2.1.12, 2.1.13 и пример 2.1.11 получены автором лично и опубликованы в [78, 96].

В параграфе 2.2 рассмотрены достаточные условия, при которых бесконечная группа не будет простой.

Теорема 2.2.1. *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества конечных простых неабелевых групп и в G есть инволюция z такая, что $C_G(z)$ содержит конечное число элементов конечного порядка. Тогда G обладает периодической частью, изоморфной конечной простой неабелевой группе. В частности, если G — бесконечная группа, то G — не простая группа.*

Теорема 2.2.1 получена автором лично и опубликована в [90].

В параграфе 2.3 исследованы периодические группы и группы Шункова, насыщенные группами диэдра и A_5.

Пусть $\mathfrak{A} = \{A_5\}$ — множество, состоящее из одной группы A_5, $\mathfrak{B}$ — множество, состоящее из конечных групп диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$.

Теорема 2.3.1. *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, либо изоморфна группе A_5, либо изоморфна локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Теорема 2.3.4. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна либо группе A_5, либо локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Теоремы 2.3.1, 2.3.4 получены автором лично и опубликованы в [88].

В параграфе 2.4 исследованы группы, насыщенные группами диэдра и линейными группами степени 2.

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество, состоящее из групп $L_2(q)$, где $q \equiv 3, 5 \pmod 8$, $\mathfrak{B}$ — множество, состоящее из конечных групп диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$.

Теорема 2.4.1. *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна либо группе $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q, либо локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Теорема 2.4.10. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна либо группе $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q, либо локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Теоремы 2.4.1, 2.4.10 получены автором лично и опубликованы в [92].

В третьей главе исследуются группы, насыщенные группами $GL_2(q), PGL_2(q)$.

В параграфе 3.1 исследуются локально конечные группы, насыщенные группами $GL_2(q)$ над конечными полями произвольной характеристики. Пусть $\mathfrak{J} = \{GL_2(q)\}$, где $q = p^n$. Отметим, что ни характеристика поля p, ни натуральное n не фиксируются.

Теорема 3.1.1. *Локально конечная группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{J}$, изоморфна $GL_2(P)$ для некоторого локально конечного поля P.*

Теорема 3.1.1 получена автором лично и опубликована в [79].

В параграфе 3.2 исследуются периодические группы Шункова, насыщенные группами $GL_2(q)$, $PGL_2(q)$ над конечными полями фиксированной характеристики. Пусть

$$\mathfrak{J} = \{GL_2(p^n)\}, \mathfrak{M} = \{PGL_2(p^n)\},$$

где p — фиксированное простое число, а натуральное n не фиксируется.

Теорема 3.2.7. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна $PGL_2(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики p.*

Теорема 3.2.13. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{I}$, изоморфна $GL_2(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики p.*

Теоремы 3.2.7, 3.2.13 получены автором лично и опубликованы в [80].

В параграфе 3.3 исследуются периодические группы, насыщенные группами $PGL_2(q)$ над произвольными конечными полями. Пусть $\mathfrak{M} = \{PGL_2(q) | q$ — степень простого числа$\}$.

Теорема 3.3.1. *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна $PGL_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле.*

Теорема 3.3.1 получена автором лично и опубликована в [82].

В параграфе 3.4 исследуются периодические группы Шункова, насыщенные группами $GL_2(q)$ над произвольными конечными полями.

Теорема 3.4.1. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Im$, состоящего из всех групп $\{GL_2(p^n)\}$ (здесь p и n не фиксируются), изоморфна $GL_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.*

Теорема 3.4.1 получена автором лично и опубликована в [83].

В главе 4 рассмотрены группы, насыщенные унитарными и линейными группами степени три.

В параграфе 4.1 рассмотрены группы Шункова, насыщенные группами из множества $\mathfrak{M} = \{U_3(q)\}$.

Теорема 4.1.7. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной группе $U_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.*

Теорема 4.1.7 получена автором лично и опубликована в [87].

В параграфе 4.2 исследованы группы Шункова, насыщенные унитарными и линейными группами степени три над конечными полями нечетной характеристики. Пусть $\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q)\}$, где $q = p^n$ нечетно. Отметим, что ни характеристика поля p, ни натуральное n не фиксируется.

Теорема 4.2.1. *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.*

Теорема 4.2.1 получена автором лично и опубликована в [84].

В параграфе 4.3 исследованы периодические группы, насыщенные унитарными и линейными группами степени три.

Теорема 4.3.1. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества*

$$\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q) \mid q \text{ — степень простого числа, } q \geqslant 3\}.$$

Тогда G изоморфна $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

Теорема 4.3.1 получена автором совместно с Д.В. Лыткиной и опубликована в [85].

В главе 5 рассмотрены группы Шункова, насыщенные группами лиева типа ранга 1.

В параграфе 5.1 рассмотрены группы Шункова, насыщенные группами из множества $\{J_1, L_2(q), Re(q), U_3(q), Sz(q)\}$.

Теорема 5.1.1. *Пусть группа Шункова G насыщена конечными простыми неабелевыми группами и в любой её конечной 2-подгруппе K все инволюции из K лежат в центре K. Тогда G обладает периодической частью, которая изоморфна одной из групп следующего множества:*

$$\{J_1, L_2(Q), Re(Q), U_3(Q), Sz(Q)\}$$

для подходящего локально конечного поля Q.

Теорема 5.1.1 получена автором лично и опубликована в [95].

В параграфе 5.2 рассмотрены группы Шункова, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1.

Теорема 5.2.1. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга 1, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем Q.*

Теорема 5.2.1 получена автором лично и опубликована в [86, 89].

В главе 6 рассмотрены периодические группы, насыщенные группами лиева типа ранга 1.

В параграфе 6.1 рассмотрены периодические группы, насыщенные линейными группами степени 2 и унитарными группами степени 3.

Теорема 6.1.1. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества конечных простых групп*

$$\mathfrak{M} = \{L_2(r), U_3(q) \mid r, q \text{ нечётные}, \ r > 3\}.$$

Тогда G изоморфна $L_2(R)$ или $U_3(R)$, где R — локально конечное поле нечётной характеристики.

Теорема 6.1.1 получена автором совместно с Д.В. Лыткиной и опубликована в [91].

В параграфе 6.2 рассмотрены периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1.

Теорема 6.2.1. *Пусть периодическая группа G насыщена конечными простыми группами лиева типа ранга 1. Тогда G изоморфна группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем.*

Теорема 6.2.1 получена автором лично и опубликована в [93].

В главе 7 рассмотрены периодические группы 2-ранга 2 и группы Шункова 2-ранга 2, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами. Как показали Альперин, Брауэр и Горенстейн, конечными простыми группами 2-ранга 2 с точностью до изоморфизмов являются следующие группы: $L_2(q)$, A_7, $L_3(p)$, $U_3(r)$, M_{11}, $U_3(4)$, где q, p, r нечетные, $q > 3$ [61]. В данной главе этот классический результат переносится на периодические группы 2-ранга 2 и на группы Шункова 2-ранга 2, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами.

В параграфе 7.1 рассмотрены периодические группы 2-ранга 2, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами.

Теорема 7.1.1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — множество всех периодических групп 2-ранга 2, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами. Тогда с точностью до изоморфизма*

$$\mathfrak{G} = \{L_2(Q),\ A_7,\ L_3(P),\ U_3(R),\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

где Q, P, R — всевозможные локально конечные поля нечетных характеристик, $|Q| > 3$.

Теорема 7.1.1 получена автором совместно с А.И. Созутовым и Д.В. Лыткиной и опубликована в [94].

В параграфе 7.2 рассмотрены группы Шункова 2-ранга 2, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами.

Теорема 7.2.1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — множество всех групп Шункова 2-ранга 2, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами. Тогда для любой группы $G \in \mathfrak{G}$, G обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна одной из групп множества*

$$\{L_2(Q),\ A_7,\ L_3(P),\ U_3(R),\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

где Q, P, R — всевозможные локально конечные поля нечетных характеристик, $|Q| > 3$.

Теорема 7.2.1 получена автором лично и опубликована в [95].

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях:

1. "Алгебра и математическая логика", посвященная 100-летию со дня рождения В.В. Морозова (Казань, 25.09.2011–30.09.2011).
2. "Студент и научно-технический прогресс" (Новосибирск, 13.04.2012–19.04.2012).
3. International conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov, (Киев, 20.08.2012–26.08.2012).
4. "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 11.11.2013–15.11.2013).
5. "Современные проблемы математики и ее приложений" (Екатеринбург, 2.02.2014–8.02.2014).
6. "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 10.11.2014-13.11.2014).
7. Groups and graphs, algorithms and automata (Екатеринбург, 09.08.2015–15.08.2015).
8. "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 03.05.2015–07.05.2015).
9. Конференция по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 26.06.2016–2.07.2016).
10. "Алгебра и Логика: Теория и приложения" (Красноярск, 24.07.2016-29.07.2016).
11. Конференция по алгебраической геометрии, комплексному анализу и компьютерной алгебре (Коряжма, 03.08.2016–09.08.2016).
12. Graphs and groups, spectra and symmetries (Новосибирск, 15.08.2016–28.08.2016).
13. "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2016. **Пленарный доклад**).
14. "Теория групп и ее приложения" (Пермь, 2017. **Пленарный доклад**).
15. "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2017).
16. "Теория групп и ее приложения", конференция, посвященная 65-летию со дня рождения профессора А.А. Махнева (Геленджик, 2018. **Пленарный доклад**).
17. Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша (Москва, 2018. **Пленарный доклад**).

Результаты диссертации обсуждались на следующих семинарах:

1. Красноярский городской алгебраический семинар, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета (2013,2015,2016,2017).
2. Семинар "Теория групп", Институт математики СО РАН (2015).
3. Семинар "Алгебра и логика", Институт математики СО РАН (2015).
4. Семинар отдела алгебры и топологии, Институт математики и механики УрО РАН (2017).

Результаты, представленные в диссертации, были поддержаны следующими грантами:

1. 2015/2016 – Грант Президента РФ (проект МД–3952.2015.9).
2. 2015/2016 – Государственное задание министерства образования и науки РФ Сибирскому федеральному университету на выполнение НИР в 2014 году, задание № 1.1462.2014/K.

3. 2016/2016 – Грант РФФИ (№ 16-31-50030).
4. 2018/2019 – Грант РНФ (№ 18-71-10007, **основной исполнитель**).
5. 2017/2018 – Грант РФФИ (№ 18-31-00257, **руководитель**).

Глава 1

Определения, известные факты и вспомогательные утверждения

1.1 Определения

Определение 1.1.1. *Пусть G — группа, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Запись $G \,\widetilde{\in}\, \mathfrak{X}$ означает, что G изоморфна некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Соответственно запись $G \,\widetilde{\notin}\, \mathfrak{X}$ означает, что в $\mathfrak{X}$ нет групп, изоморфных G.*

Определение 1.1.2. *Пусть G – группа, K – подгруппа G, $\mathfrak{X}$ – множество групп. Через $\mathfrak{X}_G(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если 1 – единичная подгруппа группы G, то $\mathfrak{X}_G(1)$ будет обозначать множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно, о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$ и соответственно вместо $\mathfrak{X}_G(1)$ будем писать $\mathfrak{X}(1)$.*

Определение 1.1.3. [51] *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{X}$ (или насыщена множеством $\mathfrak{X}$), если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$.*

Определение 1.1.4. [18] *Пусть группа G насыщена множеством $\mathfrak{X}$. Будем называть $\mathfrak{X}$ насыщающим множеством группы G.*

Определение 1.1.5. [33,40] *Группа G называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу.*

Определение 1.1.6. [10] *Если множество $T(G)$ всех элементов конечного порядка из группы G образует подгруппу, то $T(G)$ называется периодической частью группы G .*

1.2 Бесконечные группы

Предложение 1.2.1. [8] *Конечное инвариантное множество элементов конечного порядка в любой группе порождает конечную нормальную подгруппу.*

Предложение 1.2.2. [38] *Локально конечная группа G, насыщенная группами диэдра, изоморфна локально диэдральной группе.*

Предложение 1.2.3. [10, теорема 23.1.1] *Расширение локально конечной группы при помощи локально конечной группы есть локально конечная группа.*

Предложение 1.2.4. [62] *Локально конечная p-группа, обладающая максимальной конечной элементарной абелевой подгруппой, является черниковской.*

Предложение 1.2.5. [10] *Бесконечная локально конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой.*

Предложение 1.2.6. [57] *Периодическая группа, содержащая инволюцию с конечным централизатором, локально конечна и почти разрешима.*

Предложение 1.2.7. [43] *Пусть G — периодическая группа с инволюцией, S — силовская 2-группа из G, и пусть централизатор любой инволюции из S абелев. Тогда либо S — локально циклическая группа, либо $S \lhd G$, либо $G = R \times L_2(Q)$, где R — абелева группа без инволюций, Q — локально конечное поле характеристики 2.*

Предложение 1.2.8. [19] *Если в периодической группе G некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены.*

Предложение 1.2.9. *В бесконечной 2-группе T любая конечная подгруппа отлична от своего нормализатора. В частности, T содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Доказательство. Пусть K — конечная подгруппа бесконечной 2-группы G. Индукцией по $|K|$ покажем, что $N_G(K) \neq K$. Это очевидно, если $|K| = 1$. Пусть t — инволюция из центра K и $|K| > 1$. Если $C_G(t)$ — конечная подгруппа, то по предложению 1.2.6 группа G локально конечна, и утверждение вытекает из справедливости нормализаторного условия в конечных нильпотентных группах. Если же $C_G(t)$ — бесконечная группа, то, не нарушая общности, можно считать, что $C_G(t) = G$, т. е. $\langle t\rangle \trianglelefteq G$. По предположению индукции $N_{\overline{G}}(\overline{K}) \neq \overline{K}$, где $\overline{G} = G/\langle t\rangle$, $\overline{K} = K/\langle t\rangle$, поэтому $N_G(K) \neq K$.

Предложение доказано.

Предложение 1.2.10. [27, 56] *Пусть G — 2-группа, содержащая максимальную конечную элементарную абелеву подгруппу. Тогда G — черниковская группа.*

Предложение 1.2.11. [10, теорема 9.1.4] *Полная подгруппа A абелевой группы G выделяется в G прямым слагаемым.*

Предложение 1.2.12. (В.Д. Мазуров) *Пусть H — собственная нормальная подгруппа группы G. Если $x^3 = 1$ для любого элемента из $G \setminus H$, то H нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $x \in G \setminus H$. Тогда $(hx^{-1})^3 = 1$ для любого $h \in H$. Так как

$$(hx^{-1})^3 = hh^x h^{x^2} x^{-3} = hh^x h^{x^2},$$

то x индуцирует в H расщепляющий автоморфизм порядка 3. По лемме 6 из [9], доказанной В. Д. Мазуровым, верно заключение предложения.

Предложение доказано.

Предложение 1.2.13. [23, лемма 6] *Пусть T — бесконечная силовская 2-подгруппа периодической группы G, $\mathfrak{M}_T$ — множество всех силовских 2-подгрупп группы G, сопряжённых с T, $\mathfrak{N}_T$ — непустое множество всех силовских 2-подгрупп группы G, не сопряжённых с T. Тогда для любого натурального t существуют такие $X \in \mathfrak{M}_T$ и $Y \in \mathfrak{N}_T$, что $|X \cap Y| \geqslant t$.*

Предложение 1.2.14. [53, 59] *Пусть G — периодическая группа, насыщенная конечными группами диэдра. Тогда $G = A \leftthreetimes \langle t \rangle$, где A — квазициклическая группа, t — инволюция, $a^t = a^{-1}$ для любого $a \in A$.*

Предложение 1.2.15. *Пусть G — периодическая группа, насыщенная группами из множества конечных простых неабелевых групп $\mathfrak{M}$. Тогда G — простая группа.*

Доказательство. Пусть, напротив, N — нетривиальная собственная нормальная подгруппа группы G, v — нетривиальный элемент из N. По условию v содержится в конечной простой подгруппе H группы G. Очевидно, H содержится в N, так как $H \cap N$ нетривиально и является нормальной подгруппой в H. Поскольку порядок H четен, можно считать, что v — инволюция. Аналогичные рассуждения показывают, что $G \setminus N$ содержит инволюцию w. По условию насыщенности $\langle v, w \rangle < K \mathrel{\widetilde{\in}} \mathfrak{M}$. Следовательно, K — конечная простая неабелева группа, что невозможно, поскольку в этом случае $K \cap N$ — собственная нетривиальная нормальная подгруппа группы K.

Предложение доказано.

Предложение 1.2.16. *Пусть локально конечная группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$ конечных простых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности. Тогда G изоморфна простой группе лиева типа.*

Доказательство. По предложению 1.2.15 G — простая группа. Она линейна по известной теореме Мальцева [30], и поэтому счетна (см. [74, теор. 1.L.2]). Следовательно, она является объединением возрастающей цепочки конечных групп, изоморфных группам из множества $\mathfrak{M}$. Из результатов работ [3, 4, 70, 76] вытекает, что G изоморфна группе лиева типа.

Предложение доказано.

Предложение 1.2.17. [38] *Пусть I означает множество индексов, K_α – конечное поле для любого $\alpha \in I$ и $\mathfrak{R} = \{L_2(K_\alpha) | \alpha \in I\}$. Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{R}$, изоморфна простой группе $L_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P.*

Предложение 1.2.18. [59] *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, состоящего из конечных групп диэдра, имеет вид: $G = A \leftthreetimes t$, где A – локально циклическая группа, t – инволюция, $a^t = a^{-1}$ для любого $a \in A$.*

Предложение 1.2.19. [44] *Пусть периодическая группа G насыщена конечными простыми неабелевыми группами и в любой ее конечной 2-подгруппе K все инволюции из K лежат в центре K. Тогда*

$$G \mathrel{\widetilde{\in}} \{J_1, L_2(R), Re(F), U_3(Q), Sz(P) \mid R, F, Q, P - \text{локально конечные поля}\}.$$

Предложение 1.2.20. *Пусть G – периодическая группа, x, y – две различные инволюции из G. Тогда:*

1. *$\langle x, y \rangle = \langle d \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle = \langle y \rangle$ – конечная группа диэдра, где $d = xy$, $d^x = d^y = d^{-1}$.*
2. *Если элемент d нечетного порядка, то группа диэдра $\langle x, y \rangle$ содержит один класс сопряженных инволюций : x^G.*
3. *Если элемент d четного порядка, то группа диэдра $\langle x, y \rangle$ содержит три класса сопряженных инволюций : x^G, z^G, $(zx)^G$, где $\langle z \rangle$ – силовская 2-подгруппа из $\langle d \rangle$.*

Предложение 1.2.21. [42] *Пусть G — группа с конечной инволюцией и сильно вложенной подгруппой B, j — инволюция из B, v — инволюция из $G \setminus B$, $H = B^v \cup B$. Тогда*:

1. *В группе G все инволюции сопряжены, j^B — множество всех инволюций из B.*
2. *$B = C_G(j)H$, подгруппа H действует сопряжениями на множестве всех инволюций из B транзитивно. Любой смежный класс $C_G(j)b$, $b \in B$, содержит точно один строго вещественный относительно v элемент.*
3. *Каждый элемент $g \in G \setminus B$ обладает представлением $g = cr$, где $c \in C_G(j)$, а r — инволюция из $G \setminus B$.*

Предложение 1.2.22. [21, 39] *Произвольная группа, порядки элементов которой не превосходят числа 4, локально конечна.*

1.3 Группы Шункова

Предложение 1.3.1. *Пусть G — группа Шункова, H — конечная нормальная подгруппа группы G. Тогда фактор-группа $\overline{G} = G/H$ — группа Шункова.*

Доказательство. Пусть $\overline{K}$ — конечная подгруппа в $\overline{G}$, $\overline{a}$ — элемент простого порядка из $N_{\overline{G}}(\overline{K})$, $\overline{g}$ — произвольный элемент из $\overline{G}$. Тогда $\overline{a} = aH$, $\overline{g} = gH, \overline{K} = KH$ для некоторых элементов $a, g \in G$ и конечной подгруппы $K < G$. Рассмотрим $N_G(KH)$. Очевидно,

$$a, g \in N_G(KH), \text{а } a_1 = a(KH), b_1 = a^g(KH) -$$

элементы фактор-группы $N_G(KH)/KH$ имеют простой порядок и сопряжены в ней. Так как G — группа Шункова, то $\langle a_1, b_1 \rangle$ — конечная группа, что и требовалось доказать.

Предложение доказано.

Предложение 1.3.2. [54, следствие 2.4.4] *Пусть G — группа Шункова,*

$$H_1 < H_2 < \ldots < H_a < \ldots -$$

цепочка ее нормальных подгрупп, такая, что для любой подгруппы из этой цепочки фактор-группа G/H_a является группой Шункова, и $H = \bigcup H_a$. Тогда G/H — группа Шункова.

Предложение 1.3.3. *Пусть G — группа Шункова, a — элемент простого порядка из G, x — инволюция из G. Тогда $\langle x, a \rangle$ — конечная группа.*

Доказательство. Из определения группы Шункова вытекает, что $\langle a, a^x \rangle$ — конечная группа. Несложно заметить, что $x \in N_G(\langle a, a^x \rangle)$. Следовательно, $\langle a, a^x \rangle \langle x \rangle$ — конечная группа. Так как $\langle x, a \rangle$ является подгруппой $\langle a, a^x \rangle \langle x \rangle$, то $\langle x, a \rangle$ — также конечная группа.

Предложение доказано.

Предложение 1.3.4. [50] *В группе Шункова с бесконечным числом элементов конечного порядка существует бесконечная локально конечная подгруппа.*

Предложение 1.3.5. *Группа Шункова G, в которой все конечные подгруппы абелевы, обладает абелевой периодической частью $T(G)$.*

Доказательство. Действительно, пусть a — произвольный элемент конечного порядка из G. Предположим, что $|a|$ — простое число. Тогда $\langle a, a^g \rangle$ — конечная абелева группа для любого $g \in G$. Следовательно, $N_1 = \langle a^g | g \in G \rangle$ — абелева нормальная подгруппа группы G. В силу произвольного выбора a как элемента простого порядка получим, что все элементы простых порядков из G порождают абелеву нормальную подгруппу N_2 группы G и, более того, любой элемент из N_2 перестановочен с любым элементом $g \in G$, имеющим конечный порядок. Пусть $R(G)$ — подгруппа группы G, порождённая всеми элементами конечных порядков группы G. Очевидно, $N_2 \leq Z(R(G))$, значит, группа $\overline{R} = R(G)/N_2$ — группа Шункова (предложения 1.3.1, 1.3.2). Ясно, что для $\overline{R}$ условие леммы выполняется, и поэтому можно считать, что для $\overline{R}$ лемма верна (индукция по порядку a). По определению 1.1.6 $R(G) = T(G)$ — периодическая часть группы G, и $T(G)$ — абелева группа.

Предложение доказано.

Предложение 1.3.6. *Если в группе Шункова G некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы из G конечны и сопряжены.*

Доказательство. Предположим обратное, пусть R — конечная силовская 2-подгруппа группы G. Положим $\mathfrak{N} = \{R^g | g \in G\}$, $\mathfrak{B}$ — множество всех силовских 2-подгрупп группы G, не сопряженных с R. Выберем такие $X \in \mathfrak{N}$ и $Y \in \mathfrak{B}$, что число $m = |X \cap Y|$ принимает максимально возможное значение. Используя нормализаторное условие в конечных 2-группах, выбираем элементы $x \in N_X(X \cap Y)$ и $y \in N_Y(X \cap Y)$ так, что $x^2, y^2 \in X \cap Y$. В конечной группе $\langle x, y, X \cap Y \rangle$ (предложение 1.3.3) все силовские 2-подгруппы сопряжены, и пусть S — одна из них. Так как $S \leq Z$ – некоторая силовская 2-подгруппа из G, то $Z \in \mathfrak{N}$ или $Z \in \mathfrak{B}$. Но в первом случае для некоторого $g \in G$ справедливо $\langle x, X \cap Y \rangle \leq Z^g \cap Y$ и $|Z^g \cap Y| > m$, а во втором случае справедливо $\langle y, X \cap Y \rangle \leq Z^g \cap X$, и снова $|Z^g \cap Y| > m$. Противоречие с выбором m.

Предложение доказано.

Предложение 1.3.7. *Пусть T — бесконечная силовская 2-подгруппа группы Шункова G, $\mathfrak{M}_T$ — множество всех силовских 2-подгрупп группы G, сопряженных с T, $\mathfrak{N}_T$ — множество всех силовских 2-подгрупп группы G, не сопряженных с T. Тогда существуют такие $X \in \mathfrak{M}_T$ и $Y \in \mathfrak{N}_T$, что $|X \cap Y| \geq t$, где t — наперед заданное натуральное число.*

Доказательство. Данное предложение доказывается аналогично [23, лемма 6].

Предложение 1.3.8. [46] *Группа Шункова, насыщенная группами из множества всех проективных специальных линейных групп размерности 2 над конечными полями, обладает локально конечной периодической частью, которая изоморфна группе $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.*

Предложение 1.3.9. [38] *Группа Шункова G, насыщенная группами диэдра, обладает периодической частью $T(G)$ и $T(G)$ изоморфна локально диэдральной группе.*

Предложение 1.3.10. [55] *Пусть группа Шункова G насыщенна группами из множества $\{Re(3^{2n+1})\}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$ и $T(G) \simeq Re(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 3.*

Предложение 1.3.11. [55] *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества $\{Sz(q)\}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$ и $T(G) \simeq Sz(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2.*

Предложение 1.3.12. [55] *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества $\{U_3(2^n)\}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$ и $T(G) \simeq U_3(P)\}$, где P — локально конечное поле характерстики 2.*

Предложение 1.3.13. [81] *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества $\{L_2(p^k),\ U_3(2^n)\}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$ и*

$$T(G) \mathrel{\widetilde{\in}} \{L_2(Q), U_3(P)\},$$

где $P,\ Q$ — локально конечные поля.

1.4 Конечные группы

Предложение 1.4.1. [11] *Пусть множество конечных простых неабелевых групп $\mathfrak{R}$ состоит из групп следующих двух типов :*

1. *$G \simeq L_k^\delta(q)$, где $\delta = \pm$, q — нечетно.*
2. *$G \simeq E_6^\delta(q)$, где q — нечетно.*

Тогда $\mathfrak{R}$ содержит все конечные простые неабелевы группы, в которых централизатор силовской 2-подгруппы не является 2-группой.

Предложение 1.4.2. [66] *Пусть $G = L_2(q)$, где $q = 2^n > 2$, P — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда :*

1. *P — элементарная абелева группа, и любые две различные силовские 2-подгруппы группы G пересекаются тривиально.*
2. *$C_G(a) = P$ для любой инволюции $a \in P$.*
3. *$N_G(P) = P \leftthreetimes H$ — максимальная подгруппа в G, являющаяся группой Фробениуса с ядром P и циклическим дополнением H порядка $q-1$, действующим транзитивно на множестве $P \setminus \{1\}$.*
4. *$N_G(H)$ — группа диэдра порядка $2(q-1)$.*
5. *Если K — подгруппа в G и K обладает нетривиальной нормальной подгруппой нечетного порядка, то $N_G(K)$ — группа диэдра порядка $2(q-1)$ или $2(q+1)$.*

Предложение 1.4.3. *Пусть $G = L_2(q)$, где q — нечётное число, больше 3. Тогда справедливы следующие утверждения :*

1. *Силовская 2-подгруппа группы G является группой диэдра.*
2. *Если a — инволюция из G, то $C_G(a)$ — группа диэдра.*
3. *$Z(C_G(a)) = \langle a\rangle$.*
4. *Все инволюции из G сопряжены.*
5. *Четверные подгруппы из G самоцентрализуемы.*
6. *Если $a,\ b$ — две неперестановочные инволюции из G, то $G = \langle C_G(a), C_G(b)\rangle$.*
7. *Если $a,\ b$ — две различные инволюции из G, $q \notin \{5, 7, 9, 11\}$, то $G = \langle C_G(a), C_G(b)\rangle$.*

Доказательство. Утверждения 1–5 хорошо известны, их доказательства можно найти, например, в [66]. Утверждения 6, 7 вытекают из утверждения 2 и списка максимальных подгрупп группы $L_2(q)$ (см. [64, с. 377]).

Предложение доказано.

Предложение 1.4.4. [66, 68] *Пусть $L = GL_2(2^n)$. Тогда :*

1. *$L = L_2(2^n) \times Z$, где $Z = \langle \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right) \rangle$ – центр группы L, $\alpha \in GF(q)$.*

2. $R = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \alpha \in GF(2^n)\}$ – *силовская 2–подгруппа группы* L, $N_L(R) = R \leftthreetimes D$, *где* $D = \langle\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right)\rangle$ – *подгруппа диагональных матриц группы* L, $\beta \in GF(2^n)$, $D = Z \times T$, $T = \langle\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$, *и* $|Z| = |T| = 2^n - 1$.

3. $PGL_2(p^n) = L/Z = L_2(2^n)$.

Предложение 1.4.5. [68], [71] *Пусть* $L = GL_2(p^n)$ *и* p *– нечетно. Тогда* :

1. $|L| = (p^n - 1)^2 p^n (p^n + 1)$.

2. $R = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \alpha \in GF(p^n)\}$ – *силовская* p*-подгруппа группы* L, $N_L(R) = R \leftthreetimes D$, *где* $D = \langle\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right)\rangle$ – *подгруппа диагональных матриц группы* L, $\beta \in GF(p^n)$, $D = Z \times T$, $Z = \langle\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)\rangle$ — *центр группы* L, $T = \langle\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$, $C_L(D) = D$ *и* $|Z| = |T| = p^n - 1$.

3. *Любые две различные силовские* p*-подгруппы группы* L *пересекаются тривиально.*

4. *Пусть* $M = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, *где* $|a| = |b| = k > 2$, *подгруппа* L. *Тогда* k *делит* $p^n - 1$, *и для некоторого* $g \in L$, $M^g \subseteq D$ *и* $N_L(M^g) = N_L(D) = D \leftthreetimes \langle\omega\rangle$, *где* $\omega = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

5. *Пусть* a — *элемент нечетного порядка из* L, *и* $C_L(\langle a\rangle)$ *содержит две различные циклические 2-подгруппы одинакового порядка. Тогда* $|a|$ *делит* $p^n - 1$.

6. *В* L *нет подгрупп, изоморфных* A_4.

7. $L = SL_2(p^n) \leftthreetimes T$, *где* $T = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ *и* $\alpha \in GF(p^k)$.

8. $L = (SL_2(p^n) \cdot Z) \cdot \langle v\rangle$, *где* $v = \left(\begin{smallmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), v^2 = \left(\begin{smallmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{smallmatrix}\right) \in Z$ *и* h *– элемент поля* $GF(p^n)$, *из которого не извлекается корень квадратный.*

9. *Если* $q \equiv 1(mod\ 4)$, 2^s *– это 2-часть числа* $q - 1, \xi$ *– примитивный корень степени* 2^s *из 1 в* $GF(q)$, *то ее силовская 2-подгруппа* S *порядка* 2^{s+1} *является сплетением групп* Z_{2^s} *и* $Z_2, S = \langle\left(\begin{smallmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\rangle$.

10. *Если* $q \equiv -1(mod\ 4)$, 2^s *– это 2-часть числа* $q + 1$, ξ *– примитивный корень степени* 2^{s+1} *из 1 в* $GF(q^2)$, *то ее силовская 2-подгруппа* S *является полудиэдральной группой порядка* 2^{s+2} *и* $S = \langle\left(\begin{smallmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi+\xi^q \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\rangle$.

Предложение 1.4.6. [68] *Пусть* $L = PGL_2(q)$. *Тогда* :

1. *Если* q *четное, то* $L = L_2(q)$, *силовская 2-подгруппа из* L — *элементарная абелева.*

2. *Если* q *нечетное, то* $L = L_2(q) \leftthreetimes \langle v\rangle$, *где* v — *инволюция, силовская 2-подгруппа из* L — *неабелева группа диэдра, все инволюции из* $L_2(q)$ *сопряжены.*

3. *Если* q *нечетное,* x — *инволюция из* L, *то* $C_L(x)$ — *группа диэдра.*

4. *Если* q *нечетное,* t, z — *две различные инволюции из* L, *то* $L = \langle C_L(t), C_L(z)\rangle$.

5. *Если* q *нечетное,* D — *нециклическая подгруппа порядка 4 из* L, *то* $C_L(D) = D$.

Предложение 1.4.7. [66] *Пусть* $G = U_3(2^n)$, P — *силовская 2-подгруппа группы* G, $B = N_G(P)$. *Тогда*:

1. $G = B\langle v\rangle B$, *где* v — *инволюция,* $B \cap B^v = H$ — *подгруппа Картана.*

2. P — *группа периода 4, ступени нильпотентности 2,* $P' = Z(P) = \Phi(P) = \Omega_1(P)$.

3. *Любые две силовские 2-подгруппы группы* G *имеют тривиальное пересечение.*

4. *Если* a — *инволюция из* P, *то* $C_G(a) = P \leftthreetimes H_1$, *где* H_1 — *циклическая группа, причем* $H_1 \leq B$ *и* $Z(P) \leq C_G(H_1)$.

5. $B = P \leftthreetimes H$, *где* H — *циклическая группа порядка* $\frac{2^{2n}-1}{d}$, *где* $d = 3$, *если 3 делит число* $2^n + 1$, *и* $d = 1$ *в противном случае.*

6. $H = H_0 \times H_1$, *где* H_1 — *подгруппа из утверждения 4,* $|H_0| = 2^n - 1$ *и* $|H_1| = \frac{2^n+1}{d}$, *причем* v *инвертирует* H_0 *и централизует* H_1.

7. $P \leftthreetimes H_0$ — *группа Фробениуса с неинвариантным множителем* H_0, *действующим транзитивно на множестве инволюций группы* P.

8. $C_G(H_1) = H_1 \times L$, *где* $L \simeq L_2(2^n)$, $S = L \cap P$ — *силовская 2-подгруппа в* L.

9. *$B/Z(P)$ — группа Фробениуса с ядром $P/Z(P)$ и дополнением $HZ(P)/Z(P)$, при этом фактор-группа $HZ(P)/Z(P)$ либо транзитивна на множестве неединичных элементов фактор-группы $P/Z(P)$, либо имеет ровно 3 орбиты.*

10. *G порождается любой парой своих силовских 2-подгрупп.*

11. *Для любого простого $2'$-элемента $a \in G$ подгруппа $N_G(\langle a\rangle)$ имеет четный порядок.*

12. $|U_3(2^n)| = \frac{1}{(3,2^n+1)}2^{3n}(2^{2n}-1)(2^{3n}+1)$.

Пусть $GF(q)$ — конечное поле порядка q, $SL_3(q) = SL_3^+(q)$ — группа матриц размерности 3, определители которых равны единице, $SU_3(q) = SL_3^-(q)$ — группа унитарных матриц размерности 3 над полем $GF(q^2)$, т. е. подгруппа группы $SL_3(q^2)$, состоящая из матриц m, для которых $m\overline{m}^T$ — единичная матрица, где T означает транспонирование, а $\overline{m}$ получается из m заменой каждого её элемента m_{ij} на m_{ij}^q.

Обозначим через φ естественный гомоморфизм $SL_3(q^2)$ на $PSL_3(q^2)$ (с ядром, состоящим из скалярных матриц), и так же будем обозначать ограничение φ на $SL_3(q)$ и $SU_3(q)$.

Таким образом,

$$SL_3(q)^\varphi = PSL_3(q) = L_3(q) = L_3^+(q),$$
$$SU_3(q)^\varphi = PSU_3(q) = U_3(q) = L_3^-(q).$$

Далее, пусть q — нечётно. Положим

$$i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\varphi, \qquad j = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\varphi,$$
$$b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\varphi, \qquad w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\varphi.$$

Очевидно, $i, j, b, w \in L_3^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+,-\}$. Определим

$$A = \langle i, j\rangle, \quad B = \langle w, j\rangle, \quad V = \langle b, w\rangle.$$

Предложение 1.4.8. *Пусть $L = L_3^\varepsilon(q)$, где q — нечётно, i, j, b, w, A, B, V — элементы и подгруппы L, определённые выше. Тогда :*

1. *A и B — четверные группы, т. е. элементарные абелевы группы порядка 4, AB — группа диэдра порядка 8, порядок b равен 3, V изоморфна симметрической группе степени 3.*

2. *$D = C_L(A)$ — прямое произведение циклической группы порядка $q-\varepsilon 1$ и циклической группы порядка $(q-\varepsilon 1)/(3, q-\varepsilon 1)$.*

$$N_L(A) = N_L(D) = D \leftthreetimes V.$$

3. *Порядок любого элемента из $N_L(A)$, индуцирующего при сопряжении автоморфизм порядка 3 подгруппы A, равен 3.*

4. *Все инволюции из L сопряжены в L. Любая четверная подгруппа из L сопряжена с A. В L существует элемент порядка 8, и любая абелева секция силовской 2-подгруппы из L порождается тремя элементами.*

5. *Существует $v \in L$, для которого $j^v = j$, $i^v = w$.*

6. *Если $\varepsilon \in \{-\}$ и $q+1$ не делится на 4, то силовская 2-подгруппа группы L изоморфна полудиэдральной группе $SD(m) = \{a,\ b \mid a^{2^{m+1}} = b^2 = e,\ a^b = a^{-1+2^m}\}$, где 2^m делит $q-1$, 2^{m+1} не делит $q-1$.*

7. *Если $\varepsilon \in \{-\}$ и $q+1$ делится на 4, то силовская 2-подгруппа группы L изоморфна сплетённой группе $W_r(m) = \{a_1,\ a_2,\ b \mid a_1^{2^m} = a_2^{2^m} = b^2 = e,\ a_1a_2 = a_2a_1,\ a_1^b = a_2,\ a_2^b = a_1\}$, где 2^m делит $q+1$, 2^{m+1} не делит $q+1$.*

8. *Если $\varepsilon \in \{+\}$ и $q+1$ делится на 4, то силовская 2-подгруппа группы L изоморфна полудиэдральной группе $SD(m) = \{a,\ b \mid a^{2^{m+1}} = b^2 = e,\ a^b = a^{-1+2^m}\}$, где 2^m делит $q-1$, 2^{m+1} не делит $q-1$.*

9. *Если $\varepsilon \in \{+\}$ и $q+1$ не делится на 4, то силовская 2-подгруппа группы L изоморфна сплетённой группе $W_r(m) = \{a_1,\ a_2,\ b \mid a_1^{2^m} = a_2^{2^m} = b^2 = e,\ a_1a_2 = a_2a_1,\ a_1^b = a_2,\ a_2^b = a_1\}$, где 2^m делит $q+1$, 2^{m+1} не делит $q+1$.*

10. *Если $(q,\varepsilon) \notin \{(3,+),(5,-)\}$, то для четверной подгруппы $C \neq A$ из $N_L(A)$ выполнено $L = \langle N_L(A), C_L(C)\rangle$. Если $(q,\varepsilon) = (3,+)$, то $L = \langle N_L(A), N_L(C)\rangle$. Если $(q,\varepsilon) = (5,-)$, то $\langle N_L(A), N_L(C)\rangle \simeq A_7$.*

11. *Если $\varepsilon \in \{-\}$, то $C_L(j) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & |A|^{-1} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \ A = ||a_{mn}|| \in GU_2(q) \right\} \simeq GU_2(q)$.*

Доказательство. Пункты 1–3 проверяются непосредственными вычислениями. Пункты 4, 6–9,11 доказаны в [60, 61]. По пункту 4 существует такой $v_1 \in L$, что $A^{v_1} = B$. По пункту 2, V^{v_1} индуцирует в B при сопряжении полную группу автоморфизмов B, которая действует дважды транзитивно на множестве инволюций B. Отсюда вытекает пункт 5. Докажем пункт 10. Очевидно, что C содержит инволюцию t, не лежащую в $C_L(A)$, и

$$|C_{N_L(A)}(t)| = |C_{C_L(A)}(t)\langle t\rangle| = 2|C_{C_L(A)}(w)|.$$

Непосредственно проверяется, что $|C_{C_L(A)}(w)| = (q-\varepsilon 1)/(3, q-\varepsilon 1)$. Таким образом,

$$|C_{N_L(A)}(C)| \leqslant 2(q-\varepsilon 1)/(3, q-\varepsilon 1).$$

Поскольку A и C сопряжены в L, то $|C_L(C)| = (q-\varepsilon 1)^2/(3, q-\varepsilon 1)$, откуда $C_L(C) \nleq N_L(A)$, за исключением случая $q = 3$, $\varepsilon = +$. Так как $N_L(A)$ не максимальна в L, только если $L \simeq U_3(5)$ [64, с. 378, 379], то это рассуждение не доказывает 10 только для случаев $(q,\varepsilon) \in \{(3,+),(5,-)\}$. Для них 10 легко проверить с помощью [67].

Предложение доказано.

Предложение 1.4.9. [66] *Пусть конечная группа G обладает сильно вложенной подгруппой. Тогда имеет место одно из следующих утверждений :*

1. *Силовская 2-подгруппа из G – циклическая или группа кватернионов.*
2. *$O^2(G/O(G))$ изоморфна одной из следующих групп $L_2(2^n)$, $Sz(2^{2n+1})$, $U_3(2^{2n})$.*

Предложение 1.4.10. [28] *Для любого конечного множества простых чисел π существует только конечное множество конечных простых групп (с точностью до изоморфизма) $\mathfrak{M}_\pi$ со свойством, что если простое число p делит $|K|$, где $K \in \mathfrak{M}_\pi$, то $p \in \pi$.*

Предложение 1.4.11. [65] *Существует конечное число конечных простых неабелевых групп (с точностью до изоморфизма) с заданным централизатором инволюции.*

Предложение 1.4.12. [6] *Пусть $G = Re(q)$, где $q = 3^{2n+1} > 3$, a – инволюция из G, T – силовская 2-подгруппа в G. Тогда :*

1. *T – элементарная абелева группа порядка 8, $C_G(T) = T$ и $H = N_G(T) = T \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle)$, где $\langle b \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle$ – группа Фробениуса порядка 21.*

2. *$C_G(a) = \langle a \rangle \times L$, где $L \simeq L_2(q)$.*

3. *$G = \langle H, C_G(a) \rangle = \langle S, C_G(a) \rangle$, где S – произвольная силовская 2-подгруппа группы G, не содержащая инволюции a.*

4. *Все инволюции из G сопряжены в G.*

Предложение 1.4.13. [75] *Пусть $G = Sz(q)$, P – силовская 2-подгруппа группы G, $B = P\lambda H$ — подгруппа Бореля, H — подгруппа Картана из B. Тогда :*

1. *P — группа порядка q^2 периода 4 и $P' = Z(P) = \Omega_1(P)$.*

2. *Все инволюции группы G сопряжены, $C_G(a) = P$ для любой инволюции $a \in P$.*

3. *Любые две силовские 2-подгруппы в G имеют тривиальное пересечение.*

4. *H действует транзитивно на множестве инволюций из P.*

5. *G порождается любой парой своих силовских 2-подгрупп.*

Предложение 1.4.14. [67] *Пусть $G = J_1$, P – силовская 2-подгруппа группы G. Тогда :*

1. *P — элементарная абелева группа порядка 8.*

2. *Все инволюции группы G сопряжены, $C_G(a) = \langle a \rangle \times H$, где $H \simeq L_2(5)$, для любой инволюции $a \in P$.*

3. *$N_G(P) = P \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle c \rangle)$, где $b^7 = c^3 = 1$.*

Предложение 1.4.15. [67] *Пусть $G = M_{11}$. Тогда справедливы следующие утверждения :*

1. *Силовская 2-подгруппа группы G является полудиэдральной группой порядка 16.*

2. *Если a — инволюция из G, то $C_G(a) \simeq GL_2(3)$ и $C_G(a)$ — максимальная подгруппа в G.*

3. *Все инволюции в G сопряжены.*

4. *Пусть R — четверная подгруппа группы G. Тогда все четверные подгруппы из G сопряжены с R и $N_G(R) \simeq S_4$.*

5. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G; R_1, R_2, R_3 — все четверные подгруппы из S. Тогда $\langle S, N_G(R_1), N_G(R_2), N_G(R_3) \rangle \simeq M_{10} \simeq A_6 2$ — максимальная подгруппа в G.*

6. *$| M_{11} |= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 7920$.*

Предложение 1.4.16. [67] *Пусть $G = U_3(4)$. Тогда справедливы следующие утверждения :*

1. *Силовская 2-подгруппа S из G имеет порядок 64 и является группой периода 4.*

2. *Все инволюции из G сопряжены.*

3. *Все инволюции из S лежат в центре S и образуют четверную группу.*

Предложение 1.4.17. [67] *Пусть $G = A_7$. Тогда справедливы следующие утверждения :*

1. *Силовская 2-подгруппа S группы G является группой диэдра порядка 8.*

2. *Все инволюции из G сопряжены.*

3. *В G два класса сопряженных четверных подгрупп.*

4. *В G существует такая четверная подгруппа R, что $N_G(R)$ — максимальная подгруппа в G и $N_G(R) \simeq (A_4 \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где $b^3 = v^2 = 1$.*

5. *Пусть R, H — четверные подгруппы из G, лежащие в разных классах сопряженности. Тогда $G = \langle N_G(R), N_G(H) \rangle$.*

Предложение 1.4.18. [61]. *Конечными простыми группами* 2*-ранга* 2 *(с точностью до изоморфизма) являются следующие группы* : $L_2(q),\ A_7,\ L_3(p),\ U_3(r),\ M_{11},\ U_3(4)$, где q, p, r — нечетные и $q > 3$.

Предложение 1.4.19. [66] *Конечными простыми группами лиева типа ранга* 1 *с точностью до изоморфизма являются следующие группы*: $L_2(q),\ U_3(q),\ Sz(2^{2n+1}),\ Re(3^{2n+1}$, *где* $q > 3$.

Предложение 1.4.20. [6, 29] *Пусть* G *— конечная простая неабелева группа и все инволюции из ее силовской* 2*-подгруппы* S *лежат в центре* S. *Тогда* :

$$G\ \widetilde{\in}\ \{J_1;\ L_2(q),\ q > 3,\ q = 3,\ 5\ (mod\ 8);\ U_3(2^n);\ Sz(2^{2n+1};\ Re(3^{2n+1})\}.$$

При этом G *не содержит элементов порядка* 8*, и все инволюции из* G *сопряжены.*

Предложение 1.4.21. [77] *Пусть* p *— простое число,* s *— натуральное число. Тогда верно одно из следующих утверждений* :

1\. *Существует простое* r *такое, что* r *делит* $p^s - 1$ *и* r *не делит* $p^t - 1$ *при любом натуральном* $t < s$.

2\. $s = 6$ *и* $p = 2$.

3\. $s = 2$ *и* $p = 2^l - 1$ *для некоторого натурального* l.

Предложение 1.4.22. *Пусть* G *— конечная группа,* A, B *— ее подгруппы,* $D = A \cap B$. *Тогда*

$$\mid G \mid \geqslant \mid A : D \mid \cdot \mid B : D \mid \cdot \mid D \mid .$$

Доказательство. Пусть

$$G = a_1D \cup a_2D \cup \dots \cup a_nD,$$

$$G = b_1D \cup b_2D \cup \dots \cup b_lD.$$

Предположим, что $a_ib_j = a_kb_ld$, где $d \in D$. Тогда $a_k^{-1}a_i = b_ldb_j^{-1}$. Следовательно, $a_k^{-1}a_j \in A \cap B = D$ и $a_j = a_kd_1$ для некоторого $d_1 \in D$, что невозможно.

Предложение доказано.

Предложение 1.4.23. [49, предложение 16] *Пусть*

$$W = \langle x, y, v | x^{2^m} = y^{2^m}, [x, y] = 1, x^v = y\rangle\ -$$

сплетение циклической группы порядка 2^m *и группы порядка* 2. *Тогда* :

1\. *Если* A *— абелева нециклическая подгруппа в* W*, то либо* $A \leq \langle x, y\rangle$*, либо* A *– прямое произведение групп порядка* 2 *на циклическую группу.*

2\. *Централизатор в* W *любой нециклической подгруппы порядка* 4 *абелев и двупорожден.*

3\. *Любая подгруппа из* W *порождается не более чем тремя элементами, и ее коммутант — циклическая группа.*

4\. $Z(W) = \langle xy\rangle, W/Z(W)$ *— группа диэдра.*

5\. *Если* D *— подгруппа диэдра из* W*, то* $C_W(D) = Z(W)$.

Глава 2

Группы, насыщенные различными множествами групп

2.1 Периодические группы, насыщенные сплетенными группами

В данном параграфе рассматриваются периодические группы, насыщенные сплетенными группами. Сплетенной группой называется сплетение циклической группы и группы порядка 2. Известно, что сплетенные 2-группы являются силовскими 2-подгруппами некоторых конечных простых групп, а именно: групп $L_3(q)$ при $q \equiv 1(mod 4)$ и $U_3(q)$ при $q \equiv -1(mod 4)$. В работе [60] доказано, что других конечных простых групп со сплетенной силовской 2-подгруппой нет. Таким образом, изучение 2-групп, насыщенных сплетенными группами, является необходимым этапом в изучении групп, насыщенных простыми группами $L_3(q)$ и $U_3(q)$.

Теорема 2.1.1. *Бесконечная 2-группа, насыщенная сплетенными группами, изоморфна сплетению бесконечной локально циклической 2-группы и группы порядка 2.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы. Определим множество

$$\mathfrak{S} = \{(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes (v)|,\ |a| = |b| = 2^n, v^2 = 1, a^v = b, n = 1, 2, \dots\}.$$

Из условия насыщенности и предложения 1.2.9 вытекает, что в G существует конечная подгруппа $K_1 \in \mathfrak{S}(1)$ такая, что $|K_1| > 8$. Следовательно,

$$K_1 = (\langle a_1 \rangle \times \langle b_1 \rangle) \leftthreetimes (v_1),$$

где $|a_1| = |b_1| = 2^{n_1} > 2$. По предложению 1.2.3 $N_G(K_1) \neq K_1$. Возьмем элемент $x \in N_G(K_1) \setminus K_1$. По условию насыщенности имеют место соотношения

$$\langle x, K_1 \rangle \leq K_2 \in \mathfrak{S}(1)$$

и

$$K_2 = (\langle a_2 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \leftthreetimes (v_2),$$

где $|a_2| = |b_2| = 2^{n_2} > 2^{n_1}$. Продолжая этот процесс, строим бесконечную цепочку вложенных друг в друга конечных подгрупп группы G:

$$K_1 < K_2 < \dots < K_{m-1} < K_m < \dots \qquad (1)$$

таких, что $K_m \in \mathfrak{S}(1)$ для $m = \overline{1, \infty}$. Следовательно,

$$K_m = (\langle a_m \rangle \times \langle b_m \rangle) \leftthreetimes \langle v_m \rangle,$$

где $|a_m| = |b_m| = 2^m$, $v_m^2 = e$ и $a_m^{v_m} = b_m$.

Лемма 2.1.2. *Пусть* $m_1 < m_2$,

$$K_{m_1} = (\langle a_{m_1} \rangle \times \langle b_{m_1} \rangle) \leftthreetimes (v_{m_1})$$

и

$$K_{m_2} = (\langle a_{m_2} \rangle \times \langle b_{m_2} \rangle) \leftthreetimes (v_{m_2}).$$

Тогда $v_{m_1} \notin (\langle a_{m_2} \rangle \times \langle b_{m_2} \rangle)$.

Доказательство. Предположим обратное:

$$v_{m_1} \in (\langle a_{m_2} \rangle \times \langle b_{m_2} \rangle).$$

Так как $|K_{m_2} : (\langle a_{m_2} \rangle \times \langle b_{m_2} \rangle)| = 2$, то элементы $a_{m_1}^2, b_{m_1}^2$ также лежат в группе $\langle a_{m_2} \rangle \times \langle b_{m_2} \rangle)$, которая является абелевой группой. Следовательно, $(a_{m_1}^2)^{v_{m_1}} = a_{m_1}^2$ и $(b_{m_1}^2)^{v_{m_1}} = b_{m_1}^2$. Но из определения группы K_{m_1} и того факта, что $|K_1| > 8$, вытекает следующее:

$$(a_{m_1}^2)^{v_{m_1}} = (a_{m_1}^{v_{m_1}})^2 = b_{m_1}^2 \neq a_{m_1}^2 \neq 1$$

и

$$(b_{m_1}^2)^{v_{m_1}} = (b_{m_1}^{v_{m_1}})^2 = a_{m_1}^2 \neq b_{m_1}^2 \neq 1.$$

Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2.1.3. *Пусть* $v = v_1$. *Тогда для любого* $m = \overline{1, \infty}$

$$K_m = (\langle a_m \rangle \times \langle b_m \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle$$

и $a_m^v = b_m$.

Доказательство. По лемме 2.1.2

$$K_m = (\langle a_m \rangle \times \langle b_m \rangle) \leftthreetimes \langle v_m \rangle = (\langle a_m \rangle \times \langle b_m \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle.$$

Следовательно, для некоторого $x \in (\langle a_m \rangle \times \langle b_m \rangle)$, $v = xv_m$ и

$$a_m^v = a_m^{xv_m} = (a_m^x)^{v_m} = a_m^{v_m} = b_m.$$

Лемма доказана.

В обозначениях леммы 2.1.3 имеет место

Лемма 2.1.4. *Для любого* $m = \overline{2, \infty}$

$$(\langle a_{m-1} \rangle \times \langle b_{m-1} \rangle) \leq (\langle a_m \rangle \times \langle b_m \rangle).$$

Доказательство. Предположим обратное:

$$(\langle a_{m-1}\rangle \times \langle b_{m-1}\rangle) \not< (\langle a_m\rangle \times \langle b_m\rangle).$$

Тогда имеет место хотя бы одно из следующих трех включений:

1. $\langle a_{m-1}\rangle \leq (\langle a_m\rangle \times \langle b_m\rangle)$.
2. $\langle b_{m-1}\rangle \leq (\langle a_m\rangle \times \langle b_m\rangle)$.
3. $\langle a_{m-1}b_{m-1}\rangle \leq (\langle a_m\rangle \times \langle b_m\rangle)$.

В противном случае

$$|K_m : (\langle a_m\rangle) \times \langle b_m\rangle| > 2,$$

что невозможно.

Пусть верно включение 1. Тогда по лемме 2.1.4

$$\langle b_{m-1}\rangle = \langle a_{m-1}^v\rangle < (\langle a_m\rangle \times \langle b_m\rangle)^v = (\langle a_m\rangle \times \langle b_m\rangle)$$

и

$$(\langle b_{m-1}\rangle \times \langle a_{m-1}\rangle) < (\langle a_m\rangle \times \langle b_m\rangle).$$

Противоречие. В случае включения 1 лемма доказана.

Включение 2 рассматривается аналогично 1.

Пусть выполнено включение 3. Тогда

$$\langle a_m\rangle \times \langle b_m\rangle \cap (\langle a_{m-1}\rangle \times \langle b_{m-1}\rangle) =$$

$$= \langle a_{m-1}b_{m-1}\rangle \times \langle a_{m-1}^2\rangle = \langle a_{m-1}b_{m-1}\rangle \times \langle b_{m-1}^2\rangle.$$

Так как $v = xy$ для некоторого $y \in (\langle a_{m-1}\rangle \times \langle b_{m-1}\rangle)$ и некоторого $x \in (\langle a_m\rangle \times \langle b_m\rangle)$, то $C_{K_m}(v)$ содержит нециклическую подгруппу $\langle a_{m-1}b_{m-1}\rangle \times \langle a_{m-1}^2\rangle$ (предложение 1.2.11), что невозможно. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2.1.5. *Без ограничения общности можно считать, что*

$$\langle a_{m-1}\rangle < \langle a_m\rangle, \quad \langle b_{m-1}\rangle < \langle b_m\rangle.$$

Доказательство. Пусть x — такой элемент из $\langle a_m\rangle \times \langle b_m\rangle$, что $x^2 = a_{m-1}$. Покажем, что такой x существует. Пусть $a_{m-1} = a_m^{2^l} b_m^{2^r}$. Положим $x = a_m^{2^{l-1}} b_m^{2^{r-1}}$. Тогда

$$x^2 = (a_m^{2^{l-1}} b_m^{2^{r-1}})^2 = a_m^{2^{l-1}} b_m^{2^{r-1}} a_m^{2^{l-1}} b_m^{2^{r-1}} =$$

$$= a_m^{2^{l-1}+2^{l-1}} b_m^{2^{r-1}+2^{r-1}} = a_m^{2^l} b_m^{2^r}.$$

Если $\langle x\rangle \times \langle x^v\rangle = \langle a_m\rangle \times \langle b_m\rangle$, то, обозначив x через a_m, получим требуемое. Если $\langle x\rangle \times \langle x^v\rangle$ — собственная подгруппа в $\langle a_m\rangle \times \langle b_m\rangle$, то повторим для x описанный выше прием извлечения квадратного корня из a_{m-1}.

Лемма доказана.

Ввиду доказанной выше леммы обозначим:

$$G_1 = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \bigcup_{m-1}^{\infty} (\langle a_m\rangle \times \langle b_m\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle,$$

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} \langle a_m \rangle,$$

$$B = \bigcup_{m=1}^{\infty} \langle b_m \rangle.$$

В этих обозначениях имеем

$$G_1 = (A \times B) \leftthreetimes \langle v \rangle$$

и $A^v = B$. В дальнейшем группы G_1, A, B и инволюция v фиксированы.

Лемма 2.1.6. *Если G — локально конечная группа, то $G = G_1$.*

Доказательство. Предположим обратное, пусть $x \in G \setminus G_1$. По условию теоремы

$$\langle K_1, x \rangle < D_1 = (((\langle c_1 \rangle \times \langle r_1 \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle),$$

где K_1 — из последовательности (1), а $c_1^v = r_1$. Используя условие насыщенности, определим для $m = 2, 3, \ldots$ группу D_m следующим образом:

$$\langle K_m, D_{m-1} \rangle < D_m = (((\langle c_m \rangle \times \langle r_m \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle),$$

где K_m — группа из последовательности (1), а $c_m^v = d_m$. Таким образом, мы имеем цепочку подгрупп:

$$D_1 < D_2 < \cdots < D_m < D_{m+1} < \cdots .$$

По алгоритму, описанному в леммах 2.1.2–2.1.5, строим группу

$$G_2 = \bigcup_{m=1}^{\infty} (((\langle c_m \rangle \times \langle d_m \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle) = (C \times R) \leftthreetimes \langle v \rangle,$$

где C — локально циклическая группа и $C^v = R$. Так как $G_1 < G_2$, то $(A \times B) < (C \times R)$. Поскольку A, B, C, R — квазициклические группы, то по предложению 1.2.11 $(A \times B) = (C \times R)$ и $G_2 = G_1$. Противоречие с выбором x.

Лемма доказана.

Лемма 2.1.7. *Если $G \neq G_1$, то $G \setminus G_1$ содержит инволюцию.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда все инволюции из G лежат в G_1 и порождают в G характеристическую локально конечную подгруппу $N \subset G_1$. Покажем, что фактор-группа $\overline{G} = G/N$ — абелева. Возьмем два элемента $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{G}$, и пусть $\overline{a}\overline{b} \neq \overline{b}\overline{a}$. Расссмотрим следующие ситуации:

1. $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 2$.
2. $|\overline{a}| = 2, |\overline{b}| = 2^n > 2$.
3. $|\overline{b}| = 2, |\overline{a}| = 2^n > 2$.
4. $|\overline{a}| = 2^m > 2; |\overline{b}| = 2^n > 2$.

1. Так как $\overline{a}, \overline{b}$ — инволюции, то $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle$ — конечная группа. По теореме Шмидта (предложение 1.2.3) $\langle a, b \rangle$ — также конечная группа (a и b — прообразы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в G). По условию теоремы $\langle a, b \rangle < ((\langle c \rangle \times \langle d \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle) = K$, где $c^w = d$ и $w^2 = e$. Так как $c^{-k} d^k w$ — инволюция для любого k (предложение 1.4.23), то

$$((\langle c^{-1} d \rangle \leftthreetimes \langle w \rangle) < N,$$

значит,

$$\langle\overline{a},\overline{b}\rangle < K/N \simeq K/K\cap N = K/(\langle c^{-1}d\rangle \leftthreetimes \langle w\rangle) = \langle c\rangle N \text{ —}$$

абелева группа. Следовательно, $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$.

2. По случаю 1 $\langle \overline{a}, \overline{a}^{\overline{b}}, \ldots, \overline{a}^{\overline{b}^{2^n-1}}\rangle$ — конечная абелева группа. Следовательно,

$$\langle \overline{a}, \overline{a}^{\overline{b}}, \ldots, \overline{a}^{\overline{b}^{2^n-1}}\rangle \leftthreetimes \langle\overline{b}\rangle \text{ —}$$

конечная группа, т. е. $\langle a, a^b, \ldots, a^{b^{2^n-1}}\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ и $\langle a, b\rangle$ — конечные группы (предложение 1.2.3). Далее рассуждаем как в случае 1.

3. Рассматривается аналогично 2.

4. По случаям 2, 3 и индукции $\overline{a}^2\overline{b} = \overline{b}\overline{a}^2$ и $\overline{b}^2\overline{a} = \overline{a}\overline{b}^2$. Значит, $\langle\overline{a}^2, \overline{b}^2\rangle$ лежит в центре $\langle\overline{a},\overline{b}\rangle$. Так как $\langle\overline{a},\overline{b}\rangle/\langle\overline{a}^2,\overline{b}^2\rangle$ порождается двумя инволюциями, то $\langle\overline{a},\overline{b}\rangle$ — конечная группа, и далее рассуждаем как в случае 1. Следовательно, $\overline{G}$ — абелева, а G — локально конечная группа (предложение 1.2.3), и по предложению 1.4.23 $G = G_1$. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2.1.8. *Пусть* $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) < G, |a| = |b|$ *и* $C_G(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) = C$.
Тогда имеет место одно из следующих двух утверждений:
1. $C = P \times Q$, *где* P, Q *– квазициклические группы.*
2. $C = P \times \langle d\rangle$, *где* $|d| = |a|$ *и* $\langle d\rangle < (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$.

Доказательство. Вначале покажем, что G — бесконечная группа. Применяя к $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$ алгоритм, описанный в леммах 2.1.2– 2.1.5, получаем следующее вложение:

$$(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) < (P\times Q) \leftthreetimes \langle t\rangle,$$

где P, Q — квазициклические группы, $P^t = Q$ и $t^2 = 1$. Центр группы $(P\times Q)\leftthreetimes\langle t\rangle$ есть квазициклическая группа $\langle rr^t | r \in P\rangle = Z$. Следовательно, $C_G(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$ — бесконечная группа. Покажем, что C — абелева группа. Пусть $x, y \in C$ и $xy \neq yx$. Рассмотрим четыре случая:

1. $|x| = |y| = 2$.
2. $|x| = 2,\ |y| = 2^n > 2$.
3. $|y| = 2, |x| = 2^n > 2$.
4. $|x| = 2^m > 2, |y| = 2^n > 2$.

1. По условию насыщенности и предложению 1.2.3 конечная группа $N_1 = \langle((\langle a\rangle \times \langle b\rangle), x, y\rangle$ содержится в $(((\langle c\langle\times\rangle d\rangle) \leftthreetimes \langle t_1\rangle) = M_1$, где $M_1 < \mathfrak{S}(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$. По предложению 1.4.23 $C_{M_1}(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$ — абелева группа. Получили противоречие с тем, что $yx \neq yx$.

2. По 1 $\langle x, x^y, ..., x^{y^{2^n-1}}\rangle \leftthreetimes \langle y\rangle$ — конечная группа. Далее рассуждаем, как в случае 1.

3. Рассматривается аналогично 2.

4. По 2, 3 и индукции $x^2y = yx^2$ и $xy^2 = y^2x$. Следовательно, $\langle x^2, y^2\rangle$ — центр группы $\langle x, y\rangle$. Так как фактор-группа $\langle x, y\rangle/\langle x^2, y^2\rangle$ порождается двумя инволюциями, то она конечна. Следовательно, $\langle x, y\rangle$ — конечная группа. Далее рассуждаем, как в 1. Итак, C — абелева группа. Обозначим через $\tilde{C}$ полную часть группы C. По предложению 1.2.11 $C = \tilde{C} \times C_1$, где C_1 — циклическая группа. Из условий теоремы вытекает, что либо $\tilde{C} = P \times Q$ и $C_1 = 1$, либо $\tilde{C} = P$ и $C_1 = \langle d\rangle$, где $|d| = |a|$ и

$$\langle d\rangle < (\langle a\rangle \times \langle b\rangle).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.1.9. *Пусть $G_1 < M < G$ и M — локально конечная группа. Тогда $G_1 = M$.*

Доказательство. Пусть $G_1 \neq M$. Возьмем $x \in M \setminus G_1$. По условию насыщенности

$$\langle K_m, x\rangle < (((\langle c_m\rangle \times \langle d_m\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle),$$

где $R \in \mathfrak{S}(\langle K_m, x\rangle)$. Следовательно,

$$(\langle c_m\rangle \times \langle d_m\rangle) < C(\langle a_m^2\rangle \times \langle b_m^2\rangle).$$

Так как $C(\langle a_m^2\rangle \times \langle b_m^2\rangle) = A \times B$ (лемма 2.1.8), то $x = yv$ для некоторого $y \in A \times B$, т. е. $x \in G_1$. Получили противоречие с выбором x.

Лемма доказана.

Лемма 2.1.10. *Пусть $G_1 \neq G$. В G найдется подгруппа $G_2 \neq G_1$ такая, что* :

1. *$(A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle = G_1 \simeq G_2 = (P \times Q) \leftthreetimes \langle a\rangle$, где a — инволюция из A.*

2. *$G_1 \cap G_2 = (Z \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle = (Z \times \langle v\rangle) \leftthreetimes \langle a\rangle$, где $Z = Z(G_1) = Z(G_2)$ — центры групп G_1 и G_2.*

Доказательство. Возьмем инволюцию $x \in G \setminus G_1$ и инволюцию $a \in A$. По условию насыщенности

$$\langle x, a\rangle < M_1 = (((\langle c_1\rangle \times \langle d_1\rangle) \leftthreetimes \langle w_1\rangle).$$

Ясно, что $M_1 \not\subset G_1$. Положим $P_1 = M_1 \cap G_1$. Ясно, что $a \in P_1$.

Возьмем элемент $x_1 \in N_{M_1}(P_1) \setminus P_1$ и $x_1^2 \in P_1$. Возьмем элемент $y_1 = aa^v$. Так как $y_1 \in Z(G_1)$, то $\langle x_1, y_1, P_1\rangle$ — конечная группа, и по условию насыщенности

$$\langle x_1, y_1, P_1\rangle < M_2 = (((\langle c_2\rangle \times \langle d_2\rangle) \leftthreetimes \langle w_2\rangle).$$

Ясно, что $M_2 \not< G_1$. Положим $P_2 = M_2 \cap G_1$. Тогда $P_1 \leq P_2$ и $ay_1 = aaa^t = a^v = b \in P_2$. Поскольку b — инволюция из B, то все элементы порядка 2 из $A \times B$ лежат в P_2. Применяя алгоритм из лемм 2.1.2–2.1.5 к группе M_2, получим вложение

$$M_2 < G_2 = (P \times Q) \leftthreetimes \langle t\rangle,$$

где P, Q — квазициклические, $P^t = Q$ и $t^2 = 1$. По доказанному выше

$$(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) < P_2 = M_2 \cap G_1 \leq G_2 \cap G_1.$$

По леммам 2.1.8, 2.1.9

$$C_G(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) = A \times B,$$

а

$$C_{G_2}(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) = Z \times \langle a\rangle = Z \times \langle b\rangle,$$

где $Z = Z(G_2)$. Так как $a, b \in G_2$ и $a, b \notin (P \times Q)$, то по лемме 2.1.9

$$(P \times Q) \leftthreetimes \langle t\rangle = (P \times Q) \leftthreetimes \langle a\rangle = (P \times Q) \leftthreetimes \langle b\rangle.$$

Положим $t \equiv a$. Пусть теперь c — инволюция из P, а z — инволюция из Z. Тогда

$$(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)^c = (\langle a\rangle \times \langle z\rangle)^c = (\langle a^c\rangle \times \langle z^c\rangle) =$$

$$(\langle cacaa\rangle \times \langle z\rangle) = (\langle cc^a a\rangle \times \langle z\rangle) =$$
$$(\langle za\rangle \times \langle z\rangle) = (\langle a\rangle \times \langle z\rangle) = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle).$$

Таким образом, $c \in N(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$ и $c \notin A \times B$. Пусть d — инволюция из Q. Тогда

$$(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)^d = (\langle a\rangle \times \langle z\rangle)^d = (\langle a^d\rangle \times \langle z^d\rangle) =$$

$$(\langle dadaa\rangle \times \langle z\rangle) = (\langle dd^a a\rangle \times \langle z\rangle) =$$
$$(\langle za\rangle \times \langle z\rangle) = (\langle a\rangle \times \langle z\rangle) = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle).$$

Таким образом, $d \in N(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$ и $d \notin A \times B$. Так как $c, d \in G_1$ и $c, d \notin A \times B$, то по лемме 2.1.9
$$G_1 = (A \times B) \leftthreetimes \langle d\rangle = (A \times B) \leftthreetimes \langle c\rangle = (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle$$
и $Z(G_1) = Z$. Положим $v \equiv c$.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Предположим, что $G \neq G_1$. Рассмотрим фактор-группу $C_G(Z)/Z$. Тогда

$$\overline{G_1} = G_1/Z = \overline{A} \leftthreetimes \langle \overline{v}\rangle, \overline{G_2} = G_2/Z = \overline{P} \leftthreetimes \langle \overline{a}\rangle,$$

$\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \langle \overline{a}\rangle \times \langle \overline{v}\rangle$ для любого $\overline{x} \in \overline{A}, x^{\overline{v}} = \overline{x}^{-1}$ и для любого $\overline{y} \in \overline{P}, \overline{y^{\overline{a}}} = \overline{y}^{-1}$ (предложение 1.4.23). Возьмем элемент $\overline{a_1} \in \overline{A}$, такой, что $\overline{a_1}^2 = \overline{a}$. Возьмем элемент $\overline{v_1} \in \overline{P}$ такой, что $\overline{v_1}^2 = \overline{v}$. Ясно, что $\langle \overline{a_1}, \overline{v_1}\rangle \subset N(\langle \overline{a}\rangle \times \langle \overline{v}\rangle)$ и

$$\overline{a}^{\overline{v_1}} = \overline{av}, \overline{v}^{\overline{a}} = \overline{av}, \overline{a}^{\overline{va_1}} = \overline{v},$$

$$\overline{a}^{(\overline{a_1 v_1})^2} = \overline{v}^{\overline{a_1 v_1}} = \overline{av},$$
$$\overline{a}^{(\overline{a_1 v_1})^3} = \overline{av}^{\overline{a_1 v_1}} = \overline{a}^{\overline{a_1}} = \overline{a}.$$

Таким образом, $|\overline{v_1 a_1}|$ делится на 3, что невозможно.

Теорема доказана.

Пример 2.1.11. Пусть $\langle b\rangle$ — циклическая группа простого порядка $p \geqslant 665$, v — инволюция и $B(m,p)$ — свободная бернсайдова группа периода p с m образующими. По основному результату из [1] $B(m,p)$ не локально конечна. Рассмотрим группу

$$G = (\langle b\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle) \times B(m,p),$$

где $b^v = b^{-1}$. Покажем, что G насыщена одной группой вида

$$(\langle c\rangle \times \langle d\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle,$$

где $v^2 = 1$, $|c| = p$, $c^v = d$.

Действительно, пусть K — конечная подгруппа из G. Тогда $K = \{x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n\}$, где $|K| = n$. Так как K — конечная группа, то $(x_iy_i)(x_jy_j) = x_ix_jy_iy_j = x_ky_k$, где $1 \leq i, j, k \leq n$ и $x_k = x_ix_j$, а $y_k = y_iy_j$. Таким образом, $Y = \langle y_1, y_2, ..., y_n\rangle$ — конечная подгруппа в $B(m,p)$ и по [1, глава VII, теорема 1.8] $Y = \langle y\rangle$ — циклическая группа порядка p. Следовательно,
$$K \leq \langle x_1, ..., x_n\rangle \times Y \leq (\langle b\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle) \times Y.$$

Положим $c = by$ и $c^v = d = b^{-1}y$. Тогда

$$(\langle b\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle) \times Y = (\langle c\rangle \times \langle d\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle \text{ —}$$

сплетенная группа требуемого вида. Ясно, что G — не локально конечная группа.

Построенный выше пример 2.1.11 показывает, что теорема 2.1.1 для произвольных периодических групп неверна. Однако для некоторых классов групп, в частности для локально конечных групп и групп Шункова, такое обобщение возможно.

Теорема 2.1.12. *Пусть G — локально конечная группа, насыщенная сплетенными группами. Тогда $G = (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle$, где $A^v = B$, A — локально циклическая группа и $|v| = 2$.*

Доказательство.

Определим множество сплетенных групп $\mathfrak{Z} = \{(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle\}$, где $|a| < \infty, a^v = b$ и $|a|$ не фиксируется.

Пусть x, y — элементы нечетного порядка из G. По условию насыщенности конечная группа

$$\langle x, y\rangle < (((\langle c\rangle \times \langle d\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle) \in \mathfrak{Z}(1).$$

Следовательно, $\langle x, y\rangle < (\langle c\rangle \times \langle d\rangle)$ и $xy = yx$. В силу произвольности выбора x, y получаем, что все элементы нечетных порядков из G образуют абелеву подгруппу $N \subset G$. Несложно заметить, что $N = N_1 \times N_2$, где N_1 и N_2 — изоморфные локально циклические группы. Фактор-группа $\overline{G} = G/N$, очевидно, является 2-группой, насыщенной множеством $\mathfrak{S}$. Следовательно, по теореме 2.1.1

$$\overline{G} = (\overline{A} \times \overline{B}) \leftthreetimes \langle \overline{v}\rangle, \overline{A}^{\overline{v}} = \overline{B}, \overline{v}^2 = 1$$

и $\overline{A}$ — локально циклическая группа.

Пусть v — инволюция из G, являющаяся прообразом инволюции $\overline{v}$ из $\overline{G}$, а M — полный прообраз группы $(\overline{A} \times \overline{B})$ в G. Ясно, что $G = M \leftthreetimes \langle v\rangle$. Так как M — абелева группа, то $M = M_1 \times M_2$, где M_1 — $2'$-группа, а M_2 — 2-группа. Следовательно, $M_1 = N$, а группа $M_2 \leftthreetimes \langle v\rangle$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1.1, значит, $M_2 = (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle$, где $A_1^v = B_1$ и A_1 — локально циклическая группа. Поскольку $v \in N(M_1)$, то можно считать, что

$$M_1 \leftthreetimes v = (N_1 \times N_2) \leftthreetimes \langle v\rangle, N_1^v = N_2.$$

Положим $A = (N_1 \times A_1), B = (N_2 \times A_2)$. Тогда $G = (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle, A^v = B$ и A — локально циклическая группа.

Теорема доказана.

Теорема 2.1.13. *Пусть G — группа Шункова, насыщенная сплетенными группами. Тогда G обладает периодической частью $T(G) = (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle$, где $A^v = B$, A — локально циклическая группа и $|v| = 2$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{Z}$ — множество из доказательства теоремы 2.1.12. Пусть $a \in G$ и $|a| = p \neq 2$. По условию теоремы $\langle a, a^g\rangle < K \in \mathfrak{Z}(\langle a, a^g\rangle)$. Следовательно,

$$K \simeq (\langle c\rangle \times \langle d\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle,$$

где $c^v = d$, $v^2 = 1$. Значит, $\langle a, a^g \rangle < (\langle c \rangle \times \langle d \rangle)$. Последнее означает, что $\langle a^G \rangle$ — абелева нормальная подгруппа в G, отсюда и из определения группы Шункова нетрудно показать, что все элементы нечетных порядков образуют в G абелеву нормальную подгруппу N. Фактор-группа $\overline{G} = G/N$ является группой Шункова, насыщенной множеством $\mathfrak{S}$. Так как все элементы конечного порядка из $\overline{G}$ являются 2-элементами, то $\overline{G}$ обладает периодической частью $T(\overline{G})$, которая является локально конечной группой. Следовательно, G обладает периодической частью $T(G)$, которая есть локально конечная группа по предложению 1.2.3. По теореме 2.1.12 $G = (A \times B) \leftthreetimes (v)$, где A, B и v — из условия.

Теорема доказана.

2.2 Об одном достаточном условии, при котором бесконечная группа не будет простой

Теорема 2.2.1. *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества конечных простых неабелевых групп и в G есть инволюция z такая, что $C_G(z)$ содержит конечное число элементов конечного порядка. Тогда G обладает периодической частью, изоморфной конечной простой неабелевой группе. В частности, если G — бесконечная группа, то G — не простая группа.*

Доказательство. Пусть G — контрпример к утверждению теоремы, и $\mathfrak{M}$ — насыщающее множество для группы G, состоящее из конечных простых неабелевых групп. Зафиксируем инволюцию z из условия теоремы.

Лемма 2.2.2. *$C_G(z)$ обладает конечной периодической частью $T(C_G(z))$.*

Доказательство. Пусть P — множество всех элементов конечного порядка из $C_G(z)$. По условию теоремы P — конечное множество. Так как P — инвариантное множество, то по лемме Дицмана $C_G(z)$ обладает конечной периодической частью $T(C_G(z))$.

Лемма доказана.

Лемма 2.2.3. *Группа G содержит бесконечно много элементов конечного порядка.*

Доказательство. Предположим обратное. По лемме Дицмана G обладает конечной периодической частью $T(G)$. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Лемма 2.2.4. *Группа G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Доказательство. Утверждение леммы является следствием леммы 2.2.3 и предложения 1.3.4.

Лемма доказана.

Лемма 2.2.5. *Множество $\mathfrak{M}(1)$ содержит группы сколь угодно большого порядка.*

Доказательство. По лемме 2.2.4 для любого натурального m в группе G найдется конечная подгруппа K_m такая, что $|K_m| > m$. По условию насыщенности $K_m \leqslant L_m$ и $L_m \in \mathfrak{M}(1)$. В силу произвольности выбора m множество $\mathfrak{M}(1)$ содержит группы сколь угодно большого порядка.

Лемма доказана.

Лемма 2.2.6. *Пусть $P_{\mathfrak{M}(1)}$ — множество простых делителей порядков групп из $\mathfrak{M}(1)$. Тогда $P_{\mathfrak{M}(1)}$ — бесконечное множество.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда по предложению 1.4.10 порядки групп из множества $\mathfrak{M}(1)$ ограничены в совокупности. Противоречие с утверждением леммы 2.2.5.

Лемма доказана.

По условию теоремы в группе G существует инволюция z такая, что $C_G(z)$ обладает конечной периодической частью $T(C_G(z))$, т. е. $C_G(z)$ содержит конечное число элементов конечного порядка. По определению

$$\mathfrak{M}(\langle z\rangle) = \{M_z \mid M_z \in \mathfrak{M}(1),\ z \in M_z\} -$$

множество всех конечных простых неабелевых подгрупп группы G, содержащих инволюцию z.

Лемма 2.2.7. *Множество $\mathfrak{M}(\langle z\rangle)$ содержит группы, порядок которых больше любого заданного натурального m.*

Доказательство. Пусть $\{a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots\}$ — бесконечное множество элементов групп из множества $\mathfrak{M}(1)$ таких, что $|a_k| = p_k$ – простое число и все p_k различны (лемма 2.2.6). По предложению 1.3.3 группа $\langle z, a_k\rangle$ конечна для любого k. Ввиду условия насыщенности

$$\langle z, a_k\rangle \leq M_z \in \mathfrak{M}(\langle z\rangle).$$

Из определения простых чисел p_k вытекает, что для любого натурального m найдется такое p_k, что $p_k > m$. Следовательно, $m < p_k < |\langle z, a_k\rangle| \leqslant |M_z|$.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Пусть $\{M_z^{(k)} | k = 1, 2, ...\}$ — бесконечное подмножество множества $\mathfrak{M}(\langle z\rangle)$ такое, что

$$|M_z^{(1)}| < |M_z^{(2)}| < \cdots < |M_z^{(k)}| < \cdots$$

(лемма 2.2.7). По предложению 1.4.11 найдется бесконечная строго возрастающая последовательность натуральных чисел

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_m < \cdots$$

таких, что

$$|C_{M_z^{(k_1)}}(z)| < |C_{M_z^{(k_2)}}(z)| < \cdots < |C_{M_z^{(k_m)}}(z)| < \cdots$$

— бесконечная строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Противоречие с тем, что для любого k_m $|C_{M_z^{(k_m)}}(z)| \leqslant |T(C_G(z))|$ (лемма 2.2.2). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема доказана.

2.3 О периодических группах и группах Шункова, насыщенных группами диэдра и A_5

Пусть $\mathfrak{A} = \{A_5\}$ — множество, состоящее из одной группы A_5, $\mathfrak{B}$ — множество, состоящее из конечных групп диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$.

Теорема 2.3.1. *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна лтбо группе A_5, либо локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Доказательство. Пусть G — контрпример к утверждению теоремы.

Лемма 2.3.2. *Группа G бесконечна.*

Доказательство. Действительно, если G — конечная группа, то по условию насыщенности $G \tilde{\in} \mathfrak{M}$. Следовательно, либо G изоморфна A_5, либо G изоморфна группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Лемма доказана.

Лемма 2.3.3. *Пусть z — инволюция из G. Тогда $C_G(z)$ — элементарная абелева группа порядка не более 4.*

Доказательство. Пусть g такой элемент из $C_G(z)$, что порядок g больше двух. Ясно, что $\langle z, g\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle z, g\rangle \le H \le G \text{ и } H \tilde{\in} \mathfrak{M}.$$

Следовательно, либо H изоморфна A_5, либо H изоморфна конечной группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Но в каждом из этих случаев $C_H(z)$ содержит только элементы порядка 2. Противоречие с выбором элемента g. Итак, все элементы из $C_G(z)$ имеют порядок 2, следовательно, $C_G(z)$ — элементарная абелева 2-группа. Предположим, что в $C_G(z)$ нашлась конечная подгруппа A такая, что порядок A больше 4. Ясно, что $\langle z, A\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle z, A\rangle \le H \le G \text{ и } H \tilde{\in} \mathfrak{M}.$$

Следовательно, либо H изоморфна A_5, либо H изоморфна конечной группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Но в каждом из этих случаев конечные подгруппы из $C_H(z)$ являются 2-группами и имеют порядок не более 4. Поскольку $A \le C_H(z)$, то мы приходим к противоречию с выбором группы A. Итак, все конечные подгруппы из $C_G(z)$ являются элементарными абелевыми 2-группами порядка не более 4, следовательно, $C_G(z)$ — элементарная абелева 2-группа порядка не более 4.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. По предложению 1.2.6 и леммам 2.3.2, 2.3.3 G — бесконечная локально конечная группа. Пусть R — произвольная конечная подгруппа группы G. Так как G — бесконечная локально конечная группа, то в ней найдется конечная подгруппа K такая, что $R < K$, и $|K| > |A_5|$. По условию насыщенности в G найдется такая конечная подгруппа H, что $K < H$ и $H \tilde{\in} \mathfrak{M}$. Следовательно, либо H изоморфна A_5, либо H изоморфна конечной группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Так как $|H| > |A_5|$, то H не изоморфна A_5. Следовательно, H изоморфна группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. В силу произвольности выбора группы R, как конечной подгруппы группы G, получаем, что G насыщена группами диэдра, и по предложению 1.2.2 G — локально диэдральная группа. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Теорема доказана.

Теорема 2.3.4. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна либо группе A_5, либо локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть G — контрпример.

Лемма 2.3.5. *Группа G содержит бесконечно много элементов конечного порядка.*

Доказательство. Действительно, если G содержит конечное число элементов конечного порядка, то G обладает конечной периодической частью $T(G)$ (предложение 1.2.1). По условию насыщенности $T(G) \tilde{\in} \mathfrak{M}$. По теореме 2.3.1, либо $T(G)$ изоморфна A_5, либо $T(G)$ изоморфна группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Лемма доказана.

Лемма 2.3.6. *Все инволюции в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y — две различные инволюции из группы G. Из предложения 1.3.4 вытекает, что $\langle x, y\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle x, y\rangle \leq R \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, либо R изоморфна A_5, либо R изоморфна конечной группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. В каждом из этих случаев инволюции x, y сопряжены в R. Так как R — подгруппа G, то инволюции x, y сопряжены в группе G.

Лемма доказана.

Лемма 2.3.7. $\mathfrak{M}(1)$ – *бесконечное множество, и для него возможны только следующие взаимоисключающие случаи* :

(A) $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1)$.

(B) $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{B}(1)$.

(C) $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$, *где* $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$.

Доказательство. Непосредственное следствие определения множеств $\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.

Лемма доказана.

Дальнейшее доказательство теоремы проведем отдельно для каждого из случаев, перечисленных в лемме 2.3.7. В случае **(A)** теорема доказана по предложению 1.3.8. В случае **(B)** теорема доказана по предложению 1.3.9. Ниже, до окончания доказательства, будет рассматриваться только случай **(C)**.

Лемма 2.3.8. *Пусть z — инволюция из G. Тогда* :

1. *$C_G(z)$ обладает периодической частью $T(C_G(z))$.*
2. *$T(C_G(z))$ — элементарная абелева группа порядка 4 (четверная группа).*

Доказательство. Пусть g — элемент конечного порядка из $C_G(z)$ такой, что порядок g больше двух. Ясно, что $\langle z, g\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle z, g\rangle \leq H \leq G \text{ и } H \tilde{\in} \mathfrak{M}.$$

Следовательно, либо H изоморфна A_5, либо H изоморфна конечной группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Но в каждом из этих случаев $C_H(z)$ содержит только элементы порядка 2. Противоречие с выбором элемента g. Итак, все элементы конечного порядка из $C_G(z)$ имеют порядок 2, т. е. являются инволюциями. Так как $C_G(z)$ — группа Шункова, то по предложению 1.3.3 все элементы конечного порядка из $C_G(z)$ порождают элементарную абелеву 2-группу, которая, очевидно, совпадает с $T(C_G(z))$. Итак, пункт 1 доказан.

Так как мы рассматриваем случай **(C)** из утверждения леммы 2.3.7, то в G найдется четверная группа. Следовательно, $T(C_G(z))$ — элементарная абелева 2-группа порядка не менее 4 (лемма 2.3.6). Предположим, что в $T(C_G(z))$ нашлась конечная подгруппа A такая, что порядок A больше 4. Ясно, что $\langle z, A\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle z, A\rangle \leq H \leq G \text{ и } H \tilde{\in} \mathfrak{M}.$$

Следовательно, либо H изоморфна A_5, либо H изоморфна конечной группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Но в каждом из этих случаев конечные подгруппы из $C_H(z)$ являются элементарными абелевыми 2-группами и имеют порядок не более 4. Поскольку $A \leq C_H(z)$, то мы приходим к противоречию с выбором группы A. Итак, все конечные подгруппы из $T(C_G(z))$ являются элементарными абелевыми группами порядка не более 4, следовательно, $T(C_G(z))$ — элементарная абелева 2-группа порядка 4. Пункт 2 доказан.

Лемма доказана.

По лемме 2.3.7 (случай **(C)**) в G существует подгруппа H, изоморфная A_5. Возьмем в H четверную подгруппу A, элемент $a \in H$ с тем свойством, что порядок a равен 5, и инволюцию $v \in A$ такие, что $H = \langle a, v\rangle$. По лемме 2.3.8 $A = T(C_G(v))$. Зафиксируем группы H, A, элемент a и инволюцию v.

Лемма 2.3.9. *$N_G(A)$ обладает периодической частью и*

$$T(N_G(A)) = N_H(A) = A \leftthreetimes \langle b\rangle \simeq S_3.$$

Доказательство. Рассмотрим фактор-группу $\overline{N} = N_G(A)/A$. По предложению 1.3.1 $\overline{N}$ — группа Шункова. Покажем, что $\overline{N}$ насыщена одной циклической группой порядка 3. Действительно, пусть $\overline{R}$ — конечная подгруппа группы $\overline{N}$, и R – ее полный прообраз в N. По условию насыщенности $R < K < G$, и поскольку $A < K$, то $K \simeq A_5$. Следовательно, $R \leq N_K(A) = A \leftthreetimes \langle b\rangle \simeq S_3$, для некоторого элемента $b \in K$ такого, что порядок b равен 3. Переходя к фактор-группе $\overline{N}$, получаем включение $\overline{R} \leq \overline{\langle b\rangle}$, что и требовалось. По предложению 1.3.5 $\overline{N}$ обладает периодической частью $T(\overline{N})$, и $T(\overline{N}) \simeq \overline{\langle b\rangle}$. Возвращаясь в группу $N_G(A)$, получаем, что $N_G(A)$ обладает периодической частью $T(N_G(A))$, и $T(N_G(A)) = N_K(A) = A \leftthreetimes \langle b\rangle \simeq S_3$. Поскольку $N_H(A) \leq T(N_G(A))$, то $T(N_G(A)) = N_H(A) = A \leftthreetimes \langle b\rangle \simeq S_3$.

Лемма доказана.

Пусть b — элемент порядка 3 из утверждения леммы 2.3.9. Положим

$$B = T(N_G(A)) = N_H(A) = A \leftthreetimes \langle b \rangle,$$

$$\mathfrak{N} = \{\langle v, a^g \rangle | g \in G \setminus N_G(\langle a \rangle)\}$$

и зафиксируем множество $\mathfrak{N}$, группу B и элемент b.

Лемма 2.3.10. *Множество $\mathfrak{N}$ содержит бесконечное подмножество групп $\mathfrak{D}$, и каждая группа из множества $\mathfrak{D}$ изоморфна A_5.*

Доказательство. Покажем, что $\mathfrak{N}$ — бесконечное множество. Действительно, в противном случае множество a^G конечно, и по предложению 1.3.1 $K = \langle a^G \rangle$ — конечная нормальная подгруппа группы G. Очевидно, $H \leq K$. Из условия насыщености вытекает, что $K = H$. По лемме 2.3.5 существует элемент конечного порядка $d \in G \setminus H$. Так как H — нормальная подгруппа в G, то $\langle H, d \rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle H, d \rangle < L$ и $L \simeq A_5$. Следовательно, $L = H$, что невозможно, так как H — собственная нормальная подгруппа группы L. Итак, $\mathfrak{N}$ — бесконечное множество.

Пусть a^g — такой элемент из a^G, что $\langle v, a^g \rangle \not\simeq A_5$. По предложению 1.3.3 $\langle v, a^g \rangle$ – конечная группа для любого $g \in G$. По условию насыщенности $\langle v, a^g \rangle = \langle a^g \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle$ и $(a^g)^v = (a^g)^{-1}$. Если теперь предположить, что бесконечного множества $\mathfrak{D}$ не существует, то в множестве a^G существует бесконечное подмножество

$$\mathfrak{R} = \{a^{g_1}, a^{g_2}, \cdots, a^{g_n}, \cdots\}$$

такое, что $\langle a^{g_n}, z \rangle = \langle a^{g_n} \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle$ и $(a^{g_n})^v = (a^{g_n})^{-1}$ ($n = 1, 2, \cdots$). Следовательно,

$$\langle a^{g_{n_1}}, a^{g_{n_2}}, v \rangle$$

— конечная группа для любых n_1, n_2. Ввиду бесконечности множества $\mathfrak{R}$, множество групп $\langle a^{g_{n_1}}, a^{g_{n_2}}, z \rangle \simeq A_5$ бесконечно. В каждой из таких групп найдется элемент $a^{g_{n_3}}$ такой, что

$$\langle a^{g_{n_3}}, v \rangle = \langle a^{g_{n_1}}, a^{g_{n_2}}, v \rangle \simeq A_5.$$

Но тогда $\mathfrak{D} = \{\langle v, a^{g_{n_3}} \rangle\}$ — бесконечное множество, удовлетворяющее утверждению леммы. Противоречие с предположением, что такого множества не существует.

Лемма доказана.

Зафиксируем множество $\mathfrak{D}$ из утверждения леммы 2.3.10.

Лемма 2.3.11. *Пусть X — группа из $\mathfrak{D}$ такая, что $X \neq H$. Тогда $X \cap H = B$.*

Доказательство. Так как $C_H(v)$ и $C_X(v)$ являются четверными группами, то по лемме 2.3.8 $A = C_H(v) = C_X(v)$, следовательно, $A \leq X \cap H$. По лемме 2.3.9 $N_H(A) = N_X(A) = B$, и $X \cap H = B$.

Лемма доказана.

Лемма 2.3.12. *Группа $N_G(\langle b \rangle)$ обладает периодической частью,*

$$T(N_G(\langle b \rangle)) = L \leftthreetimes \langle t \rangle \text{ –}$$

бесконечная локально диэдральная группа, L – бесконечная локально циклическая группа без инволюций, t – инволюция, для любого $x \in L$ $x^t = x^{-1}$.

Доказательство. Пусть $N = N_G(\langle b\rangle)$. Покажем, что N насыщена группами диэдра. Действительно, пусть R — конечная подгруппа группы N, и R — ее полный прообраз в N. По условию насыщенности $R < K < G$, где либо K изоморфна A_5, либо K изоморфна группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. В каждом из этих случаев $N_K(\langle b\rangle)$ является группой диэдра. Так как $R \leq N_K(\langle b\rangle$, то насыщенность группы N конечными группами диэдра доказана. По предложению 1.3.9 группа N обладает периодической частью $T(N)$, и $T(N) = T(N_G(\langle b\rangle)) = L \leftthreetimes \langle t\rangle$ — бесконечная локально диэдральная группа, L — бесконечная локально циклическая группа без инволюций (условие насыщенности), t — инволюция, и для любого $x \in L$ $x^t = x^{-1}$.

Лемма доказана.

Зафиксируем группу L из утверждения леммы 2.3.12.

Лемма 2.3.13. *Для любой группы X из $\mathfrak{D}$ найдется элемент $g \in L$ такой, что $X^g = H$.*

Доказательство. По лемме 2.3.11 $X \cap H = B = A \leftthreetimes \langle b\rangle$. Возьмем в H инволюцию i такую, что $b^i = b^{-1}$. Возьмем в X инволюцию j такую, что $b^j = b^{-1}$. Очевидно, инволюции i, j лежат в $T(N_G(\langle b\rangle)$. По лемме 2.3.12 найдется такой элемент $l \in L$, что $j^l = i$. Следовательно,

$$\langle b\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle \leq H \cap X^l.$$

По лемме 2.3.8 $T(C_G(i)$ — четверная группа, следовательно, $T(C_G(i)) \leq H \cap X^l$. В этом случае, как нетрудно видеть, $H = \langle b, C_G(i)\rangle = X^l$.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Из леммы 2.3.13 вытекает существование бесконечного множества

$$\{l_1, l_2, \cdots, l_n, \cdots\}$$

элементов группы L со свойством

$$A^{l_1} = A^{l_2} = \cdots = A^{l_n} = \cdots .$$

Следовательно,

$$A = A^{l_2 l_1^{-1}} = \cdots = A^{l_n l_1^{-1}} = \cdots$$

и

$$\{l_2 l_1^{-1}, \cdots, l_n l_1^{-1} \cdots\} -$$

бесконечное множество элементов группы L, лежащее в $T(N_G(A))$. Так как $T(N_G(A))$ – группа Шункова, то по предложению 1.3.4 она содержит бесконечную локально конечную подгруппу F. Поскольку

$$|F : C_F(A)| \leqslant 3,$$

то $C_F(A)$ – бесконечная локально конечная группа. Ясно, что $C_F(A) \leq T(N_G(A))$. Противоречие с утверждением леммы 2.3.9.

Теорема доказана.

2.4 О группах, насыщенных группами диэдра и линейными группами степени 2

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество, состоящее из групп $L_2(q)$, где $q \equiv 3, 5 \pmod 8$, $\mathfrak{B}$ — множество, состоящее из конечных групп диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$.

Теорема 2.4.1. *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна либо группе $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q, либо локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть G — контрпример.

Лемма 2.4.2. *Группа G бесконечна.*

Доказательство. Действительно, если G — конечная группа, то по условию насыщенности $G \,\tilde{\in}\, \mathfrak{M}$. Следовательно, либо G изоморфна группе $L_2(q)$, где $q \equiv 3, 5 \pmod 8$, либо G изоморфна группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Лемма доказана.

Лемма 2.4.3. $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$ *– бесконечное множество, где* $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, *и существует такая группа $X \in \mathfrak{B}(1)$, что $X \not\lesssim Y$ ни для какой группы $Y \in \mathfrak{A}(1)$.*

Доказательство. То, что $\mathfrak{M}(1)$ — бесконечное множество, вытекает из леммы 2.4.2. В случае $\mathfrak{A}(1) = \varnothing$ G является локально диэдральной группой (предложение 1.2.18). Противоречие с тем, что G – контрпример. В случае $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, G изоморфна $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q (предложение 1.2.17). Противоречие с тем, что G – контрпример. Если группы X из условия леммы не найдется, то в качестве насыщающего множества для группы G можно взять $\mathfrak{A}(1)$, и по предложению 1.2.17 G изоморфна $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q. Противоречие с тем, что G – контрпример.

Лемма доказана.

Лемма 2.4.4. *Все инволюции в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y — две различные инволюции из группы G. Из предложения 1.2.20 (пункт 1) вытекает, что $\langle x, y\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle x, y\rangle \leq R \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, либо $R \in \mathfrak{A}(1)$, либо $R \in \mathfrak{B}(1)$. В каждом из этих случаев инволюции x, y сопряжены в R (предложения 1.4.3, 1.2.20 (пункт 2)). Так как R — подгруппа G, то инволюции x, y сопряжены в группе G.

Лемма доказана.

Лемма 2.4.5. *Пусть z — инволюция из G. Тогда $C_G(z)$ — бесконечная локально диэдральная группа.*

Доказательство Если $C_G(z)$ — конечная группа, то по предложению 1.2.6 и лемме 2.4.2 G – бесконечная локально конечная группа. Пусть X из заключения леммы 2.4.3, K – произвольная конечная подгруппа группы G. По условию насыщенности и лемме 2.4.3 $\langle X, K\rangle < H$, где $H \in \mathfrak{B}(1)$. Следовательно, H – группа диэдра. В силу произвольности выбора K, как конечной подгруппы группы G, получаем, что группа G насыщена группами диэдра, и G – локально диэдральная группа (предложение 1.2.18). Противоречие с тем, что G – контрпример.

Итак, $C_G(z)$ — бесконечная группа. Пусть K – конечная подгруппа из $C_G(z)$, отличная от группы $\langle z\rangle$. Ясно, что $\langle z, K\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle z, K\rangle \leq C_H(z) < H < G, \text{ где } H \in \mathfrak{A}(1).$$

Так как H изоморфна $L_2(q)$, то по предложению 1.4.3 $C_H(z)$ изоморфна конечной группе диэдра. Следовательно, группа $C_G(z)$ насыщена группами диэдра. По предложению 1.2.18 $C_G(z)$ — бесконечная локально диэдральная группа.

Лемма доказана.

Зафиксируем некоторую инволюцию z из группы G.

Лемма 2.4.6. *$C_G(z) = C_L(z) < L < G$, где $L \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q нечетной характеристики.*

Доказательство. По лемме 2.4.5

$$C_G(z) = \{c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots\} -$$

счетная группа. По условию насыщенности

$$\langle z, c_1\rangle < H_1, \text{где } H_1 \in \mathfrak{A}(1).$$

Следовательно, $H_1 \simeq L_2(q_1)$, где $q_1 \equiv 3, 5 \pmod 8$. Пусть n_1 – минимально возможное значение индекса n, при котором $c_{n_1} \notin H_1$. По условию насыщенности

$$\langle C_{H_1}(z), c_{n_1}\rangle < H_2, \text{ где } H_2 \in \mathfrak{A}(1).$$

Следовательно, $H_2 \simeq L_2(q_2)$, где $q_2 \equiv 3, 5 \pmod 8$. По построению $|H_1| < |H_2|$. Предположим, что для $k \geqslant 2$ мы построили группу H_k. Пусть n_k – минимально возможное значение индекса n, при котором $c_{n_k} \notin H_k$. По условию насыщенности

$$\langle C_{H_k}(z), c_{n_k}\rangle < H_{k+1}, \text{ где } H_{k+1} \in \mathfrak{A}(1).$$

Следовательно, $H_{k+1} \simeq L_2(q_{k+1})$, где $q_{k+1} \equiv 3, 5 \pmod 8$, и $C_{H_k}(z) < C_{H_{k+1}}(z)$. По построению $|H_1| < |H_2| < \cdots < |H_k| < |H_{k+1}|$. Действуя подобным образом, мы получаем бесконечную последовательность групп

$$H_1, \ H_2, \ \cdots, H_n, \ \cdots$$

со следующими свойствами: для любого n

$$H_n \simeq L_2(q_n), \text{где } q_n \equiv 3, 5 \pmod 8,$$

$$C_{H_1}(z) < C_{H_2}(z) < \ \cdots \ < C_{H_n}(z) < \ \cdots$$

и

$$\cup_{n=1}^{\infty} C_{H_n}(z) = C_G(z).$$

Так как для любого $n > 2$ $C_{H_n}(z)$ содержит две неперестановочные инволюции, то по предложению 1.4.3 (пункты 2, 6) последовательность групп

$$H_2, \ \cdots \ , H_n, \ \cdots$$

превращается в цепочку вложенных друг в друга групп

$$H_2 < \ \cdots \ < H_n < \ \cdots \ .$$

Ясно, что

$$\cup_{n=2}^{\infty} H_n = L -$$

бесконечная локально конечная группа, насыщенная группами из множества $\mathfrak{A}(1)$. По предложению 1.2.16 $L \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q нечетной харатеристики.

Лемма доказана.

Зафиксируем группу L, поле Q из утверждения леммы 2.4.6 и цепочку

$$H_2 < \ \cdots \ < H_n < \ \cdots$$

из доказательства леммы 2.4.6.

Лемма 2.4.7. *Для любой инволюции w из L $C_G(w) = C_L(w) < L$.*

Доказательство. Действительно, для некоторого $x \in L$ $z^x = w$. Тогда $C_G(z)^x = C_{G^x}(z^x) = C_G(w)$. Так как $C_G(z)^x < L$, то $C_G(w) < L$.

Лемма доказана.

Лемма 2.4.8. *L – сильно вложенная подгруппа в G.*

Доказательство Пусть $g \in N_G(L) \setminus L$. Возьмем такую группу H_n, что $|H_n| > |A_5|$. По условию насыщенности $\langle g, H_n \rangle \leq K$, где $K \in \mathfrak{A}(1)$. По лемме 2.4.6 $C_K(z) < L$. Поскольку $C_K(z)$ – группа диэдра порядка более 4, то $C_K(z)$ содержит неперестановочные инволюции v, w. По предложению 1.4.3 (пункт 6) $K = \langle C_K(v), C_K(w) \rangle$. По лемме 2.4.7 $C_K(w) < C_L(w) < L$ и $C_K(v) < C_L(v) < L$. Следовательно, $K < L$, и как следствие $g \in L$. Противоречие с выбором g. Итак, $N_G(L) = L$.

Пусть $g \in G \setminus L$ и w – инволюция из $L \cap L^g$. По лемме 2.4.7 $C_G(w) < L \cap L^g$. Очевидно, $C_G(w)$ содержит неперестановочные инволюции. Отсюда и из предложения 1.4.3 (пункт 6) получаем, что $L = L^g$, и в этом случае, как показано выше, $g \in L$. Противоречие с выбором g.

Лемма доказана.

Лемма 2.4.9. *Пусть v – инволюция из $G \setminus L$. Тогда :*

1. *$L = C_L(z)H$, где $H = L \cap L^v$ – группа без инволюций.*
2. *Для любого $h \in H$ $h^v = h^{-1}$ и H – абелева группа.*
3. $\pi(H) \cap \pi(C_L(z) = \varnothing$.
4. $C_L(z) \cap H = 1$.

Доказательство. Первое утверждение леммы вытекает из леммы 2.4.8 и предложения 1.2.21.

Докажем второе утверждение. Пусть $1 \neq h \in C_H(v)$. По лемме 2.4.4 для некоторого $g \in G$ $v^g = z$. Следовательно, $h^g \in C_G(z) < L$ (лемма 2.4.6). Так как $\langle h, h^g, z\rangle < H_n$ для некоторого n, то $h \in C_{H_n}(w)$ для некоторой инволюции $w \in H_n$ (предложение 1.4.3). Ясно, что в этом случае $w \in L$. По условию насыщенности $\langle v, w, h\rangle < K$, где $K \simeq L_2(q)$, и $q \equiv 3, 5 \pmod 8$. Так как инволюции v, w не перестановочны, то по предложению 1.4.3 (пункт 6) $K = \langle C_K(v), C_K(w)\rangle$. Так как $\langle h\rangle$ – нормальная подгруппа в $C_K(v)$ и одновременно $\langle h\rangle$ – нормальная подгруппа в $C_K(w)$, то $\langle h\rangle$, очевидно, нормальная подгруппа в K, что невозможно. Таким образом, $C_H(v) = 1$, и поскольку $H \leftthreetimes \langle v\rangle$ – группа, то утверждение 2 доказано.

Докажем утверждение 3. Предположим обратное, и пусть b – элемент простого порядка из H, и $|b| \in \pi(H) \cap \pi(C_L(z))$. Тогда $|b|$ – нечетное число, и $C_L(b)$ содержит некоторую инволюцию w. Так как $b^v = b^{-1}$, то по условию насыщенности $\langle w, v, b\rangle < K$, где $K \simeq L_2(q)$ и $q \equiv 3, 5 \pmod 8$. Следовательно, $b \in C_K(w) \cap C_K(w^v)$. По предложению 1.4.3 (пункт 3) $w = w^v$. Но тогда $w \in L \cap L^v$, что невозможно.

Утверждение 4 – прямое следствие утверждений 1–3.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. По лемме 2.4.6 $L \simeq L_2(Q)$. По лемме 2.4.9 $L = C_L(z)H$, где H – абелева группа без инволюций, и $C_L(z) \cap H = 1$. Следовательно, либо H – локально циклическая группа, либо H – элементарная абелева p-группа, где p – характеристика поля Q. Но ни первое, ни второе невозможно ввиду того, что группа G изоморфна $L_2(Q)$. Противоречие.

Теорема доказана.

Теорема 2.4.10. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна либо группе $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q, либо локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Доказательство. Пусть G – контрпример к утверждению теоремы.

Лемма 2.4.11. *Группа G содержит бесконечно много элементов конечного порядка.*

Доказательство. Действительно, если G содержит конечное число элементов конечного порядка, то G обладает конечной периодической частью $T(G)$ (предложение 1.2.1). По условию насыщенности либо $T(G)$ изоморфна группе $L_2(q)$, где $q \equiv 3, 5 \pmod 8$, либо $T(G)$ изоморфна группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Лемма доказана.

Лемма 2.4.12. $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$ – *бесконечное множество, где $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, и существует такая группа $X \in \mathfrak{B}(1)$, что $X \not\lesssim Y$ ни для какой группы $Y \in \mathfrak{A}(1)$.*

Доказательство. То, что $\mathfrak{M}(1)$ — бесконечное множество, вытекает из леммы 2.4.11. В случае $\mathfrak{A}(1) = \varnothing$ по предложению 1.3.9 G обладает периодической частью $T(G)$, которая является локально диэдральной группой. Противоречие с тем, что G – контрпример. В случае $B(1) = \varnothing$ G обладает периодической частью $T(G)$ по предложению 1.3.8, и $T(G)$ изоморфна $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q. Противоречие с тем, что G – контрпример. Если группы X из условия леммы не найдется, то в качестве насыщающего множества можно взять множество $\mathfrak{A}(1)$, и в данном случае, как отмечалось выше,

G обладает периодической частью, которая изоморфна $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q (предложение 1.3.8). Противоречие с тем, что G – контрпример.

Лемма доказана.

Лемма 2.4.13. *Группа G не содержит собственных нетривиальных нормальных периодических подгрупп.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть N — контрпример к утверждению леммы. Предположим, что N не содержит инволюций. Возьмем инволюцию $z \in G \setminus N$. Так как G – группа Шункова, то по предложению 1.3.3 для любого $b \in N$ группа $\langle z, z^b\rangle$ является конечной группой диэдра вида $\langle b_1\rangle \leftthreetimes \langle z\rangle$, где $b_1 = zz^b = zb^{-1}zb$. Поскольку N — нормальная подгруппа группы G, то $b_1 \in N$. Если $z^b = z$, то $\langle z, b\rangle$ – конечная абелева группа. По условию насыщенности $\langle z, b\rangle < H$, $H \in \mathfrak{M}(1)$. Очевидно, $H \cap N$ – нормальная подгруппа группы H. Последнее означает, что H – не простая группа. Но тогда H – конечная группа диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2, что невозможно. По предложению 1.2.6 $N \leftthreetimes \langle z\rangle$ – локально конечная группа. Следовательно, N – локально конечная группа. Итак, для любого $b \in N$ $z^b \neq z$ и $C_N(z) = 1$. Так как $z^b = z^{b_1^k}$, то $z = z^{b_1^k b^{-1}}$ и $b_1^k b^{-1} = 1$. Следовательно, $b = b_1^k$ и $b^z = b^{-1}$. Пусть $H \in \mathfrak{A}(1)$ (лемма 2.4.12). Тогда $H \simeq L_2(q)$, где $q \equiv 3, 5 \pmod 8$. По предложению 1.2.3 NH – локально конечная группа. Возьмем неединичный элемент $b \in N$. По условию насыщенности конечная группа $\langle b, H\rangle \leq K$, где $K \in \mathfrak{M}(1)$. Так как группа K содержит подгруппу H, то силовская 2-подгруппа из K имеет порядок больше 2. Следовательно, $K \in \mathfrak{A}(1)$ и $K \simeq L_2(q)$, где $q \equiv 3, 5 \pmod 8$. Но $N \cap K$ – нормальная подгруппа группы K, что невозможно.

Предположим, что в N есть инволюция z. Если все инволюции из G находятся в N, то $N = T(G)$. Действительно, пусть b — элемент конечного порядка из группы G. По условию насыщенности $\langle b\rangle < H$, где $H \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, H порождается инволюциями, $H < N$ и $N = T(G)$. Противоречие с тем, что G – контрпример. Итак, в множестве $G \setminus N$ найдется инволюция v. По предложению 1.3.3 группа $\langle z, v\rangle$ конечна. По условию насыщенности $\langle z, v\rangle \leq H$, где $H \in \mathfrak{M}(1)$. Так как $H \cap N$ – нормальная подгруппа группы H, то $H \in \mathfrak{B}(1)$. С другой стороны, $H \cap N$ содержит инволюцию z, а в H нет собственных нормальных подгрупп, содержащих инволюции. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2.4.14. *Все инволюции в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y — две различные инволюции из группы G. Из предложения 1.3.3 вытекает, что $\langle x, y\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle x, y\rangle \leq R \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, либо $R \in \mathfrak{A}(1)$, либо $R \in \mathfrak{B}(1)$. В каждом из этих случаев инволюции x, y сопряжены в R (предложения 1.4.3, 1.2.20 (пункт 2)). Так как R — подгруппа G, то инволюции x, y сопряжены в группе G.

Лемма доказана.

Лемма 2.4.15. *Множество $\mathfrak{A}(1)$ содержит группу H такую, что $H \simeq L_2(q)$ и $q > 5$.*

Доказательство. Предположим, что для любой группы $H \in \mathfrak{A}(1)$ $H \simeq L_2(5)$. По лемме 2.4.12 и теореме 2.3.4 G обладает периодической частью $T(G)$ и $T(G) \simeq L_2(5)$. Противоречие с тем, что G – контрпример.

Лемма доказана.

Лемма 2.4.16. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G, z — инволюция из S. Тогда* :

1. *S — элементарная абелева группа порядка 4 (четверная группа).*

2. *$C_G(z)$ обладает периодической частью $T(C_G(z))$, которая является бесконечной локально диэдральной группой.*

Доказательство. Докажем пункт 1. Если $|S| = 2$, то по предложению 1.3.6 любая конечная 2-подгруппа из G имеет порядок 2. Следовательно, в качестве насыщающего множества для группы G можно взять $\mathfrak{B}(1)$. По предложению 1.3.9 и лемме 2.4.11 $T(G)$ – бесконечная локально диэдральная группа. Противоречие с тем, что G – контрпример. Итак, $|S| > 2$. Если S – конечная группа, то все доказано ввиду предложения 1.3.6 и условия насыщенности. Если S – бесконечная группа, то в ней найдется конечная подгруппа R такая, что $|R| > 4$. По условию насыщенности $R < H \in \mathfrak{A}(1)$. В этом случае R — четверная группа. Противоречие с выбором R. Пункт 1 доказан.

Докажем пункт 2. Пусть K – конечная подгруппа из $C_G(z)$, отличная от $\langle z\rangle$ (пункт 1, доказанный выше, и лемма 2.4.14). Ясно, что $\langle z, K\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle z, K\rangle < H < G \text{ и } H \tilde{\in} \mathfrak{M}(1).$$

Ввиду лемм 2.4.14, 2.4.12 $H \tilde{\in} \mathfrak{A}(1)$. Но в этом случае $C_H(z)$ – конечная группа диэдра и $\langle z, K\rangle < C_H(z)$. Так как $C_H(z) < C_G(z)$, то группа $C_G(z)$ насыщена группами диэдра, и по предложению 1.3.9 она обладает периодической частью $T(C_G(z))$, которая является локально диэдральной группой. Осталось показать, что $T(C_G(z))$ – бесконечная группа. Пусть $T(C_G(z))$ – конечная группа. По лемме 2.4.15 $T(C_G(z))$ содержит элемент a такой, что $|a| = p$ – простое нечетное число. По лемме 2.4.13 и по предложению 1.2.1 множество $a^G = \{a^g | g \in G\}$ бесконечно. По предложению 1.3.3 бесконечным будет следующее множество конечных групп: $\{\langle z, a^g | g \in G\}$. По условию насыщенности $\langle z, a^g\rangle \leq H_g$, где $H_g \in \mathfrak{M}(1)$. Ясно, что $\mathfrak{H}_g = \{H_g | g \in G\}$ – бесконечное множество. Так как $C_G(a^g)$ содержит инволюции (например, z^g), то можно считать, что $H_g \in \mathfrak{A}(1)$ и $H_g \not\simeq L_2(5)$. Поскольку $T(C_G(z))$ — конечная группа, то множество $\mathfrak{C}_g = \{C_{H_g}(z) | H_g \in \mathfrak{A}(1)$ конечно. Отсюда вытекает следующее представление множества $\mathfrak{H}_g$ в виде конечного числа непересекающихся множеств:

$$\mathfrak{H}_g = \mathfrak{H}_g^{(1)} \cup \cdots \cup \mathfrak{H}_g^{(n)},$$

где для любых двух групп H_{g_1}, H_{g_2} из множества $\mathfrak{H}_g^{(k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ $C_{H_{g_1}}(z) = C_{H_{g_2}}(z)$. Из предложения 1.4.3 (пункты 2, 6) и того факта, что $H_g \not\simeq L_2(5)$, вытекает равенство $H_{g_1} = H_{g_2}$. Таким образом, $\mathfrak{H}_g^{(k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ – конечные множества, и как следствие, конечным будет множество $\mathfrak{H}_g$. Противоречие с тем, что $\mathfrak{H}_g$ – бесконечное множество. Пункт 2 доказан.

Лемма доказана.

Лемма 2.4.17. *$T(C_G(z)) = C_L(z) < L < G$, где $L \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q нечетной характеристики.*

Доказательство. По лемме 2.4.16 (пункт 2)

$$T(C_G(z)) = \{c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots\} \text{ –}$$

счетная группа. Можно считать, что c_1 – неединичный элемент, не равный z. По условию насыщенности

$$\langle z, c_1\rangle < H_1, \text{где } H_1 \in \mathfrak{A}(1).$$

Следовательно, $H_1 \simeq L_2(q_1)$, где $q_1 \equiv 3, 5 \pmod 8$. Пусть n_1 – минимально возможное значение индекса n, при котором $c_{n_1} \notin H_1$. По условию насыщенности

$$\langle C_{H_1}(z), c_{n_1}\rangle < H_2, \text{ где } H_2 \in \mathfrak{A}(1).$$

Следовательно, $H_2 \simeq L_2(q_2)$, где $q_2 \equiv 3, 5 \pmod 8$. По построению $|H_1| < |H_2|$. Предположим, что для $k \geqslant 2$ мы построили группу H_k. Пусть n_k – минимально возможное значение индекса n, при котором $c_{n_k} \notin H_k$. По условию насыщенности

$$\langle C_{H_k}(z), c_{n_k}\rangle < H_{k+1}, \text{ где } H_{k+1} \in \mathfrak{A}(1).$$

Следовательно, $H_{k+1} \simeq L_2(q_{k+1})$, где $q_{k+1} \equiv 3, 5 \pmod 8$. По построению $|H_1| < |H_2| < \cdots < |H_k| < |H_{k+1}|$. Действуя подобным образом, мы получаем бесконечную последовательность групп

$$H_1,\ H_2,\ \cdots, H_n,\ \cdots$$

со следующими свойствами: для любого n

$$H_n \simeq L_2(q_n), \text{где } q_n \equiv 3, 5 \pmod 8,$$

$$C_{H_1}(z) < C_{H_2}(z) < \ \cdots\ < C_{H_n}(z) < \ \cdots$$

и

$$\cup_{n=1}^{\infty} C_{H_n}(z) = T(C_G(z)).$$

Так как для любого $n > 2$ $C_{H_n}(z)$ содержит две неперестановочные инволюции, то по предложению 1.4.3 (пункты 2, 6) последовательность групп

$$H_2,\ \cdots, H_n,\ \cdots$$

превращается в цепочку вложенных друг в друга групп

$$H_2 < \ \cdots\ < H_n < \ \cdots.$$

Ясно, что

$$\cup_{n=2}^{\infty} H_n = L -$$

бесконечная локально конечная группа, насыщенная группами из множества $\mathfrak{A}(1)$. По предложению 1.3.8 $L \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q нечетной характеристики.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Рассмотрим группу L из утверждения леммы 2.4.17. По лемме 2.4.15 группа $C_L(z)$ содержит элемент a, такой, что $|a| = p$ – простое нечетное число. По лемме 2.4.13 множество $a^G = \{a^g | g \in G\} \not\subset L$. Пусть $b \in a^G \setminus L$. По условию насыщенности и предложению 1.3.3 $\langle z, b\rangle \leq H$, где $H \in \mathfrak{A}(1)$. Следовательно, $H \simeq L_2(q)$ и $q > 5$. Ясно, что $H \not< L$. Так как $z \in L \cap H$, то $C_H(z) < L \cap H$. Поскольку $|C_H(z)| > 4$, то $C_H(z)$ содержит две неперестановочные инволюции t, w. Так как все инволюции в L сопряжены, то $C_H(t) < L$ и $C_H(w) < L$. По предложению 1.4.3 (пункты 2, 6) $H < L$. Противоречие с выбором H.

Теорема доказана.

Глава 3

Группы, насыщенные $GL_2(q), PGL_2(q)$

В [38] доказано, что произвольная периодическая группа, насыщенная группами из множества групп $\{L_2(p^n)\}$, где p и n не фиксируются, изоморфна $L_2(Q)$, где Q — локально конечное поле. Там же этот результат удалось обобщить на случай, когда группа насыщена группами из множества групп $\{SL_2(p^n)\}$. Естественно рассмотреть случай, когда группа (не обязательно периодическая) насыщена группами из множеств групп $\{GL_2(p^n)\}$, $\{PGL_2(p^n)\}$. В частности, для периодических групп высказана

Гипотеза. Пусть периодическая группа G насыщена множеством групп $\{GL_2(p^n)\}$, где p, n не фиксируются. Тогда $G \simeq GL_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

Следующий пример показывает, что указанная гипотеза в классе всех периодических групп неверна. Рассмотрим группу

$$G = L_2(2^n) \times B(m, p),$$

где $m > 1$, $p = 2^n - 1$ – простое фиксированное число, больше 665, и $B(m, p)$ — свободная Берсайдова группа с m образующими и периода p. Так как

$$GL_2(2^n) = L_2(2^n) \times Z(GL_2(2^n)),$$

$|Z(GL_2(2^n))| = 2^n - 1 = p$ и порядок любой нетривиальной конечной подгруппы из $B(m, p)$, как показано в [1, с. 296], равен p, G насыщена множеством $X = \{GL_2(2^n)\}$, состоящим из одной группы. Как показано в [1, с. 262], $B(m, p)$ для указанных m и p не является группой Шункова и, в частности, не является локально конечной группой. Следовательно, G — не группа Шункова и не локально конечная группа.

Таким образом, возникает задача выделения классов групп, в которых данная гипотеза имеет место. Такими классами, в которых эта гипотеза оказалась верной, являются класс локально конечных групп и класс групп Шункова. Доказательство гипотезы в указанных классах групп проводится по следующей схеме:

1. Доказать, что центр $Z(G)$ нетривиален и является локально циклической группой.

2. Доказать, что $\overline{G} = G/Z(G)$ является группой из данного класса и насыщена группами из множества $\{PGL_2(p^n)\}$, и, как следствие, вывести отсюда, что $\overline{G}$ изоморфна $PGL_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

3. Используя изоморфизм $\overline{G} \simeq PGL_2(Q)$, показать, что G изоморфна $GL_2(Q)$.

3.1 Локально конечные группы, насыщенные $GL_2(q)$

Пусть $\mathfrak{J} = \{GL_2(q)\}$, где $q = p^n$. Отметим, что ни характеристика поля p, ни натуральное n не фиксируется.

Теорема 3.1.1. *Локально конечная группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{J}$, изоморфна $GL_2(P)$ для некоторого локально конечного поля P.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{J}$ содержит бесконечно много групп, а G — бесконечная локально конечная группа.

Лемма 3.1.2. *Пусть K_1, K_2 — группы, $K_1 < K_2, K_1 \simeq GL_2(p_1^{n_1}), K_2 \simeq GL_2(p_2^{n_2})$. Тогда $Z_1 < Z_2$, где $Z_1 = Z(K_1)$ — центр K_1 и $Z_2 = Z(K_2)$ — центр K_2.*

Доказательство. Рассмотрим следующие ситуации:

1. $p_1 = p_2 = 2$.
2. $p_1 = 2,\ p_2 > 2$.
3. $p_1 > 2,\ p_2 = 2$.
4. $p_1 > 1,\ p_2 > 2$.

Пусть

$$\overline{K_1} = K_1/Z(K_2) = K_1/(Z(K_2) \cap Z(K_1)),$$
$$\overline{K_2} = K_2/Z(K_2), \overline{Z_1} = Z_1/(Z_1 \cap Z_2).$$

Ясно, что $\overline{K_1} \leq \overline{K_2}$.

Рассмотрим ситуацию 1. По предложению 1.4.4 (пункт 1) $K_2 = L_2(2_1^n) \times Z_2$ и $K_1 = L_2(2^{n_1}) \times \overline{Z_1}$. Тогда $\overline{K_2} \simeq L_2(2^{n_1})$ и $\overline{K_1} \simeq L_2(2^{n_1}) \times \overline{Z_1}$. Из предложения 1.4.2 (пункты 1, 2) вытекает, что $\overline{Z_1} = 1$. Итак, в ситуации 1 лемма доказана.

Рассмотрим ситуацию 2. По предложениям 1.4.4, 1.4.2, 1.4.5 $\overline{K_1} = L_2(2^{n_1}) \times \overline{Z_1}$ и $\overline{K_2} = L_2(p^{n_2}) \leftthreetimes \langle \overline{t} \rangle$. В силу того, что $\overline{K_1}$ порождается 2-элементами, то $\overline{K_1} \leq L_2(p^{n_2})$. Но из предложений 1.4.2, 1.4.3 вытекает, что при $\overline{Z_1} \neq 1$ таких подгрупп в $L_2(p^{n_2})$ нет. Итак, $\overline{Z_1} = 1$ и в ситуации 2 лемма доказана.

Рассмотрим ситуацию 3. По предложениям 1.4.4, 1.4.2, 1.4.5 $\overline{K_1} = L_2(p_1^{n_1}) \leftthreetimes \langle \overline{t} \rangle$ и $\overline{K_2}(2^{n_2}) = L_2(2^{n_2})$. Но силовская 2-подгруппа в $\overline{K_2}$ элементарная абелева, а в $\overline{K_1}$ нет (предложение 1.4.5 пункты 9, 10), предложение 1.4.2 (пункт 1). Противоречие. Таким образом, ситуация 3 невозможна.

Рассмотрим ситуацию 4. По предложению 1.4.5 (пункты 8–10) $\overline{K_1} = (L_2(p_1^{n_1} \times \overline{Z_1}) \langle t \rangle, \overline{K_2} = L_2(p_2^{n_1}) \leftthreetimes \langle \overline{t_2} \rangle$ и $|\overline{t_1}| = |\overline{t_2}| = 2$. Если $2 \notin \pi(Z_2 \cap Z_1)$, то возьмем инволюцию x_1 из Z_2 и рассмотрим в K_2 подгруппу $R = x_1 \times (\langle x_2 \rangle \times \langle x_3 \rangle)$, где $\langle x_2 \rangle \times \langle x_3 \rangle$ — подгруппа порядка 4 из K_1. R лежит в некоторой силовской 2-подгруппе S_2 из K_2, и S_2, — либо полудиэдральная группа, либо группа диэдра (предложение 1.4.5 (пункты 9, 10). Но в обоих случаях в S_2 нет элементарных абелевых подгрупп порядка 8. Это означает, что $\overline{Z_1}$ содержит инволюцию, а $\overline{K_1}$ содержит элементарную абелеву подгруппу R порядка 8. В силу включения $\overline{K_1} < \overline{K_2}$ R лежит в некоторой силовской 2-подгруппе S из $\overline{K_2}$. Но S не содержит подгруппу типа R (предложение 1.4.5 (пункты 9, 10). Таким образом, $\overline{Z_1}$ нечетного порядка. Следовательно,

$$L_2(p_1^{n_1}) \times \overline{Z_1} \leq L_2(p_2^{n_2}).$$

Но таких подгрупп в $L_2(p_2^{n_2})$ нет, при $\overline{Z_1} \neq 1$ (предложения 1.4.5, 1.4.3). Таким образом, $\overline{Z_1} = 1$, и в ситуации 4 лемма доказана.

Лемма доказана.

Лемма 3.1.3. *Пусть* $K \in \mathfrak{F}(1)$. *Тогда* $Z(K) \leq Z(G)$.

Доказательство. Возьмем конечную подгруппу $K \in \mathfrak{F}(1)$. Следовательно,

$$K \simeq GL_2(p_0^{k_0}).$$

Пусть $g \in Z(K)$, покажем, что $g \in Z(G)$. Предположим обратное. Тогда найдется такой $x \in G$, что $g \in Z(G)$. По условию насыщенности конечная группа

$$\langle K, x \rangle \leq K_1 \simeq GL_2(p_1^{k_1}).$$

Пусть $Z_1 = Z(K)$. Из леммы 3.1.2 вытекает, что $Z(K) < Z(K_1)$, значит $g^x = g$. Противоречие с выбором x.

Лемма доказана.

Лемма 3.1.4. $Z(G)$ — *локально циклическая группа.*

Доказательство. Действительно, пусть $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ — конечно порожденная подгруппа из $Z(G)$. По условию насыщенности

$$\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle < K_2 \simeq GL_2(p_2^{k_2}).$$

Ясно, что

$$\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle < Z_2 = Z_2(K_2).$$

Так как Z_2 — циклическая группа, то и $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ — циклическая группа.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь фактор-группу $\overline{G} = G/Z$. По лемме 3.1.4 $\overline{G}$ — локально конечная группа, насыщенная множеством групп $\{GL_2(p^n)/Z(GL_2(p^n))\}$ (предложения 1.4.4, 1.4.2, 1.4.5). Рассмотрим в $\overline{G}$ подгруппу $\overline{L}$, порожденную всеми подгруппами $\overline{K}$ такими, что $\overline{K} \simeq L_2(p_i^{n_i})$.

Лемма 3.1.5. $\overline{L} \simeq L_2(P)$, *где* P — *подходящее локально конечное поле характеристики* p.

Доказательство. Покажем, что группа $\overline{L}$ насыщена множеством $\mathfrak{F}_1 = \{L_2(p_i^{n_i})\}$. Возьмем в $\overline{L}$ конечную подгруппу $\overline{M}$. По определению группы $\overline{L}$ $\overline{M} \leq \langle \overline{L_1}, ..., \overline{L_i}, ..., \overline{L_m} \rangle$ для некоторого набора конечных подгрупп $\overline{L_i} \subset \overline{L}$, таких, что $\overline{L_i} \simeq L_2(p_i^{n_i})$ и $i = \overline{1, m}$. Пусть M и L_i — некоторые конечные прообразы групп $\overline{M}$ и $\overline{L_i}$ в G, такие, что

$$M \leq \langle L_1, ..., L_i, ..., L_m \rangle.$$

По условию насыщенности $\langle L_1, ..., L_i, ..., L_m \rangle \leq N < G$ и $N \simeq GL_2(p_{m+1}^{n_{m+1}})$. По предложению 1.4.4 (пункт 3) и предложению 1.4.5 (пункты 3–10)

$$\overline{N} = N/Z(G) = \overline{L_{m+1}} \leftthreetimes (\overline{t^\sigma}),$$

где $\overline{L_{m+1}} \simeq L_2(p_{m+1}^{n_{m+1}}), \overline{t}$ — инволюция и $\sigma \in \{0,1\}$. Итак, мы можем записать вложение

$$\langle \overline{L_1}, ..., \overline{L_i}, ..., \overline{L_m} \rangle \leq \overline{L_{m+1}} \leftthreetimes \langle \overline{t^\sigma} \rangle = N.$$

Так как все $\overline{L_i}$ — конечные простые неабелевы группы, а $\overline{L_i} \cap \overline{L_{m+1}} \lhd \overline{L_i}$ (заметим, что $\overline{L_{m+1}} \lhd \overline{N}$), то либо $\overline{L_i} \cap \overline{L_{m+1}} = 1$, либо $\overline{L_i} \cap \overline{L_{m+1}} = \overline{L_i}$. Первый случай невозможен, поскольку тогда $|\overline{N} : \overline{L_i}| \geq |\overline{L_i}| > 2$, с другой стороны $|\overline{N} : \overline{L_{m+1}}| = |\overline{L_{m+1}} \times (\upsilon) : \overline{L_{m+1}}| = 2$. Противоречие. Следовательно, остается второй случай. Но тогда все $\overline{L_i}$ лежат в $\overline{L_{m+1}}$, значит, и $\overline{M}$ лежит в $\overline{L_{m+1}}$. Итак, насыщенность $\overline{L}$ группами из множества $\mathfrak{F}_1$ доказана. По предложению 1.2.17 $L \simeq L_2(P)$ для некоторого локально конечного поля P характеристики p.

Лемма доказана.

Зафиксируем простое p из леммы 3.1.5.

Лемма 3.1.6. $|\overline{G} : \overline{L}| \leq 2$.

Доказательство. Если $p = 2$, то утверждение леммы очевидно (предложения 1.4.4, 1.4.2). Пусть $p \neq 2$. Возьмем в G конечную подгруппу $G_k \simeq GL_2(p^{m_k})$ и рассмотрим ее образ $\overline{G_k}$ в $\overline{G}$. Тогда $\overline{G_k} = \overline{L_k} \leftthreetimes \langle \overline{t} \rangle$, где $\overline{L_k} \simeq L_2(p^{m_k})$, а $\overline{t}$ — инволюция. Если $\overline{t} \in \overline{L}$ для любой $\overline{G_k}$, то $\overline{G_k} < \overline{L}$, поскольку $\overline{L_k}$ лежит в $\overline{L}$ по определению, $\overline{G} = \overline{L}$ и $|\overline{G} : \overline{L}| = 1$. Пусть для некоторого $\overline{t} \notin L$. Покажем, что $\overline{G} \leq \overline{L} \leftthreetimes \langle \overline{t} \rangle$, так как обратное включение очевидно. Действительно, пусть $\overline{g} \in \overline{G}$, а g — некоторый его прообраз в G. По условию насыщенности $\langle t, g \rangle < G_k \simeq GL_2(p_k^{m_k})$ и при переходе к $\overline{G}$ получаем

$$\langle t, g \rangle < \overline{G_k} = L_k \leftthreetimes \langle \overline{t} \rangle < \overline{L} \leftthreetimes \langle \overline{t} \rangle,$$

где $\overline{L_k} \simeq L_2(p_k^{n_k})$. Значит, $\overline{g} \in \overline{L} \leftthreetimes \langle \overline{t} \rangle$. В силу произвольности выбора $\overline{g}$ получаем $\overline{G} < \overline{L} \leftthreetimes \langle \overline{t} \rangle$, и окончательно $\overline{G} = \overline{L} \leftthreetimes \langle \overline{t} \rangle$.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Пусть $\overline{L}$ и P — из утверждения леммы 3.1.5. Так как P — локально конечное поле, то оно счетно. Выберем в P цепочку конечных подполей

$$P_1 < P_2 < ... < P_i < ...$$

такую, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{L_i} = \overline{L}$. Выберем в $\overline{L}$ цепочку конечных подгрупп такую, что $\overline{L_i} \simeq L_2(P_i)$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{L_i} = \overline{L}$. Обозначим через L_i некоторый конечный прообраз $\overline{L_i}$ в G. Так как $Z(G)$ — локально циклическая группа, то она счетна. Выберем в $Z(G)$ цепочку конечных подгрупп $Z_1 < Z_2 < ... < Z_i < ...$, такую, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i = Z(G)$. По лемме 3.1.6 любой элемент g группы G представим в виде $g = z_i \upsilon_i t^\sigma$, где $z_i \in Z_i, \upsilon_J \in L_j, \sigma \in \{0,1\}$ и где t – фиксированный элемент четного порядка из G. По условию насыщенности

$$\langle z_1, L_1 t \rangle < G_1 \simeq GL_2(p^{m_1}) = GL_2(P_1^*),$$

где P_1^* — конечное подполе из P и $|P_1^*| = p^{m_1}$ (лемма 3.1.5). Предположим, что мы определили группу $G_l \simeq GL_2(P^{m_l})$ для $l \geqslant 1$. По условию насыщенности конечная группа

$$\langle Z_{l+1}, L_{l+1}, G_l \rangle < G_{l+1} \simeq GL_2(p^{m_{l+1}}) = GL_2(P_{l+1}^*),$$

где P^*_{l+1} — подполе из P и $|P^*_{l+1}| = p^{m_{l+1}}$ по лемме 3.1.5. По построению

$$G_1 < G_2 < ... < G_l < G_{l+1} < ..., \bigcup_{i=1}^{\infty} G_l = G$$

и

$$P^*_1 < P^*_2 < ... < P^*_l < P^*_{l+1} < ..., \bigcup_{l=1}^{\infty} = P.$$

Значит,

$$GL_2(P^*_1) < GL_2(P^*_2) < ... < GL_2(P^*_l) < ...$$

и $\bigcup_{l=1}^{\infty} GL_2(P^*_l) = GL_2(P)$. В силу изоморфизма $G_l \simeq GL_2(P^*_l)$ получаем, что $G = \bigcup_{l=1}^{\infty} G_l \simeq GL_2(P)$.

Теорема доказана.

3.2 Группы Шункова, насыщенные $GL_2(q), PGL_2(q)$ над конечными полями фиксированной характеристики

Пусть $\Im$=$\{GL_2(p^n)\}$ и $\mathfrak{M} = \{PGL_2(p^n)\}$, p – простое фиксированное число, а натуральное n не фиксируется.

Теорема 3.2.1. *Пусть периодическая группа Шункова G насыщена группами из множества $\Im$, $K \in \Im(1)$. Тогда $Z(K) \leq Z(G)$ и $Z(G)$ – локально циклическая группа.*

Доказательство. Если $p = 2$, то по предложениям 1.2.7, 1.4.4 (пункт 1) $G \simeq L_2(Q) \times V$, где Q – локально конечное поле характеристики 2, а V – локально циклическая группа без инволюций, и теорема 3.2.1 доказана. В дальнейшем будет предполагаться, что $p \neq 2$.

Лемма 3.2.2. *Пусть a – произвольный элемент порядка p из G. Тогда 2-элементы группы $C_G(a)$ порождают локально циклическую 2-подгруппу.*

Доказательство. По условию теоремы 3.2.1 $a \in L_1 \in \Im(1)$. Поэтому $Z(L_1)$, а стало быть, и $C_G(a)$ содержат инволюцию. Пусть z и w – инволюции из $C_G(a)$. Фактор-группа $\langle a, z, w\rangle/\langle a\rangle$ конечна, так как порождена двумя инволюциями. Значит, группа $\langle a, z, \omega\rangle$ конечна и по условиям теоремы 3.2.1 вложима в некоторую конечную подгруппу $L_2 \in \Im(\langle a, z, \omega\rangle)$. Так как элемент a содержится в некоторой силовской p-подгруппе группы L_2, то $C_{L_2}(\langle a\rangle)$ содержит только одну инволюцию (предложение 1.4.5 (пункты 2, 3)). Итак, $z = \omega$, и если 2-элементы группы $C_G(\langle a\rangle)$ имеют порядок 2, то лемма доказана.

Пусть $C_G(\langle a\rangle)$ содержит 2-элементы порядка больше 2. Сделаем следующее индуктивное предположение: если в $C_G(\langle a\rangle)$ существует циклическая подгруппа $\langle b_0\rangle$, $|b_0| = 2^k$ и $k \geq 1$, то она единственна. Пусть в $C_G(\langle a\rangle)$ существует циклическая подгруппа $\langle b\rangle$ и $|b| = 2^{k+1}$. Предположим, что существует другая циклическая подгруппа $\langle c\rangle$, лежащая в $C_G(\langle a\rangle)$, $\langle c\rangle \neq \langle b\rangle$, $|c| = 2^{k+1}$. Рассмотрим подгруппу $\langle a, b, c\rangle$. В ней конечная абелевая подгруппа $\langle a, b^2\rangle = \langle a, c^2\rangle$ является нормальной (равенство $\langle b^2\rangle = \langle c^2\rangle = \langle d\rangle$ следует из индуктивного предположения). Тогда фактор-группа $\langle a, b, c\rangle/\langle a, d\rangle$ является конечной, поскольку порождена двумя инволюциями. Следовательно, конечной является и группа $\langle a, b, c\rangle$. По условиям теоремы 3.2.1 $\langle a, b, c\rangle \subseteq L_3 \in \Im(\langle a, b, c\rangle)$. Но в L_3 существует только одна циклическая группа порядка 2^{k+1}, лежащая в $C_G(\langle a\rangle)$, и она лежит в центре группы L_3. Противоречие с выбором $\langle c\rangle$. Следовательно, $\langle b\rangle = \langle c\rangle$.

Лемма доказана.

Лемма 3.2.3. *Пусть $K \in \Im(1)$. Тогда все 2-элементы из $Z(K)$ лежат в центре группы G и порождают в нем единственную локально циклическую 2-подгруппу.*

Доказательство. Все 2-элементы центра группы K порождают циклическую 2-подгруппу. Пусть z — инволюция из этой 2-подгруппы.

Предположим, что z не лежит в центре группы G. Тогда существует элемент $g \in G$ такой, что $z^g = \upsilon$ и $\upsilon \neq z$. Пусть a – элемент порядка p из K. Группа $\langle a, a^\upsilon\rangle$ конечна по определению 1. Так как $\langle a, a^\upsilon\rangle^\upsilon = \langle a^\upsilon, a\rangle = \langle a, a^\upsilon\rangle$, то $\upsilon \in N_G(\langle a, a^\upsilon\rangle)$.

Последнее означает, что группа $\langle a^\upsilon, a, \upsilon\rangle$ конечна. По условию насыщенности

$$\langle a^\upsilon, a, \upsilon\rangle \leq L_1 \in \Im(\langle a^\upsilon, a, \upsilon\rangle).$$

По лемме 3.2.2 $z \in Z(L_1)$, значит, $z\upsilon = \upsilon z$, т. е. $z^G = \langle z^g | g \in G\rangle$ – абелева нормальная подгруппа в G. Следовательно, $\langle z, \upsilon\rangle \leq z^G \cap L_1$ — нормальная элементарная абелева 2-подгруппа в L_2. Поскольку нормальные абелевы подгруппы из L_1 циклические (предложение 1.4.5, пункты 2, 7), то $z = \upsilon$. Противоречие с выбором υ. Предположим теперь, что $Z(K)$ содержит 2-элементы порядка больше 2. Сделаем следующее индуктивное предположение: если в $Z(K)$ существует циклическая подгруппа $\langle d\rangle$ порядка $2^k (k \geqslant 1)$, то она также содержится в $Z(G)$. Пусть в $Z(K)$ существует циклическая подгруппа $\langle b\rangle$ порядка 2^{k+1}. Предположим, что существует $g \in G$ такой, что $b^g = c \neq b$. В силу индуктивного предположения можно считать, что $b^2 = c^2 = d \in Z(G)$. Следовательно, $\langle a, c\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle a, c\rangle \leq L_2 \in \Im(\langle a, c\rangle)$.

Если $|c|$ делит $|Z(L_2)|$, то по леммам 3.2.2 и 1.4.5 (пункт 7) $b \in Z(L_2)$. Следовательно, $b^G = \langle b^g | g \in G\rangle$ – абелева нормальная подгруппа в G. Следовательно, $\langle b, b^g\rangle \leq b^G \cap L_2$ — нормальная абелева подгруппа в L_2. Поскольку все нормальные абелевы подгруппы из L_2 — циклические (предложение 1.4.5, пункты 2,7), то $\langle b\rangle = \langle b^g\rangle$ и $b^G = \langle b\rangle$ — нормальная подгруппа в G. Отсюда вытекает, что $\langle b, g\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle b, g\rangle \leq L_3 \in \mathfrak{F}(\langle b, g\rangle)$, и $\langle b\rangle$ — нормальная подгруппа в L_3. Поскольку $\langle b\rangle$ циклическая 2-группа, то $\langle b\rangle < Z(L_3)$ (предложение 1.4.5, пункты 2,6). Но тогда $b^g = b$, что противоречит выбору g. Итак, $b = c$.

Если $|c|$ не делит $Z(L_2)$, то $N_{L_2}(\langle c\rangle)$ содержит инволюцию t, нетривиально действующую на $\langle c\rangle$ (предложение 1.4.5, пункты 7, 8). Так как $c = b^g$, то $N_G\langle b\rangle$ содержит инволюцию $t^{g^{-1}}$, нетривиально действующую на $\langle b\rangle$. По условию насыщенности конечная группа $\langle b, t^{g^{-1}}, a\rangle \leq L_3$ и $b \in C_{L_3}(a)$. Следовательно, $b \in Z(L_3)$ (лемма 3.2.2) и инволюция $t^{g^{-1}}$ перестановочна с b. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.2.4. *Пусть b — элемент нечетного порядка из G, $b \in Z(K)$, где $K \in \Im(1)$. Тогда в G не существует элемента x такого, что $b^x = b^{-1}$ и $x^2 \in Z(G)$.*

Доказательство. Предположим обратное. И пусть элемент x такой. Так как G – группа Шункова, то $\langle b, x, d\rangle$ — конечная группа. Здесь d — элемент порядка p из K. По условию насыщенности $\langle b, x, d\rangle \leq L$, где $L \in \Im(1)$. Из предложения 1.4.5 (пункты 2, 3, 6) вытекает, что $b \in Z(L)$, следовательно, $b^x = b$, что противоречит выбору элемента x.

Лемма доказана.

Лемма 3.2.5. *Пусть $b \in Z(K)$, где $K \in \Im(1)$, и $|b| = r$ – простое нечетное число. Тогда $b \in Z(G)$.*

Доказательство. Предположим обратное, пусть $b \neq b^g$ для некоторого $g \in G$. По условию насыщенности конечная группа $\langle b, b^g \rangle \leq K_g \in \Im(\langle b, b^g \rangle)$.

1. Существует такой g, что b не принадлежит $Z(K_g)$.

Действительно, если для любого $g \in G$, $b \in Z(K_g)$, то $b^G = \langle b^g | g \in G \rangle$ – абелева нормальная подгруппа в G. Следовательно, $\langle b, g \rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности $\langle b, g \rangle \leq K_2 \in \Im(\langle b, g \rangle)$. Следовательно, $b^{K_2} = \langle b^x | x \in K_2 \rangle$ – нормальная r-подгруппа в K_2. По предложению 1.4.5 (пункт 7) $b^{K_2} \subset Z(K_2)$, в частности $b \in Z(K_2)$, значит, $b^g = b$. Противоречие с выбором g. Зафиксируем группу $Z(K_g)$.

2. В $Z(K_g)$ есть элемент порядка r.

По предложению 1.4.5 (пункт 7)

$$\overline{Z(K_g)} = Z(K_g)/Z(Z(K_g)) = L_2 \leftthreetimes \langle v \rangle,$$

где $L_2 \simeq L_2(p^{n_1})$ и $|v| = 2$. Так как все элементы нечетных порядков из $\overline{Z(K_g)}$ попадают в подгруппу L_2, то для некоторой инволюции $\bar{t} \in \overline{Z(K_g)}$, $\bar{b}^{\bar{t}} = \bar{b}^{-1}$. Здесь $\bar{b}$ – образ b при естественном гомоморфизме $Z(K_g)$ на $\overline{Z(K_g)}$. Это означает, что для некоторого 2-элемента $t \in Z(K_g)$, $b^t = b^{-1}z$ и $t^2 \in Z(G)$. То, что $1 \neq z \in Z(Z(K_g))$, вытекает из леммы 3.2.4. Так как $r = |b| = |b^t| = |b^{-1}z|$, то $1 = (b^{-1}z)^r = (b^r)^{-1}z^r = ez^r = z^r$. Положим $z = a$, зафиксируем t и подгруппу $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$ из $Z(K_g)$. Ясно, что $t \in N(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$, $a^t = a$ и $b^t = b^{-1}a$.

3. В K найдется инволюция v такая, что конечная группа $\langle a, b, v \rangle \leq K_2 \in \Im(\langle a, b, v \rangle)$ и $a \notin Z(K_2)$.

Так как $b \in Z(\langle a, b, v \rangle)$, то для любой инволюции $v \in K$ $\langle a, b, v \rangle$ — конечная группа, и по условию насыщенности

$$\langle a, b, v \rangle \leq K_2 \in \Im(\langle a, b, v \rangle).$$

Предположим теперь, что для любой инволюции $v \in K$, $a \in Z(K_2)$. Тогда $K^* = \langle v | v \in K, v^2 = e \rangle$ – характеристическая подгруппа в K и $a \in C_G(K^*)$. Здесь могут быть две взаимно исключающие возможности: либо $a \in K$, либо $a \notin K$. В первом случае $a \in Z(K)$ и по предложению 1.4.5 (пункт 2) $\langle a \rangle = \langle b \rangle$, что невозможно. Во втором случае мы имеем конечную подгруппу $\langle a \rangle \times (\langle b \rangle \times K^*)$ и по условию насыщенности

$$\langle a \rangle \times (\langle b \rangle \times K^*) < K_3 \in \Im(\langle a \rangle \times (\langle b \rangle \times K^*)).$$

Но в K_3 нет элементарных абелевых подгрупп порядка r^3 (предложение 1.4.5, пункты 1, 4). Итак, требуемая инволюция v найдется.

Завершим доказательство леммы. Так как $\langle a \rangle \times \langle b \rangle \leq K_2$ и $|\langle a \rangle \times \langle b \rangle| = r^2$, то по предложению 1.4.5 (пункт 4) $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \cap Z(K_2) = \langle w \rangle \neq e$. Ясно, что $\langle a \rangle \times \langle b \rangle = \langle a \rangle \times \langle w \rangle$. Так как $a \notin Z(K_2)$, то в фактор-группе $\overline{K_2} = K_2/Z(K_2)$ найдется такая инволюция $\overline{t_1}$, что $\overline{a}^{\overline{t_1}} = \overline{a}^{-1}$.

Следовательно, в K_2 найдется 2-элемент t_1 такой, что $a^{t_1} = a^{-1}z_1$ По лемме 3.2.3 $t_1^2 \in Z(G)$ и по лемме 3.2.4 $z_1 \neq e$. Ясно также, что $z_1 \in \langle w \rangle$. Следовательно, $t_1 \in N(\langle a \rangle \times \langle w \rangle)$. Поскольку $(\langle a \rangle \times \langle w \rangle) = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$, то $t_1 \in N(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$. Итак, мы имеем 2-элементы t и t_1 из $N(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$, нетривиально действующие на $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$, такие, что $a^t = a$, $a^{t_1} = a^{-1}z_1 \neq a$ и t^2, $t_1^2 \in Z(G)$. Так как фактор-группа $\langle (\langle a \rangle \times \langle b \rangle), t_1, t \rangle / \langle (\langle a \rangle \times \langle b \rangle),\ t_1^2, t^2 \rangle = \langle \overline{t_1}, \bar{t} \rangle$ порождается двумя инволюциями $\overline{t_1}$ и $\bar{t}$, то она конечна.

Следовательно, $\langle(\langle a\rangle \times \langle b\rangle), t_1, t\rangle = M$ – также конечная группа. По условию насыщенности $M \leq K_4 \in \Im(M)$. Из предложения 1.4.5 (пункт 4) получаем $N_{K_4}(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) = (D \times R)\rightthreetimes\langle v\rangle$, где D, R – циклические группы порядка $p^{n_4}-1$, $v^2 = e$ и $(D \times R) = C_{K_4}(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$. Так как $t_1, t_2 \in \{N_{K_4}(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\backslash C_{K_4}(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\}$, то для некоторого $x \in (D \times R)xt = t_1$ и $a \neq a^{-1}z_1 = a^{t_1} = a^{xt} = a^t = a$. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.2.6. *Пусть $b \in Z(K)$, где $K \in \Im(1)$, $|b|$ – нечетное число, тогда $b \in Z(G)$.*

Доказательство. В силу леммы 3.2.5 и индукции будем считать, что $|b| = r^n$, где r – простое число, $n > 1$ и $b^{n-1} \in Z(G)$. В этом случае для любого $g \in G$ группа $\langle b, b^g\rangle$ конечна . Затем пункты 1–3 леммы 3.2.5 и ее окончание переносятся на рассматриваемый случай со следующими замечаниями — вместо группы $\langle a\rangle \times \langle b\rangle$ рассматривается группа $\langle a\rangle \cdot \langle b\rangle$, где $|a| = |b| = r^n$. Затем находим две инволюции t_1 и $t \in \{N(\langle a\rangle \cdot \langle b\rangle)\backslash C(\langle a\rangle \cdot \langle b\rangle)\}$, различным образом действующих на $\langle a\rangle \cdot \langle b\rangle$, и приходим к противоречию с предложением 1.4.5 (пункт 4).

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Первое утверждение теоремы вытекает из лемм 3.2.3, 3.2.6. Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $\langle z_1, ..., z_n\rangle$ — подгруппа из $Z(G)$, порожденная конечным набором элементов. Возьмем p-элемент $b \in G$. По условию насыщенности $\langle z_1, ..., z_n, b\rangle \leq L \in \Im(1)$. По предложению 1.4.5 (пункт 7) $\langle z_1, ..., z_n\rangle$ — циклическая группа из $Z(L)$.

Теорема доказана.

Теорема 3.2.7. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна $PGL_2(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики p.*

Доказательство. Пусть $p = 2$. В этом случае (предложение 1.4.4 пункт 3) $PGL_2(2^n) = L_2(2^n)$ и по предложению 1.2.17 $G \simeq L_2(Q) = PGL_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2, и теорема доказана.

Пусть $p \neq 2$, G — контрпример к теореме, S – силовская 2-подгруппа группы G.

Лемма 3.2.8. *$S = A \rightthreetimes \langle t\rangle$, где A – локально циклическая группа, t – инволюция, $a^t = a^{-1}$ для любого элемента $a \in A$.*

Доказательство. Если S – конечная группа, то из предложения 1.4.5 (пункты 7–8) вытекает, что S – конечная группа диэдра, а так как в этом случае все силовские 2-подгруппы сопряжены (предложение 1.2.8), то все доказано. Пусть S – бесконечная группа. Покажем, что S насыщена группами диэдра. Возьмем в S конечную подгруппу K_1. Из предложения 1.2.9 вытекает, что в S существует бесконечная цепочка $K_1 < K_2 < \ldots < K_n < \ldots$ конечных подгрупп. Из условия насыщенности вытекает, что любая K_n изоморфна подгруппе некоторой конечной группы диэдра из G. Положим $K = \cup K_n$. Если хотя бы одна из K_n является группой диэдра, то все доказано.

Пусть все K_n – циклические группы. Тогда K – локально циклическая 2-группа. Пусть z — инволюция из K. По условию насыщенности для любого n выполнено $K_n \leq M_n \simeq PGL_2(p^{m_n})$, и в M_n есть инволюция v такая, что для любого $x \in K_n$ справедливо $x^v = x^{-1}$. Пусть $y \in K_{n+1}$ и $y^2 = t$, где $\langle t\rangle = K_n$. Очевидно, группа $\langle y, v\rangle$ – конечна. По условию насыщенности $\langle y, v\rangle \leq M_1 \simeq PGL_2(p^{k_n})$ и, следовательно, $\langle y, v\rangle$ лежит в $C_{M_1}(z)$. Так как

$C_{M_1}(z)$ — группа диэдра, то $y^v = y^{-1}$. Рассуждая по индукции, получим, что для любого $x \in K$ $x^v = x^{-1}$, значит, $K \leftthreetimes \langle v \rangle$ – 2-группа. Следовательно, $K \neq S$, и в $S \backslash K$ найдется некоторый элемент w. Без ограничения общности можно считать, что w – инволюция и $wz = zw$. Отсюда несложно получить, что $x^w = x^{-1}$ для любого $x \in K$. В частности, $K_1 \leftthreetimes \langle w \rangle$ – группа диэдра. Таким образом, S насыщена группами диэдра и по предложению 1.2.14 $S = A \leftthreetimes \langle t \rangle$, где A – локально циклическая 2-группа, и для любого $x \in A$ выполняется $x^t = x^{-1}$.

Лемма доказана.

Лемма 3.2.9. *Пусть a – инволюция из S. Тогда $C_G(a) = C \leftthreetimes \langle t \rangle$, где C – бесконечная локально циклическая группа, t – инволюция, $c^t = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$.*

Доказательство. Бесконечность группы $C_G(a)$ следует из предложения 1.2.6. Пусть R – произвольная конечная подгруппа из $C_G(a)$, $D = \langle a, R \rangle$. Имеем $D \leq M < G$, где $M \simeq PGL_2(p^n)$. При этом $D \leq C_M(a) < C_G(a)$. Как отмечалось выше, $C_M(a)$ – группа диэдра (предложение 1.4.6). Таким образом, $C_G(a)$ насыщена группами диэдра. В силу предложения 1.2.14 имеем $C_G(a) = C \leftthreetimes \langle t \rangle$, где C – локально циклическая группа, $t^2 = e$, $c^t = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$.

Лемма доказана.

Лемма 3.2.10. *В G есть бесконечная локально конечная подгруппа L, насыщенная группами из множества $\{PGL_2(p^n)\}$.*

Доказательство. Пусть z – инволюция из центра S (лемма 3.2.8). Как следует из леммы 3.2.9, $C_G(z) = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$, где

$$D_1 < \ldots < D_n \ldots, \tag{1}$$

$D_n = C_n \leftthreetimes \langle t \rangle$, $C_n = \langle c_n \rangle$, для любого $c \in C_n$ справедливо $c^t = c^{-1}$.

В силу условия насыщенности можно считать, что $D_n < L_n \simeq PGL_2(p^{m_n})$ и $D_n = C_{L_n}(z)$.

Таким образом, цепочке (1) поставлена в соответствие последовательность

$$L_1, \ldots, L_n, \ldots \tag{2}$$

подгрупп из G, определенных выше.

Так как $L_n = R \leftthreetimes \langle a \rangle$, где $R \simeq L_2(p^n)$ и $|a| = 2$, то инволюция z лежит в подгруппе R. Поскольку $C_R(z)$ – группа диэдра, то можно считать, что инволюция t лежит в R и, значит, сопряжена с инволюцией z (предложение 1.4.3, пункт 4).

Следовательно, $C_G(t) = \cup_{n=1}^{\infty} T_n$, где

$$T_1 < \ldots < T_n < \ldots, \tag{3}$$

$T_n = V_n \leftthreetimes \langle z \rangle$, $V_n = \langle v_n \rangle$, для любого $v \in V_n$ выполняется $v^z = v^{-1}$.

По предложению 1.4.3 (пункт 1) $L_n = \langle T_n, D_n \rangle$, то из (1), (3) следует, что последовательность (2) образует цепочку

$$L_1 < \ldots < L_n < \ldots. \tag{4}$$

Пусть $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, K — произвольная конечная подгруппа из L. Так как $K \leq L_n$ для некоторого n, а $L_n \simeq PGL_2(p^{m_n})$, то все доказано.

Лемма доказана.

Лемма 3.2.11. *Пусть L – подгруппа из формулировки предыдущей леммы. Тогда $L \simeq PGL_2(P)$, где P – локально конечное поле характеристики p.*

Доказательство. Рассмотрим в L подгруппу L^*, порожденную всеми подгруппами K из L такими, что $K \simeq L_2(p^{n_i})$.

1. $L^* \simeq L_2(P)$, *где P – подходящее локально конечное поле характеристики p.*

Покажем, что группа L^* насыщена множеством $\{L_2(p^{n_i})\}$. Возьмем в L^* конечную подгруппу M. По определению группы L^* $M \leq \langle L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_m \rangle$ для некоторого набора конечных подгрупп $L_i < L$ таких, что $L_i \simeq L_2(p^{n_i})$ и $i \in \{1, ..., m\}$.

По условию насыщенности $\langle L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_m \rangle \leq N < L$ и $PGL_2(p^{n_{m+1}}) \simeq N = L_{m+1} \leftthreetimes \langle t \rangle$, где $L_{m+1} \simeq L_2(p^{n_{m+1}})$, а t – инволюция.

Так как все L_i – конечные простые неабелевы группы, а $L_i \cap L_{m+1} \lhd L_i$ (заметим, что $L_{m+1} \lhd N$), то либо $L_i \cap L_{m+1} = 1$, либо $L_i \cap L_{m+1} = L_i$. Первый случай невозможен, поскольку тогда $|N : L_{m+1}| \geq |L_i| > 2$, с другой стороны, $|N : L_{m+1}| = |(L_{m+1} \times (v)) : L_{m+1}| = 2$. Противоречие. Следовательно, остается второй случай. Но тогда все L_i лежат в L_{m+1}, значит, и M лежит в L_{m+1}. Итак, насыщенность L^* группами из множества $\{L_2(p^{n_i})\}$ доказана. По предложению 1.2.17 $L^* \simeq L_2(P)$ для некоторого локально конечного поля P характеристики p. Пункт 1 доказан.

Завершим доказательство леммы. Возьмем в L конечную подгруппу $G_k \simeq PGL_2(p^{m_k})$. Тогда $G_k = L_k \leftthreetimes \langle t_k \rangle$, где $L_k \simeq L_2(p^{m_k})$, а t_k – инволюция. Если t_k принадлежит L^* для любой G_k, то $G_k < L^*$, поскольку L_k лежит в L^*. Следовательно, $L^* = L$. Пусть для некоторой G_k из L инволюция t_k не принадлежит L^*. Покажем, что $L \subseteq L^* \leftthreetimes \langle t_k \rangle$, так как обратное включение очевидно. Действительно, пусть g принадлежит L. По лемме 3.2.10 $\langle t_k, g \rangle \leq G_{(k,g)} = L_{(k,g)} \leftthreetimes \langle t_{(k,g)} \rangle < L^* \leftthreetimes \langle t_k \rangle$, где $L_{(k,g)} \simeq L_2(p^{n_k})$, а $t_{(k,g)}$ – инволюция. В силу произвольности выбора g получаем $L \leq L^* \leftthreetimes \langle t_k \rangle$ и $L \simeq PGL_2(P)$, где P локально конечное поле из пункта 1.

Лемма доказана.

Лемма 3.2.12. $G = L$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда S – бесконечная группа. В этом случае $L \simeq L_2(P)$. Предположим, что $L \neq G$. Покажем, что L – сильно вложенная подгруппа в G. Для этого достаточно показать, что для любого g, принадлежащего $G \backslash L$, подгруппа $L \cap L^g$ не содержит инволюций.

Пусть w – инволюция из $L \cap L^g$, где $w = v^g$, причем v принадлежит L. Все инволюции в L сопряжены (предложение 1.4.3), поэтому $v^{gb} = v$ для некоторого элемента b, принадлежащего L. Тогда gb принадлежит $C_G(v)$, и, как показано в лемме 3.2.10, $C_G(v) < L$, следовательно, g принадлежит L вопреки выбору элемента g. Значит, для любого элемента g, принадлежащего $G \backslash L$, подгруппа $L \cap L^g$ не содержит инволюций, т. е. $N_G(L) = L$, и L сильно вложена в G.

Так как G порождается инволюциями, то в $G \setminus L$ найдется инволюция v. Пусть w – произвольная инволюция из L. Так как G – периодическая группа, то группа $K = \langle v, w \rangle$ конечна и по условию насыщенности $K < M < G$ и $M \simeq PGL_2(p^{n_1}) = L_2(p^{n_1}) \leftthreetimes \langle x \rangle$, где x – инволюция. Положим $H = M \cap L$. Так как L сильно вложена в G, то подгруппа H сильно вложена в M, что невозможно по предложению 1.2.19. Таким образом, $G \backslash L$ не содержит инволюций и $G = L$.

Теперь рассмотрим случай, когда S – конечная группа. Тогда $L = L^* \leftthreetimes < t_k >$, где L^* и t_k из леммы 3.2.11. Пусть $G \neq L$. В этом случае $\pi(C_G(t_k)) \cap \pi(C_G(z)) = \{2\}$ (здесь $\pi(C_G(t_k))$ — множество простых делителей порядков элементов из $C_G(t_k)$, а $\pi(C_G(z))$ — множество простых делителей порядков элементов из $C_G(z)$), z — инволюция из $Z(S)$, и инволюции z и t_k не сопряжены в G. Возьмем инволюцию x, сопряженную с t_k и лежащую в $G \setminus L$. Рассмотрим конечную группу $D = \langle x, t_k \rangle$. Так как x и t_k не сопряжены, то в D найдется элемент b порядка 4. Следовательно, $b^2 \in C_G(z) < L$. Но тогда и $C_G(b^2) < L$. Поскольку $x \in C_G(b^2)$, то $x \in L$. Противоречие с выбором x.

Лемма доказана.

Утверждение леммы 3.2.12 противоречит тому, что G — контрпример к теореме.

Теорема доказана.

Теорема 3.2.13. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Im$, изоморфна $GL_2(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики p.*

Доказательство. По теореме 3.2.1 $Z(G)$ – локально циклическая группа. Покажем, что фактор-группа $\overline{G} = G/Z(G)$ насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$. Пусть $\overline{K}$ — конечная подгруппа из $\overline{G}$, и K — некоторый ее конечный прообраз в G. По условию теоремы 3.2.13 $K \leq K_1 < G$ и K_1 принадлежит $\Im(1)$. Переходя к $\overline{G}$, получим $\overline{K} \leq \overline{K_1} \simeq K_1/Z(K_1) \simeq PGL_2(p^n)$. По теореме 3.2.7 $\overline{G} \simeq PGL_2(Q)$. По теореме Шмидта (предложение 1.2.3) G – локально конечная группа и по теореме 3.1.1 $G \simeq GL_2(P)$.

Теорема доказана.

3.3 Периодические группы, насыщенные $PGL_2(q)$

Пусть $\mathfrak{M} = \{PGL_2(q)\}$, где $q = p^n$. Отметим, что ни характеристика поля p, ни натуральное n не фиксируется.

Теорема 3.3.1. *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна $PGL_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле.*

Доказательство. Если для любого $K \in \mathfrak{M}(1)$ K изоморфна $PGL_2(2^n)$ для некоторого натурального n, то по предложению 1.4.6 (пункт 1) $PGL_2(2^n) = L_2(2^n)$ и по предложению 1.2.17 $G \simeq L_2(Q) = PGL_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2, и заключение теоремы справедливо. Поэтому до конца доказательства считаем, что существует такой $K \in \mathfrak{M}(1)$, для которого K не изоморфна $PGL_2(2^n)$ ни для какого натурального n.

Пусть S – силовская 2-подгруппа группы G.

Лемма 3.3.2. *S — неабелева группа, S — локально конечный диэдр, и все силовские 2-подгруппы из G сопряжены с S.*

Доказательство. Так как по предложению 1.4.6 (пункт 2) силовская 2-подгруппа любой группы $PGL_2(q)$, где q — нечетно, является неабелевой группой диэдра, то выберем в качестве S неабелеву силовскую 2-подгруппу из G. Если S — конечная группа, то из условия насыщенности вытекает, что S – конечная группа диэдра, а так как в этом случае все силовские 2-подгруппы сопряжены (предложение 1.2.8), то заключение верно.

Пусть S – бесконечная группа. По условию насыщенности и предложению 1.2.14 S — локально диэдральная группа. Предположим, что в G нашлась силовская 2-подгруппа S_1, не сопряженная с S. По предложению 1.3.7 S_1 можно выбрать так, что порядок ее пересечения D с S больше четырех. Так как в S нет элементарных абелевых подгрупп порядка 8, то D содержит циклическую подгруппу порядка 4. В частности, S_1 не может быть элементарной абелевой группой. Если D бесконечна, то D содержит бесконечную локально циклическую группу, следовательно, D — локально циклическая группа для которой $|S : D| = |S_1 : D| = 2$. В частности, S_1 — локально диэдральная группа, S и S_1 — силовские 2-подгруппы в $N_G(D)$. Так как S/D и S_1/D — конечные силовские подгруппы в $N_G(D)/D$, то они сопряжены. Поэтому S и S_1 сопряжены в $N_G(D)$. Если D конечна, то в $S \setminus D$ и $S_1 \setminus D$ найдутся такие элементы s и s_1 одинакового порядка, что $\langle s, s_1\rangle$ централизует в D элемент порядка 4, и поэтому $\langle s\rangle = \langle s_1\rangle$, что невозможно.

Лемма доказана.

Лемма 3.3.3. *Пусть a – инволюция из S. Тогда $C_G(a)$ — локально диэдральная группа.*

Доказательство. Если $C_G(a)$ — конечная группа, то по предложению 1.2.8 G — локально конечная группа, и по теореме 3.1.1 теорема доказана. Итак, $C_G(a)$ — бесконечная группа. Пусть R – произвольная конечная подгруппа из $C_G(a)$, отличная от $\langle a\rangle$, и $D = \langle a, R\rangle$. По условию насыщенности и лемме 3.3.2 $D \leq M < G$, $M \simeq PGL_2(q)$, где q — нечетное или $q = 4$. При этом $D \leq C_M(a) < C_G(a)$. По предложению 1.4.6 (пункты 1,2) $C_M(a)$ – группа диэдра, следовательно, $C_G(a)$ насыщена группами диэдра. В силу предложения 1.2.18 имеем $C_G(a) = C \leftthreetimes \langle t\rangle$, где C – локально циклическая группа, t — инволюция, $c^t = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$.

Лемма доказана.

Лемма 3.3.4. *В G есть бесконечная локально конечная подгруппа L, изоморфная $L_2(P)$, где P — локально конечное поле.*

Доказательство. Пусть z – инволюция из центра S (лемма 3.3.2). Как следует из леммы 3.3.3, $C_G(z) = C \leftthreetimes \langle t\rangle = \cup_{i=1}^{\infty} D_i$, где

$$D_1 < \ldots < D_i \ldots \tag{1}$$

$D_i = C_i \leftthreetimes \langle t\rangle$, $C_i = \langle c_i\rangle$, для любого $c \in C_i$ справедливо $c^t = c^{-1}$ и $C = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$.

В силу условия насыщенности $D_1 < L_1 \simeq PGL_2(p_1^{m_1})$. Ясно, что $D_1 \leq C_{L_1}(z)$. Положим $D_1^1 = C_{L_1}(z)$. Предположим, что для $i \geqslant 1$ мы определили группу D_i^1 и группу L_i, такие, что $D_i^1 = C_{L_i}(z)$. Определим группу D_{i+1}^1 следующим образом: выберем в цепочке (1) элемент D_j с минимально возможным значением индекса j таким, что D_i^1 — собственная подгруппа группы D_j. В силу условия насыщенности $D_j < L_{i+1} \simeq PGL_2(p_{i+1}^{m_{(i+1)}})$. Ясно, что $D_j \leq C_{L_{(i+1)}}(z) < D_j$. Положим $D_{i+1}^1 = C_{L_{i+1}}(z)$. Таким образом мы имеем бесконечную цепочку групп

$$D_1^1 < \ldots < D_i^1 \ldots, \tag{2}$$

$D_i^1 = C_i^1 \leftthreetimes \langle t\rangle$, $C_i^1 = \langle c_i^1\rangle$, для любого $c \in C_i^1$ справедливо $c^t = c^{-1}$ и $C = \cup_{i=1}^{\infty} C_i^1$.

Кроме того, нами построена последовательность

$$L_1, \ldots, L_i, \ldots \tag{3}$$

подгрупп из G таких, что $L_{i+1} \simeq PGL_2(p_i^{m_i})$ и $D_i^1 = C_{L_i}(z)$. В силу того, что порядки групп L_i неограничено возрастают, мы можем считать (лемма 3.3.2), что все $p_i \neq 2$. Так как по предложению 1.4.6 (пукт 2) $L_i = R_i \leftthreetimes \langle a \rangle$, где $R_i \simeq L_2(p_i^{m_i})$ и $|a| = 2$, то инволюция z лежит в подгруппе R_i, начиная с некоторого значения индекса i (как только элементы порядка 4 начнут попадать в L_i). Следовательно, число значений индекса i, для которых инволюция z не лежит в R_i, конечно. Выбросив из последовательности (3) все L_i с данными значениями индекса i и заново ее перенумеровав, получим, что $z \in R_i$ для любого i.

Так как число классов сопряженных инволюций в $C_G(z)$ не больше трех, а число инволюций в $\cup_{i=1}^{\infty} C_{R_i}(z)$ бесконечно, то пусть T — бесконечное подмножество инволюций из $\cup_{i=1}^{\infty} C_{R_i}(z)$, лежащих в одном классе сопряженных инволюций из $C_G(z)$. Выбросив из последовательности (3) те L_i, для которых $R_i \cap T = \varnothing$, и заново перенумеровав оставшееся бесконечное множество элементов последовательности (3), получим бесконечную последовательность подгрупп группы G

$$M_1, \dots, M_i, \dots \tag{4}$$

со следующими свойствами, вытекающими из определения элементов последовательности (4):

1. $M_i \simeq PGL_2(p_i^{m_i})$ и $p_i \neq 2$.
2. $M_i = N_i \leftthreetimes \langle a_i \rangle$, где $N_i \simeq L_2(p_i^{m_i})$ и $|a_i| = 2$.
3. $z \in N_i$, $C_{M_i}(z) < C_{M_{i+1}}(z)$ и $C_G(z) = \cup_{i=1}^{\infty} C_{M_i}(z)$.
4. $N_i \cap T \neq \varnothing$ для любого значения индекса i.

Пусть t — инволюция из $N_1 \cap T$. Выберем в $C_G(z)$ бесконечную последовательность элементов

$$b_1, \dots, b_i, \dots,$$

такую, что $t \in N_i^{b_i}$ (свойство 4). Положив $W_i = M_i^{b_i}$, получим бесконечную последовательность подгрупп группы G

$$W_1, \dots, W_i, \dots \tag{5}$$

со следующими свойствами для любого значения индекса i:

5. $W_i \simeq PGL_2(p_i^{m_i})$ и $p_i \neq 2$.
6. $W_i = N_i^{b_i} \leftthreetimes \langle a_i^{b_i} \rangle$, где $N_i \simeq L_2(p_i^{m_i})$ и $|a_i^{b_i}| = 2$.
7 Инволюции z и t лежат в $N_i^{b_i}$ и сопряжены в $N_i^{b_i}$.
8. $C_{W_i}(z) < C_{W_{i+1}}(z)$ и $C_G(z) = \cup_{i=1}^{\infty} C_{W_i}(z)$.
9. $C_{W_i}(t) < C_{W_{i+1}}(t)$ и $C_G(t) = \cup_{i=1}^{\infty} C_{W_i}(t)$.

Свойства 5, 6 очевидны. Первое утверждение свойства 7 следует из определения групп W_i, а второе вытекает из предложения 1.4.6 (пункт 2). Докажем свойство 8. Так как $C_{W_i}(z) = \langle d_i \rangle \leftthreetimes \langle t \rangle$ и $C_{W_{i+1}}(z) = \langle d_{i+1} \rangle \leftthreetimes \langle t \rangle$, то из равенств $C_{W_i}(z) = C_{(M_i)^{b_i}}(z^{b_i}) = (C_{M_i}(z))^{b_i}$ и $C_{W_{i+1}}(z) = C_{(M_{i+1})^{b_{i+1}}}(z^{b_{i+1}}) = (C_{M_{i+1}}(z))^{b_{i+1}}$ получаем (используя свойство 3), что $|\langle d_i \rangle|$ делит $|\langle d_{i+1} \rangle|$. Поскольку циклические подгруппы из $C_G(z)$, имеющие одинаковый порядок (больше двух), совпадают (лемма 3.3.3), то $\langle d_i \rangle < \langle d_{i+1} \rangle$, значит, $C_{W_i}(z) \subset C_{W_{i+1}}(z)$, и свойство 8 доказано.

Докажем свойство 9. Так как $C_{W_i}(t) = \langle h_i \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle$ и $C_{W_{i+1}}(t) = \langle h_{i+1} \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle$, то из изоморфизмов (второе увеpждение свойства 7) $C_{W_i}(t) \simeq C_{W_i}(z)$ и $C_{W_{i+1}}(t) \simeq C_{W_{i+1}}(z)$ получаем (используя свойство 3), что $|\langle h_i \rangle|$ делит $|\langle h_{i+1} \rangle|$. Поскольку циклические подгруппы из $C_G(t)$, имеющие одинаковый порядок (больше двух), совпадают, то $\langle h_i \rangle < \langle h_{i+1} \rangle$, значит, $C_{W_i}(t) < C_{W_{i+1}}(t)$, и свойство 9 доказано.

По предложению 1.4.6 (пункт 4) $W_i = \langle C_{W_i}(z), C_{W_i}(t) \rangle$. Но тогда из свойств 8, 9 следует, что последовательность (5) образует цепочку

$$W_1 < \ldots < W_i < \ldots . \tag{6}$$

Очевидно, $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ — локально конечная группа. Пусть K — произвольная конечная подгруппа из L. Так как $K \leq W_i$ для некоторого i, и $W_i \simeq PGL_2(p_i^{m_i})$, то по теореме 3.1.1 $L \simeq PGL_2(P)$, где P — локально конечное поле.

Лемма доказана.

Лемма 3.3.5. *Пусть L — из формулировки предыдущей леммы.Тогда $G = L$.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть z — из леммы 3.3.4. Возьмем инволюцию $v \in G \setminus L$. По условию насыщенности $\langle v, z\rangle < M \simeq PGL_2(p^n)$, где либо p — нечетно, либо $p = n = 2$.

Если p — нечетно, то M содержит элемент порядка 4. В этом случае $M = R \leftthreetimes \langle a\rangle$, где $R \simeq L_2(p^n)$, а a — инволюция (предложение 1.4.6, пункт 2). Так как z перестановочна с некоторой, отличной от себя, инволюцией t из R, то $t \in C_G(z) < L$. А поскольку t и z сопряжены (лемма 3.3.2), то $C_G(t) < L$. Отсюда и из предложения 1.4.6 (пункты 2, 4) вытекает включение $R < L$. Так как $v \in C_M(x)$ для некоторой инволюции $x \in R$, а $C_M(x) < C_G(x) < L$, то $v \in L$. Противоречие с выбором v.

Если $p = n = 2$, то $M \simeq L_2(4)$. Пусть S_M — силовская 2-подгруппа из M, содержащая z. Ясно, что $M < L$. Пусть b — элемент порядка 3 из $N_M(S_M)$, а d — элемент порядка 3 из $N_L(S_M)$. По предложению 1.4.6 (пункт 5) $S_M \leftthreetimes \langle b\rangle = S_M \leftthreetimes \langle d\rangle$. Следовательно, $S_M \leftthreetimes \langle b\rangle < L$. Пусть w, l — инволюции из M, L соответственно, инвертирующие элемент b. По условию насыщенности конечная группа $\langle b, w, l\rangle < M_1$, где $M_1 \simeq PGL_2(p^n)$, p — нечетное. Но такая ситуация рассматривалась выше, и было показано, что она невозможна.

Итак, $G \setminus L$ не содержит инволюций, что влечет равенство $G = L$.

Лемма и теорема доказаны.

3.4 Группы Шункова, насыщенные $GL_2(q)$ над произвольными конечными полями

Пусть $\mathfrak{J} = \{GL_2(q)\}$, где $q = p^n$. Отметим, что ни характеристика поля p, ни натуральное n не фиксируется.

Теорема 3.4.1. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Im$, состоящего из всех групп $\{GL_2(p^n)\}$ (здесь p и n не фиксируются), изоморфна $GL_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля.*

Доказательство. Пусть G — контрпример к утверждению теоремы.

Лемма 3.4.2. *Пусть периодическая группа R насыщена группами из множества $\Im$, тогда силовская 2-подгруппа S группы R одного из следующих видов :*

1. *$S = \langle a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1}\rangle$ — полудиэдральная группа и $|S| = 2^{n+1}$.*
2. *$S = \langle a, w | a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = 1, a^w = b, ab = ba\rangle$ — сплетенная 2-группа и $|S| = 2^{n+2}$.*
3. *S — конечная элементарная абелева 2-группа.*
4. *S — бесконечная элементарная абелева 2-группа.*

5. $S = \tilde{S}K$, *где* $\tilde{S}$ — *бесконечная локально циклическая* 2-*группа,* K — *конечная* 2-*группа, изоморфная некоторой подгруппе сплетенной группы.*

6. $S = (A \times B) \leftthreetimes \langle w \rangle)$, *где* A — *бесконечная локально циклическая* 2-*группа,* $w^2 = 1$ *и* $A^w = B$.

Доказательство.

I. Если в R некоторая S конечна, то S — одна из видов 1–3 утверждения леммы.

Действительно, это так, ввиду предложений 1.2.8, 1.4.4, 1.4.5 (пункты 9, 10). В дальнейшем считаем, что S — бесконечная группа.

II. Если полная часть $\tilde{S}$ группы S является единичной группой, то S вида 4 из условия леммы.

В этом случае S содержит подгруппу $D = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, где $x^2 = y^2 = z^2 = 1$. В силу предложения 1.2.9 D вложена в бесконечную локально конечную подгруппу I группы S. Если I содержит элемент b порядка 4, то $\langle D, b \rangle$ — конечная 2-группа, которая по условию насыщенности является подгруппой группы D_1, где D_1 — одна из следующих групп (предложения 1.4.4, 1.4.5): D_1 — конечная группа полудиэдра, D_1 — конечная сплетенная 2-группа, D_1 — элементарная абелева 2-группа. Но в первых двух случаях D_1 не может содержать подгруппу D, а в последнем не может содержать элемент b.

Итак, I — элементарная абелева 2-группа, и можно считать I максимальной в указанном смысле ($D < I$). Если $S = I$, то все доказано. Предположим, что $x \in S \setminus I \neq \varnothing$. Покажем, что x можно выбрать так, что $xz = zx$ для некоторой инволюции $z \in I$. Если $|x| = 2$, то группа $\langle x, z \rangle$ конечна для любой инволюции z из I. Пусть t — инволюция из $Z(\langle x, z \rangle)$. Если $t \in I$, то положим $z = t$. Если $t \notin I$, то положим $x = t$. Подгруппа $\langle z \rangle \times \langle x \rangle = K_1$, очевидно, не лежит в I и $K_1 \cap I = \langle z \rangle$. Возьмем в I инволюцию $t \neq z$. Ясно, что $tz = zt$. Рассмотрим конечную подгруппу $\langle z, x, t \rangle$. Данные подгруппы, очевидно, не лежат в I и

$$(\langle x \rangle \times \langle t \rangle) \leq (\langle z, x, t \rangle \cap I)).$$

В силу предложения 1.2.9 в $\langle z, x, t \rangle$ существует элемент v такой, что $v \in N_G(\langle z \rangle \times \langle t \rangle) \setminus I$ и $v^2 \in I$. Тогда группа $K_2 = \langle v, z, x, t, t_1 \rangle$, где $t_1 \in I \setminus (\langle z \rangle \times \langle t \rangle)$, — конечная 2-группа.

По условию насыщенности $K_2 \leq K_3 \in \Im(1)$. Так как K_2 содержит подгруппу $\langle t \rangle \times \langle t_1 \rangle \times \langle t \rangle$, то из структуры $\Im$ вытекает, что K_2 — элементарная абелева 2-группа. В силу произвольности выбора t_1 из I получим, что x перестановочен с любой инволюцией из I. Таким образом, $I \times \langle x \rangle$ — элементарная абелева 2-группа, что противоречит максимальности I, как элементарной абелевой 2-группе. Пусть $|x| = 4$. Возьмем $x_1 = x^2$. По доказанному выше $x_1 \in I$. В дальнейшем, дословно повторяя рассуждения для случая $|x| = 2$, получим, что $x \in K_2$ — элементарная абелева 2-группа. Противоречие с тем, что $|x| = 4$. В дальнейшем будем считать, что S не содержит элементарных абелевых групп порядка более четырех. Пусть $\tilde{S}$ — максимальная полная абелева подгруппа из S.

III. Если ранг $\tilde{S} \geqslant 2$, то S — группа вида 6 из условия леммы.

В этом случае $\tilde{S} = A \times B$, где A, B — локально циклические группы. Возьмем в $\tilde{S}$ конечную подгруппу $R = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, где $a \in A, b \in B$, и $|a| = |b| > 2$. По условию насыщенности $R < K \in \Im(1)$. Следовательно, $K \simeq GL_2(p^n)$ и $p \neq 2$. Пусть S_k — силовская 2-подгруппа из K, содержащая R. По предложению 1.4.5 (пункт 9) $S_k = (\langle c \rangle \times \langle\, d \rangle \leftthreetimes \langle w \rangle$ — сплетенная 2-группа, т. е. $|c| = |d| > 2$ и $c^w = d$. Ясно, что $R \leq (\langle c \rangle \times \langle d \rangle)$ и $R^w = R$. Возьмем в $\tilde{S} \setminus R$ элемент y со свойством $y^2 \in R$. Очевидно, такой элемент в силу структуры $\tilde{S}$ найдется. Ясно, что $y \in C_G(R)$. Следовательно, группа $\langle R, y, w \rangle$ конечна.

По условию насыщенности $\langle R, y, w \rangle \leq K_1 \in \Im(1)$ и $K_1 \simeq GL_2(p_1^{n_1})$, где $p_1 \neq 2$. По предложению 1.4.5 (пункт 4) $\langle R_1, y, w \rangle < N_{K_1}(R) = ((\langle c_1 \rangle \times \langle d_1 \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle$ — сплетенная группа.

Здесь $|c_1| = |d_1| = (p_1^{n_1} - 1)^2$ и $c_1^w = d_1$. Кроме того, $C_{K_1}(R) = (\langle c_1\rangle \times \langle d_1\rangle)$. В частности, отсюда вытекает, что $\langle y^w, y\rangle \leqslant (\langle c_1\rangle \times \langle d_1\rangle)$. Пусть y_1 — другой элемент из $\tilde{S}\setminus R$ со свойством $y_1^2 \in R$ и $\langle y_1\rangle \neq \langle y\rangle$. Покажем, что $y_1 y^w = y^w y_1$. Действительно, $\langle R, y, y^w\rangle$ — конечная группа.

По условию насыщенности $\langle R, y_1, y^w\rangle \leq K_2 \in \Im(1), K_2 \simeq GL_2(p_2^{n_2})$, где $p_1 \neq 2$. По предложению 1.4.5 (пункт 4) $C_{K_2}(R) = (\langle c_2\rangle \times \langle d_2\rangle)$, где $\langle |c_2| = |d_2| = (p^{n_2} - 1)^2$. Так как $\langle R, y_1, y^w\rangle < C_{K_2}(R)$, то $y_1 y^w = y^w y_1$, что и требовалось.

Пусть Y — множество элементов из $\tilde{S} \setminus R$ со свойством, что для любого $y \in Y, y^2 \in R$. Ясно, что Y — конечное множество. Из сказанного выше получаем, что $\langle Y, R\rangle$ — конечная абелева группа из $C_G(R)$, а $\langle R, Y, Y^w, w\rangle$ — конечная группа из $N_G(R)$. По условию насыщенности $\langle R, Y, Y^w, w\rangle \leq K_3 \in \Im(1), K_3 \simeq GL_2(p_3^{n_3})$ и $p_3 \neq 2$. По предложению 1.4.5 (пункт 4) $N_{K_3}(R) = (\langle c_3\rangle \times \langle d_3\rangle) \leftthreetimes \langle w\rangle, \langle c_3\rangle \times \langle d_3\rangle) = C_{K_3}(R)$ и $R_1 = \tilde{S} \cap \langle c_3\rangle \times \langle d_3\rangle)$. По построению $R < R_1 = (\langle v_1\rangle \times \langle u_1\rangle)$, где $\langle v\rangle < A, \langle u\rangle < B$ и $v_1^w = u_1$. Действуя по описанному выше алгоритму, мы строим в S цепочку подгрупп

$$R < R_1 < R_2 < ... < R_i < ...$$

со следующими свойствами: $R_i = (\langle u_i\rangle \times \langle v_i\rangle)$ и $v_i^w = u_1$. Так как $\tilde{S}$ — полная 2–группа ранга 2, то, очевидно, $\cup R_i = \tilde{S}$ и $w \in N(\tilde{S})$.

Осталось показать, что $\tilde{S} \leftthreetimes \langle w\rangle = S$. Рассмотрим $N_G(S)/\tilde{S} = \overline{N}$. Очевидно, в $\overline{N}$ силовская 2–подгруппа конечна, значит, все силовские 2–подгруппы из $\overline{N}$ конечны и сопряжены (предложение 1.2.8), а силовские 2-подгруппы в N сопряжены. Поэтому, с точностью до сопряженности можно считать, что $\tilde{S} \leftthreetimes (\langle w\rangle) \leq S$. Из предложения 1.4.5(пункт 4) получаем, что для любого $y \in S$, $y \in (\tilde{S} \leftthreetimes \langle w\rangle)$. Следовательно, $S \leq (\tilde{S} \leftthreetimes \langle w\rangle)$ и $\tilde{S} \leftthreetimes \langle w\rangle = S$.

IV. Если $D_n < S$, где $D_n = \langle a_n\rangle \times \langle b_n\rangle \leftthreetimes \langle w_n\rangle$ $|a_n| = |b_n| > 2, a_n^{w_n} = b_n$ и $w_n^2 = 1$, то S вида 6 из условия леммы.

Если S содержит бесконечную цепочку

$$D_1 < D_2 < ... < D_n < ..., \tag{1}$$

то, очевидно, $\cup D_n$ насыщена конечными сплетенными 2–группами, по теореме 2.1.1 $\tilde{S}$ ранга 2 и по пункту 3 все доказано. Предположим, что бесконечных цепочек типа (1) в S нет. Тогда $\tilde{S}$ — квазициклическая группа, и, очевидно, $\tilde{S} \leq Z(S)$. Пусть D_n — максимальная сплетенная 2-группа из S. Положим $(\langle a_n\rangle \times \langle b_n\rangle) = R_n$.

Пусть s — такой элемент из $\tilde{S} \setminus R_n$, что $s^2 \in R_n$. Тогда $\langle R_n, s\rangle$ — конечная группа, и по условию насыщенности $\langle R_n, s\rangle < K \simeq GL_2(p^n)$, где $p \neq 2$. По предложению 1.4.5 (пункт 4) $s \in C_K(R_n)$. Следовательно, $sx = xs$ для любого $x \in C_K(R_n)$. Выберем $x \in C_K(R_n) \setminus S$ так, что $x^2 \in R_n$. Пусть $s_1 \in \tilde{S}$ и $s_1^2 = s$. По условию насыщенности конечная группа $\langle s_1, x, R_n\rangle \leq K_1 \simeq GL_2(p_1^n)$ для некоторого нечетного простого p_1. Так как $\langle s_1, x, R_n\rangle \leq C_{K_1}(R_n)$, то по предложению 1.4.5(пункт 4) $s_1 x = x s_1$. Далее, используя индукцию, получим, что $\tilde{S} < C_G(x)$ и $\langle \tilde{S}, x\rangle$ — абелева группа. Следовательно, $\tilde{S}R_n\langle x\rangle$ – абелева 2-подгруппа, содержащая подгруппу $R_{n_1} = \langle a_{n_1}\rangle \times \langle b_{n_1}\rangle$ со свойством $R_n < R_{n_1}$. Действуя подобным образом, строим бесконечную цепочку вложенных друг в друга подгрупп

$$\tilde{S}R_n < \tilde{S}R_{n_1} < ... < \tilde{S}R_{n_k} < ....$$

Положим $\tilde{S}_1 = \cup\tilde{S}R_{n_k}$. Несложно видеть, что $\tilde{S}_1$ – полная абелева группа ранга 2 и $w_n \in N_G(\tilde{S}_1)$. Положим $S_1 = \tilde{S}_1 \leftthreetimes \langle w_n\rangle$. Тогда S_1 – группа вида 6 из условия леммы.

V. Пусть S не содержит подгруппу $D_n = (\langle a_n\rangle \times \langle b_n\rangle) \leftthreetimes \langle w_n\rangle$ с условием $|a_n| = |b_n| > 2$.

Тогда S вида 5 из условия леммы.

Очевидно, в этом случае полная часть $\tilde{S}$ группы S — квазициклическая 2-группа. Положим $\tilde{S} = A$. Тогда S/A — конечная 2-группа, и пусть K – ее минимальный по порядку образ в S. Тогда $S = AK$, и K — подгруппа из конечной сплетенной группы.

Завершим доказательство леммы. Если S – конечная группа, то лемма доказана по пункту I. Если S – бесконечная группа и содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 8, то лемма доказана по пункту II. Если S не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8, то по предложению 1.2.10 S обладает нетривиальной полной частью $\tilde{S}$, и лемма доказана ввиду пунктов III, IV, V.

Лемма доказана.

Лемма 3.4.3. *Пусть $K \in \Im(1)$. Тогда $K \simeq GL_2(p^m)$ для некоторого нечетного простого p.*

Доказательство. Предположим обратное. Если для любой K из $\Im(1)$ $K \simeq GL_2(2^n)$, то по предложениям 1.4.4 (пункт 1), 1.2.7 $G \simeq L_2(Q) \times V$, где Q – локально конечное поле характеристики 2, а V – локально циклическая группа без инволюций, и по теореме 3.1.1 теорема доказана. В дальнейшем будет предполагаться, что существует такая K из $\Im(1)$, что K не изоморфна $GL_2(2^n)$ ни для какого n. Следовательно, K изоморфна $GL_2(p^n)$ и $p \neq 2$. Зафиксируем K и p. Предположим, что наряду с K найдется $H \in \Im(1)$ такая, что $H \simeq GL_2(2^m)$.

1. Неравенство $m > 2$ невозможно.

Предположим обратное. По лемме 3.4.2 и предложению 1.3.7 в этом случае любая силовская 2-подгруппа из G – элементарная абелева. Тогда для любой H из $\Im(1)$, $H \simeq GL_2(2^n)$, что противоречит выбору K. Пункт 1 доказан.

2. Равенство $m = 2$ невозможно.

Предположим обратное. Тогда $H \simeq L_2(2^2) \times \langle d \rangle$, где d – элемент порядка 3. Так как $L_2(2^2)$ содержит подгруппу, изоморфную A_4, то G также содержит подгруппу, изоморфную A_4. Пусть это подгруппа $V = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle d \rangle$, где $a^2 = b^2 = d^3 = 1$, и $a^d \neq a$. Так как G содержит K, то силовская 2-подгруппа S из G, содержащая $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$, не элементарная абелева. Возьмем элемент $x \in N_S(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \setminus (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$ со свойством $x^2 \in (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$. Фактор-группа $\langle V, x \rangle / (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$ конечна, так как порождается инволюцией и элементом простого порядка (предложение 1.3.3). Следовательно, группа $\langle V, x \rangle$ конечна (предложение 1.2.3), ее силовская 2-подгруппа – не элементарная абелева, и по условию насыщенности $\langle V, x \rangle \leq M$, где $M \simeq GL_2(q^m)$ для некоторого нечетного простого q. Ясно, что $V \subseteq M$, а поскольку $V \simeq A_4$, то мы приходим к противоречию с предложением 1.4.5 (пункт 6). Пункт 2 доказан.

3. Равенство $m = 1$ невозможно.

Предположим обратное. Тогда $H \simeq (\langle c \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle)$, где $c^3 = d^2 = e$ и $c^d = c^{-1}$. Возьмем инволюцию x из $C_G(d)$ с тем свойством, что $x \neq d$. Ввиду леммы 3.4.2 такая инволюция найдется. Тогда $\langle c, c^x, x, d \rangle$ – конечная группа, порядок которой больше $|H|$. По условию насыщенности $\langle c, c^x, x, d \rangle \leq M$, где $M \simeq GL_2(q^m)$ для некоторого нечетного простого q. То, что $q \neq 2$, вытекает из разобранных выше случаев и того факта, что $|M| > 6$. Таким образом, в этом случае группа H всегда вкладывается в некоторую большую с требуемым в условии леммы свойством. Другими словами, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что ни множество $\Im(1)$, ни множество $\Im$ не содержат групп диэдра порядка 6. Пункт 3 доказан.

Лемма доказана.

Зафиксируем некоторую группу $K \in \Im(1)$. По лемме 3.4.3 $K \simeq GL_2(p^m)$, где p — простое нечетное число.

Лемма 3.4.4. *Для произвольного элемента $a \in K$ порядка p $C_G(a)$ содержит одну инволюцию.*

Доказательство. Ясно, что $Z(K)$, а стало быть, и $C_G(a)$ содержат инволюцию. Пусть z и t – две различные инволюции из $C_G(a)$. Без ограничения общности можно считать, что z из центра K. Фактор-группа $\langle a, z, t\rangle/\langle a\rangle$ конечна, так как порождена двумя инволюциями. По предложению 1.3.3 группа $\langle a, z, t\rangle$ конечна и по условиям теоремы вложима в некоторую конечную подгруппу $K_1 \in \Im(\langle a, z, t\rangle)$.

1. Для любого $K_1 \in \Im(\langle a, z, t\rangle)$, $K_1 \simeq GL_2(p_1^{m_1})$, где p_1 – простое нечетное число, неравное p.

Предположим обратное. Пусть для некоторой группы K_1 $K_1 \simeq GL_2(p^m)$. Тогда элемент a содержится в некоторой силовской p-подгруппе группы K_1, и $C_{K_1}(\langle a\rangle)$ содержит только одну инволюцию (предложение 1.4.5, пункты 1–3). В этом случае $z = t$, и мы приходим к противоречию с выбором z и t. Пункт 1 доказан.

По пункту 1 и предложению 1.4.5 (пункты 2, 5) $Z(K_1)$ содержит элемент порядка p, а K_1 содержит подгруппу $\langle a\rangle \times \langle c\rangle$ порядка p^2. Рассмотрим в K подгруппу Фробениуса $\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, где $|b| = p-1$. Пусть v — инволюция из $\langle b\rangle$. Ясно, что $a^v = a^{-1}$. По условию насыщенности конечная группа $\langle a, c, c^v, v\rangle \le K_2$, где $K_2 \simeq GL_2(p_2^{m_1})$ и p_2 — простое нечетное число (лемма 3.4.3).

2. $p_2 \ne p$.

Предположим обратное. Возьмем силовскую p-подгруппу S_p из K_2, содержащую $\langle a\rangle \times \langle c\rangle$. По предложению 1.4.5 (пункт 3) $v \in N_{K_2}(S_p)$ и $x^v = x^{-1}$ для любого $x \in S_p$ (предложение 1.4.5, пункт 2). В частности, $c^v = c^{-1}$ и $v \in N_G(\langle a\rangle \times \langle c\rangle)$. Возьмем сплетающую инволюцию ω из $N_{K_1}(\langle a\rangle \times \langle c\rangle)$ (предложение 1.4.5, пункт 4). Фактор-группа $\langle(\langle a\rangle \times \langle c\rangle), v, \omega\rangle/(\langle a\rangle \times \langle c\rangle)$ конечна, так как порождается двумя инволюциями. Следовательно, по предложению 1.2.3 группа $\langle(\langle a\rangle \times \langle c\rangle), v, \omega\rangle$ конечна. По условию насыщенности конечная группа $\langle(\langle a\rangle \times \langle c\rangle), v, \omega\rangle \le K_3$, где $K_3 \simeq GL_2(p_3^{m_3})$. Ясно, что $p_3 \ne p$ (инволюция ω действует нерегулярно на $(\langle a\rangle \times \langle c\rangle)$, и мы приходим к противоречию с предложением 1.4.5 (пункт 4). Пункт 2 доказан.

По пункту 2 $(\langle a\rangle \times \langle c\rangle)$ содержит неединичный элемент r из центра K_2 и $r \ne a$. Тогда $\langle a\rangle \times \langle c\rangle = \langle a\rangle \times \langle r\rangle$, $v \in N_{K_2}(\langle a\rangle \times \langle c\rangle)$, и без ограничения общности можно считать, что c совпадает с r, следовательно, $c^v = c$. Поскольку $b \in N_K(\langle a\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle)$, а $c \in C_G(\langle a\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle)$, то $\langle a, v, c, c^b\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности $\langle a, v, c, c^b\rangle \le K_4$, где $K_4 \simeq GL_2(p_4^m)$ для некоторого нечетного простого $p_4 \ne p$. В этом случае $a \notin Z(K_4)$, поскольку $a^v = a^{-1}$. Так как $c^b \in N_{K_4}(\langle c\rangle \times \langle a\rangle)$, то $c^b \in (\langle c\rangle \times \langle a\rangle)$, $b = v$ и $p = 3$ (предложение 1.4.5,пункт 4). Следовательно, $K \simeq GL_2(3^m)$.

3. Неравенство $m > 1$ невозможно.

Предположим обратное. Следовательно, в K найдется $\langle a\rangle \times \langle a_1\rangle$ порядка 3^2, и $\langle a, a_1, a_1^c\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle$ – конечная группа, которая по условию насыщенности лежит в K_5, где $K_5 \simeq GL_2(p_5^{m_5})$. Так как $c^v = c$, то $p_5 \ne 3$. Так как подгруппы $\langle a\rangle \times \langle a_1^c\rangle$ и $\langle a\rangle \times \langle a_1\rangle$ имеют нетривиальное пересечение с центром K_5, то они совпадают, значит, $c \in N_G(\langle a\rangle \times \langle a_1\rangle)$, что возможно только в случае, если $c \in C_G(\langle a\rangle \times \langle a_1\rangle)$. Из последнего вытекает, что либо $c \in (\langle a\rangle \times \langle a_1\rangle)$ и $c^v = c^{-1}$, что не так, либо $(\langle a\rangle \times \langle a_1\rangle \times \langle c\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle$ – конечная подгруппа в G. По условию насыщенности $((\langle a\rangle \times \langle a_1\rangle \times \langle c\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle) \le K_6$, где $K_6 \simeq GL_2(3^{m_6})$, $m_6 > 2$. Но это невозможно, поскольку $c^v = c$. Пункт 3 доказан.

Для завершения доказательства леммы осталось доказать следующий пункт.

4. Равенство $m = 1$ невозможно.

Предположим обратное. Тогда $K \simeq GL_2(3)$ — конечная разрешимая группа порядка 48 с полудиэдральной силовскрй 2-подгруппой S_K. Возьмем элемент $d \in C_G(S_K)$ и $|d| > 2$. Тогда $\langle S_K, d\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle S_K, d\rangle \leq K_7$, где $K_7 \in \Im(1)$. В этом случае $K_7 \simeq GL_2(p_7^{m_7})$. Тогда либо $p_7 = 3$ и $m_7 > 1$, либо $p_7 \neq 3$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $K \notin \Im(1)$, а $GL_2(3) \notin \Im$. Противоречие с выбором K. Пункт 4 доказан.

Лемма доказана.

Лемма 3.4.5. *Для произвольного элемента a порядка p из K все 2-элементы группы $C_G(a)$ порождают локально циклическую 2-подгруппу.*

Доказательство. Если все 2-элементы из $C_G(a)$ являются инволюциями, то утверждение леммы вытекает из леммы 3.4.3. Пусть $C_G(a)$ содержит 2-элементы порядка больше 2. Сделаем следующее индуктивное предположение: если в $C_G(a)$ существует циклическая подгруппа $\langle b_0\rangle$, $|b_0| = 2^k$ и $k \geq 1$, то она единственна. Пусть в $C_G(\langle a\rangle)$ существует циклическая подгруппа $\langle b\rangle$ и $|b| = 2^{k+1}$. Предположим, что существует другая циклическая подгруппа $\langle c\rangle$, лежащая в $C_G(a)$, $\langle c\rangle \neq \langle b\rangle$, $|c| = 2^{k+1}$. Рассмотрим подгруппу $\langle a, b, c\rangle$. В ней конечная абелевая подгруппа $\langle a, b^2\rangle = \langle a, c^2\rangle$ является нормальной (равенство $\langle b^2\rangle = \langle c^2\rangle = \langle d\rangle$ следует из индуктивного предположения). Тогда фактор-группа $\langle a, b, c\rangle/\langle a, d\rangle$ является конечной, поскольку порождена двумя инволюциями. Следовательно, конечной является и группа $\langle a, b, c\rangle$. По условиям теоремы $\langle a, b, c\rangle \leq L \in \Im(\langle a, b, c\rangle)$. Если $L \simeq GL_2(p^m)$, то в L существует только одна циклическая группа порядка 2^{k+1}, лежащая в $C_G(\langle a\rangle)$, и она лежит в центре группы L. Противоречие с выбором $\langle c\rangle$. Следовательно, $\langle b\rangle = \langle c\rangle$. Если $L \simeq GL_2(p_1^m)$, где p_1 — простое нечетное число, не равное p, то по предложению 1.4.5 (пункт 5) $p|(p_1^m - 1)$ и L содержит абелеву подгруппу D порядка $(p_1^m - 1)^2$ (предложение 1.4.5, пункт 2). Без ограничения общности можно считать, что $\langle a\rangle \subseteq D$, и $C_G(a)$ содержит две различные инволюции. Противоречие с леммой 3.4.4.

Лемма доказана.

Лемма 3.4.6. *Все 2-элементы из $Z(K)$ лежат в центре группы G и порождают в нем единственную локально циклическую 2-подгруппу.*

Доказательство. Обозначим через z инволюцию из центра K.

1. z лежит в центре группы G.

Предположим обратное. Тогда существует элемент $g \in G$ такой, что $z^g = \upsilon$ и $\upsilon \neq z$. Пусть a – элемент порядка p из K. Группа $\langle a, a^\upsilon\rangle$ конечна по определению группы Шункова. Так как $\langle a, a^\upsilon\rangle^\upsilon = \langle a^\upsilon, a\rangle = \langle a, a^\upsilon\rangle$, то $\upsilon \in N_g(\langle a, a^\upsilon\rangle)$. Последнее означает, что группа $\langle a^\upsilon, a, \upsilon\rangle$ конечна. По условию насыщенности

$$\langle a^\upsilon, a, \upsilon\rangle \leq L_1 \in \Im(\langle a^\upsilon, a, \upsilon\rangle).$$

По лемме 3.4.4 $z \in Z(L_1)$, значит, $z\upsilon = \upsilon z$, т. е. есть $z^G = \langle z^g | g \in G\rangle$ – абелева нормальная подгруппа в G периода 2. Следовательно, $z = \upsilon$. Противоречие с выбором υ. Пункт 1 доказан.

Предположим теперь, что $Z(K)$ содержит 2-элементы порядка больше 2. В этом случае силовская 2-подгруппа из K является сплетенной группой (предложение 1.4.5, пункты 9, 10). По лемме 3.4.2 силовская 2-подгруппа из G — также сплетенная группа (конечная или бесконечная). Сделаем следующее индуктивное предположение: если в $Z(K)$ существует циклическая подгруппа $\langle d\rangle$ порядка $2^k(k\geqslant 1)$, то она также содержится в $Z(G)$. Пусть в $Z(K)$ существует циклическая подгруппа $\langle b\rangle$ порядка 2^{k+1}. Покажем, что b лежит в центре группы G. Предположим обратное. Тогда существует $g\in G$ такой, что $b^g=c\neq b$. В силу индуктивного предположения можно считать, что $b^2=c^2=d\in Z(G)$. Следовательно, $\langle a,c\rangle$ – конечная группа (предложение 1.3.3). По условию насыщенности $\langle a,c\rangle\leq L_2\in\Im(\langle a,c\rangle)$.

2.$|c|$ не делит $|Z(L_2)|$.

Предположим обратное. Тогда по лемме 3.4.5 $b\in Z(L_2)$. Следовательно, $b^G=\langle b^g|g\in G\rangle$ – абелева нормальная подгруппа в G, и, следовательно, $b=c$. Противоречие с выбором c. Пункт 2 доказан.

По пункту 2 и предложению 1.4.5 (пункты 9, 10) $N_{L_2}(\langle c\rangle)$ содержит инволюцию t со свойством $c^t=cw$, где w – инволюция из $\langle c\rangle$ (предложение 1.4.5, пункты 9, 10). Так как $c=b^g$, то $N_G\langle b\rangle$ содержит инволюцию $t^{g^{-1}}$ со свойством $b^{gtg^{-1}}=bw^{g^{-1}}$. По условию насыщенности конечная группа $\langle b,t^{g^{-1}},a\rangle\leq L_3$ и $b\in C_{L_3}(a)$, где $L_3\simeq GL_2(p_1^m)$, и p_1 – простое нечетное число.

3. Равенство $p=p_1$ невозможно.

Предположим обратное. Тогда $b\in Z(L_3)$ (предложение 1.4.5, пункт 2) и инволюция $t^{g^{-1}}$ перестановочна с b. Противоречие. Пункт 3 доказан.

По пункту 3 $p\neq p_1$. Тогда либо $p|(p_1^m-1)^2$, либо $p|(p_1^m+1)$. В первом случае $C_{L_3}(a)$ содержит две различные инволюции, что противоречит лемме 3.4.3. Во втором случае L_3 содержит подгруппу $(\langle b_1\rangle\times\langle a\rangle)\leftthreetimes\langle t\rangle$, где $S_{L_3}=(\langle b_1\rangle\leftthreetimes\langle t\rangle)$ — силовская 2-подгруппа группы L_3 будет полудиэдральной группой порядка больше 8 ($b_1^{2^k}=t^2=1$ и $b_1^t=b_1^{-1}w^{g^{-1}}$), $a^t=a^{-1}$, $b\in\langle b_1\rangle$, а силовская 2-подгруппа из $Z(L_3)$ совпадает с $\langle w^{g^{-1}}\rangle$. Как отмечалось выше, силовская 2-подгруппа из G является сплетенной группой (конечной или бесконечной). Следовательно, в G существует элемент d порядка 4 такой, что $d\in C_G(S_{L_3})$, и $d^2\in\langle b_1\rangle$. Отсюда, в частности, получаем, что d^2 – инволюция из $Z(G)$. Из предложения 1.3.3 вытекает, что $\langle b_1,a,a^c\rangle$ и $\langle d,t\rangle$ — конечные группы. Ясно, что $\langle d,t\rangle\in N_G(\langle b_1,a,a^c\rangle$. Следовательно, $\langle d,t,b_1,a,a^c\rangle)$ — конечная группа, которая по условию насыщенности лежит в некоторой $L_4\in\Im(1)$. Легко видеть,что силовская 2-подгруппа из L_4 – сплетенная группа и $|b|||Z(L_4)|$. Но тогда $b\in Z(L_4)$, что не так.

Лемма доказана.

Лемма 3.4.7. *Пусть b — элемент нечетного порядка из $Z(K)$. Тогда в G не существует элемета x такого, что $b^x=b^{-1}$ и $x^2\in Z(G)$.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть такой элемент x существует. Так как G – группа Шункова, то $\langle b,x,a\rangle$ — конечная группа. Здесь a — элемент порядка p из K. По условию насыщенности $\langle b,x,a\rangle\leq L$, где $L\in\Im(1)$, где $L\simeq GL_2(p_1^m)$. Если $p=p_1$, то из предложения 1.4.5 (пункты 2, 3, 6) вытекает, что $b\in Z(L)$. Следовательно, $b^x=b$, что противоречит выбору элемента x. Если $p\neq p_1$, то либо $p|(p_1^m-1)^2$, либо $p|(p_1^m+1)$. В первом случае $C_L(a)$ содержит две различные инволюции (предложение 1.4.5, пункт 2), что противоречит лемме 3.4.4. Во втором случае, переходя к фактор-группе $L/Z(L)\simeq PGL_2(p_1^m)$, мы приходим к противоречию со структурой $PGL_2(p_1^m)$. Действительно, поскольку b — не центральный элемент из L, то

$$(\langle b\rangle Z(L)/Z(L)\times\langle a\rangle Z(L)/Z(L))\leftthreetimes\langle x\rangle Z(L)/Z(L)\ -$$

подгруппа из $L/Z(L)$ порядка $2p|b|$, причем инволюция $\langle x\rangle Z(L)/Z(L)$ действует тождественно на циклической группе $\langle a\rangle Z(L)/Z(L)$ и регулярно на циклической группе

$$\langle b\rangle Z(L)/Z(L).$$

Но таких подгрупп в $PGL_2(p_1^m)$ нет (предложение 1.4.5, пункты 7, 8).

Лемма доказана.

Лемма 3.4.8. *Пусть $b \in Z(K)$ и $|b| = r$ – простое нечетное число. Тогда $b \in Z(G)$.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $b \neq b^g$ для некоторого $g \in G$. По условию насыщенности конечная группа $\langle b, b^g\rangle \leq K_{(1,g)} \in \Im(\langle b, b^g\rangle)$.

1. Существует такой g, что b не принадлежит $Z(K_{(1,g)})$.

Действительно, если для любого $g \in G$, $b \in Z(K_{(1,g)})$, то $b^G = \langle b^g | g \in G\rangle$ – абелева нормальная подгруппа в G. Следовательно, $\langle b, g\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности $\langle b, g\rangle \subseteq K_2 \in \Im(\langle b, g\rangle)$. Следовательно, $b^{K_2} = \langle b^x | x \in K_2\rangle$ – нормальная r-подгруппа в K_2. По предложению 1.4.5 (пункт 2) $b^{K_2} < Z(K_2)$, в частности $b \in Z(K_2)$, значит, $b^g = b$. Противоречие с выбором g. Пункт 1 доказан.

Положим $K_{1,g} = K_1$ и зафиксируем группу K_1.

2. $r \in \pi(Z(K_1))$.

По предложению 1.4.5 (пункты 7, 8)

$$\overline{K}_1 = K_1/Z(K_1) = L_1 \leftthreetimes \langle v\rangle,$$

где $L_1 \simeq L_2(p^{n_1})$ и $|v| = 2$. Так как все элементы нечетных порядков из $\overline{K}_1$ попадают в подгруппу L_1, то для некоторой инволюции $\bar{t} \in \overline{K}_1$, $\bar{b}^{\bar{t}} = \bar{b}^{-1}$. Здесь $\bar{b}$ – образ b при естественном гомоморфизме K_1 на $\overline{K}_1$. Это означает, что для некоторого 2-элемента $t \in K_1$, $b^t = b^{-1}z$, и $t^2 \in Z(G)$ (лемма 3.4.6), где $e \neq z \in Z(K_1)$ (лемма 3.4.7). Так как $r = |b| = |b^t| = |b^{-1}z|$, то $e = (b^{-1}z)^r = (b^r)^{-1}z^r = ez^r = z^r$. Пункт 2 доказан.

Положим $z = d$, зафиксируем t и подгруппу $(\langle d\rangle \times \langle b\rangle)$ из K_1. Ясно, что $t \in N(\langle d\rangle \times \langle b\rangle)$, $d^t = d$ и $b^t = b^{-1}a$.

3. В K найдется инволюция v такая, что конечная группа $\langle d, b, v\rangle \leq K_3 \in \Im(\langle d, b, v\rangle)$ и $d \notin Z(K_3)$.

Так как $b \in Z(\langle d, b, v\rangle)$, то для любой инволюции $v \in K$ $\langle d, b, v\rangle$ — конечная группа, и по условию насыщенности

$$\langle d, b, v\rangle \leq K_3 \in \Im(\langle d, b, v\rangle).$$

Предположим теперь, что для любой инволюции $v \in K$, $d \in Z(K_3)$. Так как $K = \langle v | v \in K, v^2 = e\rangle$, то $d \in C_G(K)$. Здесь может быть две взаимно исключающие возможности: либо $d \in K$, либо $d \notin K$. В первом случае $d \in Z(K)$ и по предложению 1.4.5(пункт 2) $\langle d\rangle = \langle b\rangle$, что невозможно. Во втором случае мы имеем конечную подгруппу $\langle d\rangle \times K$ и по условию насыщенности

$$(\langle d\rangle \times (\langle b\rangle \times \langle c\rangle) \leftthreetimes \langle w\rangle) \leq K_4 \simeq GL_2(p_1^m),$$

где p_1 – нечетное простое число, $\langle b\rangle \times \langle c\rangle$ – подгруппа порядка r^2 из K, а w – сплетающая инволюция из $N_K(\langle b\rangle \times \langle c\rangle)$. Но, с другой стороны, $p_1 \neq r$ и в K_4 нет элементарно абелевых подгрупп порядка r^3 (предложение 1.4.5, пункты 1, 4). Противоречие. Итак, требуемая инволюция v найдется. Пункт 3 доказан.

Завершим доказательство леммы. Так как $\langle d\rangle \times \langle b\rangle \leq K_3$ и $|\langle d\rangle \times \langle b\rangle| = r^2$, то по предложению 1.4.5 (пункт 4) $(\langle d\rangle \times \langle b\rangle) \cap Z(K_3) = \langle z\rangle \neq e$. Ясно, что $\langle d\rangle \times \langle b\rangle = \langle d\rangle \times \langle z\rangle$.

Так как $a \notin Z(K_3)$, то в фактор-группе $\overline{K}_3 = K_3/Z(K_3)$ найдется такая инволюция $\overline{t_1}$, что $\overline{d}^{\overline{t_1}} = \overline{d}^{-1}$.

Следовательно, в K_3 найдется 2-элемент t_1 такой, что $d^{t_1} = d^{-1}z_1$ По лемме 3.4.6 $t_1^2 \in Z(G)$ и по лемме 3.4.7 $z_1 \neq 1$. Ясно также, что $z_1 \in \langle z \rangle$. Следовательно, $t_1 \in N(\langle d \rangle \times \langle z \rangle)$. Поскольку $(\langle d \rangle \times \langle z \rangle) = (\langle d \rangle \times \langle b \rangle)$, то $t_1 \in N(\langle d \rangle \times \langle b \rangle)$. Итак, мы имеем 2-элементы t и t_1 из $N(\langle d \rangle \times \langle b \rangle)$, нетривиально действующие на $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$, такие, что $d^t = d$, $d^{t_1} = d^{-1}z_1 \neq d$ и t^2, $t_1^2 \in Z(G)$. Так как фактор-группа $\langle (\langle d \rangle \times \langle b \rangle), t_1, t \rangle / \langle (\langle d \rangle \times \langle b \rangle),\ t_1^2, t^2 \rangle = \langle \overline{t_1}, \overline{t} \rangle$ порождается двумя инволюциями $\overline{t_1}$ и $\overline{t}$, то она конечна.

Следовательно, $\langle (\langle d \rangle \times \langle b \rangle), t_1, t \rangle = M$ – также конечная группа. По условию насыщенности $M \leq K_5 \in \Im(M)$. Так как $t_1, t_2 \in \{N_{K_5}(\langle d \rangle \times \langle b \rangle) \backslash C_{K_5}(\langle d \rangle \times \langle b \rangle)\}$, то из предложения 1.4.5 (пункт 4) получаем, что для некоторого $x \in C_{K_5}((\langle d \rangle \times \langle b \rangle)), xt = t_1$ и $d \neq d^{-1}z_1 = d^{t_1} = d^{xt} = d^t = d$. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.4.9. *Пусть $b \in Z(K)$, где $K \in \Im(1)$ и $|b|$ – нечетное число, тогда $b \in Z(G)$.*

Доказательство. В силу леммы 3.4.8 и индукции будем считать, что $|b| = r^n$, где r — простое число, $n > 1$ и $b^r \in Z(G)$. В этом случае группа $\langle b, b^g \rangle$ конечна для любого $g \in G$. По условию насыщенности $\langle b, b^g \rangle \leq K_{(1,g)}$ и $K_{(1,g)} \simeq GL_2(p_1^m)$ для некоторого нечетного простого p_1.

1. Существует такой $g \in G$, что $bb^g \neq b^g b$.

Действительно, если для любого $g \in G$ $bb^g = b^g b$, то $b^G = \langle b^g | g \in G \rangle$ – абелева нормальная подгруппа в G. Следовательно, $\langle b, g \rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности $\langle b, g \rangle \leq K_2 \in \Im(\langle b, g \rangle)$. Следовательно, $b^{K_2} = \langle b^x | x \in K_2 \rangle$ – нормальная r-подгруппа в K_2. По предложению 1.4.5 (пункт 2) $b^{K_2} \subset Z(K_2)$, в частности $b \in Z(K_2)$, значит, $b^g = b$. Противоречие с выбором g. Пункт 1 доказан.

Зафиксируем группу $K_1 = K_{(1,g)}$.

2. $r^n || Z(K_1)|$.

По предложению 1.4.5 (пункт 2)

$$\overline{K}_1 = K_1/Z(K_1) = L_2 \leftthreetimes \langle v \rangle,$$

где $L_1 \simeq L_2(p^{n_1})$ и $|v| = 2$. Так как все элементы нечетных порядков из $\overline{K}_1$ попадают в подгруппу L_1, то для некоторой инволюции $\bar{t} \in \overline{K_1}$, $\bar{b}^{\bar{t}} = \bar{b}^{-1}$. Здесь $\bar{b}$ – образ b при естественном гомоморфизме K_1 на $\overline{K}_1$. Это означает, что для некоторого 2-элемента $t \in K_1$, $b^t = b^{-1}z$, и $t^2 \in Z(G)$, где $e \neq z \in Z(K_1)$. Так как $r^n = |b| = |b^t| = |b^{-1}z|$, то $e = (b^{-1}z)^{r^n} = (b^{r^n})^{-1}z^{r^n} = ez^{r^n} = z^{r^n}$. То, что $z^{r^{n-1}} \neq e$, вытекает из леммы 3.4.7. Пункт 2 доказан.

Пусть z — из пункта 2. Положим $z = d$, зафиксируем t и подгруппу $(\langle d \rangle \langle b \rangle)$ из K_1. Ясно, что $t \in N(\langle d \rangle \langle b \rangle)$ и $\langle b^r \rangle = \langle d^r \rangle$ (индуктивное предположение относительно b и предложение 1.4.5 (пункт 2)).

3. Структура $\langle d \rangle \langle b \rangle$ следующая:

3.1. $\langle d \rangle \langle b \rangle = \langle d \rangle \times \langle b_1 \rangle$.

3.2. $b_1 = bd^{-k}$, где $b^r = d^{rk}$ и $(k, r) = 1$.

3.3. $|b_1| = r$.

3.4. $b_1^t = b_1^{-1} d^{1-2k}$.

3.5. $d^t = d$.

3.6. $b^t = b^{-1}d$.

3.6. $b = d^{(r^n-1)/2}\ b_1$.

Непосредственные вычисления.

4. В K найдется инволюция v такая, что конечная группа $\langle d,b,v\rangle \leq K_3 \in \Im(\langle d,b,v\rangle)$ и $d \notin Z(K_3)$.

Так как $b \in Z(\langle d,b,v\rangle)$, то для любой инволюции $v \in K$ $\langle d,b,v\rangle$ — конечная группа (предложение 1.3.3), и по условию насыщенности

$$\langle d,b,v\rangle \leq K_3 \in \Im(\langle d,b,v\rangle).$$

Предположим теперь, что для любой инволюции $v \in K$, $d \in Z(K_3)$. Так как $K = \langle v | v \in K, v^2 = 1\rangle$, то $d \in C_G(K)$. Здесь может быть две взаимно исключающие возможности: либо $d \in K$, либо $d \notin K$. В первом случае $d \in Z(K)$ и по предложению 1.4.5 (пункт 2) $\langle a\rangle = \langle b\rangle$, что невозможно. Во втором случае мы имеем конечную подгруппу $\langle d\rangle K$ и по условию насыщенности

$$(\langle d\rangle(\langle b\rangle \times \langle c\rangle) \leftthreetimes \langle w\rangle) \leq K_4 \simeq GL_2(p_1^m),$$

где p_1 – нечетное простое число, $\langle b\rangle \times \langle c\rangle$ — подгруппа порядка $(r^n)^2$ из K, а w – сплетающая инволюция из $N_K(\langle b\rangle \times \langle c\rangle)$. Но тогда $p_1 \neq r$, и в K_3 нет элементарных абелевых подгрупп порядка r^3 (предложение 1.4.5 (пункты 1, 4)). С другой стороны, по пункту 3, группа $\langle d\rangle\langle b\rangle$ содержит нециклическую абелеву подгруппу порядка r^2, поэтому K_4 содержит элементарную абелеву подгруппу порядка r^3. Противоречие, которое указывает на то, что требуемая инволюция v найдется. Пункт 4 доказан.

Завершим доказательство леммы. Так как $\langle d\rangle\langle b\rangle \leq K_3$ и $\langle d\rangle\langle b\rangle = \langle d\rangle \times \langle b_1\rangle$ (смотри пункт 3 настоящей леммы), то по предложению 1.4.5 (пункт 4) $((\langle d\rangle\langle b\rangle) \cap Z(K_3) \neq 1)$. Пусть z — элемент порядка r из указанного пересечения. Так как $b_1 \notin Z(K_3)$, следовательно, $\langle z\rangle \times \langle b_1\rangle$ – подгруппа порядка r^2 из K_3. Из того факта, что $d \notin Z(K_3)$, и предложения 1.4.5 (пункт 4) вытекает, что в $N_{K_3}(\langle z\rangle \times \langle b_1\rangle)$ найдется инволюция t_1 такая, что $d^{t_1} \neq d$. Следовательно, $d^{t_1} = d^{-1}z_1$, где z_1 – элемент порядка r^n из $Z(K_3)$. Меньший порядок элемент z_1 иметь не может в силу леммы 3.4.7, так как $\langle d^r\rangle = \langle b^r\rangle$, а $\langle b^r\rangle \subset Z(G)$ по индуктивному предположению. Ясно также, что $z \in \langle z_1\rangle$, $t_1 \in N(\langle d\rangle\langle z_1\rangle)$ и $\langle z_1^r\rangle = \langle d^r\rangle = \langle b^r\rangle$.

Если $\langle z_1\rangle = \langle b\rangle$, то $(\langle d\rangle\langle z_1\rangle) = (\langle d\rangle\langle b\rangle)$, и $t_1 \in N(\langle d\rangle\langle b\rangle)$. Итак, мы имеем 2-элемент t ($t^2 \in Z(G)$) и инволюцию t_1 из $N(\langle d\rangle\langle b\rangle)$, нетривиально действующие на $(\langle d\rangle\langle b\rangle)$ такие, что $d^t = d$, $d^{t_1} = d^{-1}z_1 \neq d$. Так как фактор-группа $\langle((\langle d\rangle\langle b\rangle), t_1, t\rangle/\langle((\langle a\rangle\langle b\rangle)\rangle = \langle\overline{t_1}, \bar{t}\rangle$ порождается двумя инволюциями $\overline{t_1}$ и $\bar{t}$, то она конечна. Следовательно, $\langle((\langle d\rangle\langle b\rangle), t_1, t\rangle = M$ — также конечная группа. По условию насыщенности $M \leq K_5 \in \Im(M)$. Из предложения 1.4.5 (пункт 4) получаем, что $t_1, t \in \{N_{K_5}(\langle a\rangle\langle b\rangle) \backslash C_{K_5}(\langle d\rangle\langle b\rangle)\}$, и для некоторого $x \in C_{K_5}(\langle d\rangle\langle b\rangle) xt = t_1$ и $d \neq d^{-1}z_1 = d^{t_1} = d^{xt} = d^t = d$. Противоречие.

Если $\langle z_1\rangle \neq \langle b\rangle$, то из того факта, что $\langle d,b,t_1\rangle \leq N_{K_2}(\langle z\rangle \times \langle b_1\rangle)$ и предложения 1.4.5(пункт 4) вытекает, что $b^{t_1} = b^{-1}z_2$, где $\langle z_1\rangle = \langle z_2\rangle$. В этом случае $\langle b\rangle\langle z_1\rangle = \langle z_1\rangle \times \langle b_2\rangle$, $\langle d\rangle\langle z_1\rangle = \langle z_1\rangle \times \langle d_2\rangle$, где b_2, d_2 – элементы порядка r из $N_{K_2}(\langle z\rangle \times \langle b_1\rangle)$ (пункт 3 настоящей леммы). Так как $z \in \langle z_1\rangle$, то $\langle z\rangle \times \langle b_2\rangle = \langle z\rangle \times \langle d_2\rangle$, поэтому $\langle z_1\rangle\langle b\rangle = \langle z_1\rangle\langle d\rangle$. Отсюда немедленно вытекает, что $\langle d\rangle\langle b\rangle \leq \langle z_1\rangle\langle b\rangle$. Так как $\langle d\rangle\langle b\rangle = \langle b\rangle \times \langle b_1\rangle$, то $|\langle d\rangle\langle b\rangle| = |\langle z_1\rangle\langle b\rangle|$. Следовательно, $\langle b\rangle\langle d\rangle = \langle z_1\rangle\langle b\rangle = \langle z_1\rangle\langle d\rangle$ и $t_1 \in N_{K_3}(\langle a\rangle\langle b\rangle$. Таким образом, инволюции t, t_1 опять попадают в $N_G(\langle d\rangle\langle b\rangle)$ и, как было показано выше, $d^t = d$, $d^{t_1} = d^{-1}z_1 \neq d$. Далее, дословно повторяя завершающие рассуждения из случая $\langle z_1\rangle = \langle b\rangle$, приходим к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 3.4.10. $Z(G)$ – *локально-циклическая группа.*

Доказательство. Пусть $\langle z_1, ..., z_n \rangle$ – подгруппа из $Z(G)$, порожденная конечным набором элементов. По условию насыщенности $\langle z_1, ..., z_n, \rangle \leq L \in \Im(1)$. По предложению 1.4.5 (пункт 2) $\langle z_1, ..., z_n \rangle$ – циклическая группа из $Z(L)$.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. По лемме 3.4.10 $Z(G)$ – локально-циклическая группа. Очевидно, фактор-группа $\overline{G} = G/Z(G)$ – периодическая группа. Покажем, что $\overline{G}$ насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$. Пусть $\overline{H}$ – конечная подгруппа из $\overline{G}$, и H – некоторый ее конечный прообраз в G. По условию теоремы $H \leq M < G$, $M \in \Im(1)$ и $M \simeq GL_2(q^n)$, где q — простое нечетное число (лемма 3.4.3). По леммам 3.4.6,3.4.9 $Z(M) \leq Z(G)$. Переходя к $\overline{G}$, получим

$$\overline{K} \leq \overline{M} \simeq MZ(G)/Z(G) \simeq M/(M \cap Z(G)) \simeq M/Z(M) \simeq PGL_2(q^n).$$

По теореме 3.3.1 $\overline{G}$ — локально конечная группа. По теореме Шмидта (предложение 1.2.3) G – локально конечная группа, и по теореме 3.1.1 $G \simeq GL_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле.

Теорема доказана.

Глава 4

Группы, насыщенные унитарными и линейными группами степени 3

4.1 Группы Шункова, насыщенные группами $U_3(p^n)$

Пусть $\mathfrak{M} = \{U_3(q)\}$, где $q = p^n$. Отметим, что ни характеристика поля p, ни натуральное n не фиксируется.

Теорема 4.1.1. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$, тогда силовская 2-подгруппа S группы G одного из следующих видов :*
1. $S = \langle a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1} \rangle$ *— полудиэдральная группа.*
2. $S = \langle a, w | a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = 1, a^w = b, ab = ba \rangle$ *— сплетенная группа.*
3. *S изоморфна силовской 2-подгруппе $U_3(2^n)$.*
4. *S — бесконечная 2-группа периода 4, ступени нильпотентности 2.*
5. *$S = (A \times B) \leftthreetimes \langle w \rangle)$, где A — бесконечная локально циклическая 2-группа, $w^2 = 1$ и $A^w = B$.*
6. *$S = AD$, где D — конечная подгруппа группы S, не содержащая сплетенных подгрупп порядка больше 8, A — бесконечная локально циклическая 2-группа.*

Доказательство.

Лемма 4.1.2. *Если в G некоторая S конечна, то S — одна из видов 1, 2, 3 утверждения теоремы.*

Доказательство. Действительно, это так, ввиду предложений 1.3.6, 1.4.8 (пункты 6, 7), 1.4.7.

Лемма доказана.

В дальнейшем считаем, что S — бесконечная группа.

Лемма 4.1.3. *Если S не содержит полных подгрупп, то S — вида 4 из условия теоремы.*

Доказательство. По предложению 1.2.10 S содержит подгруппу $D = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, где $x^2 = y^2 = z^2 = 1$. В силу предложения 1.2.9 D вложена в бесконечную локально-конечную подгруппу I группы S. Будем считать I максимальной в указанном смысле. Если I содержит элемент порядка 8, то $\langle D, b \rangle$ — конечная 2-группа, которая по условию насыщенности является подгруппой группы S_1, где S_1 — одна из следующих групп (предложения 1.4.8, 1.4.7): группа полудиэдра, S_1 — сплетенная 2-группа. Но в обоих этих случаях S_1 не может содержать подгруппу D. Итак, I не содержит элементов порядка 8, и, следовательно, она 2-группа периода не более 4, и все инволюции из I лежат в центре I.

Если $S = I$, то все доказано. Предположим, что $x \in S \setminus I \neq \varnothing$. Покажем, что x можно выбрать так, что $xz = zx$ для некоторой инволюции $z \in I$.

Если $|x| = 2$, то группа $\langle x, z\rangle$ конечна для любой инволюции z из I. Пусть t — инволюция из $Z(\langle x, z\rangle)$. Если $t \in I$, то положим $z = t$. Если $t \notin I$, то положим $x = t$. Подгруппа $\langle z\rangle \times \langle x\rangle = K_1$, очевидно, не лежит в I и $K_1 \cap I = \langle z\rangle$. Возьмем в I инволюцию $t \neq z$. Ясно, что $tz = zt$.

Рассмотрим конечную подгруппу $\langle z, x, t\rangle$. Данная подгруппа, очевидно, не лежит в I, и

$$(\langle x\rangle \times \langle t\rangle) \leq \langle z, x, t\rangle \cap I.$$

В силу предложения 1.2.9 в $\langle z, x, t\rangle$ существует элемент v такой, что $v \in N_S(\langle z\rangle \times \langle t\rangle) \setminus I$ и $v^2 \in I$. Тогда группа $K_2 = \langle v, z, x, t, t_1\rangle$, где $t_1 \in I \setminus (\langle z\rangle \times \langle t\rangle)$ — конечная 2-группа.

По условию насыщенности $K_2 \leq R \in \mathfrak{M}(1)$. Так как K_2 содержит подгруппу $\langle t\rangle \times \langle t_1\rangle \times \langle t\rangle$, то из структуры $\mathfrak{M}$ вытекает, что $R \simeq U_3(2^n)$, и K_2 — 2-группа периода не более 4. В силу произвольности выбора t_1 из I получим, что x перестановочен с любой инволюцией из I. Таким образом, $I\langle x\rangle$ — локально конечная 2-подгруппа в S — периода не более 4, что противоречит максимальности I в S в указанном смысле.

Пусть $|x| = 4$. Возьмем $x_1 = x^2$. По доказанному выше $x_1 \in I$. Теперь, дословно повторяя рассуждения для случая $|x| = 2$, получим, что $\langle x\rangle I$ — локально конечная 2-подгруппа в S. Противоречие с тем, что $x \notin I$.

Лемма доказана.

В дальнейшем будем считать, что S содержит полные подгруппы, и пусть $\tilde{S}$ – максимальная полная абелева подгруппа из S.

Лемма 4.1.4. *Если ранг $\tilde{S} \geq 2$, то S — группа вида 5 из условия теоремы.*

Доказательство. Несложно видеть, что в этом случае ранг $\tilde{S}$ равен 2 (смотри доказательство леммы 4.1.3), $\tilde{S} = A \times B$, где A, B — локально циклические группы и $\tilde{S}$ — характеристическая подгруппа в S (предложение 1.2.4). Возьмем в $\tilde{S}$ конечную подгруппу $R = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, где $a \in A, b \in B$, и $|a| = |b| > 2$. По условию насыщенности $R < K \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, $K \simeq U_3(p^n)$ и $p \neq 2$. Пусть S_k – силовская 2-подгруппа из K, содержащая R. По предложению 1.4.8 $S_K = (\langle c\rangle \times \langle\ d\rangle \leftthreetimes \langle w\rangle$ — сплетенная 2-группа, т. е. $|c| = |d| > 2$ и $c^w = d$. Ясно, что $R \subset (\langle c\rangle \times \langle d\rangle)$ и $R^w = R$. Возьмем в $\tilde{S} \setminus R$ элемент y со свойством $y^2 \in R$. Очевидно, такой элемент в силу структуры $\tilde{S}$ найдется. Ясно, что $y \in C_G(R)$. Следовательно, группа $\langle R, y, w\rangle$ конечна.

По условию насыщенности $\langle R, y, w\rangle \leq K_1 \in \mathfrak{M}(1)$ и $K_1 \simeq U_3(p_1^{n_1})$, где $p_1 \neq 2$. По предложению 1.4.8 $C_{K_1}(R)$ — абелева группа. Отсюда вытекает, что $\langle R, y^w, y\rangle$ — конечная абелева 2-группа. Пусть y_1 — другой элемент из $\tilde{S} \setminus R$ со свойством $y_1^2 \in R$ и $\langle y_1\rangle \neq \langle y\rangle$. Покажем, что $y_1 y = y y_1$. Действительно, $\langle R, y, y_1\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности $\langle R, y_1, y\rangle \leq K_2 \in \mathfrak{M}(1), K_2 \simeq U_3(p_2^{n_2})$, где $p_2 \neq 2$.

По предложению 1.4.8 $C_{K_2}(R)$ — абелева группа. Так как $\langle R, y_1, y\rangle \subseteq C_{K_2}(R)$, то $y_1 y = y y_1$, что и требовалось.

Пусть Y – множество элементов из $\tilde{S} \setminus R$ со свойством, что для любого $y \in Y, y^2 \in R$. Ясно, что Y — конечное множество. Из сказанного выше получаем, что $\langle Y, R\rangle$ — конечная абелева 2-группа из $C_G(R)$, а $\langle R, Y, Y^w, w\rangle$ — конечная 2-группа из $N_G(R)$. По условию насыщенности $\langle R, Y, Y^w, w\rangle \leq K_3 \in \mathfrak{M}(1), K_3 \simeq U_3(p_3^{n_3})$ и $p_3 \neq 2$. По предложению 1.4.8 $N_{K_3}(R) = (\langle d_1\rangle \times \langle d_2\rangle) \leftthreetimes \langle V\rangle, \langle d_1\rangle \times \langle d_2\rangle) = C_{K_3}(R)$, где V, d_1 и d_2 циклические группы нечетного порядка. Положим $R_1 = \tilde{S} \cap (\langle d_1\rangle \times \langle d_2\rangle)$. По построению $R \leq R_1 = (\langle v_1\rangle \times \langle u_1\rangle) \leq$

$A \times B$, где $v_1^w = u_1$. Действуя по описанному выше алгоритму, мы строим в $\tilde{S}$ цепочку подгрупп

$$R < R_1 < R_2 < \ldots < R_i < \ldots$$

со следующими свойствами: $R_i = (\langle u_i \rangle \times \langle v_i \rangle)$ и $v_i^w = u_i$. Очевидно, $\cup R_i = \tilde{S}$ и $w \in N(\tilde{S})$.

Осталось показать, что $\tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle = S$. Рассмотрим $N_G(S)/\tilde{S} = \overline{N}$. Очевидно, в $\overline{N}$ силовская 2-подгруппа конечна, значит, все силовские 2–подгруппы из $\overline{N}$ конечны и сопряжены (предложение 1.2.6), а силовские 2-подгруппы в N сопряжены. Поэтому с точностью до сопряженности можно считать, что $\tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle \leq S$. Докажем обратное включение. Из [10] (теорема 9.1.4.) и того факта, что S не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8, вытекает, что $C_S(\tilde{S}) = \tilde{S}$. По условию насыщенности и предложению 1.4.8 получаем, что для любого $y \in S$, $y^2 \in C_S(\tilde{S}) = \tilde{S}$. Тогда фактор-группа $S/\tilde{S}$ — элементарная абелева подгруппа ранга 1, поскольку в противном случае S содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 8, что невозможно. Поскольку $w \notin \tilde{S}$, то $S/\tilde{S} = \langle w\tilde{S} \rangle$, а $S \leq \tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle$.

Лемма доказана.

Лемма 4.1.5. *Если $D_n < S$, где $D_n = \langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle \leftthreetimes \langle w_n \rangle$ $|a_n| = |b_n| > 2, a_n^{w_n} = b_n$ и $w_n^2 = 1$, то S – вида 5 из условия теоремы.*

Доказательство. Если S содержит бесконечную цепочку

$$D_1 < D_2 < \ldots < D_n < \ldots,$$

то, очевидно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ насыщена конечными сплетенными 2–группами, по теореме 2.1.1 $\tilde{S}$ ранга 2, и по лемме 4.1.4 все доказано. Предположим, что бесконечных цепочек указанного выше вида в S нет. Тогда $\tilde{S}$ — квазициклическая группа, и, очевидно, $\tilde{S}$ — характеристическая подгруппа в S. Пусть D_n — максимальная сплетенная 2–группа из S. Тогда $S = \tilde{S}D_n$. Положим $(\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) = R_n$.

Пусть s – произвольный элемент из $\tilde{S} \setminus R_n$. Тогда $\langle R_n, s \rangle$ — конечная группа, и по условию насыщенности $\langle R_n, s \rangle \leq K \simeq U_3(p^n)$, где $p \neq 2$. По предложению **??** (пункты 1-4, 6) $s \in C_K(R_n)$. Следовательно, $sx = xs$ для любого $x \in C_K(R_n)$. Выберем $x \in C_K(R_n) \setminus S$ так, что $x^2 \in R_n$. Пусть $s_1 \in \tilde{S}$ и $s_1^2 = s$. По условию насыщенности конечная группа $\langle s_1, x, R_n \rangle \leq K_1 \simeq U_3(p_1^n)$ для некоторого нечетного простого p_1. Так как $\langle s_1, x, R_n \rangle \leq C_{K_1}(R_n)$, то по предложению 1.4.8 $s_1 x = x s_1$. Далее, используя индукцию, получим, что $\tilde{S} < C_G(x)$ и $\langle \tilde{S}, x \rangle$ — абелева группа. Следовательно, $\tilde{S}R_n\langle x \rangle$ – абелева 2-подгруппа, содержащая подгруппу $R_{n_1} = \langle a_{n_1} \rangle \times \langle b_{n_1} \rangle$ со свойством $R_n < R_{n_1}$. Действуя подобным образом, строим бесконечную цепочку вложенных друг в друга подгрупп

$$\tilde{S}R_n < \tilde{S}R_{n_1} < \ldots < \tilde{S}R_{n_k} < \ldots .$$

Пусть $\tilde{S}_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{S}R_{n_k}$. Несложно видеть, что $\tilde{S}_1$ – полная абелева группа ранга 2 и $w_n \in N_G(\tilde{S}_1)$.

Положим $S_1 = \tilde{S}_1 \leftthreetimes \langle w_n \rangle$. Тогда S_1 – группа вида 5 из условия теоремы и $S < S_1$. Противоречие с тем, что S силовская 2-подгруппа из G.

Лемма доказана.

Лемма 4.1.6. *Пусть S не содержит подгруппу $D_n = (\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) \leftthreetimes \langle w_n \rangle$ с условием $|a_n| = |b_n| > 2$. Тогда S — вида 6 из условия теоремы.*

Доказательство. По лемме 4.1.4 полная часть $\tilde{S}$ группы S — квазициклическая 2-группа. Положим $\tilde{S} = A$. Тогда S/A — конечная 2-группа, и пусть K – ее минимальный по порядку образ в S. Тогда $S = AK$, и K — конечная подгруппа группы S, не содержащая сплетенных подгрупп порядка больше 8.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Если S – конечная группа, то теорема доказана по лемме 4.1.2. Если S – бесконечная группа и содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 8, то теорема доказана по лемме 4.1.3. Если S не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8, то по предложению 1.2.10 S обладает нетривиальной полной частью $\tilde{S}$, и теорема доказана ввиду лемм 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6.

Теорема доказана.

Теорема 4.1.7. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной группе $U_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.*

Доказательство. Предположим обратное, пусть в дальнейшем G — контрпример.

Лемма 4.1.8. *G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Доказательство. Если G содержит конечное число элементов конечного порядка, то по предложению 1.2.1 $T(G)$ существует и является конечной группой. По условию насыщенности $T(G) \simeq U_3(q)$. Противоречие с выбором G. Следовательно, G содержит бесконечно много элементов конечного порядка. По предложению 1.3.4 G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.

Лемма доказана.

Лемма 4.1.9. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$, тогда силовская 2-подгруппа S группы G одного из следующих видов :*

1. $S = \langle a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1}\rangle$ — *полудиэдральная группа.*
2. $S = \langle a, w | a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = 1, a^w = b, ab = ba\rangle$ — *сплетенная группа.*
3. *S изоморфна силовской 2-подгруппе $U_3(2^n)$.*
4. *S — бесконечная 2-группа периода 4, ступени нильпотентности 2.*
5. *$S = (A \times B) \leftthreetimes \langle w\rangle)$, где A — бесконечная локально-циклическая 2-группа, $w^2 = 1$, и $A^w = B$.*
6. *$S = AD$, где D — конечная подгруппа группы S, не содержащая сплетенных подгрупп порядка больше 8, A — бесконечная локально циклическая 2-группа.*

Доказательство. Используем схему доказательства теоремы 4.1.1 и предложение 1.2.8.

Лемма доказана.

Лемма 4.1.10. *Для $\mathfrak{M}(1)$ возможны только следующие взаимоисключающие ситуации :*

(A) $\mathfrak{M}(1) \leq \{U_3(q) | q$ - четно$\}$;

(B) $\mathfrak{M}(1) \leq \{U_3(q) | q$ - нечетно $\}$.

Доказательство. Пусть подгруппы S и T из G выбраны так, что S – силовская 2-подгруппа в $U < G$, T – силовская 2-подгруппа в $V < G$, $U \simeq U_3(2^n)$, $V \simeq U_3(q)$, q нечетно. Если силовская 2-подгруппа из G конечна, то по предложению 1.2.8 можно считать, что S и T лежат в некоторой силовской 2-подгруппе W группы G, и W — одного из видов 1, 2, 3 леммы 4.1.9. Как нетрудно видеть, это невозможно (предложения 1.4.8, 1.4.7). Пусть теперь G имеет бесконечную силовскую 2-подгруппу. Обозначим через S_1 силовскую 2-подгруппу из G, содержащую S. Тогда S_1 — вида 4 из леммы 4.1.9. Обозначим через T_1

силовскую 2-подгруппу из G, содержащую T. Тогда T_1 — вида 5 из леммы 4.1.9 (поскольку T_1 содержит элемент порядка 8). Без ограничения общности можно считать (предложение 1.3.7), что $|S_1 \cap T_1| > m$, где m — произвольное наперед заданное натуральное число. Нетрудно видеть, что эта ситуация невозможна (предложение 1.4.8).

Лемма доказана.

Отметим, что в ситуации (A) теорема доказана по предложеию 1.3.12. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что имеет место только ситуация (B).

Лемма 4.1.11. *Пусть $F < G$, $F = \langle s_1 \rangle \times \langle s_2 \rangle$ и $|s_1| = |s_2| = 2$. Тогда $T(N_G(\langle F \rangle)) = T(C_G(F) \leftthreetimes V^{(0)}$, где $T(C_G(F)) = C_1 \times C_2$, C_1, C_2 — бесконечные локально циклические группы, и $V^{(0)}$ изоморфна группе V из предложения* 1.4.8.

Доказательство. Пусть R из $C_G(F)$, и R – конечная группа. По условию теоремы конечная группа $\langle F, R \rangle < W \in \mathfrak{M}(1)$. Значит, $R \in C_W(F)$ и R — абелева группа (предложение 1.4.8). По лемме 4.1.8 и предложению 1.3.5 $T(C_G(F))$ существует и является бесконечной абелевой группой. Пусть теперь $F < U^{(1)} \in \mathfrak{M}(1)$. По предложению 1.4.8 $C_{U^{(1)}}(F) = D_1^{(1)} \times D_2^{(1)}$, $N_{U^{(1)}}(F) = C_{U^{(1)}}(F) \leftthreetimes V^{(1)}$, где $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, V^{(1)}$ изоморфны D_1, D_2, V из данного предложения. Поскольку порядок любой конечной подгруппы из $N_G(F)/T(C_G(F))$ не превосходит 6 (предложение 1.4.8), то $T(N_G(F)) = T(C_G(F)) \leftthreetimes V^{(1)}$ (предложение 1.2.1, 1.3.9).

По предложению 1.3.5 $T(C_G(F)) = C_1 \times C_2$, где C_1 и C_2 — бесконечные локально циклические группы. Возьмем в качестве $V^{(0)}$ группу $V^{(1)}$.

Лемма доказана.

До конца доказательства сохраним обозначения из леммы 4.1.11.

Лемма 4.1.12. *В G существует подгруппа $U \simeq U_3(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q нечетной характеристики.*

Доказательство. Из условия насыщенности и леммы 4.1.11 вытекает существование в G последовательности групп

$$U^{(1)}, U^{(2)}, \cdots U^{(n)}, \cdots$$

со следующими свойсвами:

1. $U^{(n)} \in \mathfrak{M}(1)$ для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$.
2. $N_{U^{(1)}}(F) < N_{U^{(2)}}(F) < \cdots < N_{U^{(n)}}(F) < \ldots$.
3. $T(N_G(F)) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{U^{(n)}}(F)$.

Пусть w – инволюция из $V^{(0)}$, $F_1 = \langle w \rangle \times \langle z \rangle$, где z – инволюция из центра силовской 2-подгруппы в $T(N_G(F))$. По лемме 4.1.11 и предложению 1.4.8 $N_{U^{(n)}}(F_1) < T(N_G(F_1))$ для любого n. Более того

$$N_{U^{(1)}}(F_1) < N_{U^{(2)}}(F_1) < \cdots < N_{U^{(n)}}(F_1) < \ldots.$$

Так как $U^{(n)} = \langle N_{U^{(n)}}(F), N_{U^{(n)}}(F_1) \rangle$ (предложение 1.4.8), то

$$U^{(1)} < U^{(2)} < \cdots < U^{(n)} < \cdots$$

Тогда $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^{(n)} \simeq U_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q нечетной характеристики (предложение 1.2.16).

Лемма доказана.

Покажем теперь, что $T(G) = U$. Предположим обратное, пусть $x \in G \setminus U$ и $x^2 = e$. Возьмем инволюцию $y \in U$. По условию насыщенности конечная группа $\langle x, y\rangle < U_1 \in \mathfrak{M}(1)$. Ясно, что $U_1 \not< U$, поскольку U_1 содержит x. Возьмем инволюцию $y_1 \in U_1 \cap U$, такую, что $\langle y_1\rangle \times \langle y\rangle = F_2$. По лемме 4.1.11 и предложению 1.4.8 $N_{U_1}(F_2) < N_U(F_2)$ и $N_{U_1}(F_2) = (D_1^{(2)} \times D_2^{(2)}) \leftthreetimes V^{(2)}$, где $D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, V^{(2)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}$ — циклические, а $V^{(2)}$ изоморфна группе V из предложения 1.4.8.

Пусть $w^{(2)}$ — инволюция из $V^{(2)}$, а $z^{(1)}$ — инволюция из центра силовской 2-подгруппы в $N_{U_1}(F_2)$. Положим $F_3 = \langle w^{(2)}\rangle \times \langle z^{(1)}\rangle$. По лемме 4.1.11 и предложению 1.4.8 $N_{U_1}(F_3) < N_U(F_3)$ и $N_{U_1}(F_3) = (D_1^{(3)} \times D_2^{(3)}) \leftthreetimes V^{(3)}$, где $D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$ — циклические, а $V^{(3)}$ изоморфны группе V из предложения 1.4.8 . По предложению 1.4.8 $U_1 = \langle N_{U_1}(F_2), N_{U_1}(F_3)\rangle \subset U$ (лемма 4.1.11), и мы получаем противоречие с выбором x.

Если такого y_1 в $U_1 \cap U$ не найдется, то возьмем инволюции z_1 и z_2, такие, что $z_1 \in (U_1 \setminus U) \cap C_U(y)$, а $z_2 \in G(U \setminus U_1) \cap C_U(y)$. По условию насыщенности конечная группа $\langle y, z_1, z_2\rangle < U_2 \in \mathfrak{M}(1)$. Ясно, что $U_2 \not< U$, поскольку U содержит z_1. Если теперь для U_2 повторить приведенные выше рассуждения для U_1, то получим включение $U_2 < U$. Противоречие.

Теорема доказана.

4.2 Группы Шункова, насыщенные унитарными и линейными группами степени 3 над конечными полями нечетной характеристики

Пусть $\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q)\}$, где $q = p^n$ — нечетное число. Отметим, что ни характеристика поля p, ни натуральное n не фиксируется.

Теорема 4.2.1. . *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, и пусть G – контрпример.

Лемма 4.2.2. . *G содержит бесконечно много элементов конечного порядка.*

Доказательство. Действительно, в противном случае, по предложению 1.2.1, мы получим, что все элементы конечных порядков образуют конечную подгруппу $T(G)$, которая по условию насыщенности изоморфна одной из групп множества $\mathfrak{M}(1)$, и утверждение теоремы имеет место. Противоречие с выбором G.

Лемма доказана.

Лемма 4.2.3. . *$\mathfrak{M}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных групп.*

Доказательство. По предложению 1.3.4 и лемме 4.2.2 G содержит бесконечную локально конечную подгруппу. Последнее означает , что порядки групп из множества $\mathfrak{M}(1)$ не ограничены в совокупности, т. е. $\mathfrak{M}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных подгрупп.

Лемма доказана.

Лемма 4.2.4. *Все инволюции в G сопряжены. Все четверные подгруппы в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y – две различные инволюции из G. Так как G – группа Шункова, то $\langle x, y\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности $\langle x, y\rangle < K \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, $K \tilde{\in} \{U_3(q), L_3(q)\}$. По предложению 1.4.8 x, y сопряжены в K. Поскольку $K < G$, то x, y сопряжены в G.

Пусть A, B – две различные четверные подгруппы из G. По доказаному выше все инволюции из G сопряжены. Следовательно, для некоторого $g \in G$, $A \cap B^g \neq e$. Если $A = B^g$, то все доказано. Пусть $A \neq B^g$. Но тогда фактор-группа $\langle A, B^g\rangle/(A \cap B^g)$ – конечная группа, как подгруппа группы Шункова, порожденная двумя инволюциями (предложение 1.3.3). Следовательно, $\langle A, B^g\rangle$ – также конечная группа. По условию насыщенности и лемме 4.2.2 $\langle A, B^g\rangle < K \in \mathfrak{A}(1)$. Следовательно, $K \tilde{\in} \{U_3(q), L_3(q)\}$. По предложению 1.4.8 группы A, B^g сопряжены в K. Поскольку $K < G$, то A, B^g сопряжены в G. Очевидно, в этом случае A, B также сопряжены в G.

Лемма доказана.

По лемме 4.2.3 в $\mathfrak{M}(1)$ найдется группа, изоморфная $U_3(q)$, где $q > 5$ и нечетно, или $L_3(q)$, где $q > 3$ и нечетно. Отождествим указанную группу с L из предложения 1.4.8 и будем использовать обозначения этого предложениия: i, j, w, b, A, V, B. Пусть $N = N_G(A)$, $C_A = C_G(A)$, $C_B = C_G(B)$.

Лемма 4.2.5. $N = C_A \leftthreetimes V$.

Доказательство. Очевидно, $C_A \leftthreetimes V < N$. Докажем обратное включение. Пусть $g \in N$. Тогда для некоторого $v \in V, A^g = A^v$ и $a^g = a^v$ для любого $a \in A$. Следовательно, $a^{gv^{-1}} = a, gv^{-1} = c \in C_A, g = cv \in C_A \leftthreetimes V$.

Лемма доказана.

Лемма 4.2.6. *C_A обладает периодической частью $T(C_A)$, которая является бесконечной абелевой счетной группой ранга* 2.

Доказательство. Пусть K — конечная подгруппа из C_A. По условию насыщенности $K < R \tilde{\in} \{L_3(q), U_3(q)\}$. По предложению 1.4.8 $C_R(A)$ – абелева группа ранга 2, следовательно, K – абелева группа ранга не более 2. В силу произвольности выбора K, как конечной подгруппы из C_A, получаем, что все конечные подгруппы из C_A абелевы ранга не более 2. По предложению 1.3.5 C_A обладает периодической частью $T(C_A)$, которая является бесконечной (леммы 4.2.3, 4.2.4) абелевой группой ранга 2 и является счетной.

Лемма доказана.

Лемма 4.2.7. *N обладает периодической частью $T(N) = T(C_A) \leftthreetimes V$.*

Доказательство. Так как $T(C_A)$ — характеристическая подгруппа в C_A, то по лемме 4.2.5 $T(C_A) \lhd N$. По лемме 4.2.6 и предложению 1.3.2 фактор-группа $\overline{N} = N/T(C_A)$ является группой Шункова. Покажем, что $\overline{V} \lhd \overline{N}$. Пусть $\overline{b}$ – элемент порядка 3 из $\overline{V}$. Тогда $\langle \overline{b}, \overline{b}^{\overline{g}}\rangle$ – конечная подгруппа для любого $\overline{g} \in \overline{N}$. Пусть K – некоторый ее конечный прообраз в N, содержащий конечную подгруппу $\langle b, b^g, A\rangle$. По условию насыщенности $\langle b, b^g, A\rangle < K < R \in \mathfrak{M}(1)$ и $R \tilde{\in} \{L_3(q), U_3(q)\}$. Ясно, что $b^g \in N_R(A) < N$. По предложению 1.4.8 $b^g = cb^k$, где $c \in C_R(A) < T(C_A)$, $1 \leqslant k \leqslant 2$. Следовательно, $\langle \overline{b}\rangle = \langle \overline{b}^{\overline{g}}\rangle$ и $(T(C_A) \leftthreetimes \langle b\rangle) \lhd N$. По предложениям 1.3.2, 1.3.1 $N/(T(C_A) \leftthreetimes \langle b\rangle)$ – группа Шункова, все конечные подгруппы которой имеют порядок 2 и совпадают с $\langle \overline{w}\rangle$, где $\overline{w} = w(T(C_A) \leftthreetimes \langle b\rangle)$. По предложению 1.2.3 $(T(C_A) \leftthreetimes V) = T(N)$.

Лемма доказана.

Лемма 4.2.8. *Если для любой конечной подгруппы K из $T(C_A)$ существует такая подгруппа R, что $K \subset R \in \mathfrak{M}(1)$ и*

$$R \tilde{\in} \{L_3(q), U_3(l) | (3, q-1) = 1, (3, l+1) = 1\},$$

то $T(C_A) = C \times C^w$, где C – локально циклическая группа.

Доказательство. Рассмотрим конечную подгруппу $K < T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle$. По условию насыщенности $\langle A, K, w \rangle < R \in \mathfrak{M}(1)$, где R из условия леммы. По предложению 1.4.8 $K < C_R(A) \leftthreetimes \langle w \rangle = (\langle c \rangle \times \langle c^w \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle$ – сплетение циклической группы $\langle c \rangle$ при помощи группы $\langle w \rangle$. В силу произвольности выбора K, как конечной подгруппы из $T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle$, получаем, что $T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle$ насыщена сплетениями конечных циклических групп при помощи группы порядка два. По теореме 2.1.12 $T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle = (C \times C^w) \leftthreetimes \langle w \rangle$ – сплетение бесконечной локально циклической группы C при помощи группы $\langle w \rangle$, $T(C_A) = C \times C^w$.

Лемма доказана.

Лемма 4.2.9. *Если в $T(C_A)$ существует конечная подгруппа K такая, что для любого R со свойством $K < R \in \mathfrak{M}(1)$ всегда*

$$R \tilde{\in} \{L_3(q), U_3(l) | (3, q-1) = 3, (3, l+1) = 3\},$$

то $T(C_A) = CC^w$, где C – бесконечная локально циклическая группа, и $C \cap C^w = \langle d \rangle$ – циклическая группа порядка 3 такая, что фактор-группа $T(C_A)/\langle d \rangle = C/\langle d \rangle \times C^w/\langle d \rangle$.

Доказательство. Пусть K – конечная подгруппа из условия леммы. По условию насыщенности $\langle A, K, w \rangle < R \in \mathfrak{M}(1)$. Из условия леммы и предложению 1.4.8 вытекает, что $C_R(A) \leftthreetimes \langle w \rangle = (\langle c \rangle \langle c^w \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle$, где $C_R(A) = (\langle c \rangle \langle c^w \rangle)$, $\langle c \rangle \cap \langle c^w \rangle = \langle d \rangle$ – циклическая подгруппа порядка 3, $d^w = d^{-1}$, и фактор-группа $C_R(A)/\langle d \rangle = \langle c \rangle / \langle d \rangle \times \langle c^w \rangle / \langle d \rangle$. Поскольку $T(C_A)$ – абелева группа (лемма 4.2.6), то $\langle d \rangle$ – нормальная подгруппа в $T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle$. Несложно видеть, что фактор-группа $(T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle)/\langle d \rangle$ насыщена сплетениями конечных циклических групп при помощи группы порядка 2. По теореме 2.1.12 $(T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle)/\langle d \rangle = (\overline{C} \times \overline{C}^{\overline{w}}) \leftthreetimes \overline{\langle w \rangle}$, где $\overline{C}$ – бесконечная локально циклическая группа. Следовательно, $T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle = (CC^w) \leftthreetimes \langle w \rangle$, где $T(C_A) = CC^w$, C – бесконечная локально циклическая группа, и $C \cap C^w = \langle d \rangle$.

Лемма доказана.

Лемма 4.2.10. *В G существует бесконечная последовательность групп*

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots$$

со следующими свойствами :

1. $A < M_n \in \mathfrak{M}(1)$ *для любого* $n = 1, 2, 3, \ldots$.
2. $N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A) < \cdots < N_{M_n}(A) < \ldots$.
3. $T(N) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$.

Доказательство. Так как $T(C_A)$ – счетная группа (лемма 4.2.6), то

$$C_G(A) = \{c_1, c_2, ..., c_m, ...\}.$$

По лемме 4.2.7 $T(N_A)$ — локально конечная группа. Следовательно, $\langle A, c_1, V \rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности $\langle A, c_1, V \rangle < M_1 \in \mathfrak{M}(1)$. По предложению 1.4.8

$$N_{M_1}(A) = D^{(1)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(1)} = C_{M_1}(A)$. Возьмем элемент $c_{m_1} \in \{T(C_A) \setminus C_{M_1}(A)\}$ с минимально возможным значением номера m_1. Поскольку $T(N)$ – локально конечная группа (лемма 4.2.8), то $\langle N_{M_1}(A), c_{m_1}\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle N_{M_1}(A), c_{m_1}\rangle < M_2 \in \mathfrak{M}(1).$$

По предложению 1.4.8

$$N_{M_2}(A) = D^{(2)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(2)} = C_{M_2}(A)$. Ясно, что $N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A)$.

Предположим, что для $n \geqslant 2$ группа $M_n \in \mathfrak{M}(1)$ построена. Возьмем элемент $c_{m_n} \in \{T(C_A) \setminus C_{M_n}(A)\}$ с минимально возможным значением номера m_n. По лемме 4.2.8 $T(N)$ – локально конечная группа. Следовательно, $\langle N_{M_n}(A), c_{m_n}\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle N_{M_n}(A), c_{m_n}\rangle < M_{n+1} \in \mathfrak{M}(1).$$

По предложению 1.4.8

$$N_{M_{n+1}}(A) = D^{(n+1)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(n+1)} = C_{M_{n+1}}(A)$. Ясно, что $N_{M_n}(A) < N_{M_{n+1}}(A)$. Действуя подобным образом, мы получаем последовательность

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots,$$

обладающую свойством 1 из условия леммы. По построению

$$N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A) < \cdots < N_{M_n}(A) < \ldots,$$

и свойство 2 также выполняется. Поскольку $c_m \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$ для любого m и $V < N_{M_n}(A)$ для любого n, то $T(N) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$, и свойство 3 доказано.

Лемма доказана.

Зафиксируем последовательность групп $\{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\}$ из леммы 4.2.10.

Лемма 4.2.11. *Пусть* $T(C_A)$ *из леммы* 4.2.8. *Тогда* :

1. *Для любой конечной подгруппы* $K = \langle f\rangle \times \langle g\rangle$ *из* $T(C_A)$ *такой, что* $|f| = |g| = m$, $K = H$, *где* $H = \langle r\rangle \times \langle r^w\rangle$ – *подгруппа из* $T(C_A)$, $r \in C$ *и* $|r| = m$.

2. *Без ограничения общности можно считать, что для любой*

$$M_k \in \{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\},$$
$$M_k \,\tilde{\in}\, \{L_3(q), U_3(l) | (3, q-1) = 1, (3, l+1) = 1\}.$$

Доказательство. 1. По лемме 4.2.8 $T(C_A) = C \times C^w$, где C – локально циклическая группа. Следовательно, $f = c_1c_2$ для некоторых $c_1 \in C$ и $c_2 \in C^w$, значит, $1 = f^m = c_1^m c_2^m$. Так как $C \cap C^w = e$, то $c_1^m = c_2^m = 1$, $c_1 \in \langle r\rangle, c_2 \in \langle r^w\rangle$ и $f \in H$. Точно также показывается, что $g \in H$. Так как $|H| = |K|$, то $H = K$. Положим $r = c_1$.

2. Дословное повторение рассуждений леммы 4.2.10 с учетом того факта, что M_n выбирается согласно условию леммы 4.2.8.

Лемма доказана.

Лемма 4.2.12. *Пусть* $T(C_A)$ *из леммы* 4.2.9. *Тогда* :

1. *Для любой конечной подгруппы $K = \langle f\rangle\langle g\rangle$ из $T(C_A)$ такой, что $|f| = |g| = m$ и $\langle d\rangle = \langle f\rangle \cap \langle g\rangle$, имеет место равенство $H = K$, где $H = \langle r\rangle\langle r^w\rangle$ – конечная подгруппа из $T(C_A)$, $r \in C$, $|r| = m$ и $\langle d\rangle = \langle r\rangle \cap \langle r^w\rangle$.*

2. *Без ограничения общности можно считать, что для любой*

$$M_k \in \{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\},$$

$$M_k \tilde{\in} \{L_3(q), U_3(l) | (3, q-1) = 3, (3, l+1) = 3\}.$$

Доказательство. 1. По лемме 4.2.9 $T(C_A) = CC^w$, где C — локально циклическая группа, фактор-группа $T(C_A)/\langle d\rangle = C/\langle d\rangle \times C^w/\langle d\rangle$ — прямое произведение двух изоморфных локально циклических групп. Так как $d \in H \cap K$, то $H/\langle d\rangle \simeq K/\langle d\rangle$. Далее, рассуждая как в предыдущей лемме, получаем, что $H/\langle d\rangle = K/\langle d\rangle$, значит, $H = K$.

2. Дословное повторение рассуждений леммы 4.2.10 с учетом того факта. что M_n выбирается согласно условию леммы 4.2.9.

Лемма доказана.

Лемма 4.2.13. *В G существует подгруппа M такая, что* :

1. *$M \tilde{\in} \{L_3(Q), U_3(Q)\}$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q нечетной характеристики.*

2. *$A < M$.*

3. *Для любой четверной подгруппы $F < M$, $N_G(F)$ обладает периодической частью $T(N_G(F)) = N_M(F)$.*

Доказательство. По построению $B = \langle w\rangle \times \langle j\rangle < M_n$ для любого n. Из лемм 4.2.4 – 4.2.7 вытекает, что для любого n, $N_{M_n}(B) < T(N_G(B)) = T(C_G(B)) \leftthreetimes V_1$, где V_1 изоморфна группе V. Покажем, что

$$C_{M_1}(B) < C_{M_2}(B) < \cdots < C_{M_n}(B) < \ldots .$$

Действительно, $C_{M_n}(A) < C_{M_{n+1}}(A) < T(C_G(A))$ для любого n. По лемме 4.2.4 $A^g = B$ для некоторого $g \in G$. Поскольку

$$(C_{M_n}(A))^g < (C_{M_{n+1}}(A))^g < (T(C_G(A)))^g,$$

$$(C_{M_n}(A))^g = C_{M_n^g}(A^g) = C_{M_n^g}(B),$$

$$(C_{M_{n+1}}(A))^g = C_{M_{n+1}^g}(A^g)) = C_{M_{n+1}^g}(B),$$

$$(T(C_G(A)))^g = T(C_{G^g}(A^g) = T(C_G(B)),$$

то

$$C_{M_n^g}(B) < C_{M_{n+1}^g}(B) < T(C_G(B)).$$

Так как $C_{M_n}(B) \simeq C_{M_n}(A) \simeq C_{M_n^g}(B)$ и $C_{M_n}(B) < T(C_G(B))$, то по леммам 4.2.11, 4.2.12 $C_{M_n}(B) = C_{M_n^g}(B)$ для любого n. Следовательно, $C_{M_n}(B) < C_{M_{n+1}}(B)$ для любого n, что и требовалось. В силу бесконечности последовательности $\{M_1, M_2, ...M_n, ...\}$ можно считать, что для любого n M_n не изоморфна ни одной из групп множества $\{U_3(5), L_3(3)\}$. Следовательно, $M_n = \langle N_{M_n}(A), C_{M_n}(B)\rangle$ (предложение 1.4.8 и с учетом леммы 4.2.10 (пункт 2)

$$M_1 < M_2 < \cdots < M_n < \cdots .$$

По предложению 1.2.16 $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \tilde{\in} \{L_3(Q), U_3(Q)\}$ для подходящего бесконечного локально-конечного поля Q нечетной характеристики, и пункт 1 доказан. Пункт 2 очевиден. Поскольку A и F сопряжены в M, то для некоторого $x \in M$, $A = F^x$ и $N_M(A) = N_M(F^x) = (N_M(F))^x$. Из равенства $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ и леммы 4.2.10 (свойство 3) получаем $N_M(A) = T(N)$. Следовательно, $T(N) = (N_M(F))^x$,

$$N_M(F) = T(N)^{x^{-1}} = \langle a^{x^{-1}} \mid a \in T(N) \rangle = T(N_G(F)),$$

поскольку любой элемент $t \in N_G(F)$ со свойством $|t| < \infty$ представим в виде $t = a^{x^{-1}}$ для некоторого $a \in T(N)$.

Лемма доказана.

Лемма 4.2.14. $M = T(G)$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует подгруппа $P \in \mathfrak{M}(1)$, не лежащая в M и содержащая j. Покажем, что P можно выбрать так, чтобы $P \cap M$ содержала четверную подгруппу. Действительно, в противном случае $i \notin P$, и в $C_P(j) \setminus M$ найдется инволюция $m \notin M$, и можно заменить P на подгруппу $P_1 \in \mathfrak{M}(1)$, содержащую $\langle i, j, m \rangle$. Не нарушая общности, можно считать, что P содержит A. По предложению 1.4.8, $N_P(A)$ содержит четверную подгруппу B, отличную от A. По лемме 4.2.13 (пункт 3) $B < N_P(B) < T(N_M(B)) < M$.

Таким образом, $S = \langle N_P(A), N_P(B) \rangle < M$, и поскольку $S \neq P$, то $P \simeq U_3(5)$ и $S \simeq A_7$ — максимальная подгруппа в P (предложение 1.4.8). Пусть теперь T – силовская 2-подгруппа из S, содержащая A, B. Поскольку T является группой порядка 8, а силовская 2-подгруппа из P является группой порядка 16, то возьмем $x \in (N_P(T) \setminus T)$ со свойством $x \notin M$, но $x^2 \in T$.

Поскольку силовская 2-подгруппа из M имеет порядок больше 8 (предложение **??** (пункты 6–9)), то возьмем $y \in (N_M(T) \setminus T)$ со свойством $y^2 \in T$ (предложение 1.3.6). Так как G – группа Шункова, то $\langle x, y, T \rangle$ – конечная группа (предложение 1.3.3). По условию насыщенности $\langle x, y, T \rangle < R \in \mathfrak{M}(1)$. Поскольку $x \in R$, но $x \notin M$, то R не лежит в M. Если R не изоморфна $U_3(5)$, то $R = \langle N_R(B), N_R(A) \rangle < M$ (лемма 4.2.13 (пункт 3)), что невозможно. Следовательно, $R \simeq U_3(5)$, $S_1 = \langle N_R(A), N_R(B) \rangle < M$ и $S_1 \simeq A_7$ – максимальная подгруппа в R ([67]). Как отмечалось выше, силовская 2-подгруппа из S_1 имеет порядок 8, следовательно, $y \notin S_1$, но $T\langle y \rangle < M \cap R$, и $R = \langle y, S_1 \rangle < M$, что невозможно.

Лемма доказана.

Теорема доказана.

4.3 Периодические группы, насыщенные унитарными и линейными группами степени 3

Теорема 4.3.1. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества*

$$\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q) \mid q \text{ — степень простого числа, } q \geqslant 3\}.$$

Тогда G изоморфна $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Положим $\mathfrak{A} = \{L_3(q), U_3(q) \mid q \text{ нечетно}\}$, $\mathfrak{B} = \{L_3(2^m), U_3(2^m) \mid m \geqslant 2\}$.

Лемма 4.3.2. *G насыщена группами из $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{B}(1) = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим противное. Если при этом $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, то выполнены условия предложения 1.3.7, и поэтому в $\mathfrak{M}(1)$ найдутся подгруппы A и B, где $A \in \mathfrak{A}(1)$, $B \in \mathfrak{B}(1)$ такие, что $|A \cap B|$ делится на 2^5. Это невозможно, поскольку силовская 2-подгруппа из $A \cap B$, с одной стороны (как подгруппа A), содержит элементарную абелеву секцию порядка 2^5, а с другой стороны, ранг любой элементарной абелевой 2-секции из B не превосходит двух. Это означает, что $\mathfrak{A}(1) = \varnothing$ и группа G насыщена группами из $\mathfrak{B}$. По [26] G изоморфна $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 4.3.3. *Пусть $\mathfrak{A}_0$ — множество групп, изоморфных группам из $\mathfrak{A}(1)$. Тогда $\mathfrak{A}_0$ бесконечно.*

Доказательство. Если $\mathfrak{A}_0$ конечно, то по [25] G — конечная группа из $\mathfrak{M}$, что противоречит предположению.

Лемма доказана.

Лемма 4.3.4. *Все инволюции в G сопряжены. Все четверные подгруппы в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y – две различные инволюции из G. Так как G – периодическая группа, то $\langle x, y\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности и лемме 4.3.2 $\langle x, y\rangle < K \in \mathfrak{A}(1)$. Следовательно, $K \simeq U_3(q)$ или $K \simeq L_3(q)$, где q нечетно. По предложению 1.4.8 x, y сопряжены в K. Поскольку $K < G$, то x, y сопряжены в G.

Пусть A, B – две различные четверные подгруппы из G. По доказанному выше все инволюции из G сопряжены. Следовательно, для некоторого $g \in G$, $A \cap B^g \neq e$. Если $A = B^g$, то все доказано. Пусть $A \neq B^g$. Но тогда фактор-группа $\langle A, B^g\rangle/(A \cap B^g)$ – конечная группа, как подгруппа периодической группы, порожденная двумя инволюциями. Следовательно, $\langle A, B^g\rangle$ – также конечная группа. По условию насыщенности и лемме 4.3.2 $\langle A, B^g\rangle \subset K \in \mathfrak{A}(1)$. Следовательно, $K \simeq U_3(q)$ или $K \simeq L_3(q)$, где q нечетно. По упомянутому выше предложению 1.4.8, группы A, B^g сопряжены в K. Поскольку $K \subset G$, то A, B^g сопряжены в G. Очевидно, в этом случае A, B также сопряжены в G.

Лемма доказана.

По лемме 4.3.3 в $\mathfrak{A}(1)$ найдется группа L_0, изоморфная $U_3(q)$, где $q > 5$ и нечетно, или $L_3(q)$, где $q > 3$ и нечетно. Отождествим L_0 с L из предложения 1.4.8 и будем использовать обозначения этого предложения. Пусть $N = N_G(A)$, $C_A = C_G(A)$, $C_B = C_G(B)$.

Лемма 4.3.5. *$N = C_A \cdot V$ и C_A — локально конечная группа ранга 2. В частности, N счетна и локально конечна.*

Доказательство. Поскольку $AutA = V$, то $N_G(A) = C_A \cdot V$. Бесконечность $N_G(A)$ вытекает из лемм 4.3.3, 4.3.4. Покажем, что для любого $c \in C_A, |cb| = 3$. Действительно, так как $cb \in N_G(A)$, то $\langle A, cb\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle A, cb\rangle < K \in \mathfrak{A}(1)$. Поскольку $cb \in N_K(A)$, но $cb \notin C_K(A)$, то по предложению 1.4.8 $|cb| = 3$. Тогда $1 = (cb)^3 = cbcbcb = cc^{b^2}c^b$ и элемент b индуцирует на $C_G(A)$, в силу произвольности c, расщепляющий автоморфизм порядка 3. По предложению 1.2.12 C_A – локально конечная группа.

Покажем, что C_A – абелева группа. Действительно, пусть f, g – два произвольных элемента из C_A. В силу локальной конечности C_A, доказанной выше, группа $\langle A, f, g\rangle$ конечна. По условию насыщености $\langle A, f, g\rangle \leq R \in \mathfrak{A}(1)$. Ясно, что $\langle A, f, g\rangle \subseteq C_R(A)$. Так как $C_R(A)$

– абелева группа (предложение 1.4.8), то $fg = gf$. Нетрудно видеть, что в этом случае C_A ранга 2, и, следовательно, счетна.

Лемма доказана.

Построим две последовательности подгрупп

$$N_0, N_1, N_2, \ldots; L_0, L_1, L_2 \ldots$$

по следующим правилам:

$$N_0 = N \cap L_0 = N_{L_0}(A).$$

По лемме 4.3.5 N счетна, т. е. $N = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$. Если $N_0 = N$, то на этом процесс заканчивается. Если нет, то пусть L_1 — подгруппа из $\mathfrak{A}(1)$, содержащая N_0 и первый по номеру элемент n_i, не содержащийся в N_0. Пусть $N_1 = N \cap L_1 = N_{L_1}(A)$. Если $N_1 = N$, то процесс заканчивается. В противном случае выберем в $\mathfrak{A}(1)$ подгруппу L_2, содержащую N_1, и первый по номеру элемент из N, не содержащийся в N_1. Положим $N_2 = N \cap L_2 = N_{L_2}(A)$. В результате очевидного продолжения этого процесса возникнет совокупность L_0, L_1, L_2, … подгрупп из $\mathfrak{A}(1)$, для которой объединение последовательности

$$N_0 < N_1 < N_2 < \ldots,$$

где $N_i = N \cap L_i$, совпадает с N.

Лемма 4.3.6. *$L_{i-1} \leq L_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots$*

Доказательство. По предложению 1.4.8 $V, A, B \leq N_0 \leq N_0 \cap L_1$. Пусть $v \in L_0$, для которого $j^v = j$, $i^v = w$ и $v_1 \in L_1$, для которого $j^{v_1} = j$, $i^{v_1} = w$. Тогда $c = v_1 v^{-1} \in C$, т. е. $v_1 = cv$. Так как C_A — абелева, $L_1 \geq C_{L_1}(A)^{v_1} = C_{L_1}(A)^{cv} = C_{L_1}(A)^v = C_{N_1}(A)^v \geq C_N(A)^v = C_{L_0}(A)^v = C_{L_0}(A^v) = C_{L_0}(B)$. Таким образом, $C_{L_0}(B) \leq L_1$ и по предложению 1.4.8

$$L_0 = \langle N_0, C_{L_0}(B)\rangle \leq \langle N_1, L_1\rangle = L_1.$$

Если уже показано, что $L_{i-1} \geq L_0$ и $N_{i-1} \neq N_i$, то те же самые рассуждения показывают, что $L_{i-1} = \langle N_{i-1}, C_{L_{i-1}}(B)\rangle \leq \langle N_i, L_i\rangle = L_i$.

Лемма доказана.

Объединение L возрастающей цепочки L_0, L_1, … является локально конечной группой, которая по предложению 1.2.16 является группой лиева типа над некоторым локально конечным полем Q. Ясно, что $L \simeq U_3(Q)$ или $L \simeq L_3(Q)$. Кроме того, очевидно, что $N \leq L$.

Лемма 4.3.7. *Если D — подгруппа диэдра порядка 8 из L, то $N_G(D) \leq L$.*

Доказательство. Можно считать, что $D \geq A$, и поэтому $D \leq N$, следовательно, $D \leq N_i \leq L_i$ для некоторого i. Если C — вторая четверная подгруппа из D, то в L_i есть элемент v, переводящий A в C. Если теперь $x \in N(D)$, то либо $A^x = A$ и $x \in N(A) \leq N \leq L$, либо $A^x = C$ и $x = nv$, где $n \in N(A)$. В любом случае, $x \in L$.

Лемма доказана.

Лемма 4.3.8. *$L = G$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует подгруппа $M \in \mathfrak{A}(1)$, не лежащая в L и содержащая j. Покажем, что M можно выбрать так, чтобы $M \cap L$ содержала четверную подгруппу. Действительно, в противном случае $i \notin M$, и в $C_M(j) \setminus L$

найдется инволюция $m \notin L$, и можно заменить M на подгруппу $M_1 \in \mathfrak{A}(1)$, содержащую $\langle i, j, m\rangle$. Не нарушая общности, можно считать, что M содержит A. По предложению 1.4.8 $N_M(A)$ содержит четверную подгруппу C, отличную от A, и $A^x = C$ для некоторого $x \in M$. С другой стороны, $C \leq N \leq L$, поэтому найдется $y \in L$, для которого $A^y = C$, т. е. $x = ny$, где $n \in N$, и, следовательно, $x \in L$.

Таким образом, $S = \langle N_M(A), N_M(C)\rangle \leq L$, и поскольку $S \neq M$, то $M \simeq U_3(5)$ и $S \simeq A_7$ — максимальная подгруппа в M. Теперь силовская 2-подгруппа T из S является группой диэдра порядка 8. По лемме 4.3.7 ее нормализатор $R = N_M(T)$ в M содержится в L, но не содержится в S. Поэтому $M = \langle R, S\rangle \leq L$. Противоречие.

Лемма доказана.

Теорема доказана.

Глава 5

Группы Шункова, насыщенные группами лиева типа ранга 1

5.1 Группы Шункова, насыщенные группами $\{J_1, L_2(q), Re(q), U_3(q), Sz(q)\}$

Теорема 5.1.1. *Пусть группа Шункова G насыщена конечными простыми неабелевыми группами и в любой её конечной 2-подгруппе K все инволюции из K лежат в центре K. Тогда G обладает периодической частью, которая изоморфна одной из групп следующего множества*

$$\{J_1, L_2(Q), Re(Q), U_3(Q), Sz(Q)\}$$

для подходящего локально конечного поля Q.

Доказательство. Пусть G — контрпример к утверждению теоремы, и $\mathfrak{M}$ — насыщающее множество для группы G, состоящее из конечных простых неабелевых групп.

Лемма 5.1.2. *Можно считать, что насыщающее множество для группы G следующее*

$$\mathfrak{M} = \{J_1; L_2(2^n); Re(3^{2n+1}); U_3(2^{2n}); Sz(2^{2n+1}); L_2(q), q \equiv 3, 5 \ (mod\ 8)\}.$$

Доказательство. Пусть L — произвольная конечная простая неабелева подгруппа группы G. Обозначим через P некоторую её силовскую 2-подгруппу. Поскольку P — конечная 2-подгруппа группы G, то по условию теоремы все инволюции из P содержатся в центре P. Но тогда $L \,\tilde{\in}\, \mathfrak{M}$ (предложение 1.4.20).

Лемма доказана.

Лемма 5.1.3. *Группа G не содержит нормальных периодических подгрупп.*

Доказательство. Предположим обратное, пусть H — нормальная периодическая подгруппа группы G и $H \neq 1$. Пусть a — неединичный элемент из H и b — неединичный элемент из $G \setminus H$. По условиям теоремы найдутся конечные простые неабелевы подгруппы K и M из G такие, что $\langle a \rangle < K$, $\langle b \rangle < M$. Очевидно, что $K \leq H$ и $M \cap H = 1$, в частности, в H и в $G \setminus H$ найдутся соответственно инволюции i и j. По предложению 1.3.3 подгруппа $R = \langle i, j \rangle$ конечна, и по условиям теоремы $R < L \leq G$, где L — конечная простая неабелева группа. При этом $L \cap H \neq 1$, и потому $L < H$. Получаем противоречие с выбором j.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.4. *Группа G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Доказательство. Предположим обратное. По предложению 1.3.4 G содержит конечное число элементов конечного порядка. По лемме Дицмана (предложение 1.2.1) G обладает конечной нормальной подгруппой. Противоречие с утверждением леммы 5.1.3.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.5. *Множество $\mathfrak{M}(1)$ содержит группы, порядок которых больше любого наперед заданного натурального m.*

Доказательство. Предположим обратное. Зафиксируем такое натуральное m, что для любой группы $H \in \mathfrak{M}(1)$, $|H| < m$. По лемме 5.1.4 G содержит конечную подгруппу M такую, что $|M| > m$. По условию насыщенности $M \leq H \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, $m < |M| \leqslant |H|$. Последнее противоречит тому, что $|H| < m$.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.6. *Все инволюции группы G сопряжены, и любая силовская 2-подгруппа из G — локально конечная группа периода ≤ 4.*

Доказательство. Пусть a и b — произвольные инволюции из G. По предложению 1.3.3 подгруппа $L = \langle a, b\rangle$ конечна, и по условиям теоремы $L < M$, где $M \tilde{\in} \mathfrak{M}$ (лемма 5.1.2). В каждой из групп, являющихся элементами множества $\mathfrak{M}$, все инволюции сопряжены, а 2-элементы имеют порядок не более 4 (предложения 1.4.7, 1.4.3, 1.4.2, 1.4.12, 1.4.13, 1.4.14). По предложению 1.2.22 S – локально конечная группа.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.7. *Пусть S – произвольная силовская 2-подгруппа группы G. Тогда все инволюции из S лежат в центре S.*

Доказательство. Пусть $1 \neq x \in S$, $x^2 = 1$, s – произвольный элемент из S. По лемме 5.1.6 $\langle s, x\rangle$ – конечная 2-группа. По условию насыщенности $\langle s, x\rangle < L$, где $L \tilde{\in} \mathfrak{M}$. Ясно, что $\langle s, x\rangle < S_L$, где S_L — силовская 2-подгруппа в L. По предложению 1.4.20 и лемме 5.1.2 $sx = xs$.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.8. *Пусть a – инволюция из G. $C_G(a)$ содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Доказательство. Предположим обратное. По предложению 1.3.4 $C_G(a)$ содержит конечное число элементов конечного порядка. По лемме Дицмана (предложение 1.2.1) $C_G(a)$ обладает конечной периодической частью $T(C_G(a))$. По условию насыщенности

$$T(C_G(a)) < M \text{ и } M \in \mathfrak{M}(1).$$

По теореме Брауэра (предложение 1.4.11) множество $\mathfrak{M}(1)$ содержит конечное число, с точностью до изоморфизма, групп. Следовательно, порядки групп из множества $\mathfrak{M}(1)$ ограничены в совокупности. Противоречие с утверждением леммы 5.1.14.

Лемма доказана.

I. Все силовские 2-подгруппы из G абелевы

В данном разделе будет предполагаться, что все силовские 2-подгруппы группы G абелевы, и пусть S — одна из них.

Лемма 5.1.9. $|S| \neq 2$.

Доказательство. Предположим обратное. В силу условия насыщенности S – силовская 2-подгруппа некоторой простой конечной неабелевой группы. Но в любой такой группе порядок силовской 2-подгруппы больше двух.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.10. $|S| \neq 4$.

Доказательство. Предположим обратное. В этом случае в качестве насыщающего множества для группы G можно взять множество

$$\mathfrak{M}(1) \subseteq \{H \mid H < G, H \tilde{\in} \{L_2(q) | q = 3.5 \ (mod\ 8)\}\}$$

(лемма 5.1.2). По предложению 1.3.8 G обладает периодической частью $T(G) \simeq L_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Лемма доказана.

На протяжении лемм 5.1.11, 5.1.17 будет предполагаться, что $S = \langle a \rangle \times \langle z \rangle \times \langle t \rangle$ — элементарная абелева группа порядка 8.

Лемма 5.1.11. *Все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены с S.*

Доказательство. Утверждение леммы является непосредственным следствием предложения 1.3.6.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.12. *Множество $\mathfrak{M}(1)$ содержит группу H такую, что*

$$H \tilde{\in} \{J_1, Re(3^{2n+1})\}.$$

Доказательство. Предположим обратное. В этом случае в качестве насыщающего множества для группы G можно взять множество

$$\mathfrak{M}(1) \subseteq \{H \mid H < G, H \tilde{\in} \{L_2(8), L_2(q) | q = 3.5 \ (mod\ 8)\}\}$$

(лемма 5.1.2). По предложению 1.3.8 G обладает периодической частью $T(G) \simeq L_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.13. $T(N_G(S)) = S \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle)$*, где* $\langle b \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle$ *— группа Фробениуса порядка* 21*,* $|C_S(d)| = 2$ *и* $S \leftthreetimes \langle b \rangle$ *— группа Фробениуса порядка* 56*.*

Доказательство. Так как G – группа Шункова, то из предложения 1.3.4 и леммы 5.1.2 вытекает, что $N_G(S)$ содержит конечное число элементов конечного порядка. По лемме Дицмана (предложение 1.2.1) $N_G(S)$ обладает периодической частью $T(N_G(S))$, которая является конечной группой. Так как силовские 2-подгруппы сопряжены (лемма 5.1.11) в G, то из леммы 5.1.12 вытекает, что $T(N_G(S))$ вложима в конечную простую группу, изоморфную группе из множества $\{J_1,\ Re(3^{2n+1})$. Теперь достаточно воспользоваться предложениями 1.4.12, 1.4.14.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.14. *Пусть* $C = C_G(a)$. *Тогда фактор-группа* $\overline{C} = C/\langle a\rangle$ *насыщена группами из множества*

$$\{L_2(4), L_2(3^{2n+1}), C_{L_2(q)}(v)/\langle v\rangle | v \in L_2(q),\ v^2 = 1,\ q = 3, 5(mod\ 8)\}.$$

Доказательство. По предложению 1.3.1 $\overline{C}$ — группа Шункова. Возьмем в $\overline{C}$ конечную подгруппу $\overline{K}$. Обозначим через K некоторый конечный прообраз $\overline{K}$ в C, содержащий инволюцию a. По условию насыщенности $K \leq M$, и

$$M \tilde{\in} \{J_1, Re(3^{2n+1}), L_2(8), L_2(q) \mid q = 3, 5(mod\ 8)\}$$

(леммы 5.1.2, 5.1.11). Так как $K \leq C_M(a)$ и

$$C_M(a) \tilde{\in} \{S, \langle a\rangle \times \langle z\rangle, \langle a\rangle \times L_2(4), \langle a\rangle \times L_2(3^{2n+1}), C_{L_2(q)}(v)|q = 3, 5(mod\ 8)\},$$

то $\overline{K} \leq C_M(a)/\langle a\rangle$ и

$$C_M(a)/\langle a\rangle \tilde{\in} \{\langle z\rangle, \langle t\rangle \times \langle z\rangle, L_2(4), L_2(3^{2n+1}), C_{L_2(q)}(v)/\langle v\rangle,\ q = 3, 5(mod\ 8)\}.$$

В силу произвольности выбора K получаем, что $\overline{C}$ насыщена группами из множества

$$\{\langle z\rangle, \langle t\rangle \times \langle z\rangle, L_2(4), L_2(3^{2n+1}), C_{L_2(q)}(a)/\langle a\rangle,\ q = 3, 5(mod\ 8)\},$$

где $C_{L_2(q)}(v)/\langle v\rangle$ — группа диэдра с циклической нормальной подгруппой нечетного порядка индекса 2. В фактор-группе $\overline{C}$ все силовские 2-подгруппы конечны (элементарные абелевы порядка 4) и сопряжены (предложение 1.3.6). Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $\overline{C}$ насыщена группами из множества

$$\{L_2(4), L_2(3^{2n+1}), C_{L_2(q)}(v)/\langle v\rangle | v \in L_2(q),\ v^2 = 1,\ q = 3, 5(mod\ 8)\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.1.15. *Пусть* $C = C_G(a)$. *Тогда* C *обладает периодической частью* $T(C) = \langle a\rangle \times L,\ L \simeq L_2(Q)$, *где* Q *— бесконечное локально конечное поле характеристики* 3.

Доказательство. Рассмотрим фактор-группу $\overline{C} = C/\langle a\rangle$. По предложению 1.3.1 $\overline{C}$ — группа Шункова. По лемме 5.1.14 $\overline{C}$ насыщена группами из множества

$$\{L_2(4), L_2(3^{2n+1}), C_{L_2(q)}(v)/\langle v\rangle | v \in L_2(q),\ v^2 = 1,\ q = 3, 5(mod\ 8)\}.$$

Ввиду теоремы 2.4.1 $\overline{C}$ обладает периодической частью $T(\overline{C}) \simeq L_2(Q)$. Следовательно, $T(C) \simeq \langle a\rangle \times L$, где $L \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 3.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.16. *Группа* G *содержит бесконечную локально конечную простую подгруппу* R, *изоморфную* $Re(Q)$, *где* Q *— бесконечное локально конечное поле характеристики* 3, *не содержащее подполей порядка* 9, *причем для любой инволюции* $a \in R$, $T(C_G(a)) < R$.

Доказательство. Рассмотрим группу C из леммы 5.1.15. Представим C в виде объединения возрастающей цепочки подгрупп

$$N_1 < N_2 < \ldots < N_k < \ldots,$$

где $N_k = \langle a\rangle \times L_k$, где $L_k \simeq L_2(3^{2n_k+1})$. По условию теоремы, начиная с некоторого достаточно большого m, $N_k < R_k \simeq Re(3^{2n_k+1})$, где $k > m$. По лемме 5.1.13 $T(N_G(S)) < R_k$ для любого $k > m$, но тогда $\langle T(N_G(S)), N_k\rangle = R_k$ для любого $k > m$. Отсюда

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_k < \ldots$$

возрастающая цепочка вложенных друг в друга подгрупп, а $R = \cup R_k$ — бесконечно локально конечная подгруппа, изоморфная $Re(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 3 (предложение 1.3.10). Второе утверждение леммы вытекает из сопряженности инволюций в R и того факта, что по построению $T(C_G(a)) = C_R(a) < R$.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.17. *Пусть R – подгруппа из формулировки леммы* 5.1.16. *Тогда G обладает периодической частью $T(G) = R$.*

Доказательство. Покажем, что группа G насыщена множеством групп $\{Re(3^{2n+1})\}$. Предположим обратное. Тогда в G найдется конечная подгруппа K такая, что для любой конечной простой неабелевой подгруппы M группы G, содержащей подгруппу K, M не изоморфна $Re(3^{2n+1})$. Зафиксируем некоторую такую подгруппу M. Так как все инволюции в группе G сопряжены (лемма 5.1.6), то можно считать, что $M \cap R$ содержит силовскую 2-подгруппу S_M группы M. Поскольку $T(N_G(S_M)) < R$ (лемма 5.1.13), и для любой инволюции $x \in S_M, C_M(x) \leq R$ (лемма 5.1.15), то $M = \langle C_M(x), N_M(S_M)\rangle \subset R$, за исключением двух случаев: либо $M \simeq L_2(4)$, либо $M \simeq L_2(8)$.

Предположим, что $M \simeq L_2(4)$. Тогда $H = M\cap R = (\langle a\rangle\times\langle x\rangle)\leftthreetimes\langle d\rangle \simeq A_4$, a — инволюция, а $|d| = 3$. По предложению 1.4.12 в R найдется инволюция w такая, что $d^w = d^{-1}$. Возьмём в $M \setminus H$ инволюцию v, такую, что $d^v = d^{-1}$. Конечная группа $\langle d, v, w\rangle < M_1 < G$, где M_1 — конечная простая группа с элементарной абелевой силовской 2-подгруппой, M_1 не лежит в R и

$$M_1 \mathrel{\widetilde{\in}} \{L_2(4),\ L_2(8),\ Re(3^{2n+1})\}.$$

Поскольку

$$M_1 = \langle C_{M_1}(dw), C_{M_1}(d^2w)\rangle,$$

то $M_1 \leq R$, что невозможно.

Предположим, что $M \simeq L_2(8)$. Тогда $H = M \cap R = (\langle a\rangle \times \langle x\rangle) \times \langle t\rangle \leftthreetimes \langle d\rangle$, a, t — инволюции, а $|d| = 7$. По предложению 1.4.12 в R найдется инволюция w такая, что $d^w = d^{-1}$. Возьмём в $M \setminus H$ инволюцию v такую, что $d^v = d^{-1}$. Конечная группа $\langle d, v, w\rangle < M_1 < G$, где M_1 — конечная простая группа с элементарной абелевой силовской 2-подгруппой, M_1 не лежит в R и

$$M_1 \mathrel{\widetilde{\in}} \{L_2(8),\ Re(3^{2n+1})\}.$$

Поскольку

$$M_1 = \langle C_{M_1}(dw), C_{M_1}(d^2w)\rangle,$$

то по лемме 5.1.16 $M_1 \leq R$, что невозможно.

Таким образом, $K \leq M < R$. В этом случае в R существует конечная подгруппа $R_1 \simeq Re(3^{2n+1})$, содержащая подгруппу K. Следовательно, G насыщена группами из множества

$\{Re(3^{2n+1})\}$ и по предложению 1.3.10 обладает периодическорй частью $T(G) \simeq Re(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 3.

Лемма доказана.

Леммы 5.1.16 и 5.1.17 завершают рассмотрение случая, когда $S = \langle a\rangle \times \langle z\rangle \times \langle t\rangle$ — элементарная абелева группа порядка 8.

Рассмотрим случай $|S| > 8$. Ввиду леммы 5.1.2 можно считать, что насыщающее множество для группы G следующее:

$$\mathfrak{M} = \{J_1, L_2(2^n), Re(3^{2n+1}), L_2(q), q \equiv\ 3, 5\ (mod\ 8)\},$$

и S – элементарная абелева группа. Возьмём инволюцию $x \in S$, и пусть $C = C_G(x)$.

Лемма 5.1.18. *$T(C)$ — периодическая абелева 2-группа.*

Доказательство. Предположим обратное. Обозначим через $P(C)$ подгруппу группы C, порожденную всеми элементами конечных порядков группы C.

В $P(C)$ существует неединичный элемент простого нечётного порядка d. Действительно, пусть $P(C)$ не содержит элементов нечетного порядка. Следовательно, для любой конечной подгруппы $K \in \mathfrak{M}(1), K \simeq L_2(2^n)$ и без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{M} = \{L_2(2^n)\}$. В этом случае $T(G) \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2. Противоречие с выбором G. Зафиксируем элемент d.

Положим $\overline{P(C)} = P(C)/\langle x\rangle$. Ясно, что $\overline{S} = S/\langle x\rangle$ – силовская 2-подгруппа в $\overline{P(C)}$. Если для любой инволюции $\overline{y} \in \overline{P(C)}$, $\langle \overline{d}^{\overline{y}}\rangle = \langle \overline{d}\rangle$, то $\overline{d} \lhd \langle \overline{d}\rangle\overline{S}$, а $\langle d\rangle \lhd \langle d\rangle S$. Возьмем в S конечную подгруппу $S_1 = \langle(\langle x\rangle \times \langle z\rangle \times \langle v\rangle \times \langle t\rangle), d\rangle$, где $x^2 = z^2 = v^2 = t^2 = 1$. По условию насыщенности $\langle d\rangle S_1 < L$, где $L \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, $L \simeq L_2(2^n)$, $n > 3$. Но $C_L(x)$ – 2-группа, противоречие с тем, что $d \in C_L(x)$.

Итак, найдётся инволюция $\overline{y} \in \overline{P(C)}$ такая, что $\langle \overline{d}\rangle^{\overline{y}} \neq \langle \overline{d}\rangle$. По условию насыщенности $\langle x, d, y\rangle < L$, где $L \in \mathfrak{M}(1)$. Поскольку $C_L(x)$ содержит элемент нечетного порядка d, то

$$L \mathrel{\tilde{\in}} \{J_1, Re(3^{2n+1}), L_2(q)|q \equiv 3, 5(mod\ 8)\},$$

и в G найдется подгруппа

$$(\langle x\rangle \times \langle z\rangle) \leftthreetimes \langle d_1\rangle,$$

где $x^2 = z^2 = d_1^3 = 1$. Так как силовская 2-подгруппа из G элементарная абелева и имеет порядок не менее 16, то в G найдется инволюция t, что $\langle x\rangle \times \langle z\rangle \times \langle t\rangle$ — подгруппа в G. По условию насыщенности

$$\langle\langle d_1\rangle, (\langle x\rangle \times \langle z\rangle \times \langle v\rangle \times \langle t\rangle)\rangle < L,$$

где

$$L \mathrel{\tilde{\in}} \{J_1, Re(3^{2n+1})\},$$

и в G найдется подгруппа

$$\langle x\rangle \times ((\langle z\rangle \times \langle t\rangle) \leftthreetimes \langle d_2\rangle),$$

где $x^2 = z^2 = t^2 = d_2^3 = 1$.

Так как силовская 2-подгруппа из G — элементарная абелева и имеет порядок не менее 16, то в G найдется инволюция v, что $(\langle x\rangle \times \langle z\rangle \times \langle v\rangle \times \langle t\rangle)$ — подгруппа в G. По условию насыщенности

$$\langle\langle d_2\rangle, (\langle x\rangle \times \langle z\rangle \times \langle v\rangle \times \langle t\rangle)\rangle < L.$$

Поскольку силовская 2-подгруппа из L является элементарной абелевой группой порядка не менее 16, то $L \simeq L_2(2^n)$, $n > 3$. Но $C_L(x)$ — 2-группа, противоречие с тем, что $d_1 \in C_L(x)$.

Таким образом, $P(C)$ не может содержать нееденичных элементов нечетного порядка. Полученное противоречие завершает доказательство леммы и случая $|S| > 8$.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.18 завершает доказательство теоремы для раздела I.

II. Группа G содержит неабелеву силовскую 2-подгруппу

Пусть S — некоторая неабелева силовская 2-подгруппа группы G.

Лемма 5.1.19. *S — бесконечная группа.*

Доказательство. Предположим обратное. По предложению 1.3.6 все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены, а в силу условия теоремы и ввиду леммы 5.1.2 они изоморфны силовской 2-подгруппе либо группы $Sz(2^{2k+1})$, либо группы $U_3(2^n)$. Предположим, что найдётся такая силовская 2-подгруппа S_1 группы G, что $S_1 \neq S$ и $K = S \cap S_1 \neq \{1\}$. Понятно, что мы можем предполагать, что, если M — любая другая силовская 2-подгруппа группы G и $M \neq S$, то $|M \cap S| \leq |K|$.

Если K – элементарная абелева 2-подгруппа, значит, K содержится в $Z(S)$, то обозначим через t любой элемент порядка 4 из S, для которого $t^2 \in K$. Если же K содержит элемент порядка 4, то через t обозначим любой элемент разности $N_S(K) \setminus K$ со свойством: $t^2 \in K$ (такой элемент найдётся, поскольку в S выполняется нормализаторное условие). Итак, в любом случае $T = \langle K, t\rangle$ — группа периода 4, $K \lhd T$ и $|T/K| = 2$. Далее обозначим через t_1 любой элемент из $N_{S_1}(K) \setminus K$, для которого $t_1^2 \in K$. Тогда K – нормальная подгруппа индекса 2 в группе $T_1 = \langle K, t_1\rangle$. Таким образом, $B = \langle K, t, t_1\rangle$ — конечная группа, содержащая элемент порядка 4.

По условию теоремы и лемме 5.1.2 $B < L$, где L изоморфна либо группе $Sz(2^{2^{k+1}})$, либо группе $U_3(2^n)$. В любом случае различные силовские 2-подгруппы из L имеют тривиальное пересечение. Но тогда 2-подгруппы T и T_1 из L содержатся в одной силовской 2-подгруппе группы L. В частности, B является 2-группой. Если S_2 — силовская 2-подгруппа группы G, содержащая B, то $S_2 \neq S(t_1 \in S_2, t_1 \notin S)$, $S_2 \cap S$ содержит T. Но это противоречит выбору подгруппы S_1.

Итак, S тривиально пересекается с любой другой силовской 2-подгруппой группы G. Следовательно, можно считать, что

$$\mathfrak{M} = \{L_2(2^n), U_3(2^{2n}), Sz(2^{2n+1})\}.$$

Так как S — конечная группа, то порядки конечных групп из $\mathfrak{M}(1)$ ограничены в совокупности некоторым числом m. Противоречие с утверждением леммы 5.1.4.

Лемма доказана.

В дальнейшем S – бесконечная группа.

Лемма 5.1.20. *Без ограничения общности можно считать, что S содержит конечную подгруппу K такую, что K — силовская 2-подгуппа некоторой конечной группы $L < G$ и $L \mathrel{\widetilde{\in}} \{U_3(2^k),\ Sz(2^{2n+1})\}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{M}(1)$ не содержит групп, изоморфных группам из множества $\{U_3(2^k),\ Sz(2^{2n+1}\}$, то любая силовская 2-подгруппа из G — абелева, и теорема имеет место (см. раздел I). Противоречие с тем, что G — контрпример. Следовательно, найдется такая группа $L \in \mathfrak{M}(1)$, что

$$L \mathrel{\widetilde{\in}} \{U_3(2^k),\ Sz(2^{2n+1}\}.$$

Зафиксируем группу L и некоторую её силовскую 2-подгруппу S_L. Так как все силовские 2-подгруппы группы G бесконечны, то $S_L < S$ — бесконечная силовская 2-подгруппа группы G.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.21. *В группе G существует такая силовская 2-подгруппа $S_1 \neq S$, что либо $K = S_1 \cap S$ содержит элемент порядка 4, либо K — элементарная абелева 2-группа и $|K| \geq 8$.*

Доказательство. Пусть различные силовские 2-подгруппы группы G пересекаются тривиально. Поскольку силовская 2-подгруппа из $Sz(2^{2k+1})$ не может быть изоморфна никакой подгруппе силовской 2-подгруппе из $U_3(2^n)$, а силовская 2-подгруппа из $U_3(2^n)$ не может быть изоморфна никакой подгруппе силовской 2-подгруппы из $Sz(2^{2k+1})$ ни при каких k, n, то (см. лемму 5.1.20) без ограничения общности можно считать, что либо насыщающее множество

$$\mathfrak{M} = \{L_2(2^n), U_3(2^{2n}),$$

либо насыщающее множество

$$\mathfrak{M} = \{L_2(2^n), Sz(2^{2n+1}).$$

В первом случае, по предложению 1.3.13, G обладает периодической частью

$$T(G) \mathrel{\widetilde{\in}} \{L_2(Q), U_3(Q)\}$$

для подходящего локально конечного поля Q четной характеристики. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Разберем второй случай. Возьмем в $\mathfrak{M}(1)$ группу $K \simeq L_2(2^n)$, а в ней элементы b порядка 3 и инволюцию x такие, что $b^x = b^{-1}$. Поскольку $\mathfrak{M}(1)$ содержит $K_0 \simeq Sz(2^{2n+1})$, то существует элемент $a \in G$ такой, что $a^2 = x$. Так как G — группа Шункова, то $\langle b,\ b^a\rangle$ — конечная группа. Поскольку

$$\langle b,\ b^a\rangle^a = \langle b^a,\ b^{a^2}\rangle = \langle b^a,\ b^{-1}\rangle = \langle b,\ b^a\rangle,$$

то группа $\langle b,\ a\rangle$ конечна, и по условию насыщенности $\langle b,\ a\rangle < K_1$, где

$$K_1 \mathrel{\widetilde{\in}} \{L_2(2^n), Sz(2^{2n+1})\}.$$

В силу того, что K_1 содержит элемент a порядка 4, получаем, что $K_1 \simeq Sz(2^{2n+1})$. С другой стороны, K_1 содержит элемент b порядка 3, а $Sz(2^{2n+1})$ не содержит элементов порядка 3, следовательно, $K_1 \not\simeq Sz(2^{2n+1})$. Противоречие.

Итак, можно считать, что для некоторой силовской 2-подгруппы $S_1 \neq S$, $K = S \cap S_1 \neq 1$. Пусть K — элементарная абелева группа порядка 2 или 4. Обозначим: i — инволюция из K; b — элемент порядка 4 из S; $l = b^2$; x — элемент группы G, для которого $i = l^x$. Рассмотрим пересечение $S^x \cap S_1 = Q$, которое содержит i. Допустим, что снова это пересечение есть элементарная абелева 2-подгруппа порядка ≤ 4 (в противном случае лемма верна). Если $a = b^x$, то $a \in S^x$ и $a^2 = i$. Пусть j — любая инволюция из $S_1 \setminus S^x$. По лемме 5.1.7 j централизует Q. Рассмотрим теперь группу $T = \langle Q, a, j\rangle$. Поскольку фактор-группа T/Q порождается двумя инволюциями aQ и jQ, то T – конечная группа. По условию теоремы $T < L_1$, где

$$L_1 \mathrel{\widetilde{\in}} \{Sz(2^{2m+1}),\ U_3(2^s)\}.$$

Так как различные силовские 2-подгруппы из L_1 пересекаются тривиально, то 2-подгруппы $\langle Q, a\rangle$ и $\langle Q, j\rangle$ содержатся в одной силовской 2-подгруппе из L. В частности, T является 2-подгруппой. Если S_2 — силовская 2-подгруппа группы G, содержащая T, то $S_2 \neq S^x (j \in T \setminus S^x)$. При этом пересечение $S_2 \cap S^x$ содержит элемент a порядка 4. Это доказывает лемму.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.22. *Любые две инволюции из $S \cup S_1$ перестановочны.*

Доказательство. Предположим обратное, что $t \in (S \setminus S_1)$, $l \in (S_1 \setminus S)$, $|t| = |l| = 2$ и $tl \neq lt$. Обозначим через K_1 подгруппу из K, которая либо циклическая порядка 4, либо элементарная абелева порядка 8, и положим $F = \langle K_1, t, l\rangle$. Заметим, что $K_1 < Z(F)$, значит, F — конечная группа. Так как подгруппа $\langle K_1, t\rangle$ либо содержит элемент порядка 4, либо является элементарной абелевой порядка 16, то по условию теоремы $F < U$, где U изоморфна либо группе $Sz(2^{2m+1})$, либо группе $U_3(2^n)$. Отсюда, как и выше, выводим, что F является 2-группой и $tl = lt$. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.23. *Пусть a – элемент порядка 4, j – инволюция; $a, j \in (S \cup S_1)$. Тогда $aj = ja$.*

Доказательство. Если a, j содержатся в одной силовской 2-подгруппе группы G, то лемма верна в силу леммы 5.1.7. Пусть, например, $a \in S$, $j \in (S_1 \setminus S)$. По лемме 5.1.22 $ja^2 = a^2j$. Следовательно, $\langle a, j\rangle$ — конечная группа, содержащая нетривиально пересекающиеся 2-подгруппы: $\langle a\rangle$, $\langle a^2\rangle \times \langle j\rangle$. В этой ситуации, как доказывалось ранее, $\langle a, j\rangle$ является 2-группой. Следовательно, $aj = ja$.

Лемма доказана.

Лемма 5.1.24. *$S_1 \cap S$ содержит все инволюции из $S_1 \cup S$.*

Доказательство. Пусть, например, инволюция j содержится в S. В силу лемм 5.1.22, 5.1.23 j перестановочна со всеми элементами из S_1, а потому $S_1\langle j\rangle$, есть 2-группа. Но S_1 — силовская 2-подгруппа группы G. Следовательно, $j \in S_1$, т. е. $j \in S \cap S_1$.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы в разделе II. Пусть $x \in S$, $y \in S_1$. Если хотя бы один из этих элементов — инволюция, то $xy = yx$ (лемма 5.1.24). Пусть $|x| = |y| = 4$. Положим $D = \langle x, y\rangle$. Так как x^2, y^2 содержатся в $Z(D)$, то D — конечная группа, а её 2-подгруппы $\langle x, y^2\rangle$ и $\langle x^2, y\rangle$ имеют нетривиальное пересечение. Но тогда D есть 2-группа, xy является 2-элементом и $xy = yxz$, где $|z| \leq 2$. Пусть S_2 — силовская 2-подгруппа группы G, содержащая D, $S_2 \cap S$ содержит элемент x порядка 4. Поэтому для пары (S, S_2) справедливы леммы 5.1.22, 5.1.23, 5.1.24, а потому $z \in S$. Аналогично устанавливается включение $z \in S_1$. Следовательно, $z \in S \cap S_1$ и SS_1 — 2-группа. Так как S, S_1 — силовские 2-подгруппы группы G, то $S = S_1$. Получили противоречие с тем, что $S \neq S_1$. Это завершает доказательство теоремы в разделе II.

Теорема доказана.

5.2 Группы Шункова, насыщенные группами лиева типа ранга 1

Теорема 5.2.1. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга 1, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем Q.*

Доказательство. Положим

$$\mathfrak{M} = \{L_2(q), U_3(q), Sz(2^{2n+1}), Re(3^{2n+1})\},$$

где q, n не фиксируются (в случае $L_2(q), q > 3$), тогда $\mathfrak{M}$ — множество всех конечных простых групп лиева типа ранга 1.

Лемма 5.2.2. *Силовская 2-подгруппа S группы G — одного из следующих видов* :

1. $S = \langle a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1} \rangle$ *— полудиэдральная группа (S изоморфна силовской 2-подгруппе $U_3(q)$, где $q \equiv\ 1\ (mod\ 4)$).*
2. $S = \langle a, w | a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = 1, a^w = b, ab = ba \rangle$ *— сплетенная 2-группа (S изоморфна силовской 2-подгруппе $U_3(q)$, где $q \equiv -1\ (mod\ 4)$).*
3. S *— конечная элементарная абелева 2-группа ранга не менее трех.*
4. S *— группа диэдра.*
5. S *изоморфна силовской 2-подгруппе группы $Sz(2^{n+1})$ для подходящего n.*
6. S *изоморфна силовской 2-подгруппе группы $U_3(2^n)$ для подходящего n.*
7. S *— бесконечная группа периода не более 4, и все инволюции из S лежат в $Z(S)$.*
8. S *— черниковская 2-группа ранга не более 2.*

Доказательство. Пусть S — конечная группа. Тогда S, ввиду предложения 1.3.6, — одного из видов 1–6 утверждения леммы. В дальнейшем считаем, что S — бесконечная группа.

Пусть S содержит элементарную абелеву подгруппу D порядка 8. В силу предложения 1.2.9, D вложима в бесконечную локально конечную подгруппу I группы S. Если I содержит элемент b порядка 8, то $\langle D, b \rangle$ — конечная 2-группа, которая по условию насыщенности является подгруппой группы D_1, где D_1 — одного из видов 1–6 утверждения леммы. Как легко видеть, эта ситуация невозможна. Итак, I — подгруппа периода не более 4, и будем считать I максимальной в указанном смысле. Покажем, что все инволюции из I лежат в $Z(I)$. Действительно, для любой инволюции $x \in I$ и любого элемента $y \in I$ $\langle D, x, y \rangle$ — конечная 2-группа, которая по условию насыщенности является подгруппой группы D_1, где D_1 — одного из видов 1–6 утверждения леммы. Как легко видеть, эта ситуация возможна только в случае, когда D_1 — одного из видов 3, 5, 6 утверждения леммы. Но во всех указанных случаях $x \in Z(D_1)$ и $xy = yx$. В силу произвольности выбора x, как инволюции из I, получаем требуемое. Если $S = I$, то все доказано. Предположим, что $x \in S \setminus I \neq \varnothing$. Покажем, что x можно выбрать так, что $xz = zx$ для некоторой инволюции $z \in I$. Если $|x| = 2$, то группа $\langle x, z \rangle$ конечна для любой инволюции z из I. Пусть t — инволюция из $Z(\langle x, z \rangle)$. Если $t \in I$, то положим $z = t$. Если $t \notin I$, то положим $x = t$. Подгруппа $\langle z \rangle \times \langle x \rangle = K_1$, очевидно, не лежит в I и $K_1 \cap I = \langle z \rangle$. Возьмем в I инволюцию $t \neq z$. Ясно, что $tz = zt$. Рассмотрим конечную подгруппу $\langle z, x, t \rangle$. Данная подгруппа, очевидно, не лежат в I и

$$(\langle z \rangle \times \langle t \rangle) < (\langle z, x, t \rangle \cap I).$$

В силу предложения 1.2.9 в $\langle z, x, t\rangle$ существует элемент v такой, что $v \in N_G(\langle z\rangle \times \langle t\rangle) \setminus I$ и $v^2 \in I$. Тогда группа $K_2 = \langle v, z, t, t_1\rangle$, где $t_1 \in I \setminus (\langle z\rangle \times \langle t\rangle)$, — конечная 2-группа. По условию насыщенности $K_2 \leq K_3 \in \mathfrak{M}(1)$. Так как K_2 содержит подгруппу $\langle z\rangle \times \langle t_1\rangle \times \langle t\rangle$, то из структуры $\mathfrak{M}$ вытекает, что K_2 — элементарная абелева 2-группа. В силу произвольности выбора t_1 из I получим, что v перестановочен с любой инволюцией из I. Пусть y — произвольный элемент из I. По условию насыщенности конечная 2-группа $\langle D, v, y\rangle < D_1$, и D_1 — одного из видов 3, 5, 6, указанных в утверждении леммы. Следовательно, $vy = yv$. Таким образом, $I\langle v\rangle$ — локально конечная 2-группа из S, периода не более 4, что противоречит максимальности I в указанном смысле. Итак, все инволюции из S лежат в $Z(I)$. Отсюда вытекает, что S периода не более 4, значит, локально конечна (предложение 1.2.22). Но тогда $S = I$. Противоречие.

Пусть S не содержит элементарных абелевых групп порядка более четырех. По предложению 1.3.1 S — черниковская группа ранга не более 2.

Лемма доказана.

Положим

$\mathfrak{N} = \{L_2(2^n); Re(3^{2n+1}); U_3(2^{2n}); Sz(2^{2n+1}); L_2(q), q \equiv 3, 5 \pmod 8)\}$.

$\mathfrak{A} = \{L_2(q), q-$ нечетно и $q \neq 3, 5\ (mod\ 8)\}$.

$\mathfrak{B} = \{U_3(q), q-$ нечетно$\}$.

Лемма 5.2.3. *Для* $\mathfrak{M}(1)$ *возможны только следующие взаимоисключающие случаи* :
(A) $\mathfrak{M}(1) \subseteq \mathfrak{N}(1)$.
(B) $\mathfrak{M}(1) \subseteq \mathfrak{N}(1) \cup \mathfrak{A}(1)$, *где* $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$.
(C) $\mathfrak{M}(1) \subseteq \mathfrak{N}(1) \cup \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$, *где* $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$,

Доказательство. Непосредственное следствие определения множеств $\mathfrak{M}(1), \mathfrak{N}(1), \mathfrak{A}(1)$, $\mathfrak{B}(1)$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы для случая (A)

Для данного случая теорема доказана по теореме 5.1.1 и предложению 1.4.20.

Доказательство теоремы для случая (B)

Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G. Рассмотрим ситуацию, когда S — конечная группа. По предложению 1.3.6 S — одного из видов 1–6, указанных в лемме 5.2.2. Так как $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, то S содержит конечную группу диэдра порядка более 4, следовательно, S не может быть вида 3, 5, 6. Если S — вида 1 или 2, то $\mathfrak{M}(1)$ содержит $X \simeq U_3(q)$ для некоторого нечетного q, что невозможно. Следовательно, для любого $X \in \mathfrak{M}(1), X \simeq L_2(q)$. По предложению 1.3.8 $T(G) \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда некоторая S — бесконечная группа. Тогда все силовские 2-подгруппы из G бесконечны. Поскольку $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, а $\mathfrak{B}(1) = \varnothing$, то найдется S вида 8 с полной частью $\tilde{S}$ ранга 1. Предположим, что в G найдется силовская 2-подгруппа S_1 вида 7. По предложению 1.3.7 можно считать, что $|S \cap S_1|$ больше любого наперед заданного числа. Последнее означает, что $S \cap S_1$ содержит элемент порядка 8 , что невозможно, поскольку S_1 — периода 4. Таким образом, G не может содержать силовских 2-подгрупп вида 7 из утверждения леммы 5.2.2. Следовательно, для любого $X \in \mathfrak{M}(1), X \simeq L_2(q)$, и по предложению 1.3.8 $T(G) \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.

Теорема для случая (B) доказана.

Доказательство теоремы для случая (C)

Предположим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример.

Лемма 5.2.4. *G — содержит бесконечно много элементов конечного порядка.*

Доказательство. Действительно, в противном случае, по предложению 1.2.1, G обладает конечной периодической частью $T(G)$. По условию насыщенности $T(G) \simeq \mathfrak{M}$. Противоречие с выбором G.

Лемма доказана.

Лемма 5.2.5. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда* :

1. *S — одного из видов* 1, 2, 8, *перечисленных в условии леммы* 5.2.2.

2. *Ранг S равен* 2.

3. *Если $K \in \mathfrak{B}(1)$ и S_K — силовская 2-подгруппа группы K такая, что $S_K < S$, где S вида 8 из леммы 5.2.2, то полная часть $\tilde{S}$ группы S ранга 2.*

Доказательство. 1.Так как $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, то пусть $1 \neq K \in \mathfrak{B}(1)$ и S_K — силовская 2-подгруппа из K. Если S — конечная группа, то можно считать, что $S_K < S$, S содержит элемент порядка 8 (предложение 1.4.8 (пункт 8)), $Z(S)$ не содержит все инволюции из S, в этом случае S либо вида 1, либо вида 2 из утверждения леммы 5.2.2, и лемма доказана.

Если S — бесконечная группа, то все силовские 2-подгруппы из G бесконечны. Пусть S_1 — силовская 2-подгруппа из G, содержащая S_K. В этом случае S_1 содержит элемент порядка 8, и, следовательно, S_1 вида 8 из леммы 5.2.2. Если в G найдется силовская 2-подгруппа S_2 вида 7 из леммы 5.2.2, то по предложению 1.3.7 можно считать, что $|S_1 \cap S_2| > m$ для любого наперед заданного натурального m. В этом случае всегда можно подобрать такое m, что $S_1 \cap S_2$ содержит элемент порядка 8 из S_1, что невозможно, так как S_2 — группа периода 4. Итак, G не может содержать силовских 2-подгрупп вида 7 из леммы 5.2.2. Следовательно, S вида 8 из утверждения леммы 5.2.2.

2. Второе утверждение леммы вытекает из первого.

3. В этом случае ранг ее полной части $\tilde{S}$ равен 1 (лемма 5.2.2), S_K — полудиэдральная группа и $S = \tilde{S} \leftthreetimes \langle S_K \rangle$, что невозможно.

Лемма доказана.

Лемма 5.2.6. *$\mathfrak{M}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных групп, и для любой группы $K \in \mathfrak{M}(1)$*

$$K \,\widetilde{\in}\, \{U_3(q), L_2(r)\},$$

где q, r — нечетны ($r > 3$).

Доказательство. По предложению 1.3.4 и лемме 5.2.4 G содержит бесконечную локально конечную подгруппу. Последнее означает, что порядки групп из множества $\mathfrak{M}(1)$ не ограничены в совокупности, т. е. $\mathfrak{M}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных конечных подгрупп. Второе утверждение леммы вытекает из леммы 5.2.5 (пункты 1, 2).

Лемма доказана.

Лемма 5.2.7. *Все инволюции в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y — две различные инволюции из G. Так как G — группа Шункова, то $\langle x, y \rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle x, y \rangle < K \in \mathfrak{M}(1)$. По лемме 5.2.6 $K \mathrel{\widetilde{\in}} \{U_3(q), L_2(r)\}$, где q, r — нечетны. Так как K — группа лиева типа ранга 1, то x, y сопряжены в K. Поскольку $K < G$, то x, y сопряжены в G.

Лемма доказана.

Лемма 5.2.8. *Все четверные подгруппы из G сопряжены.*

Доказательство. Пусть A, B — две различные четверные подгруппы из G. По лемме 5.2.7 все инволюции из G сопряжены, следовательно, для некоторого $g \in G$, $A \cap B^g \neq e$. Если $A = B^g$, то все доказано. Пусть $A \neq B^g$. Но тогда фактор-группа $\langle A, B^g \rangle / (A \cap B^g)$ — конечная группа, как подгруппа группы Шункова, порожденная двумя инволюциями. Если $\langle A, B^g \rangle$ — абелева группа, то она элементарная абелева порядка 8, что невозможно ввиду леммы 5.2.5. Следовательно, либо

$$\langle A, B^g \rangle = (A \cap B^g) \times (\langle f \rangle \leftthreetimes \langle t \rangle),$$

где t — инволюция, $\langle f \rangle$ содержит некоторую инволюцию f_1 и $f^t = f^{-1}$, либо

$$\langle A, B^g \rangle = \langle f \rangle \leftthreetimes \langle t \rangle \; -$$

группа диэдра. Первый случай невозможен по причине того, что

$$(A \cap B^g) \times \langle f_1 \rangle \times \langle t \rangle \; -$$

элементарная абелева группа порядка 8, что, как отмечалось выше, невозможно. Во втором случае, ввиду сопряженности силовских 2-подгрупп в группе $\langle A, B^g \rangle$, можно считать, что $\langle A, B^g \rangle$ — 2-группа диэдра порядка более 4. Если силовская 2-подгруппа S из G конечна, то она, поскольку $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, одного из видов 1, 2 леммы 5.2.2 и $\langle A, B^g \rangle$ лежит в некоторой силовской 2-подгруппе конечной группы K такой, что $K \simeq U_3(q)$, где q — нечетно. В этом случае все доказано ввиду предложения 1.4.8 (пункт 8). Если силовская 2-подгруппа из G бесконечна, то $\langle A, B^g \rangle$ лежит в некоторой бесконечной силовской 2-подгруппе S_1, и она вида 8 из леммы 5.2.2. Если ранг $\tilde{S}_1$ равен 1, то $S_1 = \tilde{S}_1 \leftthreetimes \langle t \rangle$, где t — инволюция и для любого $s \in \tilde{S}_1, s^t = s^{-1}$. В этом случае, как нетрудно видеть, A, B^g сопряжены в S_1. Если ранг полной части $\tilde{S}_1$ равен 2, то $\langle A, B^g \rangle$ лежит в некоторой $K \simeq U_3(q)$, где q — нечетно. По предложению 1.4.8 (пункт 7) A, B^g сопряжены в K. Поскольку $K < G$, то A, B сопряжены в G.

Лемма доказана.

Лемма 5.2.9. $\mathfrak{B}(1)$ *содержит бесконечно много неизоморфных групп.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда порядки групп из $\mathfrak{B}(1)$ ограничены в совокупности. Пусть A — четверная группа из G. Если силовская 2-подгруппа S группы G бесконечна, то из того факта, что $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$ и леммы 5.2.5 (пункт 3) вытекает, что можно выбрать S с полной частью $\tilde{S}$ ранга 2. Ввиду леммы 5.2.8 можно считать, что $A < \tilde{S}$. Но в этом случае из предложения 1.4.8 (пункт 3) и условия насыщенности получаем, что $\mathfrak{B}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных групп. Противоречие. Таким образом, все силовские 2-подгруппы, в частности S, конечны и сопряжены (предложение 1.3.6). По лемме 5.2.6 множество $\mathfrak{M}(1) \setminus \mathfrak{B}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных групп и для любой группы $K \in \mathfrak{M}(1) \setminus \mathfrak{B}(1)$, $K \simeq \{L_2(q)\}$, где q — нечетно. Пусть x — инволюция из A.

Ввиду леммы 5.2.6 и предложения 1.3.4 $C_G(x)$ содержит бесконечную локально конечную подгруппу.

Поскольку множество $\mathfrak{B}(1)$ содержит конечное число неизоморфных групп, то существует такое натуральное m, что для любой группы $Y \in \mathfrak{B}(1)$, $|Y| < m$. Следовательно, множество делителей порядков элементов групп из множества $\mathfrak{B}(1)$ конечно.

Покажем, что множество простых делителей порядков элементов из $C_G(x)$ конечно. Действительно, если это не так, то возьмем в $C_G(x)$ элемент b простого порядка $p > m$. Так как G — группа Шункова, то для любого $g \in C_G(x)$ группа $\langle x, b, b^g \rangle$ конечна. По условию насыщенности $\langle x, b, b^g \rangle < R_g$, где $R_g \in \mathfrak{M}(1)$. Так как $p > m$, то $R_g \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного r. В силу того, что $C_R(x)$ — группа диэдра (предложение 1.4.3), $\langle b \rangle = \langle b^g \rangle$, и $\langle b \rangle$ — нормальная подгруппа в $C_G(x)$.

Так как $C_G(x)$ содержит конечную подгруппу $K \in \mathfrak{B}(1)$, то по предложению 1.4.8 $C_K(x) \simeq GU_2(q)$. Так как $C_K(x) < C_G(x)$, то $\langle b \rangle C_K(x)$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle b \rangle C_K(x) < W$, где $W \in \mathfrak{M}(1) \setminus \mathfrak{B}(1)$, поскольку W содержит элемент b. В этом случае $W \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного r. Следовательно, $C_W(x)$ — группа диэдра, что невозможно, поскольку $\langle b \rangle C_K(x) < C_W(x)$. Противоречие.

Возьмем в $C_G(x)$ бесконечную абелеву локально конечную подгруппу D (предложение 1.3.4, лемма 5.2.6). Так как силовская 2-подгруппа из G конечна, то силовская 2-подгруппа из D также конечна. В силу конечности множества простых делителей порядков элементов из D и того факта, что ранги конечных p-групп из D не более 2, получаем, что D — черниковская группа. Следовательно, можно считать. что D — квазициклическая p-группа (p — простое нечетное число, так как силовская 2-подгруппа конечна). Возмем в D элемент b простого порядка p. Так как G — группа Шункова, то для любого $g \in C_G(x)$ группа $\langle x, b, b^g \rangle$ конечна. По условию насыщенности $\langle x, b, b^g \rangle < R$, где $R \in \mathfrak{M}(1)$.

Предположим, что для любого g $R \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного r. В силу того, что $C_R(x)$ — группа диэдра (предложение 1.4.3), $\langle b \rangle = \langle b^g \rangle$ и $\langle b \rangle$ — нормальная подгруппа в $C_G(x)$. Так как $C_G(x)$ содержит конечную подгруппу $K \in \mathfrak{B}(1)$, то по предложению 1.4.8 $C_K(x) \simeq GU_2(q)$. Так как $C_K(x) < C_G(x)$, то $\langle b \rangle C_K(x)$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle b \rangle C_K(x) < R$, где $R \in \mathfrak{B}(1)$, поскольку R содержит $C_K(x)$. Следовательно, $R \simeq U_3(q_1)$ для некоторого нечетного q_1 и $|b|$ делит $q_1 + 1$, поскольку $\langle b \rangle$ — нормальная подгруппа в $C_R(x)$. Следовательно, в $C_R(x)$ есть подгруппа $\langle b \rangle \times \langle b_1 \rangle$, где $|b| = |b_1|$, которая лежит в централизаторе некоторой четверной группы V из R и $x \in V$ (предложение 1.4.8, пункты 1–4). В этом случае

$$C_R(V) = C_R(\langle b \rangle \times \langle b_1 \rangle).$$

Так как D — квазициклическая p-группа, то возьмем в D элемент b_2 со свойством $b_2^p = b$. Группа $\langle V,\ b_2 \rangle$ содержит конечную нормальную подгруппу $\langle x, b \rangle$. Тогда фактор-группа $\langle V,\ b_2 \rangle / \langle x, b \rangle = \langle \overline{v}, \overline{b_2} \rangle$, где $\overline{V}$ — группа порядка 2, а $\overline{b_2}$ — элемент простого порядка p. Поскольку G — группа Шункова, то по предложению 1.3.3 $\langle V,\ b_2 \rangle / \langle x, b \rangle = \langle \overline{V}, \overline{b_2} \rangle$ — конечная группа. Следовательно, $\langle V,\ b_2 \rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle V,\ b_2 \rangle < R_1 \in \mathfrak{M}(1)$. Так как R_1 содержит четверную группу V и элемент b простого нечетного прядка и $b \in C_{R_1}(V)$, то $R_1 \simeq U_3(q_2)$ для некоторого нечетного q_2. По предложению 1.4.8 (пункты 1–4) $|b_2|$ делит $q_2 + 1$. Следовательно, $b_2 \in C_{R_1}(V) < C_G(x)$. Таким образом, p^2 делит $|R_1|$. Далее, рассуждая по индукции и пользуясь полнотой D, получаем, что для любого элемента $b_k \in D$, имеющего порядок p^k, в $C_G(x)$ существует четверная группа V_k, содержащая инволюцию x, что $b_k \in< C_G(V) < C_G(x)$. Из полученных включений вытекает неограниченность порядков групп из множества $\mathfrak{B}(1)$, что, как отмечалось выше, невозможно.

Итак, для некоторого $g \in C_G(x)$ $R \simeq U_3(q)$ для некоторого нечетного q. Если $|b|$ делит

$q+1$, то, рассуждая как в предыдущем случае, приходим к неограниченности порядков элементов множества $\mathfrak{B}(1)$, что невозможно. Пусть $|b|$ не делит $q+1$. Тогда $|b|$ делит $q-1$, и в $C_R(x)$ есть элемент f порядка 4 такой, что $b^f = b^{-1}, f^2 = x$. В силу полноты D в ней найдется элемент b_1, что $b_1^p = b$. Группа $\langle f, b_1\rangle$ содержит конечную нормальную подгруппу $\langle x, b\rangle$, фактор-группа по которой $\langle f, b_1\rangle/\langle x, b\rangle = \langle \overline{f},\ \overline{b_1}\rangle$ — конечная группа. Следовательно, $\langle f, b_1\rangle$ — конечная группа и по условию насыщенности $\langle f, b_1\rangle < R_1 \simeq U_3(q)$ для некоторого нечетного q (изоморфизм $R_1 \simeq L_2(r)$ невозможен по причине того, что в этом случае $C_{R_1}(x)$ содержит неабелеву подгруппу $\langle f, b\rangle$, которая не является группой диэдра, что невозможно). Таким образом, в $\mathfrak{B}(1)$ найдется группа, порядок которой делится на p^2. Далее, рассуждая по индукции, получаем, что множество $\mathfrak{B}(1)$ содержит группы сколь угодно большого порядка. Противоречие с нашим предположением.

Следовательно, множество $\mathfrak{B}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных групп.

Лемма доказана.

По лемме 5.2.9 в $\mathfrak{B}(1)$ найдется группа, изоморфная $U_3(q)$, где $q > 5$ и нечетно. Отождествим указанную группу с $L_3^{(-)}(q) = U_3(q)$ из предложения 1.4.8 и будем далее использовать обозначения этого предложения: $i, j, w, v, b, d_1, d_2, A, V, B$. Пусть $N = N_G(A)$, $C_A = C_G(A)$, $C_B = C_G(B)$.

Лемма 5.2.10. $N = C_A \leftthreetimes V$.

Доказательство. Очевидно, $C_A \leftthreetimes V \subseteq N$. Докажем обратное включение. Пусть $g \in N$. Тогда для некоторого $v \in V, A^g = A^v$ и $a^g = a^v$ для любого $a \in A$. Следовательно, $a^{gv^{-1}} = a, gv^{-1} = c \in C_A, g = cv \in C_A \leftthreetimes V$.

Лемма доказана.

Лемма 5.2.11. *C_A обладает периодической частью $T(C_A)$, которая является бесконечной абелевой счетной группой ранга 2.*

Доказательство. Пусть K — конечная подгруппа из C_A. По условию насыщенности $K < R \simeq U_3(q)$. По предложению 1.4.8(пункт 4), $C_R(A)$ — абелева группа ранга 2, следовательно, K — абелева группа ранга не более 2. В силу произвольности выбора K, как конечной подгруппы из C_A, получаем, что все конечные подгруппы из C_A — абелевы ранга не более 2. По предложению 1.3.5 C_A обладает периодической частью $T(C_A)$. По леммам 5.2.8, 5.2.9 C_A содержит конечные подгруппы сколь угодно большого порядка. Следовательно, C_A содержит бесконечное множество элементов конечного порядка, а $T(C_A)$ является бесконечной абелевой группой ранга 2 и является счетной (предложение 1.3.4).

Лемма доказана.

Лемма 5.2.12. *N обладает периодической частью $T(N) = T(C_A) \leftthreetimes V$.*

Доказательство. $T(C_A)$ — характеристическая подгруппа в N. По лемме 5.2.11 и предложениям 1.3.1, 1.3.2 фактор-группа $\overline{N} = N/T(C_A)$ является группой Шункова. Покажем, что $\overline{V} \lhd \overline{N}$. Пусть $\overline{b}$ — элемент порядка 3 из $\overline{V}$. Тогда $\langle \overline{b}, \overline{b}^{\overline{g}}\rangle$ — конечная подгруппа для любого $\overline{g} \in \overline{N}$. Пусть K — некоторый ее конечный прообраз в N, содержащий конечную подгруппу $\langle b, b^g, A\rangle$. По условию насыщенности $\langle b, b^g, A\rangle \ < K \ \leq R \in \mathfrak{M}(1)$ и $R \simeq \{U_3(q)\}$. Ясно, что $b^g \in N_R(A) \subset N$. По предложению 1.4.8 (пункты 1–4) $b^g = cb^k$, где $c \in C_R(A) < T(C_A)$, $1 \leqslant k \leqslant 2$. Следовательно, $\langle \overline{b}\rangle = \langle \overline{b}^{\overline{g}}\rangle$ и $T(C_A) \leftthreetimes \langle b\rangle) \lhd N$. По предложениям 1.3.1, 1.3.2 $N/(T(C_A) \leftthreetimes \langle b\rangle)$ — группа Шункова, все конечные подгруппы которой имеют порядок 2 и совпадают с $\langle \overline{w} \rangle$, где $\overline{w} = w(T(C_A)) \leftthreetimes \langle b \rangle)$. По предложению 1.2.3 $T(C_A) \leftthreetimes V = T(N)$.

Лемма доказана.

Лемма 5.2.13. *Если для любой конечной подгруппы K из $T(C_A)$ существует такая подгруппа R, что $K < R \in \mathfrak{B}(1)$ и*

$$R \mathrel{\widetilde{\in}} \{U_3(q) | (3, q+1) = 1\},$$

то $T(C_A) = C \times C^w$, где C — локально циклическая группа.

Доказательство. Рассмотрим конечную подгруппу $K < T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle$. По условию насыщенности $\langle A, K, w \rangle < R \in \mathfrak{M}(1)$, где R — из условия леммы. По предложению 1.4.8 (пункты 1–4) $K < C_R(A) \leftthreetimes \langle w \rangle = (\langle d_1 \rangle \times \langle d_1^w \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle$ — сплетение циклической группы $\langle c \rangle$ при помощи группы $\langle w \rangle$. В силу произвольности выбора K, как конечной подгруппы из $T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle$, получаем, что $T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle$ насыщена сплетениями конечных циклических групп при помощи группы порядка два. По предложению 2.1.13 $T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle = (C \times C^w) \leftthreetimes \langle w \rangle$ — сплетение бесконечной локально циклической группы C при помощи группы $\langle w \rangle$.

Лемма доказана.

Лемма 5.2.14. *Если в $T(C_A)$ существует конечная подгруппа K такая, что для любого R со свойством $K < R \in \mathfrak{B}(1)$ всегда*

$$R \mathrel{\widetilde{\in}} \{U_3(q) | (3, q+1) = 3\},$$

то $T(C_A) = CC^w$, где C — бесконечная локально циклическая группа, $C \cap C^w = \langle d \rangle$ — циклическая группа порядка 3 такая, что фактор-группа $T(C_A)/\langle d \rangle = C/\langle d \rangle \times C^w/\langle d \rangle$.

Доказательство. Пусть K — конечная подгруппа из условия леммы. По условию насыщенности $\langle A, K, w \rangle < R \in \mathfrak{B}(1)$. Из условия леммы и предложения 1.4.8 (пункт 2) вытекает, что $C_R(A) \leftthreetimes \langle w \rangle = (\langle d_1 \rangle \langle d_1^w \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle$, где $C_R(A) = (\langle d_1 \rangle \langle d_1^w \rangle)$, $\langle d_1 \rangle \cap \langle d_1^w \rangle = \langle d \rangle$ — циклическая подгруппа порядка 3, $d^w = d^{-1}$, и фактор-группа $C_R(A)/\langle d \rangle = \langle d_1 \rangle / \langle d \rangle \times \langle d_1^w \rangle / \langle d \rangle$. Поскольку $T(C_A)$ — абелева группа (лемма 5.2.11), то $\langle d \rangle$ — нормальная подгруппа в $T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle$. Несложно видеть, что фактор-группа $(T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle)/\langle d \rangle$ насыщена сплетениями конечных циклических групп при помощи группы порядка 2. По предложению 2.1.13 $(C_A \leftthreetimes \langle w \rangle)/\langle d \rangle = (\overline{C} \times \overline{C}^{\overline{w}}) \leftthreetimes \overline{\langle w \rangle}$, где $\overline{C}$ — бесконечная локально циклическая группа. Следовательно, $T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle = (CC^w) \leftthreetimes \langle w \rangle$, где $C_A = CC^w$, C — бесконечная локально циклическая группа, и $C \cap C^w = \langle d \rangle$.

Лемма доказана.

Лемма 5.2.15. *В G существует бесконечная последовательность групп*

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots$$

со следующими свойствами :

1. $A < M_n \in \mathfrak{M}(1)$ *для любого* $n = 1, 2, 3, \ldots$.
2. $N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A) < \cdots \subset N_{M_n}(A) < \ldots$.
3. $T(N) = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$.

Доказательство. Так как $T(C_A)$ — счетная группа (лемма 5.2.11), то

$$T(C_A) = \{c_1, c_2, \cdots, c_m, \cdots\}.$$

По лемме 5.2.12 $T(N)$ — локально конечная группа. Следовательно, $\langle A, c_1, V\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle A, c_1, V\rangle < M_1 \in \mathfrak{B}(1)$. По предложению 1.4.8 (пункты 1–4)

$$N_{M_1}(A) = D^{(1)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(1)} = C_{M_1}(A)$. Возьмем элемент $c_{m_1} \in \{C_A \setminus C_{M_1}(A)\}$ с минимально возможным значением номера m_1. Поскольку $T(N)$ — локально конечная группа, то $\langle N_{M_1}(A), c_{m_1}\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle N_{M_1}(A), c_{m_1}\rangle < M_2 \in \mathfrak{M}(1).$$

По предложению 1.4.8 (пункты 1–4)

$$N_{M_2}(A) = D^{(2)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(2)} = C_{M_2}(A)$. Ясно, что $N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A)$.

Предположим, что для $n \geqslant 2$ группа $M_n \in \mathfrak{B}(1)$ построена. Возьмем элемент $c_{m_{n-1}} \in \{T(C_A) \setminus C_{U^{(n)}}(A)\}$ с минимально возможным значением номера m_{n-1}. Следовательно, $\langle N_{M_n}(A), c_{m_{n-1}}\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle N_{M_n}(A), c_{m_{n-1}}\rangle < M_{n+1} \in \mathfrak{B}(1).$$

По предложению 1.4.8 (пункт 1–4)

$$N_{M_{n+1}}(A) = D^{(n+1)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(n+1)} = C_{M_{n+1}}(A)$. Ясно, что $N_{M_n}(A) < N_{M_{n+1}}(A)$. Действуя подобным образом, мы получаем последовательность

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots,$$

обладающую свойством 1 из условия леммы. По построению

$$N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A) < \cdots < N_{M_n}(A) < \ldots,$$

и свойство 2 также выполняется. Поскольку $c_m \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$ для любого m и $V < N_{M_n}(A)$ для любого n, то $T(N) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$, и свойство 3 доказано.

Лемма доказана.

Зафиксируем последовательность групп $\{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\}$ из леммы 5.2.15.

Лемма 5.2.16. *Пусть* $T(C_A)$ *— из леммы* 5.2.13. *Тогда* :

1. *Для любой конечной подгруппы* $K = \langle f\rangle \times \langle g\rangle$ *из* $T(C_A)$ *такой, что* $|f| = |g| = m$, $K = H$, *где* $H = \langle r\rangle \times \langle r^w\rangle$ *— подгруппа из* $T(C_A)$, $r \in C$ *и* $|r| = m$.

2. *Без ограничения общности можно считать, что для любой*

$$M_k \in \{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\},$$

$$M_k \simeq \{U_3(q) | (3, q+1) = 1\}.$$

Доказательство. 1. По лемме 5.2.13 $C_A = C \times C^w$, где C — локально циклическая группа. Следовательно, $f = c_1c_2$ для некоторых $c_1 \in C$ и $c_2 \in C^w$, значит, $e = f^m = c_1^m c_2^m$. Так как $C \cap C^w = e$, то $c_1^m = c_2^m = e$, $c_1 \in \langle r \rangle, c_2 \in \langle r^w \rangle$ и $f \in H$. Точно также показывается, что $g \in H$. Так как $|H| = |K|$, то $H = K$. Положим $r = c_1$.

2. Дословное повторение рассуждений леммы 5.2.15 с учетом того факта, что M_n выбирается согласно условию 5.2.13.

Лемма доказана.

Лемма 5.2.17. *Пусть $T(C_A)$ — из леммы 5.2.14. Тогда :*

1. *Для любой конечной подгруппы $K = \langle f \rangle \langle g \rangle$ из $T(C_A)$ такой, что $|f| = |g| = m$ и $\langle d \rangle = \langle f \rangle \cap \langle g \rangle$, имеет место равенство $H = K$, где $H = \langle r \rangle \langle r^w \rangle$ — конечная подгруппа из $T(C_A)$, $r \in C$, $|r| = m$ и $\langle d \rangle = \langle r \rangle \cap \langle r^w \rangle$.*

2. *Без ограничения общности можно считать, что для любой*

$$M_k \in \{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\},$$

$$M_k \simeq \{U_3(q) | (3, q+1) = 3\}.$$

Доказательство. 1. По лемме 5.2.14 $T(C_A) = CC^w$, где C — локально циклическая группа, фактор-группа $T(C_A)/\langle d \rangle = C/\langle d \rangle \times C^w/\langle d \rangle$ – прямое произведение двух изоморфных локально циклических групп. Так как $d \in H \cap K$, то $H/\langle d \rangle \simeq K/\langle d \rangle$. Далее, рассуждая как в предыдущей лемме, получаем, что $H/\langle d \rangle = K/\langle d \rangle$, следовательно, $H = K$.

2. Дословное повторение рассуждений леммы 5.2.15 с учетом того факта, что M_n выбирается согласно условию леммы 5.2.14.

Лемма доказана.

Лемма 5.2.18. *В G существует подгруппа M такая, что :*

1. *$M \simeq U_3(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q нечетной характеристики.*

2. *$A < M$.*

3. *Для любой четверной подгруппы $F < M$, $T(N_G(F)) = N_M(F)$.*

4. *Пусть S_M — силовская 2-подгруппа группы S_M. Тогда S_M — силовская 2-подгруппа из G.*

5. *Силовские 2-подгруппы из M сопряжены.*

Доказательство. 1. По построению $B = \langle w \rangle \times \langle j \rangle < M_n$ для любого n. Из леммы 5.2.8 вытекает, что для любого n $N_{M_n}(B) < T(N_G(B)) = T(C_G(B)) \leftthreetimes V_1$, где V_1 изоморфна группе V. Покажем, что

$$C_{M_1}(B) < C_{M_2}(B) < \cdots < C_{M_n}(B) < \ldots.$$

Действительно, $C_{M_n}(A) < C_{M_{n+1}}(A) < T(C_A)$ для любого n. По лемме 5.2.8 $A^g = B$ для некоторого $g \in G$. Поскольку

$$(C_{M_n}(A))^g < (C_{M_{n+1}}(A))^g < T(C_A)^g,$$

$$(C_{M_n}(A))^g = C_{M_n^g}(A^g) = C_{M_n^g}(B),$$

$$(C_{M_{n+1}}(A))^g = C_{M_{n+1}^g}(A^g)) = C_{M_{n+1}^g}(B),$$

$$T(C_A)^g = C_{G^g}(A^g) = T(C_G(B)),$$

то

$$C_{M_n^g}(B) < C_{M_{n+1}^g}(B) < T(C_G(B)).$$

Так как $C_{M_n}(B) \simeq C_{M_n}(A) \simeq C_{M_n^g}(B)$ и $C_{M_n}(B) < T(C_G(B))$, то по леммам 5.2.16, 5.2.17 $C_{M_n}(B) = C_{M_n^g}(B)$ для любого n. Следовательно, $C_{M_n}(B) < C_{M_{n+1}}(B)$ для любого n, что и требовалось. В силу бесконечности последовательности $\{M_1, M_2, ...M_n, ...\}$ можно считать, что для любого n M_n не изоморфна $U_3(5)$. Следовательно, $M_n = \langle N_{M_n}(A), C_{M_n}(B)\rangle$ (предложение 1.4.8 (пункт 9)) и с учетом леммы 5.2.15 (пункт 2)

$$M_1 < M_2\ , \cdots < M_n\ , \cdots .$$

По предложению 1.2.16 $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \simeq U_3(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q нечетной характеристики.

Пункт 1 доказан.

2. Данный пункт очевиден.

3. Поскольку A и F сопряжены в M, то для некоторого $x \in M$, $A = F^x$ и $N_M(A) = N_M(F^x) = (N_M(F))^x$. Из равенства $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ и леммы 5.2.15 (свойство 3) получаем, что $N_M(A) = N$. Следовательно, $N = (N_M(F))^x$,

$$N_M(F) = T(N)^{x^{-1}} = \langle a^{x^{-1}} \mid a \in N\rangle = N_G(F).$$

Пункт 3 доказан.

4. Предположим обратное: $S_M < S$, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Если S — конечная группа, то она либо вида 1, либо вида 2 из леммы 5.2.2. Поскольку полудиэдральная группа не может содержать в качестве собственной подгруппы полудиэдральную группу, то S — сплетенная 2-группа вида 2 из леммы 5.2.2 порядка не менее 32 и $S < T(N_G(F))$ для некоторой четверной подгруппы F из S. Так как все четверные подгруппы в G сопряжены (лемма 5.2.8), то можно считать, что $F < M$. По пункту 3 $S < M$. Следовательно, $S_M = S$. Противоречие с выбором S.

Если S — бесконечная группа, то она вида 8 из леммы 5.2.2, причем $\tilde{S}$ — полная абелева 2-группа ранга 2, и $S < T(N_G(F))$ для четверной подгруппы F из $\tilde{S}$. Так как все четверные подгруппы в G сопряжены, то можно считать, что $F < M$. По пункту 3 $S < M$. Следовательно, $S_M = S$. Противоречие с выбором S.

Пункт 4 доказан.

5. Пусть $S_1,\ S_2$ — две различные силовские 2-подгруппы группы M. Если одна из них конечна, то вторая конечна и сопряжена с другой по предложению 1.3.6. Если они бесконечны, то они сопряжены как силовские 2-подгруппы из нормализаторов четверных подгрупп, лежащих в их полных абелевых подгруппах группы M.

Пункт 5 доказан.

Лемма доказана.

Лемма 5.2.19. *Пусть $R \in \mathfrak{B}(1)$ и $R \cap M$ содержит четверную подгруппу C. Тогда $R < M$.*

Доказательство. По лемме 5.2.18 (пункт 3) $N_R(C) < R \cap M$. По предложению 1.4.8 (пункты 1–4) $N_R(C)$ содержит четверную подгруппу H, отличную от C и такую, что $\langle H, C\rangle$ — 2-группа. Следовательно, $H < N_R(H) < N_M(H) < M$. Таким образом, $S = \langle N_R(C), N_R(H)\rangle < M$ и поскольку $S \neq R$, то $R \simeq U_3(5)$ и $S \simeq A_7$ — максимальная подгруппа в R (предложение 1.4.8 (пункт 9)). Пусть теперь T — силовская 2-подгруппа из S, содержащая C, H. Поскольку T является группой диэра порядка 8, а силовская 2-подгруппа из R является полудиэдральной группой порядка 16, то возьмем $x \in (N_R(T) \setminus T)$ со свойством $x \notin M$, но $x^2 \in T$. Так как силовская 2-подгруппа из M имеет порядок больше 8 (лемма 5.2.18), то возьмем $y \in (N_M(T) \setminus T)$ со свойством $y^2 \in T$. Так как G — группа Шункова, то $\langle x, y, T \rangle$ — конечная группа. Силовская 2-подгруппа из $\langle x, y, T \rangle$ содержит полудиэдральную группу, следовательно, по условию насыщенности $\langle x, y, T \rangle \subset R_1 \in \mathfrak{B}(1)$. Поскольку $x \in R_1$, но $x \notin M$, то R_1 не лежит в M. Очевидно, R_1 не изоморфна $U_3(5)$, следовательно, $R_1 = \langle N_{R_1}(C), N_{R_1}(H) \rangle < M$ (лемма 5.2.18 (пункт 3)), что невозможно.

Лемма доказана.

Лемма 5.2.20. *Пусть z — инволюция из M, b — элемент простого нечетного порядка из $C_G(z)$. Тогда $b \in M$.*

Доказательство. Предположим обратное. Для любой, отличной от z, инволюции $x \in C_M(z)$ группа $\langle z, b, x \rangle$ конечна (предложения 1.3.3, 1.3.1). По условию насыщенности и лемме 5.2.6 $\langle b, x, z \rangle \leq K$, где $K \simeq \{L_2(r), U_3(q)\}$ и q, r — нечетны. Если для некоторого x $K \simeq U_3(q)$, то, поскольку четверная группа $\langle x, z \rangle < M \cap K, K < M$ (лемма 5.2.19). Следовательно, $b \in M$, и в этом случае все доказано. Пусть для всех инволюций $x \in C_M(z), K \simeq L_2(r)$. Тогда $C_K(z)$ — группа диэдра. Следовательно, $\langle b \rangle = \langle b^x \rangle = \langle b \rangle^x$ и $\langle b \rangle I(C_M(z))$, где $I(C_M(z))$ — подгруппа из $C_M(z)$, порожденная всеми ее инволюциями, есть локально конечная группа. Возьмем в $C_M(z)$ подгруппу K_1, содержащую z и $K_1 \simeq GU_2(q)$ (предложение 1.4.8 (пункт 10)). Рассмотрим подгруппу $I(K_1)$, порожденную всеми инволюциями из K_1. По условию насыщенности конечная группа $\langle b \rangle I(K_1) \leq K_2 \simeq L_2(r)$ и $\langle b \rangle I(K_1) \leq C_{K_2}(z)$. Но в $L_2(r)$ любая неабелева подгруппа из цетрализатора инволюции — группа диэдра, а $\langle b \rangle I(K_1)$ таковой не является (предложение 1.4.8 (пункт 10)). Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 5.2.21. *Пусть z — инволюция из M, b — элемент конечного нечетного порядка из $C_G(z)$. Тогда $b \in M$.*

Доказательство. Пусть P — подгруппа из $C_G(z)$, порожденная инволюцией z и всеми элементами простых нечетных порядков из $C_G(z)$. По лемме 5.2.20 $P \leq M$. Ясно, что P — локально конечная характеристическая подгруппа в $C_G(z)$. Пусть теперь $|b|$ — не простое нечетное число. Без ограничения общности можно считать, что для некоторого простого l $b^l \in P$. Возьмем в M конечную неразрешимую подгруппу $W \simeq SL_2(q)$ (предложение 1.4.8 (пункт 10)). Так как W порождается элементами простых нечетных порядков, то $W < P$. Как отмечалось выше, P — локально конечная характеристическая подгруппа в $C_G(z)$. Следвательно, $\langle z, b, W \rangle$ — конечная группа (предложение 1.2.3). По условию насыщенности $\langle z, b, W \rangle < K$, где

$$K \mathrel{\widetilde{\in}} \{L_2(r),\ U_3(q)\}$$

и r, q — нечетные числа. Ввиду того, что $\langle z, b, W \rangle < C_K(z)$, $K \simeq U_3(q_1)$ для некоторого нечетного q_1. По предложению 1.4.8 $C_K(z) = Z \cdot W_1 \cdot \langle f \rangle$, где $W_1 \simeq SL_2(q_1)$, $Z = Z(C_K(z))$ — циклическая группа порядка q_1+1, $|\ Z \cap L\ | = 2$, $f^2 \in Z$. Тогда $b = b_1 w_1$, где $b_1 \in Z$, $w_1 \in W_1$. Так как W_1 порождается элементами простых нечетных порядков, то по лемме 5.2.20 $w_1 \in P$. Ясно, что b_1 не лежит в P, но $1 \neq b_1^l \in P$. По предложению 1.4.3 порядок W_1 делится на $q+1$. Следовательно, в W_1 найдется элемент d порядка $|\ b_1^l\ |$. По предложению 1.4.8 (пункты 1–4) группа $\langle z \rangle \times \langle d \rangle \times \langle b_1^l \rangle$ лежит в $C_K(F)$, где F — некоторая четверная группа из K, содержащая инволюцию z. В этом случае $C_K(F) < C_M(z)$, в $C_M(z)$ найдется инволюция $x \neq z$ и $x \in C_M(b_1^l)$ (например, инволюция $x \in F$ и $x \neq z$). Так как G — группа Шункова, и фактор-группа $\langle z,\ x\ b_1\rangle/\langle z,\ b_1^l\rangle$ порождается элементом простого порядка l и инволюцией, то по предложениям 1.3.3, 1.3.1 $\langle z,\ x\ b_1\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle b,\ z,\ x\ b_1\rangle < R \mathrel{\widetilde{\in}} \{L_2(r),\ U_3(q)\}.$$

Так как элемент b_1^l — нечетного порядка, централизуется четверной группой $F = \langle z\rangle \times \langle x\rangle$, то $R \simeq U_3(q_2)$ для некоторого нечетного q_2, и $R \cap M$ содержит четверную группу $\langle z\rangle \times \langle x\rangle$. По лемме 5.2.19 $R < M$. Следовательно, $b_1 \in M$. Как отмечалось выше, $b = b_1 w_1$, где $w_1 \in M$. Таким образом, $b \in M$, все элементы конечных нечетных порядков из $C_G(z)$ лежат в M и порождают вместе с инволюцией z характеристическую подгруппу P_1. Следовательно, $P < M$.

Лемма доказана.

Лемма 5.2.22. *Пусть z — инволюция из M. Тогда все инволюции из $C_G(z)$ лежат в M.*

Доказательство. Пусть P — подгруппа из $C_G(z)$, порожденная всеми элементами нечетных порядков из $C_G(z)$ и инволюцией z. По лемме 5.2.21 P — характеристическая подгруппа в $C_G(z)$ и $P < M$. Возьмем в P такую конечную подгруппу L, что $z \in L$, где $L \simeq SL_2(r)$ (r — нечетное больше 3). Возьмем в $C_M(z)$ инволюцию $y \neq z$. Пусть x — произвольная инволюция из $C_G(z)$. Так как G — группа Шункова, то $\langle x, y\rangle$ — конечная группа, и $P \cdot \langle x, y\rangle$ — локально конечная группа. По условию насыщенности конечная группа $\langle L, y, x\rangle \leq R$, где $R \simeq U_3(q)$ для некоторого нечетного q. Так как $M \cap R$ содержит четверную подгруппу $\langle z\rangle \times \langle y\rangle$, то по лемме 5.2.19 $R < M$, и $x \in M$. В силу произвольности выбора x, как инволюции из $C_G(x)$, получаем, что все инволюции из $C_G(z)$ лежат в M.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Пусть $X \in \mathfrak{N}(1) \neq \varnothing$ и X не лежит ни в каком $Y \in \mathfrak{B}(1)$. По леммам 5.2.8, 5.2.18 (пункт 3) можно считать, что

$$X \cap M = N_X(F),$$

где F — четверная подгруппа из X. Если X не изоморфна A_5, то из списка максимальных подгрупп X (предложение 1.4.3) и леммы 5.2.22 вытекает равенство $X = \langle C_X(x), C_X(y)\rangle < M$ и $X < K < M$, $K \simeq U_3(q)$, q — нечетно, а x, y — различные инволюции из A. Следовательно, $X < K \in \mathfrak{B}(1)$. Противоречие с выбором X. Пусть $X \simeq A_5$. Возьмем элемент b порядка 3 из $N_X(A)$ и инволюции $v \in N_X(\langle b\rangle)$, $w \in N_M(\langle b\rangle)$ такие, что $b^v = b^{-1}, b^w = b^{-1}$. Ясно, что $\langle b, v\rangle \neq \langle b, w\rangle$. По условию насыщенности конечная группа $\langle v, w, b\rangle < R$, R не лежит в M и R не изоморфна A_5 (поскольку $\langle b, v\rangle \neq \langle b, w\rangle$). Если $R \simeq L_2(q)$, то $R = \langle C_R(bw), C_R(b^2 w)\rangle$ и по лемме 5.2.22 $R < M$. Противоречие. Следовательно, $R \in \mathfrak{B}(1)$. Так как $C_R(w) \simeq GU_2(q)$ для некоторого нечетного q, то $R \cap M$ содержит четверную подгруппу и по лемме 5.2.19 $R < M$. Противоречие с выбором R. Таким образом, для любого $X \in \mathfrak{N}(1)$ найдется $Y \in \mathfrak{B}(1)$ такой, что $X < Y$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{B}(1)$, в качестве насыщающгo множества для G можно взять $\mathfrak{B}(1)$, и по теореме 4.1.7 G обладает периодической частью $T(G) \simeq U_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Теорема доказана.

Глава 6

Периодические группы, насыщенные группами лиева типа ранга 1

6.1 Периодические группы, насыщенные линейными группами степени 2 и унитарными группами степени 3

Теорема 6.1.1. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества конечных простых групп*

$$\mathfrak{M} = \{L_2(r), U_3(q) \mid r, q - \text{ нечетные}, \ r > 3\}.$$

Тогда G изоморфна $L_2(R)$ или $U_3(Q)$, где R — локально конечное поле нечетной характеристики.

Доказательство.

Пусть G — контрпример к заключению теоремы. Тогда G — простая периодическая не локально конечная группа (предложения 1.2.15, 1.2.16). Положим

$$\mathfrak{A} = \{L_2(r) \mid r > 3, \ r - \text{ нечетное}\},$$

$$\mathfrak{B} = \{U_3(q) \mid q \geqslant 3, \ q - \text{ нечетное}\},$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}.$$

Тогда $\mathfrak{M}$ — насыщающее множество для группы G, и не существует группы K, для которой одновременно выполнено $K \mathrel{\widetilde{\in}} \mathfrak{A}$ и $K \mathrel{\widetilde{\in}} \mathfrak{B}$.

Лемма 6.1.2. $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$, *где $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, и существует такая группа $X \in \mathfrak{A}(1)$, что $X \not\leq Y$ для любой группы $Y \in \mathfrak{B}(1)$.*

Доказательство. В противном случае одно из множеств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ является насыщающим множеством для G и по предложению 1.2.8 и теореме 4.3.1 G не является контрпримером к теореме.

Лемма доказана.

Лемма 6.1.3. *Силовская 2-подгруппа S группы G имеет один из следующих видов* :
1. $S = \langle a, v \mid a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1}\rangle$ *— полудиэдральная группа.*
2. $S = \langle a, w \mid a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = 1, a^w = b, ab = ba\rangle$ *— сплетенная 2-группа.*
3. S *— бесконечная черниковская группа ранга не более 2.*

Доказательство. По предложениям 1.2.8, 1.4.8 (пункты 6, 7) и 1.4.3 (пункт 1) G не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8. Если S бесконечна, то по предложению 1.2.10 S — черниковская группа ранга не более двух.

Предположим, что S конечна. По лемме 6.1.2 существует $K \in \mathfrak{B}(1)$. Пусть T — ее силовская 2-подгруппа, и R — силовская 2-подгруппа группы G, содержащая T. По предложению 1.2.8 R конечна. По предположению 1.4.8 (пункты 6, 7) R изоморфна группе типа 1 или 2 из заключения леммы. По предложению 1.2.8 S и R сопряжены.

Лемма доказана.

Лемма 6.1.4. *Все инволюции в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y — две различные инволюции из G. Так как G — периодическая группа, то $\langle x, y\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle x, y\rangle < K \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, K изоморфна $U_3(q)$ или $L_2(q)$ для некоторого q и x, y сопряжены в K (в силу предложений 1.4.8 (пункт 13), 1.4.3 (пункт 4)). Поскольку $K < G$, то x, y сопряжены в G.

Лемма доказана.

Лемма 6.1.5. *Все четверные подгруппы из G сопряжены.*

Доказательство. Пусть A, B — две различные четверные подгруппы из G. По лемме 6.1.4 все инволюции из G сопряжены, следовательно, для некоторого $g \in G$ выполнено $A \cap B^g \neq 1$. Если $A = B^g$, то все доказано. Пусть $A \neq B^g$. Но тогда фактор-группа $\langle A, B^g\rangle/(A\cap B^g)$ конечна, как подгруппа периодической группы, порожденная двумя инволюциями. Следовательно, $\langle A, B^g\rangle$ — конечная группа. Так как силовские 2-подгруппы в конечной группе сопряжены, то можно считать, что для некоторого элемента $h \in \langle A, B^g\rangle$ группа $K = \langle A, B^{gh}\rangle$ является 2-группой.

Пусть $K \leq M \in \mathfrak{M}(1)$, T — силовская 2-подгруппа из M, содержащая K. Если $M \in \mathfrak{B}(1)$, то A сопряжена с B^{gh} в M по предложению 1.4.8 (пункт 8), и лемма доказана. Если $M \in \mathfrak{A}(1)$, то T не является силовской 2-подгруппой в G по лемме 6.1.4. В этом случае пусть T_1 — 2-подгруппа из G, содержащая T в качестве подгруппы индекса 2. Если T_1 — группа диэдра, то A и B^{gh} сопряжены в T_1, т. е. заключение леммы верно. Если же T_1 не является группой диэдра, то $T_1 \leq L \in \mathfrak{B}(1)$, и A сопряжена с B^{gh} в L.

Лемма доказана.

По лемме 6.1.2 в G найдется подгруппа K, изоморфная $U_3(q)$, где $q \geqslant 3$ и нечетно. Отождествим указанную группу K с $L_3^-(q) = U$ из предложения 1.4.8 и будем далее использовать обозначения этого предложения: i, j, w, v, b, A, V, B. Пусть $N = N_G(A)$, $C_A = C_G(A)$, $C_B = C_G(B)$.

Лемма 6.1.6. *$N = C_A \leftthreetimes V$, где C_A является бесконечной абелевой счетной группой ранга 2.*

Доказательство. Очевидно, $C_A \leftthreetimes V \leq N$. Докажем обратное включение. Пусть $g \in N$. Тогда для некоторого $v \in V$ выполнено $A^g = A^v = A$ и $a^g = a^v$ для любого $a \in A$. Следовательно,

$$a^{gv^{-1}} = a, gv^{-1} = c \in C_A, g = cv \in C_A \leftthreetimes V, N \leq C_A \leftthreetimes V.$$

Итак, $N = C_A \leftthreetimes V$. Так как G — не локально конечная группа, то по предложению 1.2.6 $C = C_G(i)$ — бесконечная группа. Пусть C — не локально конечная группа. Тогда по предложению 1.2.6 $C_C(j)$ — бесконечная группа. Следовательно, $C_A \leftthreetimes \langle b\rangle$ — бесконечная группа, и для любого $c \in C_A$ элемент cb имеет порядок 3. По предложению 1.2.12 C_A — нильпотентная группа. Отсюда и из условия насыщенности вытекает, что C_A — бесконечная абелева группа ранга 2. Пусть C — локально конечная группа. По предложению 1.4.8 (пункт 10) $C_U(i) \simeq GU_2(q)$. Следовательно, $C_U(i)$ — не циклическая группа и не группа диэдра. В силу бесконечности C для любого натурального m в C найдется конечная подгруппа L такая, что $C_U(i) < L$ и $|L| > m$. По условию насыщенности и предложениям 1.4.8 (пункт 10), 1.4.3 (пункт 2) $L < K_1 \in \mathfrak{B}(1)$ и $|K| > m$. В силу произвольности выбора m получаем, что C_A содержит конечные подгруппы сколь угодно большого порядка. Следовательно, C_A — бесконечная группа. В этом случае, как показано выше, C_A — абелева группа ранга 2.

Лемма доказана.

Лемма 6.1.7. *В G существует бесконечная последовательность групп*

$$M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$$

со следующими свойствами :

1. $A \leftthreetimes V < M_n \in \mathfrak{B}(1)$ *для любого* $n = 1, 2, 3, \dots$.
2. $N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A) < \dots < N_{M_n}(A) < \dots$.
3. $N = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$.

Доказательство. Так как C_A — счетная группа (лемма 6.1.6), то

$$C_A = \{c_1, c_2, \dots, c_m, \dots\}.$$

По лемме 6.1.6 и предложению 1.2.3 N — локально конечная группа. Следовательно, $\langle A \leftthreetimes V, c_1\rangle$ — конечная группа. В силу бесконечности C_A можно считать, что $A \leftthreetimes V$ — собственная подгруппа в $\langle A \leftthreetimes V, c_1\rangle$. По лемме 6.1.2 $\langle A \leftthreetimes V, c_1\rangle < M_1 \in \mathfrak{B}(1) \cup \mathfrak{A}(1)$. Если $M_1 \in \mathfrak{A}(1)$, то $M_1 \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного r. Но в $L_2(r)$ централизатор любой четверной подгруппы совпадает с самой четверной подгруппой (предложение 1.4.3 (пункт 5)), а у нас это не так, поскольку $A \leftthreetimes V$ — собственная подгруппа в $\langle A \leftthreetimes V, c_1\rangle$. Следовательно, $M_1 \in \mathfrak{B}(1)$. По предложению 1.4.8 (пункты 1–4)

$$N_{M_1}(A) = C_{M_1}(A) \leftthreetimes V.$$

Возьмем элемент $c_{m_1} \in \{C_A \setminus C_{M_1}(A)\}$ с минимально возможным значением номера m_1. Поскольку N — локально конечная группа, то $\langle N_{M_1}(A), c_{m_1}\rangle$ — конечная группа. По лемме 6.1.2 и предложению 1.4.3 (пункт 5)

$$\langle N_{M_1}(A), c_{m_1}\rangle < M_2 \in \mathfrak{B}(1).$$

По предложению 1.4.8 (пункты 1–4)

$$N_{M_2}(A) = C_{M_2}(A) \leftthreetimes V.$$

Ясно, что $N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A)$.

Предположим, что для $n \geqslant 2$ группа $M_n \in \mathfrak{B}(1)$ построена. Возьмем элемент $c_{m_n} \in \{C_A \setminus C_{M_n}(A)\}$ с минимально возможным значением номера m_n. Тогда $\langle N_{M_n}(A), c_{m_n}\rangle$ —

конечная группа. По лемме 6.1.2 и предложению 1.4.3 (пункт 5)

$$\langle N_{M_n}(A), c_{m_n}\rangle < M_{n+1} \in \mathfrak{B}(1).$$

По предложению 1.4.8 (пункты 1–4)

$$N_{M_{n+1}}(A) = C_{M_{n+1}}(A) \leftthreetimes V.$$

Ясно, что $N_{M_n}(A) < N_{M_{n+1}}(A)$. Действуя подобным образом, мы получаем последовательность

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots,$$

обладающую свойством 1 из заключения леммы. По построению

$$N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A) < \ldots < N_{M_n}(A) < \ldots,$$

и свойство 2 также выполняется. Поскольку

$$c_m \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{M_n}(A)$$

для любого m и $V < N_{M_n}(A)$ для любого n, то по лемме 6.1.6

$$C_A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{M_n}(A),$$

$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A),$$

и свойство 3 доказано.

Лемма доказана.

Зафиксируем последовательность групп $\{M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots\}$ из леммы 6.1.7. В силу свойства 2 из этой леммы будем считать, что $|M_1| > |U_3(5)|$.

Лемма 6.1.8. *В G существует подгруппа M со следующими свойствами :*

1. *$M \simeq U_3(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q нечетной характеристики.*
2. *Для любой четверной подгруппы $F < M$, $N_G(F) = N_M(F)$. В частности, $N < M$.*
3. *Силовские 2-подгруппы из M сопряжены.*
4. *Пусть S_M — силовская 2-подгруппа группы M. Тогда S_M — силовская 2-подгруппа из G.*
5. *$N_G(M) = M$.*

Доказательство. 1. По построению $V, A, B < M_n$ для любого n. Выберем $v \in M_n$, для которого $j^v = j$, $i^v = w$, и $v_1 \in M_{n+1}$, для которого $j^{v_1} = j$, $i^{v_1} = w$. Тогда $v_1 v^{-1} = c \in C_A$, т. е. $v_1 = cv$. Так как C_A — абелева (лемма 6.1.6), то

$$M_{n+1} > (C_{M_{n+1}}(A))^{v_1} = (C_{M_{n+1}}(A))^{cv} = (C_{M_{n+1}}(A))^{v}.$$

По построению $C_{M_{n+1}}(A) > C_{M_n}(A)$. Следовательно,

$$(C_{M_{n+1}}(A))^{v} > (C_{M_n}(A))^{v} = C_{M_n^v}(A^v) = C_{M_n}(B).$$

Таким образом, $C_{M_n}(B) < N_{n+1}$. По предложению 1.4.8 (пункт 9) и в силу того, что $|M_n| > |U_3(5)|$ для любого n, получаем

$$M_n = \langle N_{M_n}(A), C_{M_n}(B)\rangle < \langle N_{M_{n+1}}(A), C_{M_{n+1}}\rangle = M_{n+1}.$$

Следовательно, $M_1 < M_2 < \ldots < M_n < \ldots$. По предложению 1.2.16

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \simeq U_3(Q)$$

для подходящего бесконечного локально конечного поля Q нечетной характеристики.

2. Из равенства $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ и леммы 6.1.7 (свойство 3) получаем, что $N_M(A) = N$. Поскольку A и F сопряжены в M (предложение 1.4.8 (пункт 8)), то для некоторого $x \in M$ выполнено $A = F^x$ и

$$N = N_G(A) = N_M(A) = N_M(F^x) = N_{M^x}(F^x) = (N_M(F))^x.$$

Следовательно, $N = (N_M(F))^x$,

$$N_M(F) = N^{x^{-1}} = (N_G(A))^{x^{-1}} = N_{G^{x^{-1}}}(A^{x^{-1}}) = N_G(F).$$

3. Пусть S_1, S_2 — две различные силовские 2-подгруппы группы M. Если одна из них конечна, то вторая конечна и сопряжена с первой по предложению 1.2.8. Если они бесконечны, то они сопряжены как силовские 2-подгруппы из нормализаторов четверных подгрупп, лежащих в полных абелевых подгруппах группы M (см. п. 2).

4. Пусть, напротив, $S_M < S$, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G.

Пусть S — конечная группа. Она имеет вид 1 или 2 из заключения леммы 6.1.3. Поскольку полудиэдральная группа не может содержать в качестве собственной подгруппы полудиэдральную группу, то S — сплетенная 2-группа вида 2 из леммы 6.1.3 порядка не менее 32 и $S < N_G(F)$ для некоторой четверной подгруппы F из S. Так как все четверные подгруппы в G сопряжены (лемма 6.1.5), то можно считать, что $F < M$. По п. 2 $S < M$. Следовательно, $S_M = S$, что противоречит выбору S.

Пусть S — бесконечная группа. Тогда она имеет вид 3 из заключения леммы 6.1.3. Предположим, что S_M — бесконечная группа. Обозначим через $\tilde{S}_M$ полную часть группы S_M.

Тогда $\tilde{S}$ — полная абелева 2-группа ранга 2 и $S < N_G(F)$ для четверной подгруппы F из $\tilde{S}$. Так как все четверные подгруппы в G сопряжены, то можно считать, что $F < M$. По п. 2 $S < M$, а по п. 3 $S_M = S$, что противоречит выбору S.

Предположим, что S_M — конечная группа. Тогда для любого натурального k выполнено $S_M < S_k < S$, где S_k — конечная подгруппа из S со свойством $|S_k| > k$. По условию насыщенности $S_k < H$. Пусть S_H — силовская 2-подгруппа из H. Так как S_H содержит в качестве собственной подгруппы группу S_M, которая является либо полудиэдральной, либо сплетенной группой, то S_H — сплетенная группа. Следовательно, для некоторой четверной группы $F < S_H$ справедливо $S_H < N_G(F)$ (предложение 1.4.8 (пункты 1–4)). По лемме 6.1.5 и п. 2 для некоторого $g \in G$ имеет место $S_M^g < S_H^g < N_G(F^g) < M$. Получили противоречие с тем, что S_M^g — силовская 2-подгруппа в M в силу пункта 3.

5. Пусть $c \in N_G(M)$ и $c \notin M$. Если $A^c = A$, то по п. 2 $c \in M$, что противоречит выбору c. Если $A^c \neq A$, то для некоторого $x \in M$ выполнено $A^{cx} = A$ (предложение 1.4.8 (пункт 8)), и по п. 3 $cx \in M$. Следовательно, $c \in M$, что противоречит выбору M.

Лемма доказана.

Лемма 6.1.9. *Пусть K — конечная 2-подгруппа группы G. Тогда существует такой $g \in G$, что $K^g < M$.*

Доказательство. Если в G есть конечная силовская 2-подгруппа, то заключение леммы справедливо по предложению 1.2.8 и лемме 6.1.8 (п. 4). Пусть силовские 2-подгруппы из G бесконечны, и K — минимальный контрпример к утверждению леммы. Следовательно, в силу леммы 6.1.4 для некоторого $g \in G$ группа $K_1 = K^g \cap M$ неединичная и $|K^g : K_1| = 2$. Возьмем в M силовскую 2-подгруппу S_M. По лемме 6.1.8, предложению 1.2.8 и лемме 6.1.3 S_M — черниковская группа. Обозначим через $\tilde{S}_M$ полную часть S_M. Очевидно, ранг $\tilde{S}_M$ равен 2. Следовательно, в $Z(S_M) \setminus K_1$ найдется элемент z такой, что $z^2 \in K_1$, и $K_1\langle z\rangle$ — подгруппа в S_M. В этом случае $\langle K^g, z\rangle$ — конечная группа. Тогда $\langle K^g, z\rangle < R \in \mathfrak{A}(1)$ и $\langle K^g, z\rangle < C_R(t)$, где t — инволюция из $Z(K^g)$. Очевидно, $C_R(t)$ — группа диэдра и $t \in K_1$.

Если $\langle z\rangle$ — группа порядка 2, то K_1 — группа порядка 2, а K^g — группа порядка 4. Если K^g — четверная группа, то по лемме 6.1.5 $K^{gh} < M$ для некоторого $h \in G$, что противоречит выбору K. Следовательно, K^g — циклическая группа порядка 4. В этом случае $K^g \leftthreetimes \langle z\rangle$ — группа диэдра порядка 8. Очевидно, $K^g < K^g \leftthreetimes \langle z\rangle < N_G(K_1 \times \langle z\rangle)$. Поскольку $K_1 \times \langle z\rangle$ — четверная группа из M, то по лемме 6.1.8 $K < M$. Получили противоречие с выбором K.

Если $\langle z\rangle$ — группа порядка большего 2, то

$$\langle z\rangle \lhd \langle z\rangle K^g, K_1 < \langle z\rangle < \langle z\rangle K^g, \langle z\rangle K^g = \langle z\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle,$$

где v — инволюция. Возьмем инволюцию $a \in S_M \setminus Z(S_M)$. По условию насыщенности группа $\langle z, v, a\rangle$ конечна и $\langle z, v, a\rangle < H \tilde{\in} \mathfrak{A}(1)$. В этом случае $\langle z, v, a\rangle < C_H(t)$. Но $C_H(t)$ — группа диэдра и не может содержать подгруппу $\langle z\rangle \times \langle a\rangle$; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 6.1.10. *Пусть $R \in \mathfrak{B}(1)$, $R \cap M$ содержит четверную подгруппу. Тогда*

$$R < M.$$

Доказательство. Пусть, напротив, C — четверная группа из $R \cap M \neq R$. По лемме 6.1.8 (п. 2) $N_R(C) < M$. По предложению 1.4.8 (пункты 1–4) $N_R(C)$ содержит четверную подгруппу H такую, что $T = \langle C,\ H\rangle$ — группа диэдра порядка 8. По лемме 6.1.8 (п. 2) $N_R(H) < M$. Таким образом, $S = \langle N_R(C), N_R(H)\rangle < M$. Поскольку $S \neq R$, то $R \simeq U_3(5)$, $S \simeq A_7$ и S — максимальная подгруппа в R (предложение 1.4.8 (пункт 9)). Так как T — силовская 2-подгруппа из S, а силовская 2-подгруппа из R является полудиэдральной группой порядка 16, то возьмем $x \in N_R(T) \setminus T$ со свойством $x \notin M$, но $x^2 \in T$. Силовская 2-подгруппа из M имеет порядок больше 8 (лемма 6.1.8, предложение 1.4.8 (пункт 8)). Выберем $y \in N_M(T) \setminus T$ со свойством $y^2 \in T$. Так как G — периодическая группа, то $\langle x, y, T\rangle$ — конечная группа. Силовская 2-подгруппа из $\langle x, y, T\rangle$ содержит силовскую 2-подгруппу из R, которая является полудиэдральной группой. Следовательно, по условию насыщенности $\langle x, y, T\rangle < R_1 \in \mathfrak{B}(1)$. Поскольку $x \in R_1$, но $x \notin M$, то R_1 не лежит в M. Очевидно, R_1 не изоморфна $U_3(5)$, следовательно, $R_1 = \langle N_{R_1}(C), N_{R_1}(H)\rangle < M$ (лемма 6.1.8 (пункт 3)), что невозможно.

Лемма доказана.

Лемма 6.1.11. *Существует инволюция $z \in M$ такая, что $C_G(z) \not< M$.*

Доказательство. Предположим обратное. Возьмем группу $X \in \mathfrak{A}(1)$, удовлетворяющую заключению леммы 6.1.2. Тогда $X \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного $r > 3$. Пусть S_X — силовская 2-подгруппа группы X. По лемме 6.1.9 для некоторого $g \in G$ имеет место $S_X^g < X^g \cap M$. Если S_X^g содержит две неперестановочные инволюции x, y, то по предложению 1.4.3 (пункт 6) $X^g = \langle C_{X^g}(x), C_{X^g}(y)\rangle$. По условию леммы $X^g < M$. Следовательно, $X^g < K < M$ и $K \in \mathfrak{B}(1)$. Тогда $X < K^{g^{-1}}$ и $K^{g-1} \in \mathfrak{B}(1)$, что противоречит выбору X.

Итак, все инволюции из S_X^g перестановочны, и по предложению 1.4.3 (пункт 1) $S_X^g = \langle z\rangle \times \langle u\rangle$ — четверная группа. Так как $X^g \not< M$, то из списка максимальных подгрупп группы $L_2(r)$ ([64, с. 377]), предложения 1.4.3 (пункт 4) и условия леммы получам, что $X^g \simeq L_2(5)$.

По лемме 6.1.8 $N_{X^g}(S_X^g) < M$. Возьмем элемент b порядка 3 из $N_{X^g}(S_X^g)$, инволюцию $x \in N_{X^g}(\langle b\rangle)$, инволюцию $y \in N_M(\langle b\rangle) \setminus X^g$ (предложение 1.4.8 (пункты 2, 3). Так как группа G периодическая, то $\langle b,\ x,\ y\rangle$ — конечная группа. Поскольку $x \notin M$, то $\langle b,\ x,\ y\rangle \not< M$ и $|\langle b,\ x,\ y\rangle| > 6$. По условию насыщенности $\langle b,\ x,\ y\rangle < H \in \mathfrak{M}(1)$. Предположим, что $H \in \mathfrak{B}(1)$. Тогда $H \simeq U_3(q)$ для некоторого нечетного q, и $H \cap M$ содержит инволюцию y. Ясно, что в этом случае $H \not< M$ и $H \cap M$ не содержит четверных групп (лемма 6.1.10). В силу нашего предположения в $H \setminus \langle y\rangle$ найдется инволюция y_1 со свойством $y_1 y = y y_1$. В этом случае $y_1 \in C_G(y)$. По условию леммы $C_G(y) < M$. Следовательно, $y_1 \in M$, $\langle y\rangle \times \langle y_1\rangle < H \cap M$ и $H < M$, что невозможно.

Предположим, что $H \in \mathfrak{A}(1)$. Тогда $H \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного $r > 5$ ($|\langle b,\ x,\ y\rangle| > 6$) и H содержит две неперестановочные инволюции $\{y,\ by\}$. Следовательно, $H = \langle C_H(y),\ C_H(by)\rangle$. Отсюда и из условия леммы вытекает, что $H < M$. Это противоречит выбору H и утверждению леммы 6.1.2.

Лемма доказана.

Лемма 6.1.12. *Пусть S — силовская 2-подгруппа из M. Тогда*

$$S \neq (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle,$$

где A — локально циклическая группа порядка не менее 4, v — инволюция, $A^v = B$.

Доказательство. Предположим обратное. По лемме 6.1.11 в M существует инволюция z такая, что $C_G(z) \not< M$. Пусть $c \in C_G(z) \setminus M$, тогда $z \in M^c \cap M$. По лемме 6.1.8 (пункт 5) $M^c \neq M$. По лемме 6.1.10 $M^c \cap M$ не может содержать четверных подгрупп. Предположим, что существует такой элемент $f \in M^c \cap M$, что $f^2 = z$. Пусть S_M — силовская 2-подгруппа из M, содержащая элемент f, S_{M^c} — силовская 2-подгруппа из M^c, содержащая f. Так как силовские 2-подгруппы в M сопряжены (лемма 6.1.8, пункт 4), то $S \simeq S_M \simeq S_{M^c}$. Следовательно, $S_M = (A_1 \times B_1) \leftthreetimes \langle v_1\rangle$, где A_1 — локально циклическая 2-группа порядка не менее 4, v_1 — инволюция, $A_1^{v_1} = B_1$ и $S_{M^c} = (A_2 \times B_2) \leftthreetimes \langle v_2\rangle$, где A_2 — локально циклическая 2-группа порядка не менее 4, v_2 — инволюция, $A_2^{v_2} = B_2$.

Пусть $f \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$. Тогда найдутся такие инволюции x, y, что $x \in C_{S_M}(f) \setminus M^c \cap M$ и $y \in C_{S_{M^c}}(f) \setminus M^c \cap M$. Конечная группа $\langle f,\ x,\ y\rangle$, очевидно, не является подгруппой группы диэдра. Следовательно, по условию насыщенности $\langle f,\ x,\ y\rangle < U_1 \in \mathfrak{B}(1)$. По лемме 6.1.10 $U_1 < M \cap M^c$. Последнее противоречит тому, что $M \cap M^c$ не содержит четверных подгрупп.

Пусть $f \notin (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$, $f \in (A_1 \times B_1)$, $f \notin (A_2 \times B_2)$. Тогда найдутся такие инволюции $x \in C_{S_M}(f) \setminus M^c \cap M$ и $y \in N_{S_{M^c}}(\langle f\rangle) \setminus M^c \cap M$, что $f^y = f^{-1}$. Конечная группа $\langle f,\ x,\ y\rangle$, очевидно, не является подгруппой группы диэдра. Следовательно, по условию насыщенности $\langle f,\ x,\ y\rangle < U_2 \in \mathfrak{B}(1)$. По лемме 6.1.10 $U_2 < M \cap M^c$. Последнее противоречит тому, что $M \cap M^c$ не содержит четверных подгрупп.

Пусть $f \notin (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$, $f \notin (A_1 \times B_1)$, $f \in (A_2 \times B_2)$. Данный случай аналогичен разобранному выше.

Пусть $f \notin (A_1 \times B_1)$, $f \notin (A_2 \times B_2)$. Тогда найдется элемент $x \in C_{S_M}(f) \setminus M^c \cap M$, $x^2 = f^2$, и инволюция $y \in N_{S_{M^c}}(\langle f \rangle) \setminus M^c \cap M$ такая, что $f^y = f^{-1}$. Конечная группа $\langle f,\ x,\ y \rangle$, очевидно, не является подгруппой группы диэдра. Следовательно, по условию насыщенности $\langle f,\ x,\ y \rangle < U_3 \in \mathfrak{B}(1)$. Так как U_3 содержит четверные группы $\langle f^2 \rangle \times \langle xf \rangle$ и $\langle f^2 \rangle \times \langle y \rangle$, то в силу леммы 6.1.10 $U_3 < M \cap M^c$. Последнее противоречит тому, что $M \cap M^c$ не содержит четверных подгрупп.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда $M \cap M^c$ не содержит элементов порядка 4. По условию леммы найдутся такие элементы x, y порядка 4, что $x^2 = y^2 = z$, $x \in M \setminus M \cap M^c$, $y \in M^c \setminus M \cap M^c$. По условию насыщенности $\langle x,\ y \rangle < U_1 \in \mathfrak{B}(1)$. Ясно, что $U_1 \notin M$, а ситуация $\langle x,\ y \rangle < U_1 \in \mathfrak{A}(1)$ невозможна, поскольку тогда $\langle x,\ y \rangle < C_{U_1}(z)$ — группа диэдра, но $\langle x,\ y \rangle$ таковой не является. Очевидно, что для некоторого $g \in G \setminus M$ выполнено $U_1 < M^g$. Следовательно, $M \cap M^g$ содержит элемент x порядка 4. Как показано выше, это невозможно.

Лемма доказана.

Лемма 6.1.13. *Пусть S — силовская 2-подгруппа из M. Тогда S — не полудиэдральная группа.*

Доказательство. Предположим обратное. В данном случае все силовские 2-подгруппы группы G являются полудиэдральными группами и сопряжены, поскольку конечны (лемма 6.1.8 (пункт 3), предложение 1.2.8). По лемме 6.1.11 существует такая инволюция $z \in M$, что $C_G(z) \not< M$. Пусть $c \in C_G(z) \setminus M$, тогда $z \in M^c \cap M$. По лемме 6.1.8 (пункт 5) $M^c \neq M$. По лемме 6.1.10 $M^c \cap M$ не может содержать четверных подгрупп. Из множества групп $\{M^g | g \in G \setminus M\}$ выберем такую группу M^g, чтобы силовская 2-подгруппа S_g из $M \cap M^g$ имела максимально возможный порядок. В силу существования M^c и конечности силовской 2-подгруппы в M множество таких групп непусто. Ясно, что S_g — 2-группа с единственной инволюцией. Выберем в M элемент $z_1 \in N_M(S_g) \setminus S_g$ со свойством $z_1^2 \in S_g$, а в M^g возьмем элемент $z_2 \in N_{M^g}(S_g) \setminus S_g$ со свойством $z_2^2 \in S_g$. По условию насыщенности $\langle S_g,\ z_1,\ z_2 \rangle < H \in \mathfrak{M}(1)$.

Предположим, что $H \in \mathfrak{B}(1)$. Так как $\langle S_g,\ z_1,\ z_2 \rangle \not< M$, то $H \not< M$ и $M \cap H$ содержит 2-подгруппу $\langle S_g,\ z_1 \rangle$, порядок которой больше порядка S_g. Так как $H < M^h$ для некоторого $h \in G$, то $M \cap M^h$ содержит 2-подгруппу, порядок которой больше $|S_g|$. Получили противоречие с выбором M^g.

Таким образом, в любом случае $H \in \mathfrak{A}(1)$. Значит, $H \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного $r > 3$. Отметим, что в этом случае S_g — циклическая группа. Покажем, что $|S_g| > 2$. Действительно, в противном случае $\langle S_g,\ z_1,\ z_2 \rangle < C_H(s_g)$, где s_g — инволюция из S_g, а элементы z_1, z_2 выбраны так, что $|z_1| = |z_2| = 4$. По предположению $C_H(s_g)$ — группа диэдра. С другой стороны, $C_H(s_g)$ содержит две различные циклические подгруппы $\langle z_1 \rangle$, $\langle z_2 \rangle$ порядка 4, что невозможно.

Покажем, что $|S_g| < 8$. Предположим обратное. Полудиэдральная группа содержит единственную циклическую подгруппу порядка не менее 8. Пусть S_g — максимальная циклическая подгруппа силовских 2-подгрупп M и M^g. Тогда можно считать, что z_1, z_2 — инволюции, а $S_g \leftthreetimes \langle z_1 \rangle$, $S_g \leftthreetimes \langle z_2 \rangle$ — силовские 2-подгруппы из M и M_g соответственно, и они являются полудиэдральными группами. Одновременно они являются силовскими 2-подгруппами в G, следовательно, они являются силовскими 2-подгруппами в H, что невозможно, поскольку силовская 2-подгруппа в H является группой диэдра.

Пусть теперь S_g не является максимальной циклической 2-подгруппой силовских 2-подгрупп M и M^g. Тогда можно считать, что $z_1^2 = z_2^2 = s_g$, где $\langle s_g \rangle = S_g$. В этом случае

$\langle S_g,\ z_1,\ z_2\rangle < C_H(t)$, где t — инволюция из S_g. Поскольку $C_H(t)$ — группа диэдра, то $\langle S_g,\ z_1,\ z_2\rangle$ также должна быть группой диэдра, поскольку не является циклической подгруппой. Однако $\langle S_g,\ z_1,\ z_2\rangle$ не является группой диэдра, так как содержит две различные циклические подгруппы $\langle z_1\rangle$ и $\langle z_2\rangle$ одинакового порядка, большего 8; противоречие.

Покажем, что $|S_g| \neq 4$. Предположим обратное. Тогда $S_g = \langle s_g\rangle$ — циклическая группа порядка 4; пусть $s_g^2 = t$ — инволюция из S_g.

Из структуры полудиэдральной группы следует, что для z_1 и z_2 возможны только следующие случаи:

1. $z_1^2 = z_2^2 = s_g$.
2. $z_1^2 = z_2^2 = s_g^2 = t$, $s_g^{z_1} = s_g^{-1}$, $s_g^{z_2} = s_g^{-1}$.
3. $z_1^2 = s_g$, $z_2^2 = z_g^2 = t$, $s_g^{z_2} = s_g^{-1}$.
4. $z_2^2 = s_g$, $z_1^2 = z_g^2 = t$, $s_g^{z_1} = s_g^{-1}$.

Во всех этих случаях $\langle S_g,\ z_1, z_2\rangle < C_H(t)$. По построению во всех этих случаях $\langle S_g,\ z_1, z_2\rangle$ не являтся циклической группой и не является группой диэдра (так как содержит две различные циклические подгруппы порядка 8 в первом случае и содержит различные циклические подгруппы порядка 4 в оставшихся случаях). С другой стороны, $\langle S_g,\ z_1, z_2\rangle$ — либо группа диэдра, либо циклическая группа (как подгруппа группы диэдра $C_H(t)$); противоречие.

Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы. Пусть S — силовская 2-подгруппа группы M. Из леммы 6.1.8 (пункт 1) и предложения 1.4.8 (пункты 6, 7) вытекает, что либо $S = (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle$, где A — локально циклическая группа порядка не менее 4, v — инволюция, $A^v = B$, либо S — полудиэдральная группа. Получили противоречие с леммами 6.1.12 и 6.1.13.

Теорема доказана.

6.2 Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1

Теорема 6.2.1. *Пусть периодическая группа G насыщена конечными простыми группами лиева типа ранга* 1. *Тогда G изоморфна группе лиева типа ранга* 1 *над подходящим локально конечным полем.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть G – контрпример. Положим

$$\mathfrak{M} = \{L_2(f), U_3(h), Sz(2^{2m+1}), Re(3^{2n+1}) | f > 3, h > 2, m \geqslant 1, n \geqslant 1\} \text{ –}$$

множество всех конечных простых групп лиева типа ранга 1,

$$\mathfrak{D} = \{L_2(r), U_3(q) \mid r, q \text{ – нечетные},\ r > 3, q \geqslant 3\},$$

$$\mathfrak{C} = \{L_2(2^l), U_3(2^k), Sz(2^{2m+1}), Re(3^{2n+1}) \mid l > 2, k > 1\}.$$

Тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{D} \cup \mathfrak{C}$ — насыщающее множество для группы G. Ясно, что $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{D}(1) \cup \mathfrak{C}(1)$.

Лемма 6.2.2. $\mathfrak{D}(1) \neq \varnothing$.

Доказательство. Предположим обратное. Тогда $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{C}(1)$, и взяв $\mathfrak{C}(1)$ в качестве насыщающего множества для G, получим по предложению 1.2.19, что

$$G \mathrel{\widetilde{\in}} \{L_2(R), U_3(Q), Sz(F), Re(P) \mid R, Q, F, P \text{ – локально конечные поля}\}.$$

Противоречие с тем, что G – контрпример.
Лемма доказана.

Лемма 6.2.3. $\mathfrak{C}(1) \neq \varnothing$.

Доказательство. Предположим обратное. Тогда $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{D}(1)$, и взяв $\mathfrak{D}(1)$ в качестве насыщающего множества для G, по теореме 6.1.1 получим, что

$$G \mathrel{\widetilde{\in}} \{L_2(R), U_3(Q) \mid R, Q \ \text{– локально конечные поля}\}.$$

Противоречие с тем, что G — контрпример.
Лемма доказана.

Обозначим через S силовскую 2-подгруппу из G.

Лемма 6.2.4. *S — бесконечная группа.*

Доказательство. Предположим обратное. По предложению 1.2.8 все силовские 2-подгруппы из G конечны и сопряжены с S. По условию насыщенности $S < K \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, либо S изоморфна силовской 2-подгруппе S_X для некоторой группы $X \in \mathfrak{C}(1)$ (лемма 6.2.3), либо S изоморфна силовской 2-подгруппе S_Y для некоторой группы $Y \in \mathfrak{D}(1)$ (лемма 6.2.2). Если S изоморфна S_Y, то либо S — сплетенная 2-группа, либо S — полудиэдальная группа (предложение 1.4.3 (пункты 6,7)), либо S — группа диэдра (предложение 1.4.3). Но во всех этих случаях S не может содержать подгруппу, изоморфную S_X. Следовательно, $S \simeq S_X$. В этом случае все инволюции из S лежат в $Z(S)$, и по предложению 1.4.3

$$\mathfrak{D}(1) = \{Y \mid Y < G,\ Y \simeq L_2(r)\ (r = 3, 5 (mod\ 8)\}.$$

Тогда для любой группы $H \in \mathfrak{M}(1)$,

$$H \mathrel{\tilde{\in}} \{L_2(r)\ (r = 3, 5 (mod\ 8), L_2(2^l), U_3(2^k), Sz(2^{2m+1}), Re(3^{2n+1}\}.$$

По предложению 1.2.19

$$G \mathrel{\tilde{\in}} \{L_2(R), U_3(Q), Sz(F), Re(P) \mid R, Q, F, P \ \text{– локально конечные поля}\}.$$

Противоречие с тем, что G – контрпример.
Лемма доказана.

Лемма 6.2.5. *Если S содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 8, то S – локально конечная группа периода 4, и все инволюции из S лежат в $Z(S)$.*

Доказательство. Пусть A — абелева подгруппа порядка 8 из группы S. По лемме 6.2.4 и предложению 1.4.3 $A < S_A \leq S$, где S_A — бесконечная локально конечная подгруппа группы S. Будем считать S_A максимальной локально конечной подгрупой группы S, содержащей группу A. Из условия насыщенности вытекает, что S_A периода не более 4, и все инволюции из S_A лежат в $Z(S_A)$. Если все инволюции из S лежат в S_A, то для любого $s \in S$ группа $\langle A, s \rangle$ – конечная 2-группа. По условию насыщенности $\langle A, s \rangle < R \in \mathfrak{C}(1)$. Следовательно, $|s| \leq 4$, S — локально конечная группа (предложение 1.2.22), все инволюции из S лежат в $Z(S)$ (условие насыщенности), и в этом случае лемма доказана. Пусть теперь i — инволюция из $S \setminus S_A$. Возьмем инволюцию $j \in S_A$. Ясно, что конечная группа $\langle i, j\rangle \cap S_A = D \neq 1$ не лежит в S_A. В силу нормализаторного условия в конечных 2-группах можно выбрать такие элементы $x \in N_S(D) \setminus S_A, y \in N_{S_A}(D) \setminus D, x^2 \in D, y^2 \in D$. Следовательно, конечная группа $K_1 = \langle x, y, D\rangle \not< S_A$, $D < D_1 = K_1 \cap S_A$, $|D_1| \geqslant 2|D|$. Продолжая этот процесс, мы всегда сможем для любого наперед заданного положительного числа m найти такую конечную подгруппу $K_m \not< S_A$, что $|K_m \cap S_A| > 2^m|D|$. В силу строения S_A (см. выше), начиная с некоторого m, все инволюции из $D_m = K_m \cap S_A$ лежат в $Z(D_m)$ и образуют элементарную абелеву подгруппу порядка не менее 8. Возьмем теперь $y \in N_{K_m}(D_m) \setminus D_m$ и $y^2 \in D_m$. Пусть x – произвольная инволюция из S_A. Тогда $\langle x, y, D_m\rangle$ – конечная 2-группа, и из условия насыщенности получаем $xy = yx$, т. е. y перестановочен со всеми инволюциями из S_A. Так как S_A — максимальная локально конечная подгруппа, содержащая A, то $y \in S_A$. Противоречие с выбором y. Итак, все инволюции из S лежат в S_A и, как показано выше, в этом случае утверждение леммы имеет место.

Лемма доказана.

Лемма 6.2.6. *Если S не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8, то S — черниковская группа ранга 2.*

Доказательство. Действительно, в данном случае S — ограниченного ранга и по предложению 1.2.10 S — черниковская. По условию леммы ранг S равен 2.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Предположим, что группа G содержит подгруппу A, и A — элементарная абелева подгруппа порядка 8. Пусть $\mathfrak{R}$ — множество силовских 2-подгрупп группы G, каждая из которых содержит подгруппу, изоморфную группе A. Пусть $\mathfrak{T}$ — множество всех остальных силовских 2-подгрупп группы G. Если одновременно $\mathfrak{R} \neq \varnothing$ и $\mathfrak{T} \neq \varnothing$, то по предложнию 1.3.7 для любого наперед заданного натурального m найдутся такие $R \in \mathfrak{R}$, $T \in \mathfrak{T}$ со свойством $|T \cap R| > m$, что невозможно по леммам 6.2.5, 6.2.6. Следовательно, $\mathfrak{T} = \varnothing$, все инволюции из S лежат в $Z(S)$ (лемма 6.2.5), и $\mathfrak{M}(1)$ состоит из групп, изоморфных группам из множества

$$\{L_2(r)\ (r = 3, 5(mod\ 8), L_2(2^l), U_3(2^k), Sz(2^{2m+1}), Re(3^{2n+1}\}.$$

По предложению 1.2.19

$$G \mathrel{\widetilde{\in}} \{L_2(R), U_3(F), Sz(Q), Re(P) \mid R, F, Q, P\ \text{ – локально конечные поля}\}.$$

Противоречие с тем, что G — контрпример. Итак, группа G не может содержать подгрупп, изоморфных группе A. Следовательно, $\mathfrak{R} = \varnothing$ и $\mathfrak{T} \neq \varnothing$. Пусть $S \in \mathfrak{T}$. По леммам 6.2.4, 6.2.6 S — бесконечная черниковская группа ранга 2. По лемме 6.2.3 G содержит конечную подгруппу K такую, что $K \in \mathfrak{C}(1)$. Пусть S_K — силовская 2-подгруппа из K. Так как $\mathfrak{R} = \varnothing$, то S_K — ранга 2, а $K \simeq U_3(4)$. Поскольку S_K лежит в некоторой силовской 2-подгруппе из G, а все силовские 2-подгруппы из G бесконечные (лемма 6.2.4) и черниковские (лемма 6.2.6), то без ограничения общности можно считать, что $S_K \leq S$. Возьмем $s \in S \setminus S_K$ такой, что $|s| > 4$. По условию насыщенности $\langle s, S_K\rangle < F \in \mathfrak{D}(1)$. Ясно, что $F \simeq L_2(r)$, где r — нечетное. Обозначим через S_F силовскую 2-подгруппу из F, содержащую S_K. По предложению 1.4.3 S_F –группа диэдра и не может содержать S_K. Противоречие.

Теорема доказана.

Глава 7

Группы 2-ранга два, насыщенные конечными простыми группами

7.1 Периодические группы 2-ранга два, насыщенные конечными простыми группами

Теорема 7.1.1. *Пусть* $\mathfrak{G}$ *— множество всех периодических групп* 2*-ранга* 2*, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами. Тогда с точностью до изоморфизма*

$$\mathfrak{G} = \{L_2(Q),\ A_7,\ L_3(P),\ U_3(R),\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

где Q, P, R *— всевозможные локально конечные поля нечетных характеристик,* $|Q| > 3$.

Доказательство. Пусть G — контрпример к теореме. Положим

$$\mathfrak{A} = \{L_2(q) \mid q > 3,\ q - \text{ нечетное}\},$$

$$\mathfrak{B} = \{L_3(p), U_3(r) \mid p, r - \text{ нечетные}\},$$

$$\mathfrak{C} = \{\ A_7,\ M_{11},\ U_3(4)\}.$$

Лемма 7.1.2. 1. $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$ *— насыщающее множество для группы* G*, попарные пересечения его подмножеств* $\mathfrak{A}$*,* $\mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{C}$ *равны пустому множеству.*

2. $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1) \cup \mathfrak{C}(1)$ *и существует такая группа* $X \in \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{C}(1)$*, что* $X \not\leq Y$ *ни для какой группы* $Y \in \mathfrak{B}(1)$.

Доказательство. Первое утвержение леммы вытекает из предложения 1.4.18 и определения множеств $\mathfrak{M}(1), \mathfrak{A}(1), \mathfrak{B}(1), \mathfrak{C}(1)$. Второе утверждение леммы вытекает из условия насыщенности и предложения 1.4.18.

Лемма доказана.

Лемма 7.1.3. G *— бесконечная простая не локально конечная группа.*

Доказательство. Для конечных групп доказываемая теорема вытекает из предложения 1.4.18, поэтому группа G бесконечна и проста по предложению 1.2.15. В бесконечной локально конечной группе, удовлетворяющей условиям теоремы, из насыщающего множества, очевидно, можно исключить любое конечное число членов. Исключив из $\mathfrak{M}$ подмножество $\mathfrak{C}$, заключаем, что теорема для локально конечных групп верна по предложению 1.2.16. Следовательно, группа G не локально конечна.

Лемма доказана.

Лемма 7.1.4. *Все инволюции в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y — различные инволюции из G. Так как G — периодическая группа, то $\langle x, y\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности и лемме 7.1.2 $\langle x, y\rangle < K \tilde{\in} \{L_2(q),\ A_7,\ L_3(p),\ U_3(r),\ M_{11},\ U_3(4)\}$, где q, p, r — нечетные и $q > 3$. Согласно предложениям 1.4.3, 1.4.8, 1.4.15, 1.4.16, 1.4.17 в каждой из этих групп только один класс сопряженных инволюций. Значит, инволюции x, y сопряжены в K.

Лемма доказана.

Лемма 7.1.5. $U_3(4) \notin \mathfrak{M}(1)$ *и* $\mathfrak{C}(1) = \{A_7,\ M_{11}\}$.

Доказательство. Предположим, что $K = U_3(4) \in \mathfrak{M}(1)$, S — силовская 2-подгруппа группы K. Согласно предложению 1.4.16 секционный ранг группы S равен 4, в то время как секционные ранги диэдральных, полудиэдральных и сплетенных 2-групп не превосходят 3, поэтому они не могут содержать S в качестве подгруппы. Отсюда заключаем, что S — силовская 2-подгруппа группы G. По предложению 1.3.6 силовские 2-подгруппы в G сопряжены, выберем среди них подгруппу $T = S^g \neq S$ с максимально возможным пересечением $D = S \cap T$. Допустим, что $D \neq 1$. В случае, когда $D \geq Z(S)$, выберем $x \in S \setminus D$ и $y \in T \setminus D$, если же $D < Z(S)$, то пусть $x \in Z(S) \setminus D$, а y — элемент порядка 4 из $C_T(D)$. Согласно предложению 1.4.16 такой выбор возможен, при этом $x, y \in N_G(D)$ и $x^2, y^2 \in D$. Ввиду периодичности G подгруппа $R = \langle x, y, D\rangle$ конечна, содержит элемент порядка 4 и, в силу выбора подгруппы T, не является 2-группой. По условию насыщенности $R \leq L \in \mathfrak{M}(1)$. Силовская 2-подгруппа S_L в L содержит элемент порядка 4 и в силу строения S (предложение 1.4.16) S_L изоморфна S, а $L \simeq U_3(4)$. Однако в $U_3(4)$ силовские 2-подгруппы попарно взаимно просты, что противоречит строению подгруппы R. Полученное противоречие означает, что $D = 1$, силовские 2-подгруппы в G попарно взаимно просты, и подгруппа $N_G(S)$ сильно вложена. В силу условия насыщенности, леммы 7.1.2 и строения группы $U_3(4)$ заключаем, что $C_G(S) = S$, $|N_G(S)/S| = 15$ и $|C_G(z)| = 320$ для любой инволюции $z \in G$. По предложению 1.2.6 G — локально конечна, и понятно, что в этом случае просто $G \simeq U_3(4)$.

Лемма доказана.

Лемма 7.1.6. *Силовская 2-подгруппа S группы G может быть одной из видов* :

1. $S = \langle a, v \mid a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1}\rangle$ — *полудиэдральная группа.*
2. $S = \langle a, w \mid a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = 1, a^w = b, ab = ba\rangle$ — *сплетенная 2-группа.*
3. S — *группа диэдра.*
4. S — *черниковская группа ранга не более 2, и либо $S = (C \times C^i) \rightthreetimes \langle i\rangle$, где C — квазициклическая 2-группа, i — инволюция, либо $S = C \rightthreetimes \langle j\rangle$, где C — квазициклическая 2-группа, j — инволюция, $c^j = c^{-1}$ для любого $c \in C$.*

Доказательство. По условию теоремы S не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8. Если S — конечная группа, то все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены (предложение 1.3.6). По условию насыщенности и леммам 7.1.2, 7.1.5 $S < K \tilde{\in} \{L_2(q),\ A_7,\ L_3(p),\ U_3(r),\ M_{11}\}$, где q, p, r — нечетные и $q > 3$. Силовские 2-подгруппы этих групп указаны в предложениях 1.4.3, 1.4.8, 1.4.15, 1.4.16, и доказательство пунктов 1–3 леммы завершает простая проверка.

Если S бесконечна, то по предложению 1.2.10 S — черниковская группа 2-ранга 2. В силу условия насыщенности S является обьединением возрастающей цепочки конечных неабелевых 2-групп, являющихся пересечениями группы S с силовскими 2-подгруппами подходящих групп из $\mathfrak{M}(1)$. Поскольку полудиэдральные группы (группы типа 1 из леммы) возрастающих цепей составлять не могут, то имеется две возможности: S является либо обьединением возрастающей цепочки конечных сплетенных 2-групп (групп типа 2), либо обьединением возрастающей цепочки конечных 2-групп диэдра (групп типа 3). В первом случае $S = (C \times C^i) \leftthreetimes \langle i \rangle$, где C — квазициклическая 2-группа, i — инволюция, во втором — $S = C \leftthreetimes \langle j \rangle$, C — квазициклическая 2-группа, j — инволюция, $c^j = c^{-1}$ для любого $c \in C$.

Лемма доказана.

Лемма 7.1.7. *Нормализатор каждой четверной подгруппы в G бесконечен.*

Доказательство. В силу условия насыщенности конечными простыми группами каждая инволюция $z \in G$ содержится в некоторой четверной подгруппе $F = \langle z, f \rangle$. Поскольку G не локально конечна (лемма 7.1.3), то в силу предложения 1.2.6 подгруппа $R = C_G(z)$ бесконечна. Допустим, что подгруппа $N_G(F)$ конечна, тогда подгруппа $C_R(f)$ также конечна, и по предложению 1.2.6 подгруппа R локально конечна.

Заметим, что порядок любой подгруппы X из $\mathfrak{B}(1)$, содержащей подгруппу F, ограничен некоторым числом m, зависящим от числа $|N_G(F)|$. Действительно, по пункту 3 предложения 1.4.8 все четверные подгруппы в X сопряжены, а в силу пункта 2 предложения 1.4.8 $|N_X(F)| = \frac{6(q+\varepsilon 1)(q-\varepsilon 1)}{(3,q-\varepsilon 1)} \leq |N_G(F)|$, из чего следует, например, $|X| < |N_G(F)|^3$.

Далее, в силу бесконечности и локальной конечности R любая ее конечная подгруппа K вместе с z содержится в конечной подгруппе M порядка, превосходящего число m и порядки подгрупп из $\mathfrak{C}(1)$. Подгруппа M, в свою очередь, по условию насыщенности содержится в некоторой подгруппе $L \in \mathfrak{M}(1)$, и в силу вышесказанного $M \leq L \in \mathfrak{A}(1)$. По пункту 2 предложения 1.4.3 $C_L(z) = R \cap L$ — группа диэдра. Следовательно, $\langle z, K \rangle \leq M \leq R \cap L$ и R насыщена группами диэдра. По предложению 1.2.14 $R = C_G(z) = D \leftthreetimes \langle t \rangle$, где t — инволюция, D — локально циклическая группа, и для любого $d \in D$ $d^t = d^{-1}$. В силу леммы 7.1.4 доказанное свойство справедливо для любой инволюции $z \in G$, и потому для любой группы $X \in \mathfrak{M}(1)$ и любой инволюции $z \in X$ $C_X(z)$ — группа диэдра. В частности, силовская 2-подгруппа в X является диэдральной и по теореме Горенстейна-Уолтера ([6, с. 27]) $X \simeq L_2(q)$, q нечетно, $q > 3$, или $X \simeq A_7$. Однако в A_7 централизаторы инволюции не являются группами диэдра вопреки доказанному выше. Следовательно, $X \not\simeq A_7$, по предложению 1.2.17 G изоморфна группе $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q и не является контрпримером к теореме. Полученное противоречие означает, что подгруппа $N_G(F)$ не может быть конечной.

Лемма доказана.

Лемма 7.1.8. $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$.

Доказательство. Допустим, что лемма неверна, и F — четверная подгруппа из G. По предыдущей лемме подгруппа $C_G(F)$ бесконечна. Пусть K — произвольная конечная подгруппа из $C_G(F)$, строго содержащая F. По условию насыщенности $K \leq X \in \mathfrak{M}(1)$, $X \notin \mathfrak{B}(1) = \varnothing$ и в силу пункта 2 предложения 1.4.3 $X \notin \mathfrak{A}(1)$. Ввиду леммы 7.1.5 $X \simeq A_7$ или $X \simeq M_{11}$. В силу предложений 1.4.17 и 1.4.15 $|N_X(F)/F| = 6$, и период фактор-группы $N_X(F)/F$ равен 6. Значит, $|K/F| \leq 6$, и в силу произвольности K из $C_G(F)$ период фактор-группы $C_G(F)/F$ равен 6. По теореме М. Холла ([47, теорема 18.4.8]) группа $C_G(F)$ локально конечна, и потому в ней есть конечные подгруппы порядка > 24. Противоречие.

Лемма доказана.

По лемме 7.1.8 в G найдется подгруппа K, изоморфная $U_3(q)$, где q — нечетно, или $L_3(q)$, где q — нечетно. Отождествим указанную группу K с группой L из предложения 1.4.8 и будем далее использовать обозначения этого предложения: i, j, w, v, b, A, V, B. Пусть $N = N_G(A)$, $C_A = C_G(A)$, $C_B = C_G(B)$.

Лемма 7.1.9. *Все четверные подгруппы в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть F — четверная подгруппа из G. По лемме 7.1.4 все инволюции в G сопряжены, следовательно, $A \cap F^g \neq 1$ для некоторого $g \in G$. Если $A = F^g$, то все доказано. Пусть $A \neq F^g$, тогда $A \cap F^g = \langle z \rangle$ — группа порядка 2 (не ограничивая общности, можно считать $z = i$ (напомним, что $A = \{1, i, j, ij\}$)), и фактор-группа $\langle A, F^g \rangle / \langle i \rangle$ конечна как подгруппа периодической группы, порожденная двумя инволюциями. Таким образом, $\langle A, F^g \rangle$ — конечная подгруппа. Так как силовские 2-подгруппы в конечной группе сопряжены, то можно считать, что для некоторого элемента $h \in \langle A, F^g \rangle$ группа $M = \langle A, F^{gh} \rangle$ является конечной неабелевой 2-группой (в противном случае $A = F^{gh}$, и лемма доказана). Пусть S — силовская 2-подгруппа из G, содержащая M. Если S конечна, то в силу леммы 7.1.8 и предложений 1.2.8, 1.4.8 S — одного из видов 1, 2, перечисленных в заключении леммы 7.1.6. Ввиду основного условия $M \leq X \in \mathfrak{B}(1)$ и по пункту 3 предложения 1.4.8 A, F сопряжены в G.

Когда S бесконечна, воспользуемся пунктом 4 леммы 7.1.6. Если $M < S = C \leftthreetimes \langle j \rangle$, то A и F^{gh} сопряжены в S ввиду свойств группы $C \leftthreetimes \langle j \rangle$. Если $M < S = (C \times C^i) \leftthreetimes \langle i \rangle$, то M содержится в конечной сплетенной подгруппе R из S (выберем подгруппу R достаточно большого порядка), по условию насыщенности $R < X \in \mathfrak{B}(1)$ и A, F^{gh} сопряжены в X по пункту 3 предложения 1.4.8.

Лемма доказана.

Лемма 7.1.10. *$N = C_A \leftthreetimes V$, где C_A — бесконечная абелева группа ранга* 2.

Доказательство. Поскольку $C_A = C_G(A)$, $V \leq N = N_G(A)$ и $V \simeq \mathrm{Aut}\,(A)$, то $N = C_A \leftthreetimes V$. По лемме 7.1.9 $C_A \leftthreetimes \langle b \rangle$ — бесконечная группа. Для любого $c \in C_A$ порядок элемента cb делится на 3, $cb \notin C_A$ и $\langle A, cb \rangle$ — конечная группа из N. По основному условию насыщенности $\langle A, cb \rangle < M \in \mathfrak{M}(1)$. Ввиду леммы 7.1.5 и предложений 1.4.8, 1.4.3, 1.4.15, 1.4.17 $|cb| = 3$. По предложению 1.2.12 C_A — нильпотентная группа, и, как периодическая группа, C_A локально конечна. Пусть K — произвольная конечная подгруппа из C_A достаточно большого порядка. Из основного условия следует, что $AK < M \in \mathfrak{B}(1)$, $K \leq M \cap C_A$ и по пункту 2 предложения 1.4.8 $M \cap C_A$ — абелева группа ранга 2. Значит, и C_A — абелева группа ранга 2.

Лемма доказана.

Лемма 7.1.11. *Подгруппа $N = N_G(A)$ содержится в бесконечной простой локально конечной подгруппе M группы G, обладающей следующими свойствами* :

1. *$M \,\tilde{\in}\, \{L_3(P), U_3(P)\}$, где P — локально конечное поле нечетной характеристики.*

2. *Все инволюции, четверные подгруппы и силовские 2-подгруппы в группе M сопряжены.*

3. *$N_G(F) < M$ для каждой четверной подгруппы $F < M$ и $N_G(M) = M$.*

Доказательство. В силу леммы 7.1.10 группа N счетна, и потому

$$N = \cup N_k,\ C_A = \cup C_k,\ \text{где } N_1 < N_2 < ..., \quad C_1 < C_2 < ...,\ C_k = N_k \cap C_A, \tag{7.1}$$

для подходящим образом выбранных конечных подгрупп $N_k = C_k \leftthreetimes V$ из N. Очевидно, можно считать, что $A < C_1$, $|C_1| > \max(|A_7|, |M_{11}|, |U_3(5)|)$. В силу выбора C_1 по условию насыщенности имеем $C_1 < N_1 < M_1 \in \mathfrak{B}(1)$, и, очевидно, можем считать, что $C_1 = C_A \cap M_1$, $N_1 = N \cap M_1$ (выбросив, если есть необходимость, конечное число начальных членов ряда

(7.1), поставив $M_1 \cap C_A$ вместо первоначальной подгруппы C_1 и перенумеровав оставшиеся члены ряда). Аналогично $C_2 < N_2 < M_2 \in \mathfrak{B}(1)$ и, повторив указанные процедуры, получим $C_2 = C_A \cap M_2$, $N_2 = N \cap M_2$. Продолжая этот процесс, построим ряд (7.1), согласованный с последовательностью подгрупп $M_k \in \mathfrak{B}(1)$ $(k = 1, 2, ...)$ так, что $C_k = C_A \cap M_k$ и $N_k = N \cap M_k$, при этом $V, A, B < M_k$.

Покажем, что подгруппы M_k $(k = 1, 2, ...)$ вложены друг в друга и составляют возрастающий ряд $M_1 < M_2 < \ldots < M_k < \ldots$. По пункту 5 предложения 1.4.8 существуют элементы $v \in M_k$, для которого $j^v = j$, $i^v = w$, и $v_1 \in M_{k+1}$, для которого $j^{v_1} = j$, $i^{v_1} = w$. Тогда $v_1 v^{-1} = c \in C_A$ и $v_1 = cv$. Так как C_A — абелева (лемма 7.2.10), то

$$C_{M_{k+1}}(B) = (C_{M_{k+1}}(A))^{v_1} = (C_{M_{k+1}}(A))^{cv} = (C_{M_{k+1}}(A))^{v},$$

и поскольку $C_{k+1} = C_{M_{k+1}}(A) > C_{M_k}(A) = C_k$, то

$$C_{M_{k+1}}(B) = (C_{M_{k+1}}(A))^{v} > (C_{M_k}(A))^{v} = C_{M_k}(B).$$

Таким образом, $C_{M_k}(B) < M_{k+1}$. Ввиду выбора C_1 выполняется $|M_k| > |U_3(5)|$, и по пункту 10 предложения 1.4.8 получаем

$$M_k = \langle N_k, C_{M_k}(B)\rangle < \langle N_{k+1}, C_{M_{k+1}}(B)\rangle = M_{k+1}.$$

Следовательно,

$$M_1 < M_2 < \ldots < M_k < \ldots \,. \tag{7.2}$$

Обьединение $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ членов ряда (7.2) является, очевидно, простой локально конечной группой, и по предложению 1.2.16 $M \,\tilde{\in}\, \{L_3(P), U_3(P)\}$ для подходящего локально конечного поля P нечетной характеристики. Это доказывает пункт 1 леммы.

Утверждение 2 леммы и утверждение 3 следует из свойств группы $L_3^{\epsilon}(P)$. Далее, $N_G(A) = N < M$ по построению подгруппы M, и ввиду пункта 2 леммы $N_G(F) < M$ для любой четверной подгруппы F из M. Если $x \in N_G(M)$ и $F = A^x$, то по пункту 2 леммы $A^x = F^y$ для некоторого $y \in M$, $xy^{-1} = z \in N < M$, $x = zy \in M$.

Лемма доказана.

Лемма 7.1.12. *Пусть $K \in \mathfrak{B}(1)$, $K \cap M$ содержит четверную подгруппу. Тогда $K < M$. В частности, если $M \cap M^x$ содержит четверную подгруппу, то $M = M^x$, $x \in M$.*

Доказательство. Пусть, напротив, F — четверная группа из $K \cap M \neq K$. По лемме 7.1.11 (пункт 4) $N_K(F) < M$. По предложению 1.4.8 (пункты 1–4) $N_K(F)$ содержит четверную подгруппу H такую, что $T = \langle F,\ H\rangle$ — группа диэдра порядка 8. По лемме 7.1.11 (пункты 2, 4) $N_K(H) < M$. Таким образом, $S = \langle N_K(F), N_K(H)\rangle < M$. Поскольку $S \neq K$, то $K \simeq U_3(5)$, $S \simeq A_7$, S — максимальная подгруппа в K (предложение 1.4.8 (пункт 9)). Так как T — силовская 2-подгруппа из S, а силовская 2-подгруппа из K является полудиэдральной группой порядка 16, то возьмем $x \in N_K(T) \setminus T$ со свойством $x \notin M$, но $x^2 \in T$. Силовская 2-подгруппа из M имеет порядок больше 8 (лемма 7.2.13, предложение 1.4.8 (пункт 8)). Выберем $y \in N_M(T) \setminus T$ со свойством $y^2 \in T$. Так как G — периодическая группа, то $\langle x, y, T\rangle$ — конечная группа. Силовская 2-подгруппа из $\langle x, y, T\rangle$ содержит силовскую 2-подгруппу из K, которая является полудиэдральной группой. Следовательно, по условию насыщенности $\langle x, y, T\rangle < L \in \mathfrak{B}(1)$. Поскольку $x \in L$, но $x \notin M$, то L не лежит в M. Очевидно, L не изоморфна $U_3(5)$, следовательно, $L = \langle N_L(F), N_L(H)\rangle$ (предложение 1.4.8 (пункт 9)) и $L < M$, что невозможно. Следовательно, $K < M$.

Далее, пусть $x \in G$, $M \cap M^x$ содержит четверную подгруппу F. Тогда, начиная с некоторого натурального k, все подгруппы M_{k+m} ряда (7.2) будут содержать F, и в силу доказанного выше $M_{k+m} \le M^x$. Поэтому $M \le M^x$, аналогично $M^x \le M$, $M = M^x$, $x \in M$ по пункту 3 леммы 7.1.11.

Лемма доказана.

Лемма 7.1.13. *$C_G(z) \not< M$ для каждой инволюции $z \in M$.*

Доказательство. Предположим обратное. Поскольку в M все инволюции сопряжены и $N_G(M) = M$ (пункты 2, 3 леммы 7.1.11), то для любого $g \in G \setminus M$ подгруппа $M \cap M^g$ не содержит инволюций, и подгруппа M сильно вложена в G. Поэтому, если $L \in \mathfrak{M}(1)$, в $L \cap M$ есть инволюции и $L \not< M$, то $L \simeq L_2(5)$ и $L \cap M \simeq A_4$. Множество таких групп L, очевидно, непусто, и ввиду сопряженности четверных подгрупп в M (п. 2 леммы 7.1.11) среди них есть L с пересечением $L \cap M = A \rtimes \langle b \rangle$. В $L \setminus M$ есть инволюция k со свойством $b^k = b^{-1}$, а в M — инволюция w с тем же свойством $b^w = b^{-1}$ (пункт 1 предложения 1.4.8). В силу периодичности G подгруппа $\langle b, k, w \rangle$ конечна, $\langle b, k, w \rangle < X \in \mathfrak{M}(1)$. Однако $X \cap M \not\simeq A_4$. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 7.1.14. *Силовская 2-подгруппа из M не является полудиэдральной группой.*

Доказательство. Предположим, что силовская 2-подгруппа S из M полудиэдральна. Пусть R — силовская 2-подгруппа из G, содержащая S. Если $R \ne S$, то найдется $x \in N_R(S) \setminus S = N_R(S) \setminus M$ и $S \le M \cap M^x$ вопреки лемме 7.1.12. Поэтому $S = R$ — силовская 2-подгруппа в G. По лемме 7.1.13 $C_G(i) \not\le M$, $M \ne M^k$ для любого $k \in C_G(i) \setminus M$ (пункт 3 леммы 7.1.11) и $i \in M \cap M^k$. Выберем такой элемент $k \in G \setminus M$, для которого 2-подгруппа T из $M \cap M^k$ имеет максимально возможный порядок. Ввиду леммы 7.1.12 в $D = M \cap M^k$ нет четверных подгрупп, но с точностью до сопряженности в M можем считать, что $i \in T$, и T — либо циклическая группа, либо группа кватернионов. Пусть $T = S \cap R$, где S и R — силовские 2-подгруппы из M и M^k соответственно.

Допустим, что $[S : T] = 2$, тогда $T \lhd S$, $T \lhd R$, и подгруппа $K = \langle S, R \rangle$ конечна. По условиям $K < L \in \mathfrak{M}(1)$. Если $L \in \mathfrak{B}(1)$, то в силу леммы 7.1.12 $L < M$ и $L < M^k$, противоречие. Следовательно, $|S| = 16$, $L \simeq M_{11}$ и $L \cap M = S$. По предложению 1.4.15 $K = C_L(i) \simeq GL_2(3)$, $T \simeq Q_8$, в качестве k можно взять элемент a порядка 3 из K, где $T \rtimes \langle a \rangle \simeq SL_2(3)$, который, очевидно, не содержится в M. Согласно предложению 1.4.8, $C_M(i) \simeq GL_2(P)$ и, значит, в $N_M(T)$ также есть элемент b порядка 3, инвертируемый инволюцией t, действие которого на T совпадает с действием элемента a. Очевидно, что $1 \ne [t, d] = t^{-1}d^{-1}td = tba^{-1}tab^{-1} = b^{-1}a^2b^{-1} \in C_G(T) \setminus M$. Значит, подгруппа $K_1 = \langle t, [t, d], T \rangle$ конечна, не содержится в M и содержит четверную подгруппу $\langle t, i \rangle$. По основному условию $K_1 < L \in \mathfrak{M}(1)$, и поскольку в $L_2(q)$, M_{11} и A_7 нет подгрупп, изоморфных K_1, то $L \in \mathfrak{B}(1)$. По лемме 7.1.12 $L < M$ и $K_1 < M$. Противоречие. Следовательно, случай $[S : T] = 2$ невозможен.

Рассмотрим подробно случай, когда $[S : T] > 2$ и T — группа кватернионов. Попутно заметим, что $Z(S) = \langle i \rangle = Z(R)$ и $\langle S, R \rangle \le C_G(i)$. Обозначим $X = N_S(T)$, $Y = N_R(T)$. Легко убедиться, что $[X : T] = [Y : T] = 2$, и так как K/T — группа диэдра, то подгруппа $K = \langle X, Y \rangle$ конечна. Случай, когда K — 2-группа, невозможен, поскольку тогда она содержится в силовской 2-подгруппе $W < M^g$, и порядки 2-подгрупп XT и YT из пересечений $M \cap M^g$ и $M^k \cap M^g$ больше порядка T, вопреки выбору T. Следовательно, K — не 2-группа, $\langle i \rangle = Z(K)$ и в K/T есть элемент aT нечетного порядка; случай $K \simeq GL_2(3)$

разобран выше и невозможен, значит, элемент a централизует T. По условию насыщенности $F < L \in \mathfrak{M}(1)$ и ввиду перечисленных свойств $L \in \mathfrak{B}(1)$. В силу леммы 7.1.12 $L < M^g$ для подходящего $g \in G$, и порядки 2-подгрупп XT из $M \cap M^g$ и YT из $M^k \cap M^g$ больше порядка T — окончательное противоречие для кватернионного случая.

Итак, $T = S \cap R = \langle t \rangle$ — циклическая подгруппа и $[S : T] > 2$. В S (и в группе R) подгруппа T в качестве нормальной подгруппы индекса 2 содержится как минимум в двух неизоморфных подгруппах X и Y. Если $|T| = 2$, то X — циклическая, Y — четверная. Если $|T| = 4$ и уравнение $x^2 = t$ в S разрешимо, то $X = \langle x \rangle$ — циклическая, Y — кватернионная или диэдральная, при неразрешимости уравнения $x^2 = t$ в S, X — кватернионная, Y — диэдральная. Если, наконец, $|t| > 4$, то X — циклическая, Y — кватернионная или диэдральная. Выберем неизоморфные подгруппы $X < S$ и $Y < R$ и положим $K = \langle X, Y \rangle$. Тогда K/T — конечная группа диэдра, и подгруппы X/T и Y/T не сопряжены в K/T. Значит, в K/T есть нормальная не единичная 2-подгруппа Z/T, и пусть Z — ее полный прообраз. Пусть W_1 — силовская 2-подгруппа в G, содержащая 2-подгруппу XZ, и $W_1 < M^g = M_1$, W_2 — силовская 2-подгруппы в G, содержащая 2-подгруппу XZ, и $W_2 < M^h = M_2$. Поскольку $Z < M_1 \cap M_2$, то в силу выбора T имеем $M_1 = M_2 = M^g$. По тем же причинам $XT < M^g \cap M$ следует $M^g = M$, а из $YT < M^k \cap M^g$ вытекает $M^k = M^g = M$ — последнее противоречие, доказывающее утверждение леммы.

Лемма доказана.

Лемма 7.1.15. *Контрпримера к теореме не существует.*

Доказательство. Согласно предложению 1.4.3 и лемме 7.1.14 силовская 2-подгруппа S в M является сплетенной группой, то есть $S = (C \times C^v) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где C — локально циклическая 2-группа (конечная, или бесконечная), $|C| \geq 4$ и v — инволюция. Ввиду леммы 7.1.13 в некоторых пересечениях $M \cap M^k$ ($k \in G \setminus M$) силовские 2-подгруппы нетривиальны. Покажем, что это приводит к противоречию.

Допустим, что в $M \cap M^k$ есть элемент t порядка 8, $t \in S \cap R$, где S и R — силовские 2-подгруппы из M и M^k соответственно. Очевидно, t^2 принадлежит базам сплетений $\tilde{S}$ и $\tilde{R}$ групп S и R. Пусть $X = \langle x \rangle \times \langle t^2 \rangle \leq \tilde{S}$, $Y = \langle y \rangle \times \langle t^2 \rangle \leq \tilde{R}$, $|x| = |y| = 2$. В силу леммы 7.1.12 $x \notin R$, $y \notin S$. В силу периодичности подгруппа $K = \langle X, Y \rangle$ конечна и $\langle t^2 \rangle \leq Z(K)$. Пусть $K < L \in \mathfrak{M}(1)$. Поскольку силовская 2-подгруппа в L содержит нециклическую абелеву подгруппу порядка 8 и не может быть ни диэдральной группой, ни полудиэдральной, то $L \in \mathfrak{B}(1)$. Но тогда по лемме 7.1.12 $L < M \cap M^k$ и $M = M^k$. Противоречие.

Пусть z — инволюция из пересечения $M \cap M^k$. Поскольку в M все инволюции сопряжены (лемма 7.1.11), то z является центральной инволюцией в некоторых силовских 2-подгруппах S из M и R из M^k. В этом случае z содержится в четверной подгруппе $X = \langle z, x \rangle$ и циклической подгруппе $Y = \langle y \rangle$ порядка 4 из баз сплетений $\tilde{S}$ и $\tilde{R}$ групп S и R. Заметим, что элемент y можно выбрать за пределами подгруппы M, поскольку иначе четверная подгруппа из $\tilde{R}$ содержалась бы в $M \cap M^k$, вопреки лемме 7.1.12. Далее, в силу периодичности подгруппа $K = \langle X, Y \rangle$ конечна, содержится в $C_G(z)$, и подгруппы $X/\langle z \rangle$, $Y/\langle z \rangle$ в диэдральной фактор-группе $K/\langle z \rangle$ не сопряжены. Обозначим через $\overline{T}$ максимальную нормальную в $\langle xy \rangle/\langle z \rangle$ 2-подгруппу, а через T — ее полный прообраз в K. Очевидно, что $T/\langle z \rangle$ — циклическая группа, T — абелева и нормальна в K. Если T — не циклическая группа, то T содержит характеристическую четверную подгруппу нормальную в K, и по лемме 7.1.12 $K < M$, вопреки выбору y. Следовательно, $T = \langle t \rangle$ — циклическая группа. Подгруппы TY и TX являются силовскими в K и по теореме Силова сопряжены: $(TX)^g = TY$, $g \in K$. Поскольку TY содержит, по меньшей мере, две циклических подгруппы порядка 4, а TX — две инволюции, то $|XT| > 8$ и $|T| \geq 8$. В силу выбора $y \notin M$, значит, $M^g \neq M$. Но $T < M \cap M^g$ вопреки разобранному выше случаю. Противоречие.

Лемма доказана.

Теорема доказана.

7.2 О группах Шункова 2-ранга 2, насыщенных конечными простыми группами

Теорема 7.2.1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — множество всех групп Шункова 2-ранга 2, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами. Тогда для любой группы $G \in \mathfrak{G}$ G обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна одной из групп множества*

$$\{L_2(Q),\ A_7,\ L_3(P),\ U_3(R),\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

где Q, P, R — всевозможные локально конечные поля нечетных характеристик, $|Q| > 3$.

Доказательство. Пусть G — контрпример к заключению теоремы. Положим

$$\mathfrak{A} = \{L_2(q) \mid q > 3,\ q - \text{ нечетное}\},$$

$$\mathfrak{B} = \{L_3(p), U_3(r) \mid p, r - \text{ нечетные}\},$$

$$\mathfrak{C} = \{\ A_7,\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}.$$

Лемма 7.2.2. 1. *$\mathfrak{M}$ — насыщающее множество для группы G, не существует группы K, для которой одновременно выполнено $K \mathrel{\tilde{\in}} \mathfrak{A}$, $K \mathrel{\tilde{\in}} \mathfrak{B}$ и $K \mathrel{\tilde{\in}} \mathfrak{C}$.*

2. *$\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1) \cup \mathfrak{C}(1) \neq \varnothing$, и существует такая группа $X \in \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{C}(1)$, что $X \not\leq Y$ ни для какой группы $Y \in \mathfrak{B}(1)$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы вытекает из предложения 1.4.18 и определения множеств $\mathfrak{M}(1), \mathfrak{A}(1), \mathfrak{B}(1), \mathfrak{C}(1)$. Второе утверждение леммы вытекает из условия насыщенности и предложения 1.4.18.

Лемма доказана.

Лемма 7.2.3. *G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Предположим обратное. Покажем, что группа G содержит бесконечно много элементов конечного порядка. Действительно, в противном случае по лемме Дицмана (предложение 1.2.1) G обладает конечной периодической частью $T(G)$. По условию насыщенности и лемме 7.2.2

$$T(G) \mathrel{\tilde{\in}} \{L_2(q),\ A_7,\ L_3(p),\ U_3(r),\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

где q, p, r — нечетные, $q > 3$. Противоречие с тем, что G — контрпример. Итак, G содержит бесконечно много элементов конечного порядка. По предложению 1.3.4 G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.

Лемма доказана.

Лемма 7.2.4. *G не содержит нормальных локально конечных подгрупп.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть N — нормальная локально конечная подгруппа группы G. В этом случае N содержит все элементы конечного порядка из группы G, которые, очевидно, образуют локально конечную периодическую часть $T(G)$ группы G. Если $T(G)$ — конечная группа, то по условию насыщенности и лемме 7.2.2

$$T(G) \tilde{\in} \{L_2(q),\ A_7,\ L_3(p),\ U_3(r),\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

где q, p, r — нечетные, $q > 3$. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Пусть $T(G)$ — бесконечная локально конечная группа. Возьмем в $T(G)$ произвольную конечную подгруппу X. Так как $T(G)$ — бесконечная локально конечная группа, то в ней найдется конечная подгруппа Y такая, что $X < Y$ и $|Y| > m$, где m — максимальное из чисел $\{|A_7|, |M_{11}|, |U_3(4)|\}$. С учетом этого ограничения на m, по условию насыщенности и лемме 7.2.2

$$X < Y < D \tilde{\in} \{L_2(q), L_3(p),\ U_3(r)\},$$

где q, p, r — нечетные, $q > 3$. Ввиду произвольности выбора X, как конечной подгруппы группы $T(G)$, получаем, что группа $T(G)$ насыщена группами из множества

$$\{L_2(q), L_3(p),\ U_3(r)\}.$$

По предложению 1.2.16

$$T(G) \tilde{\in} \{L_2(Q), L_3(P),\ U_3(R)\},$$

где Q, P, R — подходящие локально конечные поля нечетных характеристик. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Лемма доказана.

Лемма 7.2.5. *Силовская 2-подгруппа S группы G имеет один из следующих видов* :

1. $S = \langle a, v \mid a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1}\rangle$ — *полудиэдральная группа.*
2. $S = \langle a, w \mid a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = 1, a^w = b, ab = ba\rangle$ — *сплетенная 2-группа.*
3. S — *группа диэдра.*
4. S *изоморфна силовской 2-подгруппе из группы $U_3(4)$.*
5. S — *черниковская группа ранга не более 2.*

Доказательство. По условию теоремы S не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8. Если S — бесконечна, то по предложению 1.2.10 S — черниковская группа ранга не более 2, и имеет место пункт 5 утверждения леммы. Если S — конечная группа, то все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены (предложение 1.3.6). По условию насыщенности и лемме 7.2.2

$$S < K \tilde{\in} \{L_2(q),\ A_7,\ L_3(p),\ U_3(r),\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

где q, p, r — нечетные, $q > 3$. Тогда S — одного из видов 1–4 в заключении леммы (предложения 1.4.3, 1.4.8, 1.4.15, 1.4.16, 1.4.17).

Лемма доказана.

Лемма 7.2.6. *Все инволюции в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y — две различные инволюции из G. Так как G — периодическая группа, то $\langle x, y\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности и лемме 7.2.2

$$\langle x, y\rangle < K \tilde{\in} \{L_2(q),\ A_7,\ L_3(p),\ U_3(r),\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

где q, p, r — нечетные, $q > 3$. Следовательно, x, y сопряжены в K (предложения 1.4.3, 1.4.8, 1.4.15, 1.4.16, 1.4.17).

Лемма доказана.

I. В G существует четверная группа F такая, что $C_G(F)$ содержит бесконечно много элементов конечного порядка.

Лемма 7.2.7. $\mathfrak{M}(1)$ *не содержит групп, изоморфных* $U_3(4)$.

Доказательство. Предположим обратное, $R \in \mathfrak{M}(1)$ и $R \simeq U_3(4)$. Пусть S_R — силовская 2-подгруппа из R. По лемме 7.2.5 (пункт 4), S_R — силовская 2-подгруппа в G. Следовательно, $\mathfrak{M}(1) = \{U_3(4)\}$. Из того факта, что $C_G(F)$ содержит бесконечную локально конечную подгруппу, вытекает, что множество $\mathfrak{M}(1)$ содержит группы сколь угодно большого порядка, что невозможно.

Лемма доказана.

Лемма 7.2.8. $\mathfrak{B}(1)$ *содержит бесконечно много неизоморфных подгрупп.*

Доказательство. Так как $C_G(F)$ содержит бесконечную локально конечную подгруппу (лемма 7.2.3), а порядки централизаторов четверных подгрупп из групп, являющихся элементами множества $\mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{C}(1)$, ограничены в совокупности, то из предложения 1.4.8 (пункт 2) вытекает, что множество $\mathfrak{B}(1)$ содержит группы сколь угодно большого порядка.

Лемма доказана.

По лемме 7.2.8 в G найдется подгруппа K, изоморфная $U_3(q)$, где q — нечетно, или $L_3(q)$, где q — нечетно. Отождествим указанную группу K с L из предложения 1.4.8 и будем далее использовать обозначения этого предложения: i, j, w, b, A, V, B. Пусть $N = N_G(A)$, $C_A = C_G(A)$, $C_B = C_G(B)$.

Лемма 7.2.9. *Все четверные подгруппы из* G *сопряжены.*

Доказательство. Пусть R — четверная подгруппа из G. По лемме 7.2.6 все инволюции из G сопряжены, следовательно, для некоторого $g \in G$ выполнено $A \cap R^g \neq 1$. Если $A = R^g$, то все доказано. Пусть $A \neq R^g$. Следовательно, $A \cap R^g = \langle z \rangle$ — группа порядка 2, z — инволюция. Но тогда фактор-группа $\langle A, R^g \rangle / \langle z \rangle$ конечна, как подгруппа периодической группы, порожденная двумя инволюциями, $\langle A, R^g \rangle$ — конечная группа. Так как силовские 2-подгруппы в конечной группе сопряжены, то можно считать, что для некоторого элемента $h \in \langle A, R^g \rangle$ группа $M = \langle A, R^{gh} \rangle$ является конечной неабелевой 2-группой (в противном случае $A = R^{gh}$, и лемма доказана).

Пусть S — силовская 2-подгруппа из G, содержащая M. Если некоторая силовская 2-подгруппа S из G конечна, то по предложению 1.3.6 она, поскольку $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, одного из видов 1, 2, перечисленных в заключении леммы 7.2.5, и $\langle A, B^{gh} \rangle$ лежит в некоторой силовской 2-подгруппе конечной группы K такой, что $K \in \mathfrak{B}(1)$. В этом случае все доказано ввиду предложения 1.4.8 (пункт 4).

Если некоторая силовская 2-подгруппа из G бесконечна, то все силовские 2-подгруппы из G бесконечны (предложение 1.3.6), и любая силовская 2-подгруппа S группы G, содержащая группу $\langle A, B^{gh} \rangle$, является бесконечной локально конечной группой вида 5, указанного в заключении леммы 7.2.5.

Если полная часть S — ранга 2, то $\langle A, B^{gh} \rangle$ лежит в некоторой силовской 2-подгруппе конечной группы K такой, что $K \in \mathfrak{B}(1)$. В этом случае все доказано ввиду предложения 1.4.8 (пункт 4).

Если полная часть S — ранга 1, то S насыщена группами диэдра, и по предложению 1.2.14 $S = C\rightthreetimes\langle t\rangle$, где C — квазициклическая 2-группа, $t^2 = 1$, для любого $c \in C$, $c^t = c^{-1}$. В этом случае, как нетрудно видеть, A, K^{gh} сопряжены в S. Следовательно, A, K сопряжены в G.

Лемма доказана.

Лемма 7.2.10. *$N = C_A \rightthreetimes V$.*

Доказательство. Очевидно, $C_A\rightthreetimes V < N$. Докажем обратное включение. Пусть $g \in N$. Тогда для некоторого $v \in V, A^g = A^v$ и $a^g = a^v$ для любого $a \in A$. Следовательно, $a^{gv^{-1}} = a, gv^{-1} = c \in C_A, g = cv \in C_A \rightthreetimes V$.

Лемма доказана.

Лемма 7.2.11. *C_A обладает периодической частью $T(C_A)$, которая является бесконечной абелевой счетной группой ранга 2.*

Доказательство. Пусть K — конечная подгруппа из C_A. По условию насыщенности $K < R \in \mathfrak{B}(1)$. По предложениям 1.4.8, 1.4.3, 1.4.15, 1.4.16, 1.4.17 и лемме 7.2.7, $C_R(A)$ — абелева группа ранга 2, следовательно, K — абелева группа ранга не более 2. В силу произвольности выбора K, как конечной подгруппы из C_A, получаем, что все конечные подгруппы из C_A — абелевы ранга не более 2. По предложению 1.3.5 C_A обладает периодической частью $T(C_A)$. По лемме 7.2.8 C_A содержит конечные подгруппы сколь угодно большого порядка. Следовательно, C_A содержит бесконечное множество элементов конечного порядка, а $T(C_A)$ является бесконечной абелевой группой ранга 2 и является счетной.

Лемма доказана.

Лемма 7.2.12. *N обладает периодической частью $T(N) = T(C_A) \rightthreetimes V$.*

Доказательство. $T(C_A)$ — характеристическая подгруппа в N. По леммам 7.2.10, 7.2.11 и предложениям 1.3.1, 1.3.2 фактор-группа $\overline{N} = N/T(C_A)$ является группой Шункова. Покажем, что $\overline{V} \lhd \overline{N}$. Пусть $\bar{b}$ — элемент порядка 3 из $\overline{V}$. Тогда $\langle \bar{b}, \bar{b}^{\overline{g}}\rangle$ — конечная подгруппа для любого $\overline{g} \in \overline{N}$. Пусть K — некоторый ее конечный прообраз в N, содержащий конечную подгруппу $\langle b, b^g, A\rangle$ в качестве подгруппы. Ввиду того, что подгруппу K можно взять сколь угодно большого порядка (лемма 7.2.11), то по условию насыщенности $\langle b, b^g, A\rangle < K < R \in \mathfrak{B}(1)$. Ясно, что $b^g \in N_R(A) < N$. По предложению 1.4.8 (пункты 1–4) $b^g = cb^k$, где $c \in C_R(A) < T(C_A)$, $1 \leqslant k \leqslant 2$. Следовательно, $\langle \overline{b}\rangle = \langle \overline{b}^{\overline{g}}\rangle$ и $T(C_A) \rightthreetimes \langle b\rangle) \lhd N$. По предложениям 1.3.1, 1.3.2 $N/(T(C_A)\rightthreetimes\langle b\rangle)$ — группа Шункова, все конечные подгруппы которой имеют порядок 2 и совпадают с $\langle \overline{w}\rangle$, где $\overline{w} = w(T(C_A)) \rightthreetimes \langle b\rangle)$. По предложению 1.3.5 $T(C_A) \rightthreetimes V = T(N)$.

Лемма доказана.

Лемма 7.2.13. *В G существует бесконечная последовательность групп*

$$M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$$

со следующими свойствами :

1. $A \rightthreetimes V < M_n \in \mathfrak{B}(1)$ *для любого* $n = 1, 2, 3, \dots$.
2. $N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A) < \dots < N_{M_n}(A) < \dots$.
3. $T(N) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$.

Доказательство. Так как $T(C_A)$ — счетная группа (лемма 7.2.11), то

$$T(C_A) = \{c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots\}.$$

По лемме 7.2.12 $T(N)$ — бесконечная локально конечная группа. Следовательно, для любого натурального m_1 $\langle A \leftthreetimes V, c_1, c_2, ..., c_{m_1}\rangle$ — конечная группа. По лемме 7.2.2 и предложениям 1.4.8, 1.4.3, 1.4.15, 1.4.16, 1.4.17, для достаточно большого m_1 $\langle A \leftthreetimes V, c_1, c_2, ..., c_{m_1}\rangle < M_1 \in \mathfrak{B}(1)$. По предложению 1.4.8 (пункты 1–4)

$$N_{M_1}(A) = C_{M_1}(A) \leftthreetimes V.$$

Возьмем элемент $c_{m_1} \in T(C_A) \setminus C_{M_1}(A)$ с минимально возможным значением номера m_1. Поскольку N — локально конечная группа, то $\langle N_{M_1}(A), c_{m_1}\rangle$ — конечная группа. По лемме 7.2.2

$$\langle N_{M_1}(A), c_{m_1}\rangle < M_2 \in \mathfrak{B}(1).$$

По предложению 1.4.8 (пункты 1–4)

$$N_{M_2}(A) = C_{M_2}(A) \leftthreetimes V.$$

Ясно, что $N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A)$.

Предположим, что для $n \geqslant 2$ группа $M_n \in \mathfrak{B}(1)$ построена. Возьмем элемент $c_{m_n} \in T(C_A) \setminus C_{M_n}(A)$ с минимально возможным значением номера m_n. Тогда $\langle N_{M_n}(A), c_{m_n}\rangle$ — конечная группа. По лемме 7.2.2

$$\langle N_{M_n}(A), c_{m_n}\rangle < M_{n+1} \in \mathfrak{B}(1).$$

По предложению 1.4.8 (пункты 1–4)

$$N_{M_{n+1}}(A) = C_{M_{n+1}}(A) \leftthreetimes V.$$

Ясно, что $N_{M_n}(A) < N_{M_{n+1}}(A)$. Действуя подобным образом, мы получаем последовательность

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots,$$

обладающую свойством 1 из заключения леммы. По построению

$$N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A) < \ldots < N_{M_n}(A) < \ldots,$$

и свойство 2 также выполняется. Поскольку

$$c_m \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{M_n}(A)$$

для любого m и $V < N_{M_n}(A)$ для любого n, то по лемме 7.2.11

$$T(C_A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{M_n}(A),$$

$$T(N) = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A),$$

и свойство 3 доказано.

Лемма доказана.

Зафиксируем последовательность групп $\{M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots\}$ из леммы 7.2.13. В силу свойства 2 из этой леммы будем считать, что $|M_1| > |U_3(5)|$.

Лемма 7.2.14. *В G существует подгруппа M со следующими свойствами* :

1. $M \;\tilde{\in}\; \{L_3(R), U_3(P)\}$ *для подходящих бесконечных локально конечных полей R, P нечетных характеристик, и M — собственная подгруппа группы G.*

2. $N < M$ *и для любой четверной подгруппы $X < M$, $T(N_G(X)) = N_M(X)$.*

3. *Силовские 2-подгруппы из M сопряжены.*

4. *Пусть S_M — силовская 2-подгруппа группы M. Тогда S_M — силовская 2-подгруппа группы G.*

5. $T(N_G(M)) = M$.

Доказательство. 1. По построению $V, A, B < M_n$ для любого n. Выберем $v \in M_n$, для которого $j^v = j$, $i^v = w$, и $v_1 \in M_{n+1}$, для которого $j^{v_1} = j$, $i^{v_1} = w$. Тогда $v_1 v^{-1} = c \in C_A$, $v_1 = cv$ и

$$M_{n+1} > (C_{M_{n+1}}(A))^{v_1} = (C_{M_{n+1}}(A))^{cv} = (C_{M^c_{n+1}}(A))^v.$$

Ввиду предложения 1.4.8 (пункт 2) и леммы 7.2.11 $C_{M^c_{n+1}}(A) = C_{M_{n+1}}(A)$. По построению $C_{M_{n+1}}(A) > C_{M_n}(A)$. Следовательно,

$$(C_{M_{n+1}}(A))^v > (C_{M_n}(A))^v = C_{M_n^v}(A^v) = C_{M_n}(B).$$

Таким образом, $C_{M_n}(B) < N_{n+1}$. По предложению 1.4.8 (пункт 10) и в силу того, что $|M_n| > |U_3(5)|$ для любого n, получаем

$$M_n = \langle N_{M_n}(A), C_{M_n}(B)\rangle < \langle N_{M_{n+1}}(A), C_{M_{n+1}}(B)\rangle = M_{n+1}.$$

Следовательно, $M_1 < M_2 < \ldots < M_n < \ldots$. По предложению 1.2.16

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M \;\tilde{\in}\; \{L_3(R), U_3(P)\}$$

для подходящих бесконечных локально конечных полей R, P нечетных характеристик. То, что M — собственная подгруппа группы G, вытекает из леммы 7.2.4.

2. Из равенства $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ и леммы 7.2.13 (свойство 3) получаем, что $N_M(A) = T(N)$. Поскольку A и X сопряжены в M (предложение 1.4.8 (пункт 4)), то для некоторого $x \in M$ выполнено $A = X^x$, и

$$T(N) = T(N_G(A)) = N_M(A) = N_M(X^x) = N_{M^x}(X^x) = (N_M(F))^x.$$

Следовательно, $T(N) = (N_M(X))^x$,

$$N_M(X) = T(N)^{x^{-1}} = T(N_G(A))^{x^{-1}} = T(N_{G^{x^{-1}}}(A^{x^{-1}})) = T(N_G(X)).$$

3. Пусть S_1, S_2 — две различные силовские 2-подгруппы группы M. Если одна из них конечна, то вторая конечна и сопряжена с первой по предложению 1.3.6. Если они бесконечны, то они сопряжены как силовские 2-подгруппы из нормализаторов четверных подгрупп, лежащих в полных абелевых подгруппах группы M (см. пункт 2, доказанный выше).

4. Пусть, напротив, $S_M < S$, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G.

Пусть S — конечная группа. Она имеет вид 1 или 2 из заключения леммы 7.2.5. Поскольку полудиэдральная группа не может содержать в качестве собственной подгруппы полудиэдральную группу, то S — сплетенная группа вида 2 из леммы 7.2.5 порядка не менее 32, и $S < T(N_G(X))$ для некоторой четверной подгруппы X из S. Так как все четверные подгруппы в G сопряжены (лемма 7.2.9), то можно считать, что $X < M$. По пункту 2, доказанному выше, $S < M$. Следовательно, $S_M = S$, что противоречит выбору S.

Пусть S — бесконечная группа. Тогда она имеет вид 5 из заключения леммы 7.2.5. Предположим, что S_M — бесконечная группа. Обозначим через $\tilde{S}_M$ полную часть группы S_M.

Тогда $\tilde{S}$ — полная абелева группа ранга 2, и $S < T(N_G(X))$ для четверной подгруппы X из $\tilde{S}$. Так как все четверные подгруппы в G сопряжены, то можно считать, что $X < M$. По пункту 2, доказанному выше, $S < M$, а по пункту 3 $S_M = S$, что противоречит выбору S.

Предположим, что S_M — конечная группа. Тогда для любого натурального k выполнено $S_M < S_k < S$, где S_k — конечная подгруппа из S со свойством $|S_k| > k$. По условию насыщенности $S_k < H \in \mathfrak{B}(1)$. Пусть S_H — силовская 2-подгруппа из H. Так как S_H содержит в качестве собственной подгруппы группу S_M, которая является либо полудиэдральной, либо сплетенной группой, то S_H — сплетенная группа. Следовательно, для некоторой четверной группы $X < S_H$ справедливо $S_H < T(N_G(X))$ (предложение 1.4.8 (пункты 1–4)). По лемме 7.2.9 и пункту 2, доказанному выше, для некоторого $g \in G$ имеет место $S_M^g < S_H^g < T(N_G(X^g)) < M$. Получили противоречие с тем, что S_M^g — силовская 2-подгруппа в M в силу пункта 3.

5. Пусть $c \in N_G(M) \setminus M$, и c — элемент конечного порядка. Если $A^c = A$, то по пункту 2, доказанному выше, $c \in M$, что противоречит выбору c. Если $A^c \neq A$, то для некоторого $x \in M$ выполнено $A^{cx} = A$ (предложение 1.4.8 (пункт 4)), и по пункту 2, доказанному выше, $cx \in M$. Следовательно, $c \in M$, что противоречит выбору M.

Лемма доказана.

Лемма 7.2.15. *Пусть K — конечная 2-подгруппа группы G. Тогда существует такой $g \in G$, что $K^g < M$.*

Доказательство. Пусть силовские 2-подгруппы из G бесконечны, и K — минимальный контрпример к утверждению леммы. В силу леммы 7.2.6 для некоторого $g \in G$ группа $K_1 = K^g \cap M$ неединичная и $|K^g : K_1| = 2$. Возьмем в M силовскую 2-подгруппу S_M, содержащую группу K_1. По лемме 7.2.14, предложению 1.3.6 и лемме 7.2.5 S_M — черниковская группа. Обозначим через $\tilde{S}_M$ полную часть S_M. Очевидно, ранг $\tilde{S}_M$ равен 2. Следовательно, в $Z(S_M) \setminus K_1$ найдется элемент z такой, что $z^2 \in K_1$. В этом случае $\langle K^g, z\rangle$ — конечная группа. Так как в конечной группе силовские 2-подгруппы сопряжены, то без ограничения общности можно считать, что $\langle K^g, z\rangle$ — не циклическая 2-группа.

Пусть S_G — бесконечная силовская 2-подгруппа группы G, содержащая группу $\langle K^g, z\rangle$. Если полная часть $\tilde{S_G}$ группы G имеет ранг 2, то для некоторого $h \in G$, $S_G^h < M$, $K^{gh} < M$ (лемма 7.2.9), и все доказано. Если $\tilde{S_G}$ имеет ранг 1, то $S_G = D \leftthreetimes \langle s\rangle$, где D — квазициклическая 2-группа, s — инволюция и для любого $x \in D$, $x^s = x^{-1}$ (в противном случае, ввиду условия насыщенности, любая конечная подгруппа из S_G, в частности $\langle K^g, z\rangle$, вкладывается в конечную сплетенную 2-подгруппу сколь угодно большого порядка, и в этом случае лемма доказана ввиду утверждения леммы 7.2.9).

Если $\langle z\rangle$— группа порядка 2, то K_1 — группа порядка 2, а K^g — группа порядка 4. Если K^g — четверная группа, то по лемме 7.2.9 $K^{gh} < M$ для некоторого $h \in G$, что противоречит выбору K. Следовательно, K^g — циклическая группа порядка 4. В этом случае $K^g \leftthreetimes \langle z \rangle$ — группа диэдра порядка 8. Очевидно, $K^g < K^g \leftthreetimes \langle z \rangle < N_G(K_1 \times \langle z \rangle)$. Поскольку $K_1 \times \langle z \rangle$ — четверная группа из M, то по лемме 7.2.14 $K < M$. Получили противоречие с выбором K^g.

Если $\langle z \rangle$ — группа порядка, большего 2, то K_1 — группа порядка 2,

$$K_1 < \langle z \rangle < \langle z \rangle K^g, \langle z \rangle \lhd \langle z \rangle K^g, \langle z \rangle K^g = \langle z \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle < S_G,$$

где v — инволюция. Возьмем инволюцию $a \in S_M \setminus Z(S_M)$. По условию насыщенности группа $\langle z, v, a \rangle$ конечна и $\langle z, v, a \rangle < H \mathrel{\tilde{\in}} \mathfrak{B}(1)$, поскольку H содержит подгруппу $\langle z \rangle \times \langle a \rangle$. В этом случае $\langle z, v, a \rangle < N_G(T)$ для некоторой четверной группы $X < G$. Ввиду лемм 7.2.9, 7.2.14, $K^g < M$. Противоречие с выбором K^g.

Лемма доказана.

Лемма 7.2.16. *Пусть $R \in \mathfrak{B}(1)$, $R \cap M$ содержит четверную подгруппу. Тогда*

$$R < M.$$

Доказательство. Пусть, напротив, C — четверная группа из $R \cap M \neq R$. По лемме 7.2.14 (пункт 2) $N_R(C) < M$. По предложению 1.4.8 (пункты 1–4) $N_R(C)$ содержит четверную подгруппу H такую, что $T = \langle C,\ H \rangle$ — группа диэдра порядка 8. По лемме 7.2.14 (пункт 2) $N_R(H) < M$. Таким образом, $S = \langle N_R(C), N_R(H) \rangle < M$. Поскольку $S \neq R$, то $R \simeq U_3(5)$, $S \simeq A_7$ и S — максимальная подгруппа в R (предложение 1.4.8 (пункт 9)). Так как T — силовская 2-подгруппа из S, а силовская 2-подгруппа из R является полудиэдральной группой порядка 16, то возьмем $x \in N_R(T) \setminus T$ со свойством $x \notin M$, но $x^2 \in T$. Силовская 2-подгруппа из M имеет порядок больше 8 (лемма 7.2.14, предложение 1.4.8 (п. 8)). Выберем $y \in N_M(T) \setminus T$ со свойством $y^2 \in T$. Так как G — группа Шункова, то $\langle x, y, T \rangle$ — конечная группа, лежащая в нормализаторе циклической подгруппы порядка 4 из T. Силовская 2-подгруппа из $\langle x, y, T \rangle$ содержит силовскую 2-подгруппу из R, которая является полудиэдральной группой. Следовательно, по условию насыщенности $\langle x, y, T \rangle < R_1 \in \mathfrak{B}(1)$ (изоморфизм $R_1 \simeq M_{11}$ невозможен по причине того, что $\langle x, y, T \rangle$ — конечная группа, лежащая в нормализаторе циклической подгруппы порядка 4 из T, что невозможно по предложению 1.4.15 (пункт 2)). Поскольку $x \in R_1$, но $x \notin M$, то R_1 не лежит в M. Очевидно, R_1 не изоморфна $U_3(5)$, следовательно, $R_1 = \langle N_{R_1}(C), N_{R_1}(H) \rangle$ (предложение 1.4.8 (пункт 10)), $R_1 < M$ (лемма 7.2.14 (пункт 3)) и $x \in M$, что невозможно.

Лемма доказана.

Лемма 7.2.17. *Существует инволюция $z \in M$ такая, что $T(C_G(z)) \not< M$.*

Доказательство. Предположим обратное. Возьмем группу $X \in \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{C}(1)$, удовлетворяющую заключению леммы 7.2.2 (пункт 2). Тогда $X \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного $r > 3$ (изоморфизм $X \simeq M_{11}$ невозможен ввиду предложения 1.4.15 (пункт 2), изоморфизм $X \simeq A_7$ невозможен ввиду предложения 1.4.17 (пункты 2–5)). Пусть S_X — силовская 2-подгруппа группы X. По лемме 7.2.15 для некоторого $g \in G$ имеет место $S_X^g < X^g \cap M$. Если S_X^g содержит две неперестановочные инволюции x, y, то по предложению 1.4.3 (пункт 4) $X^g = \langle C_{X^g}(x), C_{X^g}(y) \rangle$. По условию леммы $X^g < M$. Следовательно, $X^g < K < M$ и $K \in \mathfrak{B}(1)$. Тогда $X < K^{g^{-1}}$ и $K^{g-1} \in \mathfrak{B}(1)$, что противоречит выбору X.

Итак, все инволюции из S_X^g перестановочны, и по предложению 1.4.3 (пункт 1) $S_X^g = \langle z \rangle \times \langle u \rangle$ — четверная группа. Так как $X^g \not< M$, то из списка максимальных подгрупп группы $L_2(r)$ [64, с. 377], предложения 1.4.3 (пункт 4) и условия леммы получаем, что $X^g \simeq L_2(5)$.

По лемме 7.2.14 $N_{X^g}(S_X^g) < M$. Возьмем элемент b порядка 3 из $N_{X^g}(S_X^g)$, инволюцию $x \in N_{X^g}(\langle b\rangle)$, инволюцию $y \in N_M(\langle b\rangle) \setminus X^g$ (предложение 1.4.8, пункты 2, 3). Так как G — группа Шункова, то $\langle b,\ x,\ y\rangle$ — конечная группа. Поскольку $x \notin M$, то $\langle b,\ x,\ y\rangle \not< M$ и $|\langle b,\ x,\ y\rangle| > 6$. По условию насыщенности $\langle b,\ x,\ y\rangle < H \in \mathfrak{M}(1)$.

Предположим, что $H \in \mathfrak{B}(1)$. Тогда $H \cap M$ содержит инволюцию y. Ясно, что в этом случае $H \not< M$, и $H \cap M$ не содержит четверных групп (лемма 7.2.16). В силу нашего предположения в $H \setminus \langle y\rangle$ найдется инволюция y_1 со свойством $y_1 y = y y_1$. В этом случае $y_1 \in C_G(y)$. Так как $C_G(y) < M$, то $y_1 \in M$, $\langle y\rangle \times \langle y_1\rangle < H \cap M$ и $H < M$, что невозможно.

Предположим, что $H \in \mathfrak{A}(1)$. Тогда $H \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного $r > 5$ ($|\langle b,\ x,\ y\rangle| > 6$), и H содержит две неперестановочные инволюции $\{y,\ by\}$. Следовательно, $H = \langle C_H(y),\ C_H(by)\rangle$. Отсюда и из условия леммы вытекает, что $H < M$. Это противоречит выбору H.

Предположим, что $H \simeq M_{11}$. Так как H содержит две неперестановочные инволюции $\{y,\ by\}$, то $H = \langle C_H(y),\ C_H(by)\rangle$ (предложение 1.4.15 (пункт 2)). Отсюда и из условия леммы вытекает, что $H < M$. Это противоречит выбору H.

Предположим, что $H \simeq A_7$. Так как H содержит две неперестановочные инволюции, то H содержит, как минимум, две различные четверные подгруппы Q, R (предложение 1.4.17) . Следовательно, $H = \langle C_H(Q),\ C_H(R)\rangle$ (предложение 1.4.17 (пункт 5)). Отсюда и из условия леммы вытекает, что $H < M$. Это противоречит выбору H.

Лемма доказана.

Лемма 7.2.18. *Пусть S — силовская 2-подгруппа из M. Тогда*

$$S \neq (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle,$$

где A — локально циклическая группа порядка не менее 4, v — инволюция, $A^v = B$.

Доказательство. Предположим обратное. По лемме 7.2.17 в M существует инволюция z такая, что $T(C_G(z)) \not< M$. Пусть $c \in T(C_G(z)) \setminus M$, тогда $z \in M^c \cap M$. По лемме 7.2.14 (свойство 5) $M^c \neq M$. По лемме 7.2.16 $M^c \cap M$ не может содержать четверных подгрупп. Предположим, что существует такой элемент $f \in M^c \cap M$, что $f^2 = z$. Пусть S_M — силовская 2-подгруппа из M, содержащая элемент f, S_{M^c} — силовская 2-подгруппа из M^c, содержащая f. Так как силовские 2-подгруппы в M сопряжены (лемма 7.2.14, п. 4), то $S \simeq S_M \simeq S_{M^c}$. Следовательно, $S_M = (A_1 \times B_1) \leftthreetimes \langle v_1\rangle$, где A_1 — локально циклическая 2-группа порядка не менее 4, v_1 — инволюция, $A_1^{v_1} = B_1$ и $S_{M^c} = (A_2 \times B_2) \leftthreetimes \langle v_2\rangle$, где A_2 — локально циклическая 2-группа порядка не менее 4, v_2 — инволюция, $A_2^{v_2} = B_2$.

Пусть $f \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$. Тогда найдутся такие инволюции x, y, что $x \in C_{S_M}(f) \setminus M^c \cap M$ и $y \in C_{S_{M^c}}(f) \setminus M^c \cap M$. Конечная группа $\langle f,\ x,\ y\rangle$, очевидно, не может являться подгруппой никакой группы диэдра и не может являться подгруппой никакой полудиэдральной группы. Следовательно, по условию насыщенности, леммам 7.2.2, 7.2.7 и предложениям 1.4.8, 1.4.3, 1.4.15, 1.4.17, $\langle f,\ x,\ y\rangle < U_1 \in \mathfrak{B}(1)$. По лемме 7.2.16 $U_1 < M \cap M^c$. Последнее противоречит тому, что $M \cap M^c$ не содержит четверных подгрупп.

Пусть $f \notin (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$, $f \in (A_1 \times B_1)$, $f \notin (A_2 \times B_2)$. Тогда найдутся такие инволюции $x \in C_{S_M}(f) \setminus M^c \cap M$ и $y \in N_{S_{M^c}}(\langle f\rangle) \setminus M^c \cap M$, что $f^y = f^{-1}$. Конечная группа $\langle f,\ x,\ y\rangle$, очевидно, не является подгруппой группы диэдра. Следовательно, по условию насыщенности $\langle f,\ x,\ y\rangle < U_2 \in \mathfrak{B}(1)$. По лемме 7.2.16 $U_2 < M \cap M^c$. Последнее противоречит тому, что $M \cap M^c$ не содержит четверных подгрупп.

Пусть $f \notin (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$, $f \notin (A_1 \times B_1)$, $f \in (A_2 \times B_2)$. Данный случай аналогичен разобранному выше.

Пусть $f \notin (A_1 \times B_1)$, $f \notin (A_2 \times B_2)$. Тогда найдется элемент $x \in C_{S_M}(f) \setminus M^c \cap M$, $x^2 = f^2$, и элемент $y \in C_{S_{M^c}}(f) \setminus M^c \cap M$ такой, что $f^2 = y^2$. Конечная группа $\langle f,\ x,\ y \rangle$, очевидно, не изоморфна никакой подгруппе группы диэдра и не изоморфна никакой подгруппе группы $GL_2(3)$. Следовательно, по условию насыщенности $\langle f,\ x,\ y \rangle < U_3 \in \mathfrak{B}(1)$. Так как U_3 содержит четверные группы $\langle f^2 \rangle \times \langle xf \rangle$ и $\langle f^2 \rangle \times \langle yf \rangle$, то в силу леммы 7.2.16 $U_3 < M \cap M^c$. Последнее противоречит тому, что $M \cap M^c$ не содержит четверных подгрупп.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда $M \cap M^c$ не содержит элементов порядка 4. По условию леммы найдутся такие элементы x, y порядка 4, что $x^2 = z,\ y^2 = z,\ x \in M \setminus M \cap M^c,\ y \in M^c \setminus M \cap M^c$. Ясно, что $\langle x, y \rangle \notin M$.

Пусть $\langle x,\ y \rangle < U_1 \in \mathfrak{B}(1)$. Пусть R — четверная подгруппа из U_1. По леммам 7.2.9, 7.2.14 (пункт 5), 7.2.16 для некоторого $g \in G \setminus M$ выполнено $N_{U_1}(R) < M^g$. Следовательно, $M \cap M^g$ содержит элемент x порядка 4. Как показано выше, это невозможно.

Пусть $U_1 \in \mathfrak{A}(1)$. Тогда $\langle x,\ y \rangle < C_{U_1}(z)$ — группа диэдра (предложение 1.4.3), но $\langle x,\ y \rangle$ таковой не является, поскольку содержит две различные циклические подгруппы порядка 4: $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$.

Предположим, что $U_1 \simeq A_7$. Пусть R — четверная подгруппа из U_1. По леммам 7.2.9, 7.2.14 (пункт 5), 7.2.16 для некоторого $g \in G \setminus M$ выполнено $N_{U_1}(R) < M^g$. Так как для любой четверной подгруппы $X \in N_{U_1}(R)$, $N_{U_1}(X) < M^g$, то $U_1 < M^g$. Следовательно, либо $M \cap M^g$ содержит элемент x порядка 4, а как показано выше, это невозможно, либо $M = M^g$, что также невозможно.

Предположим, что $U_1 \simeq M_{11}$.

Пусть S_M — силовская 2-подгруппа группы U_1, содержащая x. Возьмем $v \in N_{S_M}(\langle x \rangle) \setminus \langle x \rangle$. Тогда $\langle x \rangle < M \cap M^v$, а так как элемент x имеет порядок 4, то $M^v = M$ и $v \in N()$. Повторяя еще раз этот прием получаем, что $S_M < M \cap U_1$. По лемме 7.2.14(пункт 2) и предложению 1.4.15(пункты 4.5) $M \cap U_1$ содержит подгруппу $H_M \simeq A_6^{\cdot}2$ такую, что $S_M < H_M$.

Пусть S_{M^c} — силовская 2-подгруппа группы U_1, содержащая y. Возьмем $w \in N_{S_{M^c w}}(\langle y \rangle) \setminus \langle y \rangle$. Тогда $\langle y \rangle < M \cap M^v$, а так как элемент y имеет порядок 4, то $M^c w = M^c$ и $w \in M^c$. Повторяя еще раз этот прием, получаем, что $S_{M^c} < M^c \cap U_1$. По лемме 7.2.14(пункт 2) и предложению 1.4.15(пункты 4.5) $M^c \cap U_1$ содержит подгруппу $H_{M^c} \simeq A_6^{\cdot}2$ такую, что $S_{M^c} < H_{M^c}$.

Так как силовская 2-подгруппа из $M \cap M^c$ имеет порядок 2, то из сравнения порядков групп U_1, H_M, H_{M^c} вытекает, что порядок группы $H_M \cap H_{M^c}$ делится на 9 и 5. Следовательно, $H_M = H_{M^c}$, $M \cap M^c$ содержит четверную группу и $M = M^c$. Противоречие с тем, что $M \neq M^c$.

Лемма доказана.

Лемма 7.2.19. *Пусть S — силовская 2-подгруппа из M. Тогда S — не полудиэдральная группа.*

Доказательство. Предположим обратное. В данном случае все силовские 2-подгруппы группы G являются полудиэдральными группами и сопряжены, поскольку конечны, порядка 2^{k+1}(лемма 7.2.14 (пункт 3)), предложение 1.3.6). По лемме 7.2.17 существует такая инволюция $z \in M$, что $C_G(z) \not< M$. Пусть $c \in C_G(z) \setminus M$, тогда $z \in M^c \cap M$. По лемме 7.2.14 (пункт 5) $M^c \neq M$. По лемме 7.2.16 $M^c \cap M$ не может содержать четверных подгрупп. Из множества групп $\{M^g | g \in G \setminus M\}$ выберем такую группу M^g, чтобы силовская 2-подгруппа S_g из $M \cap M^g$ содержала элемент b максимально возможного порядка. Ясно, что S_g — группа с единственной инволюцией. В силу существования M^c и конечности силовской 2-подгруппы в M множество таких групп непусто.

Рассмотрим случай, когда S_g содержит элемент b порядка $2^k \geqslant 8$ (т. е. максимально возможный порядок в условиях данной леммы). Ясно, что в этом случае $S_g = \langle b \rangle$. Выберем в M инволюцию $z_1 \in N_M(S_g) \backslash S_g$, а в M^g возьмем инволюцию $z_2 \in N_{M^g}(S_g) \backslash S_g$. По условию насыщенности $\langle S_g,\ z_1,\ z_2 \rangle < H \in \mathfrak{M}(1)$. Предположим, что $H \in \mathfrak{B}(1)$. Тогда $H \not< M$, и $H < M^h$ для некоторого $h \in G \setminus M$ (леммы 7.2.9, 7.2.14 (пункт 5), 7.2.16). Следовательно, $M \cap M^h$ содержит четверную подгруппу $\langle b^{2^{k-1}} \rangle \times \langle\ z_1 \rangle$, и $M^g \cap M^h$ содержит четверную подгруппу $\langle b^{2^{k-1}} \rangle \times \langle z_2 \rangle$. Ясно, что в этом случае $M = M^h = M^g$. Получили противоречие с выбором M^g. Таким образом,

$$H \tilde{\in} \{L_2(q),\ A_7,\ M_{11}\},$$

где q — нечетное, $q > 3$. Поскольку $C_H(b^{2^{k-1}})$ содержит полудиэдральную подгруппу (например, $\langle b \rangle \leftthreetimes \langle\ z_1 \rangle$), то для H осталась единственная возможность $H \simeq M_{11}$, но и она невозможна ввиду предложения 1.4.15(пункт 2).

Рассмотрим случай, когда S_g содержит элемент b порядка 4, но не содержит элементов порядка 8. Выберем в M элемент $z_1 \in N_M(S_g) \backslash S_g$, а в M^g возьмем элемент $z_2 \in N_{M^g}(S_g) \backslash S_g$ такие, что $z_1^2 \in \langle b \rangle, z_2^2 \in \langle b \rangle$. По условию насыщенности $\langle b,\ z_1,\ z_2 \rangle < H \in \mathfrak{M}(1)$. Предположим, что $H \in \mathfrak{B}(1)$. Тогда $H \cap M$ содержит силовскую 2-подгруппу из M, содержащую группу $\langle b,\ z_1 \rangle$ и являющуюся полудиэдральной группой. Следовательно, $M \cap H$ содержит четверную группу, и по лемме 7.2.16 $H < M$. Аналогичным образом показывается, что $H < M^g$. Но тогда $M = M^g$, что невозможно.

Таким образом,

$$H \tilde{\in} \{L_2(q),\ A_7,\ M_{11},\},$$

где q — нечетное, $q > 3$. Поскольку $C_H(b^2)$ содержит подгруппу $\langle b,\ z_1,\ z_2 \rangle < H$, которая не является ни группой диэдра, ни циклической группой, то для H осталась единственая возможность: $H \simeq M_{11}$, но и она невозможна ввиду предложения 1.4.15(пункт 2).

Рассмотрим случай, когда S_g содержит элемент b порядка 2, но не содержит элементов порядка 4. Выберем в M элемент $z_1 \in N_M(S_g) \backslash S_g$, а в M^g возьмем элемент $z_2 \in N_{M^g}(S_g) \backslash S_g$ такие, что $z_1^2 = z_2^2 = b$. По условию насыщенности $\langle b,\ z_1,\ z_2 \rangle < H \in \mathfrak{M}(1)$. Предположим, что $H \in \mathfrak{B}(1)$. Тогда $H \not< M$, и $H < M^h$ для некоторого $h \in G \setminus M$ (леммы 7.2.9, 7.2.14 (пункт 5), 7.2.16). Так как либо $M \cap M^h \neq M$, либо $M^g \cap M^h \neq M^g$, то получили противоречие с условием рассматриваемого случая (поскольку в первом случае $M \cap M^h$ содержит элемент z_1 порядка 4, а во втором случае $M \cap M^{hg^{-1}}$ содержит элемент $z_2^{g^{-1}}$ порядка 4). Таким образом,

$$H \tilde{\in} \{L_2(q),\ A_7,\ M_{11},\},$$

где q — нечетное, $q > 3$. Поскольку $C_H(b^2)$ содержит подгруппу $\langle b,\ z_1,\ z_2 \rangle < H$, которая не является ни группой диэдра, ни циклической группой, то для H осталась единственая возможность $H \simeq M_{11}$. В этом случае $\langle b,\ z_1,\ z_2 \rangle$ — группа кватернионов порядка 8, $z_1^{z_2} = z^{-1}, z_2^{z_1} = z_2^{-1}$ (предложение 1.4.15 (пункт 2)). Тогда $z_1 \in M \cap M^{z_2}$, и порядок z_1 равен 4. Противоречие с условием рассматриваемого случая.

Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы. Пусть S — силовская 2-подгруппа группы M. Из леммы 7.2.14 (пункт 1) и предложения 1.4.8 (пункты 6, 7) вытекает, что либо $S = (A \times B) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где A — локально циклическая группа порядка не менее 4, v — инволюция, $A^v = B$, либо S — полудиэдральная группа. Получили противоречие с утверждениями лемм 7.2.18 и 7.2.19. Теорема для раздела **I** доказана.

II. Для любой четверной подгруппы F группы G $\mathbf{C_G(F)}$ — конечная группа.

Лемма 7.2.20. *Пусть z — инволюция из G. Тогда $C_G(z)$ обладает периодической частью $T(C_G(z))$ и $T(C_G(z)) = D \leftthreetimes \langle t \rangle$, где t — инволюция, D — локально циклическая группа и для любого $d \in D$, $d^t = d^{-1}$.*

Доказательство. Положим $C = C_G(z)$. Если C содержит конечное число элементов конечного порядка, то множество $\mathfrak{M}(1)$ с точностью до изоморфизма содержит конечное число подгрупп. По предложению 1.3.4 G обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна одной из групп множества $\mathfrak{M}(1)$. Противоречие с выбором G. Таким образом, C содержит бесконечно много элементов конечного порядка, и как следствие, содержит бесконечную локально конечную подгруппу (предложение 1.3.4). Следовательно, множество $\mathfrak{A}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных групп. В силу теоремы Житмоди (предложение 1.4.21) в C найдется элемент b простого порядка p и $p \notin \{\pi(A_7) \cap \pi(M_{11})\}$. Так как G — группа Шункова, то $\langle b \rangle$ — нормальная подгруппа группы C. По условию насыщенности $\langle b, z \rangle \leq Y \in \mathfrak{A}(1)$. По предложению 1.4.3 $C_Y(z)$ — группа диэдра. Возьмем в $C_Y(z)$ инволюцию v. Ясно, что $v \in C_Y(z) \leq C$. Отсюда вытекает, что для любой конечной подгруппы $K \leq C$ группа $\langle z, b, v, g \rangle$ является конечной группой диэдра. По предложению 1.3.8 группа C обладает периодической частью $T(G)$ из заключения леммы.

Лемма доказана.

Лемма 7.2.21. $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1)$.

Доказательство. Ввиду леммы 7.2.20, для любой группы $X \in \mathfrak{M}(1)$ и любой инволюции $z \in X$ $C_X(z)$ — группа диэдра. Ввиду предложений 1.4.8, 1.4.3, 1.4.15, 1.4.16, 1.4.17, $X \simeq L_2(r)$. Из сказанного выше вытекает, что $X \in \mathfrak{A}(1)$.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы для раздела **II**. Так как $\mathfrak{M}(1)$ — насыщающее множество для группы G, то по лемме 7.2.21 $\mathfrak{A}(1)$ — также насыщающее множество для группы G. По предложению 1.2.17 $T(G) \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q нечетной характеристики. Противоречие с выбором G.

Теорема для раздела **II** доказана.

Теорема полностью доказана.

Литература

[1] Адян, С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах / С.И. Адян. — М.: Наука, 1975. — 335 с.

[2] Алешин, С.В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах / С.В. Алешин // Матем. заметки. — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 319–328.

[3] Беляев, В.В. Локально-конечные группы Шевалле / В.В. Беляев // Исследования по теории групп. — Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1984. — С. 39–50.

[4] Боровик, А. В. Вложения конечных групп Шевалле и периодические линейные группы / А.В. Боровик // Сиб. мат. журн. — 1983. — Т. 24, № 6. — С. 26–35.

[5] Голод, Е.С. О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах / Е.С. Голод // Изв. АН СССР. Сер. "Матем." — 1964. — Т. 28, № 2. — С. 273–276.

[6] Горенстейн, Д. Конечные простые группы / Д. Горенстейн. М.: Мир, 1985. — 560 с.

[7] Григорчук, Р.И. К проблеме Бернсайда о периодических группах / Р.И. Григорчук // Функц. анализ и его прил. — 1980. — Т. 14, №1. — С. 53–54.

[8] Дицман, А.П. О центре p-групп / А.П. Дицман // Труды семинара по теории групп. — М.— 1938. — С. 30–24.

[9] Журтов, А.Х. О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса / А. Х. Журтов // Сиб. матем. журн. — 2000. — Т. 41, № 2. — С. 329–338.

[10] Каргаполов, М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. СПб.: Лань, 2009. — 287 с.

[11] Кондратьев, А.С. 2-сигнализаторы конечных простых групп / А.С. Кондратьев, В.Д. Мазуров // Алгебра и логика. — 2003. — Т. 42, № 5. — С. 594–623.

[12] Кондратьев, А.С. Группы и алгебры Ли /А.С. Кондратьев. — Екатеринбург: Изд-во УрОРАН, 2009. — 310 с.

[13] Конторович, П.Г. Инвариантно покрываемые группы // Матем. сб.— 1940.— № 8. — С. 423–430.

[14] Конторович, П.Г. Инвариантно покрываемые группы II // Матем. сб.– 1951.– Т. 28.– С. 79–88.

[15] Конторович, П.Г. Структурные вопросы теории групп /П.Г. Конторович, А.С. Пекелис, А.И. Старостин // Матем. зап. Уральск. ун-та. — 1961. — № 3. — С. 3–50.

[16] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 16-е изд. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2006.

[17] Курош, А.Г. Теория групп /А.Г. Курош. — М.: Наука, 1967. — 648 с.

[18] Кузнецов, А. А. Группы, насыщенные заданным множеством групп / А.А. Кузнецов, К.А.Филиппов // Сиб. электрон. матем. изв. — 2011. — № 8. — С. 230–246.

[19] Кузнецов, А.А. Группы с условием насыщенности. /А.А. Кузнецов, Д.В. Лыткина, Л.Р.Тухватулинна, К.А. Филиппов// Изд. КрасГАУ, Красноярск, 2010. — 254 с.

[20] Лысёнок, И.Г. Бесконечные бернсайдовы группы четного периода / И.Г. Лысёнок // Изв. РАН. Сер. "Матем.", — 1996. — Т. 60, № 3. С. 3–224.

[21] Лыткина, Д.В. О периодических группах, насыщенных $L_2(q)$ и ее центральными расширениями /Д.В. Лыткина, К.А. Филиппов // Матем. системы. — Красноярск: Изд-во КрасГАУ, 2006. — № 5. — С. 35–45.

[22] Лыткина, Д.В. Периодические группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых групп /Д.В. Лыткина// Сиб. мат. журнал. — 2011. — Т. 52, № 2. — С. 340–349.

[23] Лыткина, Д.В. Периодические группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых групп. II /Д.В. Лыткина// Сиб. мат. журнал. — 2011. — Т. 52, № 5. — С. 1096–1112.

[24] Лыткина, Д.В. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами $U_3(2^n)$ /Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов// Алгебра и логика. — 2008. — № 47(3). — С. 288–306.

[25] Лыткина, Д.В. О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп /Лыткина Д.В., Тухватулина Л.Р., Филиппов К.А.//Сиб. мат. журнал. — 2008.— № 49:2. — С. 394–399.

[26] Лыткина, Д.В. О группах, насыщенных конечными простыми группами /Д. В. Лыткина// Алгебра и логика. 2009. — № 48(5). — С. 628—653.

[27] Лыткина, Д.В. О силовских 2-подгруппах периодических групп, насыщенных конечными простыми группами. /Д.В. Лыткина, В.Дж. Ли// Сиб. мат. журнал. — 2016. — Т. 57, № 6. — С. 1313–1319.

[28] Мазуров, В.Д. О множестве порядков элементов конечной группы /В.Д. Мазуров // Алгебра и логика. – Т. 33. № 1. – 1994. – С. 81–89.

[29] Мазуров, В.Д. Конечные группы // Алгебра. Топология. Геометрия. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1976. — Т. 14. С. — 5–56. (Итоги науки и техники).

[30] Мальцев, А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами /А.И. Мальцев// Матем. сб. — 1940. Т. 8 (50), № 3. — С. 405–422.

[31] Ольшанский, А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах / А.Ю. Ольшанский, — Москва: Наука, 1989.

[32] Ольшанский, А.Ю. О вложении счетных периодических групп в простые 2-порожденные периодические группы / А.Ю. Ольшанский // Укр. матем. журн. — 1991. Т. 43, № 7–8. — С. 980–986.

[33] Остыловский, А.Н. О локальной конечности одного класса групп с условием минимальности /А.Н. Остыловский// В сб. Исследования по теории групп. — 1975. — Красноярск. С. 32-48.

[34] Панюшкин, Д.Н. О периодической группе Шункова, насыщенной центральными расширениями конечных 2-групп посредством группы $L_2(5)$ / Д.Н. Панюшкин, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2010. — Т. 10, № 1. — С. 88–92.

[35] Панюшкин, Д.Н. О группе Шункова, насыщенной центральными расширениями циклических групп посредством проективных специальных линейных групп / Д.Н. Панюшкин, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов // Труды ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 2. — С. 177–185.

[36] Панюшкин, Д.Н. Группы Шункова, насышенные прямыми произведениями различных групп: дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.01.06 / Д.Н. Панюшкин — Красноярск, 2010. — 66 с.

[37] Рожков, А.В. Условия конечности Шункова /А.В. Рожков//Междунар. конф. по алгебре. — Санкт-Петербург. — 1997. С. 268–269.

[38] Рубашкин, А.Г. О периодических группах, насыщенных $L_2(p^n)$ /А.Г. Рубашкин, К.А. Филиппов // Сибирский математический журнал. – 2005. — Т. 46, № 6. – С. 1388–1392.

[39] Санов, И.Н. Решение проблемы Бернсайда для периода 4 / И.Н. Санов // Учен. записки ЛГУ. Сер. Матем. — 1940. — № 55. — С. 166–170.

[40] Сенашов, В.И. Группы с условиями конечности /В.И. Сенашов, В.П. Шунков// — 2001. — Новосибирск, изд. СО РАН.

[41] Середа, В.А. Об одном вопросе из Коуровской тетради / В.А. Середа, А. И. Созутов // Матем. заметки. — 2006. — Т.80, № 1. — С. 154–155.

[42] Созутов, А.И. О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций /А.И. Созутов, Н.М. Сучков, Н.Г.Сучкова// Группы с условиями конечности. — Красноярск: Изд-во СФУ, 2008.

[43] Сучков, Н.М. О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций /Н.М. Сучков // Матем. сб. РАН. — 2002. — Т. 193, № 2. — С. 153–160.

[44] Филиппов, К.А. О периодических группах, насыщенных конечными простыми группами /К. А. Филиппов// Сиб. матем. журн. — 2012. — № 53:2. — С. 430–438.

[45] Филлипов, К.А. Группы с условиями насыщенности: дис. д-ра. физ.-мат. наук: 01.01.06 /К.А. Филиппов. — Красноярск, 2012. — 121 с.

[46] Филиппов, К.А. О периодической части группы Шункова, насыщенной $L_2(p^n)$ /К.А. Филиппов// Вестник СибГАУ. — 2012. — С. 611-617.

[47] Холл, М. Теория Групп. /М. Холл. — Москва: ИЛ, 1962.

[48] Череп, А.А. О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе /А.А. Череп// Алгебра и логика. – 1987. — Т. 26, № 4. — С. 518–521.

[49] Шлепкин, А.А. Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных групп: дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.01.06 /А.А. Шлепкин. — Красноярск, 2013. — 80 с.

[50] Шлепкин, А.К. О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности /А.К. Шлепкин // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22, № 2. — С. 232–231.

[51] Шлепкин, А.К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы / А.К. Шлепкин // Сб. тез. 3-й Междунар. конф. по алгебре. Красноярск, 1993. — С. 363.

[52] Шлепкин, А.К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами / А.К. Шлепкин // Матем. тр. ИМ СО РАН. — 1998. – Т. 1, № 1. — С. 129–138.

[53] Шлепкин, А.К. Об одном классе периодических групп / А.К. Шлепкин, А.Г. Рубашкин // Алгебра и логика. — 2005. — Т. 44, № 1. — С. 114–125.

[54] Шлепкин, А.К. Группы Шункова с дополнительными ограничениями: дисс. д-ра физ.-мат. наук: 01.01.06 /А.К. Шлепкин. — Красноярск, 1998. — 163 с.

[55] Шлепкин, А.К. О периодической части некоторых групп Шункова /А.К. Шлепкин// Алгебра и логика. — № 38. — 1999. — С. 96–125.

[56] Шунков, В.П. Об одном классе p-групп. /В.П. Шунков// Алгебра и логика. — 1970. — Т. 9, № 4. — С. 484–496.

[57] Шунков, В.П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией / В.П. Шунков // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 4. — С. 470–494.

[58] Шунков, В.П. О проблеме минимальности для локально конечных групп / В.П. Шунков // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 9, № 2. — С. 220–248.

[59] Amberg, B. Periodic groups saturated by dihedral subgroups / B. Amberg, L. Kazarin // Book of abstracts of the international algebraic conference dedicated to 70–th birthday of Anatoly Yakovlev. Saint-Petersburg, — 2010. — P. 79–80.

[60] Alperin, J.L. Finite groups, with quasi-dihedral and wreathed sylow 2-subgroups /J.L. Alperin, R. Brauer, D. Gorenstein// Trans. AMS. — 1970. — V. 151, № 1, P. 1-261.

[61] Alperin, J.L. Finite simple groups of 2 – rank two,/J.L. Alperin, R. Brauer, D. Gorenstein // Scripta math. — 1973. — V. 29, № 3 – 4. — P. 191–214.

[62] Blakbern, N. Same remarks on Chernikov's groups./ N. Blakbern // J. Math. — 1962. — 6. — P. 525–554.

[63] Burnside, W. On an unsettled question in the theory of distonctinupns groups, /W. Burnside // J. Pure Appl. Math. — 1902 — № 33. — P. 230–238.

[64] Bray, J.N. The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups, /J.N. Bray, D.F. Holt, C.M. Roney-Dougal// London Mathematical society lecture note series: 407. — 2013. — 435 p.

[65] Brauer, R. On sructure of groups of finite order. In: proceedings of the Internationle Congress of Mfthematicians, 1954, v. 1 pp. 209–217.

[66] Carter, R.W. Simple groups of Lie type. /R.W. Carter// London: John Wiley and Sons. — 1972.

[67] Conway, J. H. Atlas of finite groups /J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, // Oxford, Clarendon Press, 1985.

[68] Dichson, L. Linear groups, /L. Dichson // Leipziq: B.C. Neubner, 1901.

[69] Hall, Ph. Some construction for loccaly finite groups. J. London Math. Soc. — 1959. — 34. — P. 305–309.

[70] Hartley, B. Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type/B. Hartley,G. Shute// The Quarterly Journal of Mathematics Oxford. 1984. Vol. 2, № 137. P. 49–71.

[71] Harada, K. Mong Lung Lang. Indecomposable Sylow 2-subgroups of Simple Groups. /K. Harada, Mong Lung Lang// Acta Applicandae Mathematicae. — 2005. — V. 85. — P. 161-194.

[72] Huppert, B. Endliche gruppen I. /B. Huppert// Berlin-Heildelberg-New York. — 1979.

[73] Ivanov, S.V. The free Burnside groups of sufficiently large exponents / S.V. Ivanov // Int. J. of Algebra and Computation. – 1994. — № 4. — P. 1–308.

[74] Kegel, O.N. Locally Finite Groups /O.N. Kegel,B.A.F. Wehrfritz// Amsterdam: North-Holland, 1973.

[75] Suzuki, M. A new tipe of simple grops of finte order//Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1960. № 46. P.868–870. Arch. Math, **41** (1983), 103—116

[76] Thomas, S. The classification of the simple periodic linear groups// *Arch. Math.* 1983. Vol. 41. P. 103–116.

[77] Zsigmondi K. Zur Theorie der Potezreste /K. Zsigmondi // Monatsh. Math. Phys., 3, — 1892, — pp. 265-284.

Работы автора по теме диссертации, опубликованные в изданиях из перечня ВАК

[78] Шлепкин, А.А. Периодические группы, насыщенные сплетенными группами /А.А. Шлепкин // Сиб. электрон. матем. изв. — 2013. — Т. 10. — С. 56–64.

[79] Шлепкин, А.А. О группах, насыщенных $GL_2(p^n)$ /А.А. Шлепкин// Вестн. СибГАУ. — 2013. — № 1. — С. 100—108.

[80] Шлепкин, А.А. О группах Шункова, насыщенных $GL_2(p^n)$ /А.А. Шлепкин, И.В. Сабодах// Сиб. электрон. матем. изв. — 2014. — Т. 11. — С. 734–744.

[81] Шлепкин, А.А. Группы Шункова, насыщенные $L_2(p^n), U_3(2^n)$ /Е.А. Пронина, А.А. Шлепкин // Вестн. СибГАУ. — 2015. — № 3(57). — С. 111–107.

[82] Шлепкин А.А. О периодических группах, насыщенных проективными линейными группами /А.А. Шлепкин// Сиб. матем. журн. — 2015. — № 4, Т. 56, С. 952—957.

[83] Шлепкин, А.А. О группах Шункова, насыщенных полными линейными группами /А.А. Шлепкин// Сиб. матем. журн. — 2016. — № 1, Т. 57. — С. 222–235.

[84] Шлепкин, А.А. Группы Шункова, насыщенные линейными и унитарными группами степени 3 над полями нечетных порядков /А.А. Шлепкин// Сиб. электрон. матем. изв. — 2016. — Т. 13. — С. 341–351.

[85] Шлепкин, А.А. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами типа L_3, U_3 /А.А. Шлепкин, Д.В. Лыткина// Алгебра и логика. — 2016. — № 4(55). — С. 441–448.

[86] Шлепкин, А.А. О периодической группе Шункова, насыщенной конечными простыми группами лиева типа ранга 1 /А.А. Шлепкин// Изв. ИГУ. Серия "Математика". — 2016. — № 16. — С. 106-116.

[87] Шлепкин, А.А. О периодических группах и группах Шункова, насыщенных унитарными группами степени три /А.А. Шлепкин// Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — № 3(22). — С. 299–307.

[88] Шлепкин, А.А. О периодических группах и группах Шункова, насыщенных группами диэдра и A_5/ /А.А. Шлепкин// Изв. ИГУ. Сер. "Математика". — 2017. — № 20. — С. 96–108.

[89] Шлепкин, А.А. Об одном достаточном условии существования периодической части в группе Шункова /А.А. Шлепкин // Изв. ИГУ. Сер. "Математика". — 2017. — № 22. — С. 90–105.

[90] Шлепкин, А.А. Об одном достаточном условии, когда бесконечная группа не будет простой. /А.А. Шлепкин// Журнал СФУ. Сер. "Математика и физика". — 2018. — № 1. С. 103–106

[91] Шлепкин, А.А. Периодические группы, насыщенные линейными группами степени 2 и унитарными группами степени 3 /Д.В. Лыткина, А.А. Шлепкин// Математические труды. — 2018. — № 1. — С. 55–72.

[92] Шлепкин, А.А. О группах, насыщенных группами диэдра и линейными группами степени два /А.А. Шлепкин // Сиб. электрон. матем. изв. — 2018. — Т. 15. — С. 74–85.

[93] Шлепкин, А.А. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1 /А.А. Шлепкин// Алгебра и логика. — 2018. — № 1(57). — С. 118–125.

[94] Шлепкин, А.А. Периодические группы 2-ранга 2, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами /А.И. Созутов, Д.В. Лыткина, А.А. Шлепкин // Сиб. электрон. матем. изв. — 2018. — Т. 15. — С. 786–796.

[95] Шлепкин, А.А. О группах Шункова, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами /А.А. Шлепкин // Изв. ИГУ. Сер. "Математика". — 2018 . — № 24. — С. 85–101.

[96] Шлепкин, А.А. О периодической части группы Шункова, насыщенной сплетенными группами /А.А. Шлепкин// Тр. ИММ УрО РАН. — 2018. — № 3(24). — С. 281–285.

Прочие работы автора по теме диссертации

[97] Shlyopkin, A.A. Periodic groups saturated by the groups $GL_2(3^n)$. /A.A. Slyopkin// Book of abstracts of the international conference on algebra, dedicated 100th anniversary of S.M. Chernikov. — Dragomanov National pedagogical university. — Kyiv, Ukraine, 2012. — P. 144.

[98] Шлепкин, А.А. О центре группы Шункова с одним условием насыщенности. /А.А. Шлепкин, И.В. Сабодах// Тез. докл. Междунар. конф. Мальцевские чтения. — Новосибирск, 2013. — С. 124.

[99] Шлепкин, А.А. Периодические группы Шункова, насыщенные $GL_2(p^n)$. / А.А. Шлепкин, К.Н. Папунидис, И.И. Гончарук, С.В. Карпов, А.В. Федосенко // Вестн. КрасГАУ. — 2013. — № 9. — С. 69–73.

[100] Шлепкин, А.А. О подгруппах групп $GL_2(p^n)$. /А.А. Шлепкин, И.В. Сабодах, А.Н. Дарзиев, Е.А. Пронина // Вестн. КрасГАУ. — 2014. — № 7. С 35–40.

[101] Шлепкин, А.А. О группах Шункова, насыщенных группами лиева типа ранга 1 / А.А. Шлепкин // Тез. докл. Междунар. конф. Мальцевские чтения, посвящ. 75-летию Ю.Л. Ершова. — Новосибирск, 2015. — С. 134.

[102] Shlyopkin, A.A. Groups, saturated with unitary groups of dimension three /A.A. Shlyopkin// Abstracts of the international Conference and PhD Summer School "Groups and Graphs, Algorithms and Automata"in honor of the 80th birthday of Professor Vyacheslav A. Belonogov and of the 70th Birthday of Professor Vitaly A. Baransky. — Yekaterinburg, Russia, 2015. — P. 85.

[103] Шлепкин, А.А. О периодической части группы Шункова, насыщенной конечными простыми неабелевыми группами / А.А. Шлепкин // Тез. докл. междунар. конф. Мальцевские чтения. — Новосибирск, 2016. — С. 119.

[104] Шлепкин, А.А. Периодические группы 2-ранга 2, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами / А.А. Шлепкин // Тез. докл. междунар. конф. Мальцевские чтения. — Новосибирск, 2017. — С. 86.

[105] Шлепкин, А.А. О периодической части группы Шункова, насыщенной сплетенными группами / А.А. Шлепкин // Тез. докл. Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша. — Москва, 2018. — С. 186.