МИНИСТЕРСТВО СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»

На правах рукописи

САБОДАХ ИРИНА ВАЛЕРЬЕВНА

УДК 512.54

ВЛОЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП В БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С УСЛОВИЯМИ КОНЕЧНОСТИ

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
доцент Д.В. Лыткина

Красноярск-2014

Содержание

Введение

Структура бесконечной периодической группы в значительной степени зависит от наличия в ней множеств конечных групп с заданной структурой и с заданными свойствами вложения этих групп в исходную группу. Одним из понятий, позволяющих эффективно использовать упомянутые выше соображения для установления структуры исследуемой группы, является понятие насыщенности. По определению, группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X [23, 27].

Например, простые группы лиева типа над локально конечными полями могут быть охарактеризованы как локально конечные группы, насыщенные группами из множества конечных простых групп лиева типа ограниченного лиева ранга [2].

Из результатов И.Г. Лысенка [13] и С.В. Иванова [37] следует, что бернсайдовы группы $B(m, n)$ для достаточно больших четных n не локально конечны и насыщены прямыми произведениями конечных групп диэдра. Далее, А.К. Шлепкин и А.Г. Рубашкин [24] показали, что периодическая группа Шункова, насыщенная группами диэдра, локально конечна, и периодическая группа ограниченного периода, насыщенная группами диэдра, конечна. Более того, Б. Амберг и Л. Казарин [31] доказали, что периодическая группа, насыщенная группами диэдра, локально конечна. В работах [4, 5] доказана локальная конечность групп, насыщенных группами из множеств $\mathfrak{M} = \{L_2(2^m) \times I_n | m, n \in N, m \geq 2\}$, где I_n – элементарная абелева 2-группа порядка 2^n, и $\mathfrak{R} = \{L_2(2^m) \times V\}$, где V – циклическая группа без инволюций. В работах [17, 18] доказана локальная конечность групп, насыщенных группами из множеств $\mathfrak{R} = \{L_2(5) \times I_n | n = 1, 2, ...\}$, где $I_n = \underbrace{Z_2 \times Z_2 \times \cdots \times Z_2}_{n \text{ раз}}$, $\mathfrak{R} = \{L_2(2^n) \times \langle t_m \rangle | n = 1, 2, ..., m = 1, 2, ...\}$, где $(|L_2(2^n)|, |t_m|) = 1$, и $\mathfrak{R} = \{L_2(5) \times \langle v \rangle\}$, где $|v| = 2^k$, $k = 1, 2, ...$. Таким образом, актуальной является поставленная в [11, проблема 3] задача ***изучения групп, насыщенных прямыми произведениями различных конечных групп.***

Примеры периодических не локально конечных групп, насыщенных конечным множеством конечных групп (даже одной группой простого порядка p), хорошо известны – это $B(m, p)$ при $m \geq 2$ и $p \geq 665$ [1]. Однако для случая, когда X состоит из конечного множества конечных простых неабелевых групп, аналогичные примеры не локально конечных групп неизвестны.

В Коуровской тетради [15] А.К. Шлепкиным поставлен вопрос 18.113: ***Пусть $\mathfrak{M}$ – конечное множество конечных простых групп. Верно ли, что периодическая группа, насыщенная группами из $\mathfrak{M}$, изоморфна одной из групп множества $\mathfrak{M}$? Особенно интересен случай, когда $\mathfrak{M}$ одноэлементно.***

Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество всех конечных простых неабелевых групп, в которых централизатор силовской 2-подгруппы содержит нетривиальный элемент нечетного порядка. Как показали А.С. Кондратьев и В.Д. Мазуров [10], множество $\mathfrak{F}$ состоит в точности из групп G следующих двух типов:

1. $G \simeq L_k^\delta(q)$, где $\delta = \pm$, q нечетно, $k = 2^{t_1} + ... + 2^{t_s}$, $0 \le t_1 < ... < t_s$, $s \ge 2$, и $C = C_1 \times ... \times C_{s-1}$, где C_i – циклическая группа порядка $(q-\delta 1)_{2'}$ при $1 \le i \le s-2$ и порядка $(q-\delta 1)_{2'}/(q-\delta 1, k)_{2'}$ при $i = s-1$.

2. $G \simeq E_6^\delta(q)$, где q нечетно, и C – циклическая группа порядка $(q-\delta 1)_{2'}/(3, q-\delta 1)$.

Здесь $L_k^+(q)$ и $L_k^-(q)$ означает, соответственно, простые группы $L_k(q)$ и $U_k(q)$, а $E_6^+(q)$ и $E_6^-(q)$ – группы $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$.

В [26] доказан следующий результат: Пусть периодическая группа G насыщена группами из конечного множества конечных простых неабелевых групп $\mathfrak{R}$, имеющего пустое пересечение с $\mathfrak{F}$. Тогда G конечна и изоморфна некоторой группе множества $\mathfrak{R}$. Это утверждение показывает, что если периодическая группа G насыщена группами из конечного множества $\mathfrak{N}$, состоящим из конечных простых неабелевых групп, то в большинстве случаев G конечна и изоморфна одной из групп насыщающего множества $\mathfrak{N}$.

В $[16, 21, 38]$ получены некоторые результаты, касающиеся строения силовской p-подгруппы группы G, насыщенной $\{GL_2(p^n)|n = 1, 2, ...\}$, где p – фиксированное простое число, а также доказано, что локально-конечная группа, насыщенная группами из множества $\{GL_2(p^n)|n = 1, 2, ...\}$, локально конечна и изоморфна $GL_2(P)$ для локально конечного поля P характеристики p.

Таким образом, актуальным становится обобщение указанных результатов на случай, когда группа насыщена множеством групп, состоящим из различного рода расширений групп $L_2(p^n)$ и $SL_2(p^n)$, в частности, множеством $\{GL_2(p^n)|n = 1, 2, ...\}$.

Как известно, структура централизатора инволюции при изучении конечных простых неабелевых групп имеет важное значение для строения конечных простых неабелевых групп. Аналогичная ситуация складывается и при изучении бесконечных периодических групп, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами. Известно, что централизатор инволюции в $L_3(q)$ изоморфен $GL_2(q)$. Поэтому для изучения групп, насыщенных $L_3(q)$, необходимо установить структуру централизатора инволюции, который, как нетрудно показать, насыщен $GL_2(q)$. Отсюда вытекает актуальность еще одного вопроса, поставленного в [11, проблема 6]: ***как устроена группа G, насыщенная группами $GL_n(q)$?***

В [20] доказано, что периодическая группа, насыщенная множеством, состоящим из групп $L_2(p^n)$ (соответственно $SL_2(p^n)$), где p и n не фиксируются, изоморфна $L_2(Q)$ (соответственно $SL_2(Q)$), где Q – локально конечное поле.

Целесообразно было бы попытаться получить аналогичные результаты для естественных расширений указанных групп, в частности, для $GL_2(p^n)$, то есть подтвердить следующее естественное предположение.

Гипотеза. Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества, состоящим из групп $GL_2(p^n)$, где p, n не фиксируются. Тогда $G \simeq GL_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

Следующий пример показывает, что эта гипотеза в классе периодических групп неверна. Рассмотрим группу $G = L_2(2^n) \times B(m,p)$, где $m > 2$, а p – простое фиксированное число большее 665. Так как n – фиксированное $GL_2(2^n) = L_2(2^n) \times Z(GL_2(2^n))$, то насыщающее множество $\mathfrak{M} = \{GL_2(2^n)\}$ группы G состоит из одной группы. Из результата Новикова-Адяна [27] вытекает, что $B(m,p)$ для указанных m, p не является конечной группой.

Таким образом, возникает задача выделения в классе периодических групп подклассов групп, в которых данная гипотеза имеет место. Одним из таких классов, в котором эта гипотеза может оказаться верной, является класс групп Шункова.

Настоящая диссертация посвящена дальнейшему исследованию групп, насыщенных различными конечными группами.

Основные результаты

1. Пусть $\mathfrak{H}$ – конечное непустое множество конечных групп, в каждой из которых силовская 2-подгруппа содержит свой централизатор.

Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из $\mathfrak{H}$, принадлежит множеству $\mathfrak{H}$ (теорема 1).

2. Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех конечных простых неабелевых групп, $\mathfrak{B}$ – множество конечных простых неабелевых групп, у которых в централизаторе силовской 2-подгруппы есть элементы нечетного порядка l, и положим $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \backslash \mathfrak{B}$. Пусть $\{L_1, L_2, ..., L_n\}$ – фиксированный конечный набор элементов множества $\mathfrak{D}$, и пусть группа $L = L_1 \times ... \times L_i \times ... \times L_n$ – прямое произведение групп L_i $(i = \overline{1, n})$.

Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группой L, изоморфна L (теорема 2).

3. Пусть $\mathfrak{L}_3 = \{L_3(q), U_3(q) | q \text{ нечетно}\}$, $\mathfrak{S}$ – множество всех конечных простых групп S, обладающих тем свойством, что нечетные порядки элементов централизатора силовской 2-подгруппы из S не превосходят число 3, $\mathfrak{E}$ – множество конечных элементарных абелевых 2-групп и $\mathfrak{M} = \{L \times E | L \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{L}_3, E \in \mathfrak{E}\}$.

Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из конечного подмножества $\mathfrak{M}$, принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ (теорема 3).

Диссертация состоит из четырех глав. В первой главе собраны вспомогательные факты, используемые в доказательстве основных результатов. Некоторые из них были получены в процессе работы и приведены с доказательствами.

Во второй главе диссертации изучаются группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп.

Получены следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ – конечное непустое множество конечных групп, в каждой из которых силовская 2-подгруппа содержит свой централизатор. Если G – периодическая группа, насыщенная группами из $\mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{H}$.*

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех конечных простых неабелевых групп, $\mathfrak{B}$ – множество конечных простых неабелевых групп, у которых в централизаторе силовской 2-подгруппы есть элементы нечетного порядка l, и положим $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \backslash \mathfrak{B}$. Пусть $\{L_1, L_2, ..., L_n\}$ – фиксированный конечный набор элементов множества $\mathfrak{D}$, и пусть группа $L = L_1 \times ... \times L_i \times ... \times L_n$ – прямое произведение групп L_i $(i = \overline{1, n})$.

Теорема 2. *Пусть периодическая группа G насыщена группой L. Тогда $G \simeq L$.*

В третьей главе диссертации изучаются группы, насыщенные конечным множеством групп, каждая из которых является прямым произведением двух групп, одна из них – конечная простая неабелева группа, а другая принадлежит множеству конечных элементарных абелевых 2-групп.

Пусть $\mathfrak{L}_3 = \{L_3(q), U_3(q) | q$ нечетно$\}$, $\mathfrak{S}$ – множество всех конечных простых групп S, обладающих тем свойством, что нечетные порядки элементов централизатора силовской 2-подгруппы из S не превосходят число 3, $\mathfrak{E}$ – множество конечных элементарных абелевых 2-групп и $\mathfrak{M} = \{L \times E | L \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{L}_3, E \in \mathfrak{E}\}$.

Получен следующий результат:

Теорема 3. *Если G – периодическая группа, насыщенная конечным множеством групп из $\mathfrak{M}$, то $G \in \mathfrak{M}$.*

В четвертой главе изучаются периодические группы Шункова, насыщенные полными линейными группами размерности два над конечными полями. Установлена структура 2-групп, насыщенных фиксированным набором конечных 2-групп.

Напомним, что под группой Шункова (сопряженно бипримитивно конечной группой [28]) понимается группа, в которой любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную подгруппу и это свойство сохраняется при переходе к фактор-группе по конечной подгруппе.

Получены следующие результаты:

Пусть p – фиксированное простое число, $\Im_p = \{GL_2(p^n) | n \in N\}$.

Теорема 4. *Пусть G – периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества $\Im_p$, и K – подгруппа из G, изоморфная группе из $\Im_p$. Тогда $Z(K) \subset Z(G)$ и $Z(G)$ – локально циклическая группа.*

Пусть p – фиксированное простое число, $\mathfrak{I}_p = \{PGL_2(p^n) | n \in N\}$.

Теорема 5. *Периодические группы Шункова, насыщенные группами из множества $\mathfrak{I}_p$, изоморфны $PGL_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля характеристики p.*

Теорема 6. *Периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества $\{GL_2(p^n) | n \in N\}$, изоморфна $GL_2(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики p.*

Теоремы 1, 2 получены в нераздельном соавторстве с А.А. Шлепкиным и опубликованы в работах [39, 41]. Теорема 3 получена автором лично и опубликована в работах [40, 46]. Теоремы 4, 5 получены в нераздельном соавторстве с А.А. Шлепкиным. Теорема 4 опубликована в работе [45]. Теорема 5 опубликована в работе [47]. Теорема 6 получена автором лично.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Д.В. Лыткиной за постановку задачи, помощь в работе и постоянное внимание. Отдельная благодарность А.К. Шлёпкину за ценные советы и полезные замечания при обсуждении работы, за доброжелательность и внимательное отношение.

Результаты диссертации докладывались автором на XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2011 г.), на 43-й Всероссийской молодежной школе-конференции (Екатеринбург, 2012 г.), на Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2013 г.), на Международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2014 г.). Результаты диссертации обсуждались на Красноярском городском алгебраическом семинаре (СФУ) и на семинаре «Математические системы» (КрасГАУ).

Глава 1

Определения, известные факты и вспомогательные результаты

В данной главе собраны известные сведения, определения и результаты, используемые в дальнейшем. Некоторые предложения главы для полноты изложения приведены с доказательствами.

Определение 1. *Группа G насыщена группами из множества X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X* [27].

Определение 2. *$X(K)$ – это множество всех подгрупп группы G, содержащих подгруппу $K \subseteq G$ и изоморфных группам из множества X* [11].

Определение 3. *Группа G называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу* [28].

Предложение 1 (В.П. Шунков). *В бесконечной 2-группе G – любая конечная подгруппа, отличная от своего нормализатора. В частности, G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Доказательство. Пусть K – конечная подгруппа бесконечной 2-группы G. Индукцией по $\mid K \mid$ покажем, что $N_G(K) \neq K$. Это очевидно, если $\mid K \mid = 1$. Пусть $\mid K \mid > 1$ и t – инволюция из центра K. Если $C_G(t)$ – конечная подгруппа, то по предложению 3 G локально конечна и утверждение вытекает из справедливости нормализаторного условия в конечных нильпотентных группах. Если же $C_G(t)$ – бесконечная группа, то, не нарушая общность, можно считать, что $C_G(t) = G$, т. е. $\langle t \rangle \trianglelefteq G$. По предположению индукции $N_{\overline{G}}(\overline{K}) \neq \overline{K}$, где $\overline{G} = G/\langle t \rangle$, $\overline{K} = K/\langle t \rangle$, поэтому $N_G(K) \neq K$. Предложение доказано.

Предложение 2. *Расширение локально конечной группы при помощи локально конечной группы есть локально конечная группа* [8, 9, 12].

Предложение 3 (В.П. Шунков). *Периодическая группа, содержащая инволюцию с конечным централизатором, локально конечна* [29].

Предложение 4. *Если в периодической группе T некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы из T конечны и сопряжены* [14].

Автоморфизм a порядка n группы X называется расщепляющим, если $xx^a...x^{a^{n-1}} = 1$, для любого $x \in X$.

Предложение 5. *Пусть a – расщепляющий автоморфизм порядка 3 группы X. Тогда группа X нильпотентна* [6].

Предложение 6. *Группа периода $n \leq 4$ нильпотентна* [19, 36. *Sätze III,* 6.5, 6.6].

Предложение 7. *Пусть T – конечная силовская 2-подгруппа периодической группы G и X, Y – T – инвариантные подмножества из T, сопряженные в G. Тогда X и Y сопряжены в $N_G(T)$. В частности, если*

x, y – элементы из $Z(T)$, сопряженные в G, то x, y сопряжены в $N_G(T)$.

Доказательство. По условию предложения $X \trianglelefteq T$ и $X^g \trianglelefteq T$. Следовательно, $X \lhd T^{g^{-1}}$ и $X \trianglelefteq \langle T, T^{g^{-1}} \rangle \leq N_G(X)$. По предложению 4 $T = T^{g^{-1}h}$ для некоторого $h \in N_G(X)$. Отсюда вытекает, что $g^{-1}h = t \in N_G(T)$. Посчитаем: $X^{t^{-1}} = X^{h^{-1}g} = X^g$. Предложение доказано.

А.С. Кондратьев обратил внимание автора на следующий факт, вытекающий из классификации конечных простых групп.

Предложение 8. *Пусть T – неабелева силовская 2-подгруппа конечной простой группы. Тогда либо $Z(T)$ – циклическая группа, либо $Z(T) \leq [T, T]$* [7].

Предложение 9. *Пусть $G = (A \times B) \leftthreetimes \langle w \rangle$ – конечная сплетенная 2-группа, т. е. $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$, $a^w = b$, $a^{2^k} = b^{2^k} = w^2 = 1$. Тогда:*

1. *Центр G – $Z(G) = \langle ab \rangle = \langle z \rangle$, где $z = ab$.*

2. *$G = (Z \times A) \leftthreetimes \langle w \rangle = (Z \times B) \leftthreetimes \langle w \rangle$, $z^w = z$, $a^w = b = aba^{-1} = za^{-1}$.*

3. *$G = (Z \times B)$, $z^w = z$, $b^w = a = abb^{-1} = zb^{-1}$.*

4. *Пусть $x \in (A \times B) \backslash Z$ и $|x| = 2^m$. Тогда $|xw| = 2^{m+1}$, $(xw)^2 \in Z$, в частности, если $x = a$, то $(aw)^2 = ab = z$ и если $x = b$, то $(bw)^2 = ab = z$.*

5. *$(aw)(bw) = azb^{-1} = ab^{-1}z$.*

6. *$(ab^{-1})^w = a^w b^{w^{-1}} = ba^{-1}$ и $R = \langle ab^{-1} \rangle \leftthreetimes \langle w \rangle$ – группа диэдра.*

7. *Пусть $d = a^{2^m - l} b^l$, тогда $d^w = b^{2^m - l} a^l$, $(l, |2^k|) = 1$, $dd^w = a^{2^m - l} b^l b^{2^m - l} a^l = a^{2^m} b^{2^m} = z^{2^m}$, $d^w = d^{-1} a^{2^m} b^{2^m} = d^{-1} z^{2^m}$, $|d| = 2^k$.*

8. *Если $m = k$, то $\langle d \rangle = \langle ab^{-1} \rangle$ и $\langle d \rangle \leftthreetimes \langle w \rangle = \langle ab^{-1} \rangle \leftthreetimes \langle w \rangle = R$ – группа диэдра.*

9. *Если $m = k - 1$, то a^{2^m} – инволюция из A, b^{2^m} – инволюция из B, $a^{2^m} b^{2^m} = z_1$ – инволюция из $D \cap Z = \langle z_1 \rangle$ и $dd^w = z_1$, или $d^w = d^{-1} z_1$. Тогда $D = \langle d \rangle \leftthreetimes \langle w \rangle$ – полудиэдральная группа.*

10. *$N(\langle bw \rangle) = \langle bw \rangle \leftthreetimes \langle z_b \rangle$, z_b – инволюция из $\langle b \rangle$.*

Доказательство. Непосредственные вычисления и [22].

Предложение 10. *Пусть $L = GL_2(q)$, где $q = 2^n$. Тогда:*

1. *$R = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \alpha \in GF(q)\}$ – силовская 2-подгруппа группы L.*

2. *$N_L(R) = R \leftthreetimes (Z \times T)$, где $Z = \langle\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)\rangle$ – центр группы $L, T = \langle\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$, $|T| = q - 1$.*

3. *R – абелева группа периода 2 и $R \subset SL_2(2^n)$.*

4. *$C_L(R) = (R \times Z)$.*

5. *$N_L(Z \times T) = (Z \times T) \leftthreetimes (\omega)$, где $\omega = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.*

6. *Все силовские 2-подгруппы группы L сопряжены и пересекаются тривиально.*

7. *Пусть $M = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, где $|a| = |b| = k > 2$, подгруппа L. Тогда k делит $q-1$ и для некоторого $g = L$, $M^g \subset (Z \times T)$ и $N_L(M^g) = N_L(Z \times T)$.*

8. *$L = L_2(2^n) \times Z$.*

9. *$PGL_2(2^n) = L/Z(L) = L_2(2^n)$.*

Доказательство перечисленных выше свойств можно найти в [33].

Предложение 11. *Пусть $L = GL_2(q)$, $q = p^n$ и p – нечетно. Тогда:*

1. *$R = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \alpha \in GF(q)\}$ – силовская p–подгруппа группы L.*

2. *$N_L(R) = R \leftthreetimes (Z \times T)$, где $Z = \langle\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)\rangle$ – центр группы $L, T = \langle\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$, $|\alpha| = q - 1$.*

3. *R – абелева группа периода p и $R \subset SL_2(p^n)$.*

4. *$C_L(R) = (R \times Z)$.*

5. *Все силовские p–подгруппы группы L сопряжены и пересекаются тривиально.*

6. *$N_L(Z \times T) = (Z \times T) \leftthreetimes \langle \omega \rangle$, где $\omega = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.*

7. *Пусть $M = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, где $|a| = |b| = k > 2$, подгруппа L. Тогда k делит $q-1$ и для некоторого $g = L$, $M^g \subset (Z \times T)$ и $N_L(M^g) = N_L(Z \times T)$.*

8. *$L = SL_2(p^n) \cdot T$, где $T = \langle\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$ и $\alpha \in GF(p^k)$.*

9. *$L = (SL_2(q)\cdot Z)\cdot\langle\upsilon\rangle$, где $\upsilon = \left(\begin{smallmatrix} h & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right), \upsilon^2 = \left(\begin{smallmatrix} h & 0\\ 0 & h\end{smallmatrix}\right) \in Z$, где h – элемент поля $GF(p^n)$, из которого не извлекается корень квадратный.*

10. *Если $4|(q-1)$, то $L = (SL_2(q)\cdot Z)\cdot\langle a\rangle$, где $a = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ h & 0\end{smallmatrix}\right)$ и h – элемент поля $GF(q)$, из которого не извлекается квадратный корень.*

11. *Если $4|(q-1)$, то $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) \in SL_2(q)\cdot Z(GL_2(q))$.*

12. *Если $4\nmid(q-1)$, то $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) \notin SL_2(q)Z(GL_2(q))$.*

13. *Если $q \equiv 1(mod\ 4)$, $2^s - 2$ часть числа $q-1, \xi$ – примитивный корень степени 2^s из 1 в $GF(q)$, то силовская 2-подгруппа S группы L имеет порядок 2^{s+1} и является сплетением групп Z_{2^s} и Z_2, $S = \langle\left(\begin{smallmatrix} \xi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & \xi\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\rangle$.*

14. *Если $q \equiv -1(mod\ 4)$, 2^s – 2-часть числа $q+1, \xi$ – примитивный корень степени 2^{s+1} из 1 в $GF(q^2)$, то силовская 2-подгруппа S группы L является полудиэдральной группой порядка 2^{s+2} и $S = \langle\begin{pmatrix} \xi & 0\\ 0 & \xi+\xi^q\end{pmatrix}, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)\rangle$.*

15. *Пусть $G = PGL_2(q)$ и $4\nmid(q-1)$. Тогда $C_G(w) = \{D\times w\}$, где D – группа диэдра порядка $(q-1)$, $D = A \leftthreetimes \langle t\rangle$, $A = (a)$ – циклическая группа порядка $\frac{(q-1)}{2}$, t – инволюция, $a^t = a^{-1}$ для любого $a\in A$.*

16. *Если $4|(q-1)$, то $PGL_2(q) = L_2(q)\leftthreetimes\langle\overline{a}\rangle$, где $|\overline{a}| = 2$.*

17. *Если $4\nmid(q-1)$, то $PGL_2(q) = L_2(q)\leftthreetimes\langle\overline{w}\rangle$, где $\overline{w} = wZ(GL_2(q))$ [21].*

Доказательство пунктов 1 – 8 можно найти в [33].

Доказательство пункта 9. Пусть $\sqrt{h}$ существует в $GF(p^n)$. Тогда

$$L = Z\cdot SL_2(p^n)\cdot\left(\begin{smallmatrix} h & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) =$$

$$= SL_2(p^n)\cdot Z\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{h}^{-1} & 0\\ 0 & \sqrt{h}\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} h & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) =$$

$$= SL_2(p^n)\cdot Z\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{h}\sqrt{h} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} \sqrt{h}^{-1} & 0\\ 0 & \sqrt{h}\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) =$$

$$= SL_2(p^n)\cdot Z\begin{pmatrix} \sqrt{h} & 0\\ 0 & \sqrt{h}\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) = SL_2(p^n)\cdot Z.$$

Пункт доказан.

Доказательство пункта 10. Покажем, что $a \notin SL_2(q)Z$. Предположим обратное: $a \in SL_2(q)Z$. Тогда $a = sz$, где $s \in SL_2(q)$, а $z \in Z$. Посчитаем определители матриц: $-h = |a| = |sz| = |s||z| = 1 \cdot |z| = |z| = \alpha^2$, где $z = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$. Таким образом, $-h = \alpha^2$. Поскольку $4|(q-1)$, то $\sqrt{-1}$ – элемент поля $GF(q)$. Следовательно, $h = -\alpha^2 = (\sqrt{-1})^2\alpha^2 = (\sqrt{-1} \cdot \alpha)^2$. Противоречие с тем, что из h не извлекается корень квадратный. Пункт доказан.

Доказательство пункта 11. Так как $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(q)$, то достаточно показать, что $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(q)Z$. Так как $4|(q-1)$, то $\sqrt{-1} \in GF(q)$ и $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & (\sqrt{-1})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \in SL_2(q)Z$, потому что $\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & (\sqrt{-1})^{-1} \end{pmatrix} \in SL_2(q)$, $\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \in Z$. Пункт доказан.

Доказательство пункт 12. Предположим обратное. Тогда $w = sz$ для некоторых $s \in SL_2(q)$ и $z \in Z(GL_2(q))$. Посчитаем определители $-1 = |w| = |sz| = |s| \cdot |z| = 1 \cdot |z| = |z| = \alpha^2$, где $z = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$. Следовательно, в $GF(q)$ существует $\sqrt{-1}$. Но тогда $|\sqrt{-1}| = 4$ и 4 делит $q-1$, что невозможно. Пункт доказан.

Доказательство пунктов 13, 14 можно найти в [35].

Доказательство пункта 15. Из условия $wgw = gd$, $d \in Z$ получаем

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & v \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & v \end{smallmatrix}\right) d \Rightarrow \tag{1}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} v & z \\ y & x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} dx & dy \\ dz & dv \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \tag{2}$$

$$
\begin{cases} v = dx \\ z = dy \\ y = dz \\ x = dv \end{cases} \Rightarrow \tag{3}
$$

$$
\substack{d^2x=x \\ d^2y=y} \Rightarrow \tag{4}
$$

$$
d = \pm 1. \tag{5}
$$

$$
C_G(w) = \{ \begin{smallmatrix} x & y \\ dy & dx \end{smallmatrix} \} = \{ \begin{smallmatrix} x & y \\ y & x \end{smallmatrix} \} \cup \{ \begin{smallmatrix} x & y \\ -y & -x \end{smallmatrix} \}. \tag{6}
$$

Имеют место следующие ограничения: $x^2 - y^2 \neq 0$ для первого множества и $-x^2+y^2 \neq 0$ для второго множества. Равенство 6 можно записать в следующем виде:

$$
C_G(w) = \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) Z \cup \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} \right) Z \} \cup \{ \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{smallmatrix} \right) Z \} \cup \{ \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ -1 & -x \end{smallmatrix} \right) \}. \tag{7}
$$

Посчитаем количество элементов в каждом из этих множеств:

$$
|\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) Z \}| = (q-1). \tag{8}
$$

$$
|\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} \right) Z \}| = (q-1). \tag{9}
$$

$$
|\{ \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{smallmatrix} \right) Z \}| = (q-2)(q-1). \tag{10}
$$

В случае 10 выбрасываются матрицы с $x = \pm 1$, так как там $det \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{smallmatrix} \right) = 0$.

Аналогично,

$$|\{\left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ -1 & -x \end{smallmatrix}\right) Z\}| = (q-2)(q-1). \qquad (11)$$

Нетрудно увидеть, что все указанные четыре множества пересекаются по пустому множеству попарно. Следовательно, общее число элементов равно:

$$(q-1)+(q-1)+(q-2)(q-1)+(q-2)(q-1) =$$

$$= (q-1)(2+2(q-2)) = 2(q-1)(q-2-1) = 2(q-1)^2. \qquad (12)$$

Переходим к фактор-группе $GL_2(q)/Z$, получим: $|C_G(w)| = 2(q-1)$. Пункт доказан.

Доказательство пунктов 16, 17 вытекает из пунктов 10-12.

Предложение 12. *Пусть $G_1 \subset G_2$, $G_1 \simeq GL_2(p_1^{n_1})$ и $G_2 \simeq GL_2(p_2^{n_2})$. Тогда $p_1 = p_2$ и $n_1|n_2$ [21].*

Доказательство. Несложно видеть, что

$$Z(GL_2(p_1^{n_1})) \subset Z(GL_2(p_2^{n_2})).$$

Перейдем к фактор-группе $\overline{G_2} = GL_2(p_2^{n_2})/Z(GL_2(p_2^{n_2})) = PGL_2(p_2^{n_2})$. Тогда

$$\overline{G_1} = GL_2(p_1^{n_1})/Z(GL_2(p_2^{n_2})) \subset \overline{G_2},$$

$$\overline{G_1} = PGL_2(p_1^{n_1}),\ \overline{G_1} = L_2(p_1^{n_1})\lambda < i_1 >,\ \overline{G_2} = L_2(p_2^{n_2})\lambda < i_2 > .$$

Так как $\overline{G_1} \subset \overline{G_2}$, то $L_2(p_1^{n_1}) \subset L_2(p_2^{n_2})$. Из подгруппового описания $L_2(q)$ (предложение 13), следует, что $p_1 = p_2$ и $n_1|n_2$. Предложение доказано.

Предложение 13. *Группа $L_2(q)$, где $q = p^n$ – степень простого числа p, имеет следующие подгруппы:*

1. $q+1$ *сопряженных абелевых элементарных подгрупп порядка q;*

2. $\frac{q(q+1)}{2}$ *сопряженных циклических подгрупп порядка* $\frac{(q-1)}{(2;1)}$; $\frac{q(q-1)}{2}$ *сопряженных циклических подгрупп порядка* $\frac{(q+1)}{(2;1)}$, *где* $(2;1)=2$, *если* $p>2$, *и* $(2;1)=1$, *если* $p=2$;

3. $\frac{q(q+1)}{2}$ *сопряженных циклических подгрупп порядка* q_-, *где* q_- *делит* $\frac{(q-1)}{(2;1)}$; $\frac{q(q-1)}{2}$ *сопряженных циклических подгрупп порядка* q_+, *где* q_+ *делит* $\frac{(q+1)}{(2;1)}$;

4. $M(q)/2d_{\mp}$ *сопряженных групп диэдра порядка* $2d_{\mp}$, *где* $d_{\mp}$ – *нечетное число, делящее либо* $(q-1)$, *либо* $(q+1)$, *и* $M(q)=|L_2(q)|=q(q^2-1)$ *для* $p=2$, $M(q)=|L_2(q)|=\frac{q(q^2-1)}{2}$ *для* $p>2$;

5. *две системы, каждая из* $M(q)/4l$ *сопряженных групп диэдра порядка* $2l$, *где* l – *четное число, большее* 2, *и* l *делит либо* $(q-1)$, *либо* $(q+1)$;

6. *для* $p^n=8h\pm3$: *одно множество из* $M(q)/12$ *сопряженных нециклических подгрупп порядка* 4;

7. $\frac{(p^n-1)(p^n-p)\dots(p^n-p^{m-1})}{(p^m-1)(p^m-p)\dots(p^m-p^{m-1})}$ *множеств, каждое из* $\frac{p^{2n}-1}{(2,1;1)(p^k-1)}$ *сопряженных коммутативных групп порядка* p^m, *где* $(2,1;1)=2$, *если* $p>2$ *и* n/k – *четное число;* $(2,1;1)=1$, *если* $p>2$ *и* n/k – *нечетное число;* $(2,1;1)=1$, *если* $p=2$ *и* n/k – *целое число;* k – *делитель* m, *зависящий от свойств группы порядка* p^m;

8. *множество из* $\frac{(p^n-1)p^{n-m}}{(2,1;1)(p^k-1)}$ *сопряженных групп Фробениуса порядка* $p^m d$, *где* k *и* d *зависят от* m;

9. $(2,1;1)$ *множеств, каждое из* $M(q)/(2,1;1)M(p^k)$ *сопряженных подгрупп, изоморфных* $PSL(2,p^k), k$ – *делитель* n;

10. *две системы, каждая из* $M(q)/2M(p^k)$ *сопряженных подгрупп, изоморфных* $PGL(2,p^k)$, *где* $p>2$, n/k – *четное число;*

11. *для* $q=8h\pm1$: *два множества, каждое из* $M(q)/24$ *сопряженных подгрупп* S_4;

12. *для $q = 8h \pm 1$: два множества, каждое из $M(q)/24$ сопряженных подгрупп A_4;*

13. *для $q = 8h \pm 3$ или $q = 2^n$, где n – четное число: $M(q)/12$ сопряженных подгрупп A_4;*

14. *для $q = 10l \pm 1$: две системы, каждая из $M(q)/60$ сопряженных подгрупп A_5* [3].

Предложение 14. *Пусть L – простая группа, изоморфная $L_2(q)$, q нечетно, A_7 или M_{11}, и A – нециклическая подгруппа порядка 4 из L. Тогда $N_L(A)\backslash C_L(A)$ содержит элемент b порядка 3 и порядок любого элемента из смежного класса $C_L(A)b$ равен 3.*

Доказательство. Если $L \simeq L_2(q)$, то $N_L(A)$ изоморфен A_4 или S_4 [см. 36. Satz II, 8.27]. Если $G \simeq A_7$ или M_{11}, то заключение легко проверяется с помощью списка максимальных подгрупп этих групп (см., например, [32]).

Предложение 15. *Пусть L – одна из групп $U_3(q)$ или $L_3(q)$, где q нечетно, T – ее силовская 2-подгруппа. Тогда:*

1. *T содержит элемент порядка 8, центр T – циклическая группа, и все инволюции из T сопряжены в L.*

2. *T содержит элементарную абелеву подгруппу A порядка 4, любая нециклическая подгруппа порядка 4 из L сопряжена с A и $N_L(A) = C_L(A) \cdot V$, где V изоморфна симметрической группе степени 3.*

3. *Если v – элемент порядка 3 в V, то $(cv)^3 = 1$ для любого элемента c из $C_L(A)$.*

4. *$N_L(T) = TC_L(T)$.*

5. *$[T, T]$ – циклическая группа* [14].

Предложение 16. *Пусть G – конечная простая группа, силовская 2-подгруппа S которой не содержит элементарных абелевых секций по-*

рядка 8. Тогда G изоморфна одной из следующих групп: $L_2(q)$, $L_3(q)$, $U_3(q)$, q нечетно, A_7, M_{11}. Если при этом A – элементарная абелева подгруппа порядка 4 из S и $C_G(A) \neq A$, то $G \simeq L_3(q)$ или $U_3(q)$, q нечетно [30].

Предложение 17. *Пусть S – силовская 2-подгруппа конечной группы G и t – инволюция из S, обладающая следующим свойством: если $t^x \in S$ для некоторого $x \in G$, то $t^x = t$. Тогда $tO(G)$ содержится в центре фактор-группы $G/O(G)$. Здесь $O(G)$ – наибольшая нормальная подгруппа нечетного порядка группы G* [34].

Предложение 18. *Пусть G – бесконечная группа, насыщенная конечным множеством $\mathfrak{M}$ конечных групп. Тогда:*

1. *Любая локально конечная подгруппа из G конечна.*
2. *Все силовские 2-подгруппы из G конечны и сопряжены.*
3. *Если V – 2-подгруппа из G, то $C_G(V)$ – бесконечная группа.*

Доказательство.

1. Предположим противное. Пусть H – бесконечная локально конечная подгруппа из G. Пусть m – максимум порядков групп, принадлежащих $\mathfrak{M}$, и $x_1, ..., x_{m+1}$ – попарно различные элементы из H. Тогда $K = \langle x_1, ..., x_{m+1} \rangle$ – конечная подгруппа из G, порядок которой больше m. Так как по условию K содержится в некоторой подгруппе L, изоморфной элементу $\mathfrak{M}$, то $|K| \leq |L| \leq m$, противоречие.

2. Пусть S – силовская 2-подгруппа из G. Если S бесконечна, то по предложению 1 она содержит бесконечную локально конечную подгруппу, что невозможно по пункту 1. По предложению 4 все силовские подгруппы из G сопряжены.

3. По предыдущему пункту V конечна. Используем индукцию по $|V|$. Если $V = 1$, то $C_G(V) = G$ – бесконечная группа по условию. Если $V \neq 1$, то пусть V_0 – подгруппа V индекса 2. По предположению индукции $C_G(V_0)$ –

бесконечная группа, и $V_0 \trianglelefteq C_G(V_0)V$. Так как $|V : V_0| = 2$, то $V = V_0\langle t\rangle$ для некоторого элемента $t \in V$ и $\overline{t} = V\langle t\rangle$ – инволюция в $\overline{C} = C_G(V_0)V/V_0$. Если $C_{\overline{C}}(\bar{t})$ – конечная подгруппа, то по предложению 3 $\overline{C}$ – локально конечная подгруппа и по теореме Шмидта (предложение 2) $C_G(V_0)$ – локально конечная подгруппа. Но тогда по пункту 1 $C_G(V_0)$ – конечная группа, вопреки индукционному предположению. Поэтому $C_{\overline{C}}(\bar{t})$ – бесконечная группа. Теперь пусть C – полный прообраз группы $C_{\overline{C}}(\bar{t})$ в G. Ясно, что C – бесконечная группа, $V_0t^c = V_0t$ для любого $c \in C$ и поэтому $C_c(t)$ – подгруппа конечного индекса в C. Отсюда $C_G(V) = C_G(\langle V_0, t\rangle) = C_c(t)$ – бесконечная группа как подгруппа конечного индекса в бесконечной группе. Предложение доказано.

Предложение 19. *Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое непустое множество неизоморфных циклических групп нечетного порядка, а $\mathfrak{M}$ — некоторое непустое множество неизоморфных групп $L_2(2^m)$. Бесконечная периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{R} = \{X \times Y \mid X \in \mathfrak{M}, Y \in \mathfrak{N}\}$, локально конечна и изоморфна прямому произведению $L \times V$, где $L \simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики два, а V — локально циклическая группа без инволюций* [4].

Предложение 20. *Периодическая группа G насыщена группами диэдра имеет вид $G = A \leftthreetimes t$, где A – локально циклическая группа, t – инволюция и $a^t = a^{-1}$ для любого $a \in A$* [31].

Предложение 21. *Пусть G – локально конечная группа, насыщенная группами из множества $\{GL_2(p^n)\}$, где p – нефиксированное простое число, n – нефиксированное натуральное число. Тогда $G \simeq GL_2(P)$, где P – локально конечное поле характеристики p* [21].

Предложение 22. *Пусть I означает множество индексов, K_α – конечное поле для любого $\alpha \in I$ и $\mathfrak{R} = \{L_2(K_\alpha) | \alpha \in I\}$. Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{R}$, изоморфна простой группе $L_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P* [20].

Предложение 23. *Пусть I означает множество индексов, K_α – конечное поле для любого $\alpha \in I$ и $\mathfrak{N} = \{SL_2(K_\alpha) | \alpha \in I\}$. Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{N}$, изоморфна группе $SL_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P* [20].

Глава 2

Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{H}$ *– конечное непустое множество конечных групп, в каждой из которых силовская* 2*-подгруппа содержит свой централизатор. Если* G *– периодическая группа, насыщенная группами из* $\mathfrak{H}$*, то* $G \in \mathfrak{H}$.

Доказательство. Пусть G – контрпример к теореме 1.

Лемма 1. *Любая локально конечная подгруппа группы* G *конечна.*

Доказательство. Действительно, пусть H – бесконечная локально конечная подгруппа группы G. В этом случае выберем в H конечную подгруппу K со свойством (1):

$$\mid K \mid > \max\{\mid L \mid \mid L \in \mathfrak{H}\} = m$$

– фиксированное конечное число, поскольку $\mathfrak{H}$ – конечное множество конечных групп.

По условию насыщенности (определение 1) $K \subseteq K_1 \subset G$, $K_1 \simeq L$ и $L \in \mathfrak{H}$, а значит, $\mid K \mid \leqslant m$. Но по (1) $\mid K \mid > m$. Противоречие, лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть i – инволюция из G, тогда $C_G(i)$ — бесконечная не локально конечная группа.*

Доказательство. Если $C_G(i)$ – локально конечная группа, то по лемме 1 $C_G(i)$ – конечная группа, а значит, G – локально конечная группа [29]. По лемме 1 G – конечная группа и по условию насыщенности $G \backsimeq L$, где $L \in \mathfrak{H}$. Противоречие с выбором G, и лемма доказана.

Лемма 3. *Силовская 2-подгруппа группы G конечна.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть S – бесконечная силовская 2-подгруппа группы G. В силу бесконечности S и предложения 1 в S можно выбрать бесконечную локально конечную подгруппу S_1, что противоречит лемме 1. Лемма доказана.

Лемма 4. $C_G(S)$ *– бесконечная не локально конечная группа.*

Доказательство. Пусть $s_1 \in Z(S)$ и $s_1^2 = e$, где e – единичный элемент группы G. Как показано выше (лемма 2), $C_G(s_1)$ – бесконечная не локально конечная группа.

Положим $C_1 = C_G(s_1)$. Ясно, что $S \subset C_1$. Рассмотрим фактор–группу $\overline{C}_2 = C_1 \diagup < s_1 >$ и выберем в ней инволюцию $\overline{z}_2$ из $Z(\overline{S} = S \diagup < s_1 >)$. Точно так же, как и для s_1, $C_{\overline{C}_2}(s_2)$ – бесконечная не локально конечная группа. Обозначим ее полный прообраз в C_1 через C_2. Далее рассуждаем по индукции. Предположим, что группа C_i определена для $i \geqslant 1$. Определим группу C_{i+1} следующим образом. Рассмотрим фактор-группу $C_i \diagup < s_1, ..., s_i >= \overline{C}_{i+1}$. В ней выберем инволюцию $\overline{s}_{i+1} \in Z(\overline{S} = S \diagup < s_1, ..., s_i >)$. Как и выше, $C_{\overline{C}_{i+1}}(\overline{s}_{i+1})$ – бесконечная не локально конечная группа и пусть C_{i+1} – ее полный прообраз в C_i. Так как S – конечная группа, то указанный процесс оборвется на некотором конечном номере m, что означает $C_m \subset N_G(S)$. Поскольку C_m – бесконечная не локально конечная группа, то и $N_G(S)$ – бесконечная не локально конечная группа, а так как S – конечная группа, то $C_G(S)$ также бесконечная не локально конечная группа. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 1. Возьмем в $C_G(S)$ элемент b нечетного порядка. Такой элемент b найдется, так как множество $C_G(S) \setminus S \neq \emptyset$ и содержит элементы, порядки которых не являются степенью двойки. В противном случае мы бы получили противоречие с тем, что S силовская 2-подгруппа. По условию насыщенности $S \times \langle b \rangle \subseteq B \simeq L$, где B – подгруппа из G, а $L \in \mathfrak{H}$. Следовательно, централизатор силовской 2-подгруппы из L содержит элемент нечетного порядка. Противоречие с определением множества $\mathfrak{H}$. Теорема 1 доказана.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех конечных простых неабелевых групп, $\mathfrak{B}$ – множество конечных простых неабелевых групп, у которых в централизаторе силовской 2-подгруппы есть элементы нечетного порядка l, и положим $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \backslash \mathfrak{B}$. Пусть $\{L_1, L_2, ..., L_n\}$ – фиксированный конечный набор элементов множества $\mathfrak{D}$, и пусть группа $L = L_1 \times ... \times L_i \times ... \times L_n$ – прямое произведение групп L_i $(i = \overline{1, n})$.

Теорема 2. *Пусть периодическая группа G насыщена группой L. Тогда $G \simeq L$.*

Доказательство. Пусть группа $L = L_1 \times ... \times L_i \times ... \times L_n$ – прямое произведение групп L_i $(i = \overline{1, n})$ и $L_i \in \mathfrak{D}$.

Возьмем в G подгруппу $B \backsimeq L$. Тогда

$$B = \prod_{i=1}^{n} B_i,$$

где $B_i \simeq L_i$. Пусть S – силовская 2-подгруппа из B. Предположим, что $G_B(S)$ содержит элемент b нечетного порядка.

В этом случае $b = b_1 b_2 \cdots b_n \neq e$, где для некоторых $b_i \in L_i$, b_i – неединичные элементы нечетного порядка.

Так как $S \in Syl_2 B$, то

$$S = \prod_{i=1}^{n} S_{B_i},$$

где $S_{B_i} \in Syl_2 B_i$. Возьмем $e \neq s \in S$ с тем свойством, что $s = s_1 \cdot \ldots \cdot s_i \cdot \ldots \cdot s_n$, где $s_i \in S_{B_i}$ и $s_i^{b_i} \neq s_i$, для тех значений индекса i, для которых $b_i \neq e$. Следовательно, $s^b = (s_1 \cdot \ldots \cdot s_n)^{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n} = s_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot s_i^{b_i} \cdot \ldots \cdot s_n^{b_n} \neq s_1 \cdot \ldots \cdot s_i \cdot \ldots \cdot s_n = s$, поскольку $s_i \neq s_i^{b_i}$. Но, с другой стороны, $b \in C_B(S)$, и должно быть $s^b = s$. Противоречие с выбором b. Таким образом, множество $\{L\}$ из теоремы 2 удовлетворяет условиям теоремы 1, и, следовательно, G изоморфна одной из групп множества $\{L\}$. Поскольку $\{L\}$ состоит из одной группы, то $G \simeq L$ и теорема 2 доказана.

Глава 3

О периодических группах, насыщенных конечным множеством групп

В работе [25] описаны периодические группы, насыщенные конечным подмножеством множества $\mathfrak{S}$ всех конечных простых групп S, обладающих тем свойством, что нечетные порядки элементов централизатора силовской 2-подгруппы из S не превосходит число 3.

Как вытекает из [10], множеству $\mathfrak{S}$ принадлежит любая конечная простая группа за исключением групп типа L_n, U_n, E_6, $^2E_6$ над некоторыми полями нечетных порядков.

В частности, множеству $\mathfrak{S}$ не принадлежит бесконечное множество групп типов L_3 и U_3 над некоторыми полями нечетных характеристик, и в [14] дана классификация периодических групп, насыщенных конечным множеством групп вида $L_3(q)$ и $U_3(q)$, где q нечетно.

В приводимой ниже теореме результаты работ [14, 25, 26] обобщены и объединены.

Пусть $\mathfrak{L}_3 = \{L_3(q), U_3(q) | q \text{ нечетно}\}$, $\mathfrak{S}$ – множество всех конечных простых групп S, обладающих тем свойством, что нечетные порядки элементов централизатора силовской 2-подгруппы из S не превосходит число 3, $\mathfrak{E}$ – множество конечных элементарных абелевых 2-групп и $\mathfrak{M} = \{L \times E | L \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{L}_3, E \in \mathfrak{E}\}$.

Теорема 3. *Если G – периодическая группа, насыщенная конечным множеством групп из $\mathfrak{M}$, то $G \in \mathfrak{M}$.*

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{X} = \{L \times E | E \in \mathfrak{E}\}$, где L – простая группа лиева типа ранга 1. Если G – периодическая группа, насыщенная конечным множеством групп из $\mathfrak{X}$, то $G \in \mathfrak{X}$.*

Доказательство теоремы 3.

Пусть G удовлетворяет условиям теоремы 3, T – одна из ее силовских 2-подгрупп. По предложению 18 T конечна и любая силовская 2-подгруппа из G сопряжена с T. Если $C_G(T)T/T$ – группа периода 3, то по предложению 6 она нильпотентна и поэтому $C_G(T)$ – локально конечная группа. По предложению 18 G конечна и, следовательно, содержится в $\mathfrak{M}$.

Поэтому в дальнейшем считаем, что в $C_G(T)$ найдется элемент x нечетного порядка, большего, чем 3. Так как $\langle T, x\rangle$ – конечная подгруппа, то существует конечная подгруппа $K \leq G$, для которой $\langle T, x\rangle \leq K$ и $K \simeq L \times E$, где $L \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{L}_3$ и E – элементарная абелева 2-группа. Очевидно, T – силовская 2-подгруппа в K, $C_K(T)T/T$ не является группой периода 3, поэтому $L \notin \mathfrak{S}$ и, следовательно, $L \in \mathfrak{L}_3$.

Лемма 5. *Если $E = 1$, то $G \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда G бесконечна. Пусть A – нециклическая подгруппа порядка 4 из T и $C = C_G(A)$. По предложению 15 $N_L(A)/C_L(A)$ содержит элемент v порядка 3 такой, что $(cv)^3 = 1$ для любого $c \in C_L(A)$. Покажем, что $(xv)^3 = 1$ для любого $x \in C_G(A)$. Очевидно, подгруппа $\langle A, xv\rangle$ конечна и по условию содержится в подгруппе $K = M \times N$, где M – неабелева простая группа, а N – элементарная абелева 2-группа.

По предложению 4 силовская 2-подгруппа K_2 из K изоморфна подгруппе группы T и поэтому любая ее секция порождается двумя элементами. По предложению 16 $N = 1$ и M изоморфна одной из групп $L_2(q)$, $L_3(q)$, $U_3(q)$, q нечетно, A_7 или M_{11}.

По предложениям 15 и 14 $(xv)^3 = 1$. Это означает, что v индуцирует в $C_G(A)$ расщепляющий автоморфизм порядка 3. По предложению 5 $C_G(A)$ нильпотентна и, следовательно, локально конечна. По предложению 18 (1) $C_G(A)$ – конечная подгруппа, а по пункту (3) этого предложения она бесконечна. Полученное противоречие показывает, что G конечна и, следовательно, $G \in \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если v – инволюция из E, $g \in G$ и $v^g \in T$, то $v^g = v$.*

Доказательство. Предположим противное и покажем, что g можно выбрать из $N(T)$. Если $v^g \in E$, то это следует из предложения 7. Если $v^g = lw$, где $w \in E$, $l \in L$, то существует $y \in L$, $l^y = z \in Z(T) \cap L$. Поэтому $v^{xy} = zw \in Z(T)$. По предложению 7 zw и v сопряжены в $N(T)$. Понятно, что $zw \neq v$.

Поэтому существует нетривиальный элемент n нечетного порядка в $N(T)$, что $(zw)^n = v$. Пусть $U = [\langle v^{\langle n \rangle} \rangle, \langle n \rangle]$. Тогда $U = [U, n]$ – нециклическая подгруппа из $Z(T)$. Очевидно, $\langle T, n \rangle$ – конечная подгруппа.

Пусть она лежит в $K_1 \times E_1$, где K_1 – простая группа, E_1 – элементарная абелева и $T = (K_1 \cap T) \times E_1$.

Поскольку $U = [U, n]$, то U содержится в $K_1 \cap T$ и лежит в центре $K_1 \cap T$. Поэтому центр $K_1 \cap T$ нециклический. По предложению 8 $Z(T \cap K_1) \subseteq [T \cap K_1, T \cap K_1] \leq [T, T]$. По предложению 15 $[T, T]$ – циклическая группа. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. *E содержится в центре G.*

Доказательство. Пусть v – произвольный элемент из E. Предположим, что $v \notin Z(G)$. Тогда v – инволюция и существует $x \in G$, для которого $v^x \neq v$. Если при этом vv^x – элемент четного порядка, то x можно выбрать так, чтобы элемент vv^x был инволюцией, т. е. $\langle v, v^x \rangle$ – группа порядка 4. По предложению 4 $\langle v, v^x \rangle^y \leq T$ для некоторого $y \in G$, т. е. $v^y, v^{xy} \in T$. По лемме 6 $v^y = v = v^{xy}$ и $v = v^x$ вопреки выбору x. Полученное противоречие показывает, что vv^x – элемент нечетного порядка для любого $x \in G$.

Так как $\langle v, v^x \rangle$ – конечная подгруппа, то $\langle v, v^x \rangle \leq H \leq G$, где $H = L_1 \times E_1$, L_1 – простая группа, E_1 – элементарная группа. Поскольку $O(H) = 1$, то по предложению 17 v содержится в $Z(H)$, откуда $v = v^x$. Это противоречие доказывает лемму.

Лемма 8. $G \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. По лемме 7 $E \trianglelefteq G$. Пусть K/E – конечная подгруппа в G/E. Тогда K конечна и по условию $K \leq H \leq G$, где $H = L_1 \times E_1$, L_1 – простая группа, E_1 – элементарная абелева 2-группа. Очевидно, $E \leq E_1$. Пусть T_1 – силовская 2-подгруппа из H. По предложению 4 она изоморфна подгруппе T. Поскольку T/E не содержит секций, изоморфных элементарной абелевой группе порядка 8, то T_1/E_1 их также не содержит. Поэтому G/E насыщена простыми группами из $\mathfrak{M}$. По лемме 5 $G/E \in \mathfrak{M}$, в частности, G конечна. Но тогда $G \in \mathfrak{M}$. Лемма и теорема 3 доказаны.

Доказательство следствия 1. Конечные простые группы лиева типа лиева ранга 1 исчерпываются группами типов L_2, U_3, Re, Sz над подходящими полями. Все они являются элементами $\mathfrak{M}$. Следствие доказано.

Глава 4

Группы, насыщенные $GL_2(p^n)$

В данной главе гипотеза, сформулированная во введении, доказывается для групп Шункова при условии, что p – фиксированное простое число и натуральное число n – нефиксированное.

Доказательство будет протекать по следующей схеме:

1. Доказать существование центра группы G – $Z(G)$ и показать, что это локально циклическая группа.

2. Доказать, что $\overline{G} = G/Z(G)$ является группой Шункова и насыщена множеством $\{PGL_2(p^n)\}$ и как следствие вывести отсюда, что G изоморфна $PGL_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

3. Используя верность гипотезы для локально конечных групп, показать, что G изоморфна $GL_2(Q)$.

4.1. О 2-группах

Пусть X – множество конечных полудиэдральных 2-групп, Y – множество конечных групп периода 2, а Z – множество сплетенных конечных 2-групп. Положим $\mathfrak{N} = X \cup Y \cup Z$.

Лемма 9. *Пусть G – 2-группа и G насыщена группами из множества $\mathfrak{N}$. Тогда G изоморфна одной из следующих групп:*

1) $G = \langle a, b | a^{2^n} = b^2 = e, a^b = a^{2^{n-1}-1} \rangle$ – *полудиэдральная группа;*

2) G – *группа периода два;*

3) $G = (A \times B) \leftthreetimes \langle w \rangle$, w^2 – *инволюция,* $A^w = B$ *и* A – *(локально) циклическая 2-группа.*

Утверждение леммы очевидно, если G – конечная группа. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что G – бесконечная группа.

1. G – *2-группа.*

Доказательство пункта 1. Пусть $b \in G$ и $|b| < \infty$. По условиям леммы $b \in K$ и, поскольку $K \in \mathfrak{N}(1)$ (определение 2), то K – 2-группа. Следовательно, b – 2-элемент. Пункт доказан.

2. *Без ограничения общности можно считать, что* $\mathfrak{N}$ *не содержит полудиэдральных групп.*

Доказательство пункта 2. Предположим обратное. По пункту 1 $N_G(K) \neq K$. Здесь $K \in \mathfrak{N}(1)$ и K полудиэдральная группа. Возьмем $b \in N_G(K) \backslash K$ и положим $K_1 = \langle K, b \rangle$. Очевидно, K_1 – конечная группа.

По условию насыщенности $K_1 \subseteq K_2 \in \mathfrak{N}(1)$. Из определения множества $\mathfrak{N}$ следует, что K_2 – одна из следующих групп:

1. K_2 – группа полудиэдра.

2. K_2 – конечные элементарные абелевы 2-группы.

3. K_2 – сплетенная 2-группа.

Так как K – собственная подгруппа K_2, то первые две ситуации невозможны. Пункт доказан.

В дальнейшем будем считать, что $\mathfrak{N}$ не содержит полудиэдральных групп.

3. *Если* $\mathfrak{N}(1)$ *содержит элементарную абелеву группу* K *и* $|K| \geq 8$, *то* G – *группа периода два.*

Доказательство пункта 3. Пусть G содержит элементарную абелеву подгруппу $|K| \geq 8$. Из пункта 1 и условия насыщенности вытекает, что в этом случае G содержит бесконечную элементарную абелеву подгруппу I и будем считать I максимальной в указанном смысле (лемма Цорна [12]).

Если $G = I$, то все доказано. Предположим, что $x \in G \backslash I \neq \emptyset$. Покажем, что x можно выбрать так, что $xz = zx$ для некоторой инволюции $z \in I$.

Если $|x| = 2$, то группа $\langle x, z \rangle$ конечна для любой инволюции z из I. Пусть t – инволюция из $Z(\langle x, z \rangle)$. Если $t \in I$, то положим $z = t$. Если $t \notin I$, то положим $x = t$. Подгруппа $\langle z \rangle \times \langle x \rangle = K_1$, очевидно, не лежит в I и $K_1 \cap I = \langle z \rangle$. Возьмем в I инволюцию $t \neq z$. Ясно, что $tz = zt$.

Рассмотрим конечную подгруппу $\langle z, x, t \rangle$. Данная подгруппа, очевидно, не лежит в I и $\langle z, x, t \rangle \cap I \supset (\langle x \rangle \times \langle t \rangle)$. В силу пункта 1 в $\langle z, x, t \rangle$ существует элемент v такой, что $v \in N_G(\langle z \rangle \times \langle t \rangle) \backslash I$ и $v^2 \in I$. Тогда группа $K_2 = \langle v, z, x, t, t_1 \rangle$, где $t_1 \in I \backslash (\langle z \rangle \times \langle t \rangle)$, конечна.

По условию насыщенности $K_2 \subseteq K_3 \in \mathfrak{N}(1)$. Так как K_3 содержит подгруппу $\langle t \rangle \times \langle t_1 \rangle \times \langle z \rangle$, то из структуры $\mathfrak{N}$ вытекает, что K_3 – элементарная абелева 2-группа. В силу произвольности t_1 как инволюции из I получим, что x перестановочен с любой инволюцией из I. Таким образом, $I \times \langle x \rangle$ – элементарная абелева 2-группа, что противоречит максимальности I как элементарной абелевой 2-группы.

Пусть $|x| > 2$. Возьмем $x_1 = x^{|x|/2}$. По доказанному выше $x_1 \in I$. Следовательно, группа $\langle x, z \rangle$ конечна для любой инволюции $z \in I$. В дальнейшем, дословно повторяя рассуждения для случая $|x| = 2$, получим, что $x \in \langle x \rangle \cdot I$ – элементарная абелева 2-группа. Противоречие с тем, что $|x| > 2$. Пункт доказан.

В дальнейшем будем считать, что G не содержит элементарных абелевых групп порядка более четырех.

4. $G = (A \times B) \leftthreetimes \langle w \rangle$, *где* $A^w = B$, A *– (локально) циклическая группа,* w *– инволюция.*

Доказательство пункта 4. Так как G – бесконечная группа, то можно считать в силу доказанных выше пунктов, что $\mathfrak{N}$ состоит только из сплетенных 2-групп и по предложению 21 G требуемого вида. Пункт доказан.

Из пунктов 1-4 вытекает доказательство леммы.

4.2. Локально конечные группы, насыщенные $PGL_2(p^n)$

Пусть G – локально конечная группа, насыщенная группами из множества $\mathfrak{R} = \{PGL_2(p^n) | p \in P, n \in N\}$. Здесь P – множество всех простых чисел, а N – множество натуральных чисел.

Лемма 10. *Локально конечная группа* G*, насыщенная группами из множества* $\mathfrak{R}$*, изоморфна* $PGL_2(P)$ *для подходящего локально конечного поля* P*.*

Доказательство. По предложению 11 $PGL_2(p^n) = L_2(p^n) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где $v^2 = e$.

Рассмотрим в G подгруппу L, порожденную всеми подгруппами K такими, что $K \simeq L_2(p_i^{n_i})$, где $p_i \in P$, а $n \in N$.

1. $L \simeq L_2(P)$, *где* P *– подходящее локально конечное поле характеристики* p*.*

Доказательство пункта 1. Покажем, что группа L насыщена множеством $\mathfrak{J}_1 = \{L_2(p_i^{n_i})\}$. Возьмем в L конечную подгруппу M. По определению группы L, $M \subseteq \langle L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_m \rangle$ для некоторого набора конечных подгрупп $L_i \subset L$ таких, что $L_i \simeq L_2(p_i^{n_i})$ и $i = 1, m$.

По условию насыщенности и предложению 12 $\langle L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_m\rangle \subseteq N \subset G$ и $N = L_{m+1} \leftthreetimes \langle t\rangle$, где $L_{m+1} \simeq L_2(p_{m+1}^{n_{m+1}})$, а t – инволюция.

Так как все L_i – конечные простые неабелевы группы, а $L_i \cap L_{m+1} \lhd L_i$ (заметим, что $L_{m+1} \lhd N$), то либо $L_i \cap L_{m+1} = 1$, либо $L_i \cap L_{m+1} = L_i$. Первый случай невозможен, поскольку тогда $|N : L_{m+1}| \geq |L_i| > 2$, а с другой стороны, $|N : L_{m+1}| = |(L_{m+1} \times (v)) : L_{m+1}| = 2$. Противоречие. Следовательно, остается второй случай. Но тогда все L_i лежат в L_{m+1}, а значит, и M лежит в L_{m+1}. Итак, насыщенность L группами из множества $\mathfrak{J}_1$ доказана. По предложению 22 $L \simeq L_2(P)$ для некоторого локально конечного поля P. Пункт 1 доказан.

Зафиксируем простое p, являющееся характеристикой поля P, из пункта 1.

2. $|G : L| \leq 2$.

Доказательство пункта 2. Возьмем в G конечную подгруппу $G_k \simeq PGL_2(p^{m_k})$ и рассмотрим ее образ G_k в G. Тогда $G_k = L_k \leftthreetimes \langle t_k\rangle$, где $L_k \simeq L_2(p^{m_k})$, а t_k – инволюция. Если $t \in L$ для любой G_k, то $G_k \subset L$, поскольку L_k лежит в L по определению, $G = L$ и $|G : L| = 1$. Пусть для некоторого $t_{k_0} \notin L$. Покажем, что $G \subseteq L \leftthreetimes \langle t_{k_0}\rangle$, так как обратное включение очевидно. Действительно, пусть $g \in G$. По условию насыщенности $\langle t, g\rangle \subseteq G_k = L_k \leftthreetimes \langle t_k\rangle \subset L \leftthreetimes \langle t_k\rangle$, где $L_k \simeq L_2(p^{n_k})$, а $\langle t_k\rangle$ – инволюция. Как показано выше, $t_{k_0} \notin L$, а значит, $L_k \leftthreetimes \langle t_k\rangle \subset L \leftthreetimes \langle t_{k_0}\rangle$. В силу произвольности выбора g получаем $G \subset L \leftthreetimes \langle t_{k_0}\rangle$ и окончательно $G = L \leftthreetimes \langle t_{k_0}\rangle$.

Пункт 2, а вместе с ним и лемма доказаны.

4.3. О центре группы Шункова с одним условием насыщенности

Пусть p – фиксированное простое число, $\Im_p = \{GL_2(p^n) | n \in N\}$, где N – множество натуральных чисел. Доказан следующий результат.

Теорема 4. *Пусть G – периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества $\Im_p$, и K – подгруппа из G, изоморфная группе из $\Im_p$. Тогда $Z(K) \subset Z(G)$ и $Z(G)$ – локально циклическая группа.*

Если $p = 2$, то по предложению 13 и предложению 10 (пункт 9) $G \simeq CL_2(Q) \times V$, где Q – локально конечное поле характеристики 2, а V – локально циклическая группа без инволюций [4], и теорема доказана. В дальнейшем будет предполагаться, что $p \neq 2$.

Лемма 11. *Пусть a – произвольный элемент порядка p из G. Тогда 2-элементы группы $G_G(\langle a \rangle)$ порождают локально циклическую 2-подгруппу.*

Доказательство. Покажем сначала, что $C_G(a)$ содержит в точности одну инволюцию. Действительно, по условию теоремы элемент a лежит в некоторой конечной группе $L_1 \in \Im_p(\langle a \rangle)$. Из строения конечной группы $GL_2(p^m)$ (предложение 11) следует, что центр группы L_1 содержит инволюцию. Обозначим ее через z. Предположим теперь, что существует другая инволюция $\omega \in G$, также принадлежащая подгруппе $G_G(a)$. Рассмотрим подгруппу $\langle a, z, \omega \rangle$. Поскольку $a^z = a$ и $a^\omega = a$, подгруппа $\langle a \rangle$ нормальна в $\langle a, z, \omega \rangle$. Тогда фактор-группа $\langle a, z, \omega \rangle / \langle a \rangle$ конечна, так как порождена двумя инволюциями. Значит, по предложению 2 группа $\langle a, z, \omega \rangle$ конечна и по условиям теоремы вложена в некоторую конечную подгруппу $L_2 \in \Im_p(\langle a, z, \omega \rangle)$. Очевидно, что элемент a содержится в некоторой силовской p-подгруппе группы L_2 и $z, \omega \in G_{L_2}(\langle a \rangle)$. Но $L_2 \simeq GL_2(p^n)$, и $C_{L_2}(\langle a \rangle)$

содержит только одну инволюцию (предложение 11). Итак, $z = \omega$, и если 2-элементы группы $C_G(\langle a \rangle)$ имеют только порядок 2, то лемма доказана.

Пусть $C_G(\langle a \rangle)$ содержит 2-элементы порядка больше 2. Сделаем следующее индуктивное предположение: если в $C_G(\langle a \rangle)$ существует циклическая подгруппа $\langle b_0 \rangle$, $|b_0| = 2^k$, $k \geq 1$, то она единственна. Пусть в $C_G(\langle a \rangle)$ существует циклическая подгруппа $\langle b \rangle$, $|b| = 2^{k+1}$. Предположим, что существует другая циклическая подгруппа $\langle c \rangle \in C_G(\langle a \rangle)$, $\langle c \rangle \neq \langle b \rangle$, $|c| = 2^{k+1}$. Рассмотрим подгруппу $\langle a, b, c \rangle$. В ней конечная абелева подгруппа $\langle a, b^2 \rangle = \langle a, c^2 \rangle$ является нормальной (равенство $\langle b^2 \rangle = \langle c^2 \rangle = \langle d \rangle$ следует из индуктивного предположения). Тогда фактор-группа $\langle a, b, c \rangle / \langle a, d \rangle$ конечна, поскольку порождена двумя инволюциями. Следовательно, по предложению 2 конечной является и группа $\langle a, b, c \rangle$. По условиям теоремы $\langle a, b, c \rangle \subseteq L_3 \in \Im_p(\langle a, b, c \rangle)$. Но по предложению 11 в L_3 существует только одна циклическая группа порядка 2^{k+1}, лежащая в $C_G(\langle a \rangle)$, и она лежит в центре группы L_3. Противоречие с выбором $\langle c \rangle$. Следовательно, $\langle b \rangle = \langle c \rangle$.

Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть K – конечная подгруппа группы G – изоморфная $GL_2(p^n)$. Тогда все 2-элементы из центра группы K лежат в центре группы G и порождают в нем единственную циклическую 2-подгруппу.*

Доказательство. Из предложения 11 следует, что все 2-элементы центра группы K порождают циклическую 2-подгруппу. Обозначим через z инволюцию из этой 2-подгруппы.

Пусть z не лежит в центре группы G. Тогда существует элемент $g \in G$ такой, что $z^g = \upsilon$ и $\upsilon \neq z$. Пусть a – элемент порядка p из K. Группа $\langle a, a^\upsilon \rangle$ конечна по определению 3. Так как

$$\langle a, a^\upsilon \rangle^\upsilon = \langle a^\upsilon, a \rangle = \langle a, a^\upsilon \rangle,$$

то

$$\upsilon \in N_g(\langle a, a^\upsilon \rangle).$$

Последнее означает, что группа $\langle a^\upsilon, a, \upsilon \rangle$ конечна (предложение 2). По условию насыщенности

$$\langle a^\upsilon, a, \upsilon \rangle \subseteq L_1 \in \Im_p(\langle a^\upsilon, a, \upsilon \rangle),$$

а значит, $L_2 \simeq GL_2(p^n)$. По лемме 11 $z \in Z(L_1)$ и, значит, $z\upsilon = \upsilon z$, то есть $z^G = \langle z^g | g \in G \rangle$ – абелева нормальная подгруппа в G и, значит, $z = \upsilon$. Противоречие с выбором υ. Предположим теперь, что $Z(K)$ содержит 2-элементы порядка больше 2. Сделаем следующее индуктивное предположение: если в $Z(K)$ существует циклическая подгруппа $\langle d \rangle$ порядка $2^k (k \geq 1)$, то она также содержится в $Z(G)$. Пусть в $Z(K)$ существует циклическая подгруппа $\langle b \rangle$ порядка 2^{k+1}. Предположим, что $b \notin Z(G)$ и существует $g \in G$ такой, что $b^g = c \neq b$. В силу индуктивного предположения можно считать, что $b^2 = c^2 = d \in Z(G)$. Следовательно, $\langle a, c \rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности, лемме 11 и предложению 10 (пункты 10, 11) $\langle a, c \rangle \subseteq L_2 \in \Im_p(\langle a, c \rangle)$. Так как $L_2 \simeq L_2(p^{n_2})$, то $|c|$ делит $|Z(L_2)|$ (предложение 9 пункты 4, 10), а $b \in Z(L_2)$. Следовательно, $b^G = \langle b^g | g \in G \rangle$ – абелева нормальная подгруппа в G и $b = c$.

Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть b – элемент нечетного порядка из G, $b \in Z(K)$, где $K \in \Im_p(1)$. Тогда в G не существует элемета x такого, что $b^x = b^{-1}$ и $x^2 \in Z(G)$.*

Доказательство. Предположим обратное. И пусть элемент x такой. Так как G – группа Шункова, то $\langle b, x, d \rangle$ – конечная группа. Здесь d – элемент порядка p из K. По условию насыщенности $\langle b, x, d \rangle \subseteq L$, где $L \in \Im_p(1)$. Из предложения 10 (пункта 2) вытекает, что $b \in Z(L)$, следовательно, $b^x = b$, что противоречит выбору элемента x. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть b – элемент нечетного порядка из G, $b \in Z(K)$, где $K \in \Im_p(1)$. Тогда $b \in C_G(S)$, где S – любая силовская p-подгруппа из G, содержащая силовскую p-подгруппу S_K из K.*

Доказательство. Так как $S\langle b\rangle$ – локально конечная группа, то для любого $x \in S\setminus S_K$, $\langle S_K, x\rangle$ – конечная группа и по условию насыщенности $\langle S_K, x\rangle \subset K_1 \in \Im_p(1)$. Из предложения 11 (пункты 2,6) вытекает, что $S_{K_1} \subset C_G(b)$. Итак, $x^b = x$ и в силу произвольности выбора x из S, $b \in C_G(S)$.

Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть $b \in Z(K)$, где $K \in \Im_p(1)$ и $|b| = r$ – простое нечетное число. Тогда $b \in Z(G)$.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть $b \neq b^g$ для некоторого $g \in G$. По условию насыщенности конечная группа $\langle b, b^g\rangle \subseteq K_{(1,g)} \in \Im_p(\langle b, b^g\rangle)$.

1. Существует такой g, что $b \notin Z(K_{(1,g)})$. Действительно, если для любого $g \in G$, $b \in Z(K_{(1,g)})$, то $b^G = \langle b^g | g \in G\rangle$ – абелева нормальная подгруппа в G. Следовательно, $\langle b, g\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности $\langle b, g\rangle \subseteq K_2 \in \Im_p(\langle b, g\rangle)$. Следовательно, $K_2 \simeq GL_2(p^{n_2})$ и $b^{K_2} = \langle b^x | x \in K_2\rangle$ – нормальная r-подгруппа в K_2. По предложению 11 (пункт 9) $b^{K_2} \subset Z(K_2)$, в частности, $b \in Z(K_2)$, и, значит, $b^g = b$. Противоречие с выбором g. Зафиксируем группу $K_{(1,g)}$.

2. $r \in \pi(Z(K_{(1,g)}))$. По предложению 11 (пункт 9) фактор-группа

$$\overline{K_{(1,g)}} = K_{(1,g)}/Z(K_{(1,g)}) = L_2 \leftthreetimes \langle v\rangle,$$

где $L_2 \simeq L_2(p^{n_1})$ и $|v| = 2$. Так как все элементы нечетных порядков из $\overline{K_{(1,g)}}$ все попадают в подгруппу L_2, то для некоторой инволюции $\bar{t} \in \overline{K_{(1,g)}}$, $\bar{b}^{\bar{t}} = \bar{b}^{-1}$. Здесь $\bar{b}$ – образ b при естественном гомоморфизме $K_{(1,g)}$ на

$\overline{K_{(1,g)}}$. Это означает, что для некоторого 2-элемента $t \in K_{(1,g)}$, $b^t = b^{-1}z$ и $t^2 \in Z(G)$, где $e \neq z \in Z(K_{(1,g)})$. То, что $z \neq e$, вытекает из леммы 13. Так как $r = |b| = |b^t| = |b^{-1}z|$, то $e = (b^{-1}z)^r = (b^r)^{-1}z^r = ez^r = z^r$. Положим $z = a$ и зафиксируем t и подгруппу $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$ из $K_{(1,g)}$. Ясно, что $t \in N(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$, $a^t = a$ и $b^t = b^{-1}a$.

3. В K найдется инволюция υ такая, что конечная группа $\langle a, b, \upsilon \rangle \subseteq K_2 \in \Im_p(\langle a, b, \upsilon \rangle)$ и $a \notin Z(K_2)$.

Так как $b \in Z(\langle a, b, \upsilon \rangle)$, то для любой инволюции $\upsilon \in K$ фактор-группа $\langle a, b, \upsilon \rangle / \langle b \rangle = \langle \overline{a}, \overline{\upsilon} \rangle$ – конечная группа, порожденная инволюцией $\overline{\upsilon}$ и элементом $\overline{a}$ простого порядка r (определение 3). Следовательно, по т. Шмидта (предложение 2) $\langle a, b, \upsilon \rangle$ – конечная группа, и по условию насыщенности

$$\langle a, b, \upsilon \rangle \subseteq K_2 \in \Im_p(\langle a, b, \upsilon \rangle).$$

Предположим теперь, что любой инволюции $\upsilon \in K$, $a \in Z(K_2)$. Тогда $K^* = \langle \upsilon | \upsilon \in K, \upsilon^2 = e \rangle$ – характеристическая подгруппа в K, порожденная всеми инволюциями из K, и $a \in C_G(K^*)$. Здесь может быть две взаимно исключающие возможности: либо $a \in K$, либо $a \notin K$. В первом случае $a \in Z(K)$ и по предложению 11 (пункты 1, 2) $\langle a \rangle = \langle b \rangle$, что невозможно. Во втором случае мы имеем конечную подгруппу $\langle a \rangle \times (\langle b \rangle \times K^*)$ и по условию насыщенности

$$\langle a \rangle \times (\langle b \rangle \times K^*) \subset K_3 \in \Im_p(\langle a \rangle \times \langle b \rangle \times K^*),$$

где $K_3 \simeq GL_2(p^{n_3})$, а $K_3 \simeq GL_2(p^{n_3})$. Но в K_3 нет элементарно абелевых подгрупп группы r^3 (предложение 11). Итак, требуемая инволюция υ найдется.

Завершим доказательство леммы. Так как $\langle a \rangle \times \langle b \rangle \subseteq K_2$ и $|\langle a \rangle \times \langle b \rangle| = r^2$, то по предложению 11 $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \cap Z(K_2) = \langle z \rangle \neq e$. Ясно, что $\langle a\rangle \times \langle b\rangle = \langle a\rangle \times \langle z\rangle$. Так как $a \notin Z(K_2)$, то в фактор-группе $\overline{K_2} = K_2/Z(K_2)$ найдется такая инволюция $\overline{t_1}$, что $\overline{a}^{\overline{t_1}} = \overline{a}^{-1}$.

Следовательно, в K_2 найдется 2-элемент t_1 такой, что $a^{t_1} = a^{-1}z_1$, $t_1^2 \in Z(G)$ и по лемме 13 $z_1 \neq e$. Ясно так же, что $z_1 \in \langle z\rangle$. Следовательно, $t_1 \in N(\langle a\rangle \times \langle z\rangle)$, поскольку $(\langle a\rangle \times \langle z\rangle) = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$, то $t_1 \in N(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$. Итак, мы имеем 2-элементы t и t_1 из $N(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$, нетривиально действующие на $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$ такие, что $a^t = a$, $a^{t_1} = a^{-1}z_1 \neq a$ и t^2, $t_1^2 \in Z(G)$. Так как фактор-группа $\langle(\langle a\rangle \times \langle b\rangle), t_1, t\rangle / \langle(\langle a\rangle \times \langle b\rangle), t_1^2, t^2\rangle = \langle\overline{t_1}, \overline{t}\rangle$ порождается двумя инволюциями $\overline{t_1}$ и $\overline{t}$, то она конечна.

Следовательно, $\langle(\langle a\rangle \times \langle b\rangle), t_1, t\rangle = M$ также конечная группа (предложение 2). По условию насыщенности $M \subseteq K_4 \in \Im_p(M)$, где $K_4 \simeq CL_2(p^{n_3})$. Из предложения 11 получаем $N_{K_4}(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) = (A \times B) \leftthreetimes \langle \upsilon\rangle$, где A – циклическая группа порядка $p^{n_4} - 1$, $A^\upsilon = B$, $\upsilon^2 = e$ и $(A \times B) = C_{K_4}(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$. Так как t_1, $t \in N_G(A \times B)$, то

$$(A \times B) \leftthreetimes \langle \upsilon\rangle = (A \times B) \cdot \langle t\rangle = (A \times B) \cdot \langle t_1\rangle,$$

$t_1 = tx$, для некоторого $x \in A \times B$ и $a \neq a^{-1}z_1 = a^{t_1} = a^{xt} = a^t = a$. Противоречие. Лемма доказана.

Используя схему доказательства леммы 15 получаем следующую лемму.

Лемма 16. *Пусть* $b \in Z(K)$, *где* $K \in \Im_p(e)$ *и* $|b|$ *– нечетное число, тогда* $b \in Z(G)$.

Доказательство. В силу леммы 15 и индукции можно считать, что $|b| = r^n$, где r – простое число, $n > 1$ и $b^{r^{n-1}} \in Z(G)$. В этом случае группа $\langle b, b^g\rangle$ конечна (определение 3).

1. Существует такой g, что $b \notin Z(K_{(1,g)})$. Действительно, если для любого $g \in G$, $b \in Z(K_{(1,g)})$, то $b^G = \langle b^g | g \in G\rangle$ – абелева нормальная

подгруппа в G. Следовательно, $\langle b,g\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности $\langle b,g\rangle \subseteq K_2 \in \Im_p(\langle b,g\rangle)$. Следовательно, $K_2 \simeq GL_2(p^{n_2})$ и $b^{K_2} = \langle b^x | x \in K_2\rangle$ – нормальная r-подгруппа в K_2. По предложению 11 (пункт 9) $b^{K_2} \subset Z(K_2)$, в частности, $b \in Z(K_2)$, и, значит, $b^g = b$. Противоречие с выбором g. Зафиксируем группу $K_{(1,g)}$.

2. Существует 2-элемент $t \in K_{(1,g)}$ такой, что $b^t = b^{-1}a$, $a \in Z(K_{(1,g)})$, $t^2 \in Z(K_{(1,g)})$ и $|a| = |b|$. По предложению 11 (пункт 9)

$$\overline{K_{(1,g)}} = K_{(1,g)}/Z(K_{(1,g)}) = L_2 \leftthreetimes \langle v\rangle,$$

где $L_2 \simeq L_2(p^{n_1})$ и $|v| = 2$. Так как все элементы нечетных порядков из $\overline{K_{(1,g)}}$ попадают все подгруппу L_2, то для некоторой инволюции $\overline{t} \in \overline{K_{(1,g)}}$, $\overline{b}^{\overline{t}} = \overline{b}^{-1}$. Здесь $\overline{b}$ – образ b при естественном гомоморфизме $K_{(1,g)}$ на $\overline{K_{(1,g)}}$. Это означает, что для некоторого 2-элемента $t \in K_{(1,g)}$, $b^t = b^{-1}z$ и $t^2 \in Z(G)$, где $e \neq z \in Z(K_{(1,g)})$. То, что $z \neq e$, вытекает из леммы 13. Так как $r^n = |b| = |b^t| = |b^{-1}z|$, то $e = (b^{-1}z)^{|b|} = (b^{|b|})^{-1}z^{|b|} = ez^{|b|} = z^{|b|}$. Если $|z| < |b|$, то $b^{|z|} \neq e$, $(b^{|z|})^t = (b^{-1}z)^{|z|} = b^{|z|} \cdot z^{|z|} = (b^{|z|})^{-1}$. Противоречие с леммой 13. Итак $|z| = |b|$. Положим $z = a$, зафиксируем t и подгруппу $(\langle a\rangle \cdot \langle b\rangle)$ из $K_{(1,g)}$. Ясно, что $t \in N(\langle a\rangle \cdot \langle b\rangle)$, $a^t = a$, $b^t = b^{-1}a$ и $\langle a^r\rangle = \langle b^r\rangle \in Z(K_{(1,g)})$.

3. В K найдется инволюция υ такая, что конечная группа $\langle a,b,\upsilon\rangle \subseteq K_2 \in \Im_p(\langle a,b,\upsilon\rangle)$ и $a \notin Z(K_2)$.

Так как $b \in Z(\langle a,b,\upsilon\rangle)$ и $\langle a^r\rangle = \langle b^r\rangle \subseteq Z(G)$, то для любой инволюции $\upsilon \in K$ фактор-группа $\langle a,b,\upsilon\rangle/\langle b\rangle = \langle \overline{a},\overline{\upsilon}\rangle$ – конечная группа, порожденная инволюцией $\overline{\upsilon}$ и элементом $\overline{a}$ простого порядка r (определение 3). Следовательно, по т. Шмидта (предложение 2) $\langle a,b,\upsilon\rangle$ – конечная группа, и по условию насыщенности

$$\langle a,b,\upsilon\rangle \subseteq K_2 \in \Im_p(\langle a,b,\upsilon\rangle).$$

Предположим теперь, что любой инволюции $v \in K$, $a \in Z(K_2)$. Тогда $a \in C_G(K^*)$, где $K^* = \langle v | v \in K, v^2 = e \rangle$ – характеристическая подгруппа в K, порожденная всеми инволюциями из K. Здесь может быть две взаимно исключающие возможности: либо $a \in K$, либо $a \notin K$. В первом случае $a \in Z(K)$ и по предложению 11 (пункты 1, 2) $\langle a \rangle = \langle b \rangle$, что невозможно. Во втором случае мы имеем конечную подгруппу $(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle) \times K^*$ и по условию насыщенности

$$(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle) \times K^* \subset K_3 \in \Im_p((\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle) \times K^*),$$

где $K_3 \simeq GL_2(p^{n_3})$, а $K \simeq GL_2(p^{n_3})$. Так как $\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ – нециклическая абелева r-группа, то в ней есть элементарная абелева подгруппа порядка r^2. Следовательно, в K_3 есть элементарная абелева r-подгруппа порядка r^3, что невозможно (предложение 11). Итак, требуемая инволюция v найдется.

Завершим доказательство леммы. Так как $\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle \subseteq K_2$ и $\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ нециклическая группа, то по предложению 11 $(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle) \cap Z(K_2) = \langle z \rangle \neq e$. Ясно, что $\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle = \langle a \rangle \cdot \langle z \rangle$. Так как $a \notin Z(K_2)$, то в фактор-группе $\overline{K_2} = K_2/Z(K_2)$ найдется такая инволюция $\overline{t_1}$, что $\overline{a}^{\overline{t_1}} = \overline{a}^{-1}$.

Следовательно, в K_2 найдется 2-элемент t_1 такой, что $a^{t_1} = a^{-1} z_1$, $t_1^2 \in Z(G)$ и по лемме 13 $z_1 \neq e$. Ясно так же, что $\langle z_1 \rangle = \langle z \rangle$. Следовательно, $t_1 \in N(\langle a \rangle \cdot \langle z \rangle)$, поскольку $(\langle a \rangle \cdot \langle z \rangle) = (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$, то $t_1 \in N(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$. Итак, мы имеем 2-элементы t и t_1 из $N(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$, нетривиально действующие на $(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$ такие, что $a^t = a$, $a^{t_1} = a^{-1} z_1 \neq a$ и t^2, $t_1^2 \in Z(G)$. Так как фактор-группа $\langle (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle), t_1, t \rangle / \langle (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle), t_1^2, t^2 \rangle = \langle \overline{t_1}, \overline{t} \rangle$ порождается двумя инволюциями $\overline{t_1}$ и $\overline{t}$, то она конечна.

Следовательно, $\langle \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle, t_1, t \rangle = M$ также конечная группа (предложение 2). По условию насыщенности $M \subseteq K_4 \in \Im_p(M)$, где $K_4 \simeq CL_2(p^{n_3})$. Из предложения 11 получаем $N_{K_4}(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle) = (D \times R) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где D, R – циклические группы порядка $p^{n_4} - 1$, $D^v = R$, $v^2 = e$ и $(D \times R) = C_{K_4}(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)$.

Так как t_1, $t \in N(D \times R)$, то

$$(D \times R) \leftthreetimes \langle v \rangle = (D \times R) \cdot \langle t \rangle = (D \times R) \cdot \langle t_1 \rangle,$$

$t_1 = tx$, для некоторого $x \in D \times R$ и $a \neq a^{-1}z_1 = a^{t_1} = a^{xt} = a^t = a$. Противоречие. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Первое утверждение теоремы вытекает из лемм 12, 16.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $\langle z_1, ..., z_n \rangle$ подгруппа из $Z(G)$ порожденная конечным набором элементов. Возьмем p-элемент $b \in G$. По условию насыщенности $\langle z_1, ..., z_n, b \rangle \subseteq L \in \Im(1)$. По предложению 11 (пункт 9) $\langle z_1, ..., z_n \rangle$ циклическая группа из $Z(L)$.

Теорема доказана.

4.4. Группы Шункова, насыщенные $PGL_2(q)$

В работе [20] доказана локальная конечность периодических групп, насыщенных группами из множества $\mathfrak{T} = \{L_2(r^n)\}$ и $\mathfrak{B} = \{SL_2(r^n)\}$, где r – простое нефиксированное число и n – натуральное нефиксированное число. Пусть p – фиксированное простое число, $\mathfrak{I}_p = \{PGL_2(p^n) | n \in N\}$.

В данном пункте доказан следующий результат.

Теорема 5. *Периодические группы Шункова, насыщенные группами из множества $\mathfrak{I}_p$, изоморфны $PGL_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля характеристики p.*

Доказательство.

1. $p = 2$.

В этом случае (предложение 10 пункт 9) $PGL_2(2^n) = L_2(2^n)$ и по предложению 19 $G \simeq L_2(Q) = PGL_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2, и теорема доказана.

2. $p \neq 2$.

Пусть S – силовская 2-подгруппа группы G.

Лемма 17. *$S = A \leftthreetimes \langle t \rangle$, где A – локально циклическая группа, t – инволюция, $a^t = a^{-1}$ для любого элемента $a \in A$.*

Если S – конечная группа, то из предложения 11 пункта 16, пункта 17 вытекает, что S – конечная группа диэдра, и все доказано. Пусть S – бесконечная группа. Покажем, что S насыщена группами диэдра. Возьмем в S конечную подгруппу K_1. Из предложения 1 вытекает, что в S существует бесконечная цепочка $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$ конечных подгрупп. Положим $K = \cup K_n$. Если хотя бы одна из K_n – группа диэдра, то все доказано.

Пусть все K_n – циклические группы. Тогда K – локально циклическая 2-группа. По условию насыщенности для любого n выполняется $K_n \subset M_n \simeq PGL_2(p^{m_n})$ и K_n^2 – силовская 2-подгруппа в M_n. Следовательно, в K_n^2 есть инволюция v такая, что для любого $x \in K_n$ справедливо $x^v = x^{-1}$. Пусть $y \in K_{n+1}$ и $y^2 = t$, где $\langle t \rangle = K_n$. По условию насыщенности конечная группа $\langle y, v \rangle \subseteq M_1 \simeq PGL_2(p^{m_n})$ и, следовательно, $\langle y, v \rangle$ лежит в $C_{M_1}(z)$, где z – инволюция из $\langle y \rangle$. По предложению 11 пункту 16, пункту 17 $C_{M_1}(z)$ – группа диэдра, а значит, $y^v = y^{-1}$. Рассуждая по индукции, получим, что для любого $x \in K$ справедливо $x^v = x^{-1}$, а значит, $K \leftthreetimes \langle v \rangle$ – 2-группа. Следовательно, $K \neq S$ и в $S \backslash K$ найдется некоторый элемент w. Без ограничения общности можно считать, что w – инволюция и $wz = zw$.

Отсюда несложно получить, что $x^w = x^{-1}$ для любого $x \in K$. В частности, $K_1 \leftthreetimes \langle w \rangle$ – группа диэдра. Таким образом, S насыщена группами диэдра и по предложению 20 $S = A \leftthreetimes \langle t \rangle$, где A – локально циклическая 2-группа и для любого $x \in A$, $x^t = x^{-1}$.

Лемма доказана.

Лемма 18. *Пусть a – инволюция из S. Тогда $C_G(a) = C \leftthreetimes \langle t \rangle$, где C – бесконечная локально циклическая группа, t – инволюция и $c^t = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$.*

Доказательство. Бесконечность группы $C_G(a)$ следует из предложений 3, 21. Пусть R – произвольная конечная подгруппа из $C_G(a)$ и $D = \langle a, R \rangle$. Имеем $D \subseteq M \subset G$, где $M \simeq PGL_2(p_n^m)$. При этом $D \subseteq C_M(a) \subset C_G(a)$. По предложению 11 $C_M(a)$ – группа диэдра. Таким образом, $C_G(a)$ насыщена группами диэдра. В силу предложения 20 имеем $C_G(a) = C \leftthreetimes \langle t \rangle$, где C – локально циклическая группа, $t^2 = 1$ и $c^t = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$. Лемма доказана.

Лемма 19. *G обладает локально конечной подгруппой L такой, что $L \simeq PGL_2(P)$, где P – локально конечное поле характеристики p.*

Доказательство. Пусть z – инволюция из центра S. Как следует из леммы 18, $C_G(z)$ представим в виде объединения возрастающей цепочки групп диэдра $D_n = C_n \leftthreetimes t$, $C_n = \langle c_n \rangle$ и для любого $c \in C_n$, $c^t = c^{-1}$:

$$D_1 \subset \ldots \subset D_n \ldots . \tag{13}$$

По условию насыщенности $D_n \subset L_n \simeq PGL_2(p^{m_n}) = L_2(p^{m_n}) \leftthreetimes \langle d \rangle$, где d – инволюция и $D_n = C_{L_n}(z)$.

Таким образом цепочке (13) поставлена в соответствие последовательность

$$L_1, \ldots, L_n, \ldots \tag{14}$$

подгрупп из G.

Из предложения 11 пункта 9 вытекает, что инволюцию t можно выбрать лежащей в $R_n \subset L_n$ и $R_n \simeq L_2(p^{m_n})$. Здесь L_n – элемент цепочки (14). Следовательно, можно считать, что инволюции z и t сопряжены.

В частности, подгруппа $C_{L_n}(z) = D_n$ сопряжена в L_n с подгруппой $T_n = C_{L_n}(t) = V_n \leftthreetimes \langle z \rangle$. По лемме 18 подгруппа C_n в $C_G(z)$ однозначно определена своим порядком $|C_n|$; то же самое верно для подгруппы V_n, где V_n – однозначно определяемая циклическая подгруппа из $C_G(t)$.

Ввиду сопряженности инволюций z и t в G подгруппы T_n так же, как и подгруппы D_n, составляют цепочку

$$T_1 \subset \ldots \subset T_n \subset \ldots \tag{15}$$

Так как $L_n = \langle T_n, D_n \rangle$, то из (13), (15) следует, что последовательность (14) образует цепочку

$$L_1 \subset \ldots \subset L_n \subset \ldots \tag{16}$$

Пусть $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$. По построению $C_G(a) \subset L$. По предложению 23 и лемме 10 L – локально конечная группа, изоморфная $PGL_2(P)$, где P – локально конечное поле характеристики p. Лемма доказана.

Лемма 20. *Пусть L – подгруппа из формулировки предыдущей леммы. Тогда $G = L$.*

Доказательство. В начале рассмотрим случай, когда S – бесконечная группа. В этом случае $L \simeq L_2(P)$. Предположим, что $L \neq G$. Покажем, что L – сильно вложенная подгруппа в G. Для этого достаточно показать, что для любого $g \in G \backslash L$ подгруппа $L \cap L^g$ не содержит инволюций.

Пусть w – инволюция из $L \cap L^g$, где $w = v^g$, причем $v \in L$. Все инволюции в L сопряжены (предложение 13), поэтому $v^{gb} = v$ для некоторого элемента $b \in L$. Тогда $gb \in C_G(v)$, и так как по леммам 17, 18 $C_G(v) \subset L$, то и $g \in L$ вопреки выбору элемента g. Значит, для любого элемента $g \in G \backslash L$ подгруппа $L \cap L^g$ не содержит инволюций, $N_G(L) = L$, и L сильно вложена в G.

Так как G порождается инволюциями, то в $G \setminus L$ найдется инволюция v. Пусть w – произвольная инволюция из L. Так как G – периодическая группа, то группа $K = \langle v, w \rangle$ конечна и по условию насыщенности $K \subset M \subset G$, где $M \simeq L_2(p^{n_1})$. Положим $H = M \cap L$, и пусть z – произвольная инволюция из H, а $g \in M$. Как показано выше, из $z^g \in H$ вытекает, что $g \in H$. Следовательно, подгруппа H сильно вложена в M.

По предложению 11 пунту 9 $M \simeq PGL_2(p^{n_1}) = L_2(p^{n_1}) \leftthreetimes \langle x \rangle$, где x – инволюция. Нетрудно видеть, что M, в силу указанного изоморфизма, не обладает сильно вложенной подгруппой. Таким образом, $G \backslash L = \emptyset$ и $G = L$.

Теперь рассмотрим случай, когда S – конечная группа. Если $G \neq L$, то G – не локально конечная группа (предложение 21) и, следовательно, $C_G(S)$ – бесконечная группа. Пусть b – элемент нечетного порядка из $C_G(S)$. По условию насыщенности для конечной группы $\langle S, b \rangle$ выполняется $\langle S, b \rangle \subset M_2 \simeq PGL_2(p^{n_2}) = L_2(p^{n_2}) \leftthreetimes \langle x \rangle$, где x – инволюция (предложение 11 пункт 9). Но в $C_{M_2}(S)$, в силу указанного изоморфизма, не содержится элементов нечетного порядка. Противоречие. Следовательно, $G = L$.

Итак, $G \backslash L$ не содержит инволюций, что эквивалентно равенству $L = G$. Лемма и теорема доказаны.

Теорема 6. *Периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества $\{GL_2(p^n) | n \in N\}$, изоморфна $GL_2(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики p.*

Доказательство. По теореме 4 $Z(G)$ – локально-циклическая группа. Покажем, что фактор-группа $\overline{G} = G/Z(G)$ насыщена группами из множество $\mathfrak{M}$. Пусть $\overline{K}$ конечная подгруппа из $\overline{G}$ и K некоторый ее конечный прообраз в G. По условию теоремы $K \subseteq K_1 \subset G$ и $K_1 \simeq GL_2(p^n)$. Переходя к $\overline{G}$ получим $\overline{K} \subseteq \overline{K_1} \simeq K_1/Z(K_1) \simeq PGL_2(p^n)$. По теореме 10

$\overline{G} \simeq PGL_2(Q)$. По теореме Шмидта (предложение 2) G – локально конечная группа и по предложению 21 $G \simeq GL_2(P)$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Адян С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. – М.: Наука, 1975. – 335 с.

[2] Беляев В.В. Локально конечные группы Шевалле // Исследования по теории групп. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – С. 39-50.

[3] Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М. Конечные расщепляемые группы. – М.: Наука, 1968. – 111 с.

[4] Дуж А.А., Шлепкин А.А. О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп // Владикавказ. мат. журн. – 2012. – Т. 14. № 2. – С. 35-38.

[5] Дуж А.А. Периодические группы Шункова, насыщенные прямыми произведениями элементарных абелевых 2-групп и простых групп $L_2(2^m)$ // Сиб. электронные мат. известия. – 2013. – Т. 10. – С. 558-561.

[6] Журтов А.Х. О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн. – 2000. – Т. 41. № 2. – С. 329-338.

[7] Кабанов В.В., Кондратьев А.С. Силовские 2-подгруппы конечных групп (обзор). – Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1979. – 144 с.

[8] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М.: Наука, 1977. – 240 с.

[9] Кондратьев А.С. Группы и алгебры Ли. – М.: Екатеринбург: УрО РАН, 2009. – 310 с.

[10] Кондратьев А.С., Мазуров В.Д. 2-сигнализаторы конечных простых групп // Алгебра и логика. – 2003. – № 5. – С. 594-623.

[11] Кузнецов А.А., Филиппов К.А. Группы, насыщенные заданным множеством групп // Сиб. электронные мат. известия. – 2011. – Т. 8. – С. 230-246.

[12] Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

[13] Лысёнок И.Г. Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. РАН. Сер. матем. – 1996. – Т. 60. – С. 4-5.

[14] Лыткина Д.В., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А. О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп // Сиб. мат. журн. – 2008. – Т. 49. № 2. – С. 394-399.

[15] Нерешенные вопросы теории групп Коуровская тетрадь / Рос. академия наук, Сиб. отделение, Ин-т математики. – Изд. 18-е, доп., включ. Архив решенных задач. – Новосибирск, 2014. – 252 с.

[16] Панюшкин Д.Н. Группы Шункова, насыщенные прямыми произведениями различных групп: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Красноярск, 2010. – 66 с.

[17] Панюшкин Д.Н., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А. О группе Шункова, насыщенной центральными расширениями циклических групп посредством проективных специальных линейных групп // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16. № 2. – С. 177-185.

[18] Панюшкин Д.Н., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А. О периодической группе Шункова, насыщенной центральными расширениями конечных 2-групп посредством группы $L_2(5)$ // Вест. НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2010. – Т. 10. № 1. – С. 88-92.

[19] Санов И.Н. Решение проблем Бернсайда для периода 4 // Учен. записки ЛГУ. Сер. мат. – 1940. – № 10. – С. 166-170.

[20] Филиппов К.А., Рубашкин А.Г. О периодических группах насыщенных $L_2(p^n)$ // Сиб. мат. журн. – Новосибирск, 2005. – № 6. – С. 1388-1392.

[21] Шлепкин А.А. О группах насыщенных $GL_2(p^n)$ // Вест. СибГАУ. – 2013. – № 1. – С. 100-108.

[22] Шлепкин А.А. Периодические группы, насыщенные сплетенными группами // Сиб. электронные мат. известия. – 2013. – Т. 10. – С. 56-64.

[23] Шлепкин А.К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Мат. тр. – 1998. – № 1. – С. 129-138.

[24] Шлепкин А.К., Рубашкин А.Г. Об одном классе периодических групп // Алгебра и логика. – 2005. – Т. 44. № 1. – С. 110-119.

[25] Шлепкин А.К., Рубашкин А.Г. О группах, насыщенных конечным множеством групп // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45. № 6. – С. 1397-1400.

[26] Шлепкин А.К., Рубашкин А.Г. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами // Мат. системы. – Красноярск, 2004. – № 2. – С. 96-100.

[27] Шлепкин А.К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Сб. тез. 3-й междунар. конф. по алгебре. – Красноярск, 1993. – 363 с.

[28] Шунков В.П. Об одном классе групп // Алгебра и логика. – 1970. – № 4. – С. 484-496.

[29] Шунков В.П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. – 1972. – № 4. – С. 470-494.

[30] Alperin L., Brauer R., Gorenstein D. Finite simple groups of 2-rank two // Scripta Math. – 1973. – V. 29. № 3-4. – P. 191-214.

[31] Amberg B., Kazarin L. Periodic groups saturated by dihedral subgroups // International Algebraic conference dedicated to 70–th birthday of Anatoly Yakovlev, 19–24 june 2010. – Saint–Petersburg, 2010.

[32] Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. Atlas of finite groups. – New York: Clarendon Press, 1985.

[33] Dichson L. Linear groups. – Leipzig: B.C. Neubner, 1901.

[34] Glanberman G. Central elements in core-free groups // J. Algebra. – 1966. – V. 4. – № 3. – P. 403-420.

[35] Harada, K Indecompsable Sylow 2-subgroups of Simple Groups/ K. Harada, Mong Lung Lang//Acta Applicandae Mathematicae. – 2005. – V. 85. – P. 161–194.

[36] Huppert B. Endliche Gruppen I. – Berlin: Springer Verlag, 1979.

[37] Ivanov S.V. The free Burnside groups of sufficiently large exponents // Int. J. of Algebra and Computation. – 1994. – P. 2.

[38] Shlyopkin A.A. Periodic groups saturated by the groups $GL_2(p^n)$ // Book of abstracts of the international conference on algebra. – Kyiv, 2012. – P. 144.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[39] Сабодах И.В., Шлепкин А.А. Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп // Вест. НГУ. Серия: математика, механика, информатика. – 2012. – Т. 12. № 2. – С. 123-126.

[40] Сабодах И.В. О периодических группах, насыщенных конечным множеством групп // Сиб. электронные мат. известия. – 2014. – Т. 11. – С. 321-326.

[41] Sabodakh I.V., Shlepkin A.A. Groups saturated by direct products of finite non-abelian simple groups // Journal of mathematical sciences. – New York, May 7, 2014. – V. 198. – № 5. – P. 621-624.

[42] Сабодах И.В., Шлепкин А.А. Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп // Студент и научно-технический прогресс: материалы XLIX междунар. науч. студ. конф. 16-20 апреля 2011 / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2011. – С. 21.

[43] Сабодах И.В., Шлепкин А.А. Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп // Мат. системы / Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2011. – Вып. 9. – С. 161-164.

[44] Сабодах И.В., Шлепкин А.А. Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп // Современные проблемы математики: тез. 43-й Всерос. молодежной школы-конф. / Ин-т математики и механики УрО РАН, 25 января - 5 февраля 2012. – Екатеринбург, 2012. – С. 82.

[45] Sabodakh I.V., Shlyopkin A.A. About Shunkov group center with one saturation condition // International conference Mal'tsev meeting. – Novosibirsk, 2013. – P. 124.

[46] Сабодах И.В. О группах, насыщенных конечным множеством групп // Международная конференция: Алгебра и математическая логика: теория и приложения, Казань, 2-6 июня 2014. – С. 125.

[47] Shlyopkin A.A., Sabodakh I.V. About Shunkov groups saturated by $PGL_2(p^n)$ // Международная конференция: Алгебра и математическая логика: теория и приложения, Казань, 2-6 июня 2014. – С. 131.