МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Рогозина Марина Степановна

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физ.-мат. наук, доцент

Лейнартас Евгений Константинович

Красноярск – 2014

Содержание

Введение **3**

1 Корректность явных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей **17**

1.1 Однородные многослойные явные линейные разностные схемы . . 19

1.2 Неоднородные многослойные явные линейные разностные схемы . 23

1.3 Устойчивость явных многослойных однородных линейных разностных схем 26

1.4 Критерий устойчивости многослойных явных линейных неоднородных разностных схем 30

2 Разрешимость задачи Коши для полиномиального разностного оператора **34**

2.1 Разрешимость задачи Коши для полиномиального разностного оператора 36

2.2 Разрешимость задачи Коши и мономиальный базис факторкольца $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$ 45

2.3 Двумерный разностный аналог теоремы Хермандера 49

2.4 Разрешимость задачи Коши в «полосе» 60

Список литературы **70**

Введение

Разностные уравнения возникают в различных областях математики. В комбинаторном анализе разностные уравнения в сочетании с методом производящих функций дают мощный аппарат исследования перечислительных задач (см., например, [24], [25]). Другой источник появления разностных уравнений — дискретизация дифференциальных. Так, дискретизация уравнения Коши-Римана привела к созданию теории дискретных аналитических функций (см., например, [32], [33]), которая нашла применение в теории римановых поверхностей и комбинаторном анализе (см., например, [6], [7]). Методы дискретизации дифференциальной задачи являются важной составной частью теории разностных схем и также приводят к разностным уравнениям (см., например, [22]). Разностной схемой обычно называют разностное уравнение, аппроксимирующее исходное дифференциальное уравнение и дополнительные (начальные, граничные) условия.

Сформулируем общий вид задачи, решению которой посвящена диссертационная работа.

Для функции $f(x)$ переменных $x = (x_1, ..., x_n)$ оператор сдвига δ_j по j-ой переменной имеет вид $\delta_j f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, а полиномиальный разностный оператор $P(\delta) = \sum\limits_{\alpha} c_\alpha \delta^\alpha$, где $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1} ... \delta_n^{\alpha_n}$.

Рассматривается уравнение

$$P(\delta)f(x) = g(x), \quad x \in X, \tag{1}$$

где $f(x)$ — неизвестная, а $g(x)$ — заданная на некотором фиксированном множестве $X \subset \mathbb{Z}^n$ функция. Из множества X выделим подмножество $X_0 \subset X$ «начальных» («граничных») точек и сформулируем задачу: найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) и совпадающую на X_0 с заданной функцией

$$f(x) = \varphi(x), \quad x \in X_0. \tag{2}$$

Задачу (1)–(2) будем называть задачей Коши для полиномиального разност-

ного оператора $P(\delta)$.

В одномерным случае (см., например, [3], [18]), как правило, в качестве X берутся целые неотрицательные числа $X = \mathbb{Z}_+$, а в качестве $X_0 = (0,\, 1,\, ...,\, m-1)$. При этих условиях и при $c_m \neq 0$ задача (1)–(2) очевидным образом имеет единственное решение.

В многомерном случае существование и единственность решения зависят от всех объектов, участвующих в ее постановке: разностного оператора $P(\delta)$, множеств X и X_0. Разрешимость задачи (1)–(2) означает разрешимость бесконечной системы уравнений относительно бесконечного числа неизвестных $f(x)$, $x \in X$. Если при подходящем упорядочении неизвестных и уравнений матрица этой системы нижнетреугольная, то ее разрешимость очевидна и в этом случае будем говорить о явной разностной схеме. В противном случае задачу (1)–(2) будем называть неявной разностной схемой, и проблема ее разрешимости нетривиальна и выходит на первый план. Приведем некоторые типичные ситуации.

В первой из них, возникающей, как правило, в комбинаторном анализе, $X = \mathbb{Z}_+^n$, а выбор множества, на котором задаются начальные данные, X_0 зависит от свойства характеристического полинома P (см., например, [13], [16], [31]).

Во втором случае $X = \{x \in \mathbb{Z}^n,\, x_n \geqslant 0\}$ и в качестве множества $X_0 \subset X$ берем $X_0 = \{x \in X \,:\, x_n = 0,\, 1,\, \ldots,\, m-1\}$, а характеристический многочлен имеет моном старшей степени m по n-ой переменной (см., например, [26]). Такого рода разностные операторы появляются в теории разностных схем, например, при дискретизации уравнений математической физики, и называются они линейными многослойными явными разностными схемами с постоянными коэффициентами, коэффициенты разностного оператора при этом зависят от параметров сетки. Если же характеристический многочлен имеет несколько мономов старшей степени m по этой переменной, то они называются неявными многослойными линейными разностными схемами.

Теория разностных схем изучает способы построения разностных схем, исследует корректность разностных задач и сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи, занимается обоснованием алгоритмов решения разностных задач. Важное место среди этих свойств *зани-*

мает корректность.

Для функции $f : X \to \mathbb{C}$ обозначим $\|f\| = \sup\limits_{X} |f(x)|$.

Говорят (см., например, [21]), что *задача вида (1)–(2) для полиномиального разностного оператора $P(\delta)$ поставлена корректно, если выполнены условия:*

а) задача однозначно разрешима при любых начальных данных $\varphi(x)$ и правых частях $g(x)$;

б) существуют постоянные $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ такие, что при любых $g(x)$ и $\varphi(x)$ справедлива оценка

$$\|f(x)\| \leqslant M_1 \|g(x)\| + M_2 \|\varphi(x)\| . \tag{3}$$

Отметим, что при выполнении условия б) разностный оператор называется устойчивым.

Таким образом, разностная задача (1)–(2) *поставлена корректно, если она для любых φ и g имеет единственное решение и устойчива.*

Устойчивость задач вида (1)–(2) в случае одного переменного исследуется в рамках теорий дискретных динамических систем и цифровых рекурсивных фильтров (см., например, [5], [8]). Различные варианты определения устойчивости в случае $n = 1$ для однородного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами означают, *что все корни характеристического уравнения по модулю не превосходят единицу, а если корень по модулю равен единице, то он простой. Для неоднородного уравнения критерий устойчивости состоит в том, что корни по модулю меньше единицы.*

Есть разные подходы к понятию устойчивости в случае $n > 1$. Так, разностную схему можно рассматривать как операторное уравнение с операторами, действующими в пространстве сеточных функций, и соответствующим образом определить понятие устойчивости (см., например, [22], [2]). В теории Лакса [20] сходимость разностной схемы изучается в пространстве решений исходной дифференциальной задачи и теорема эквивалентности утверждает, что если исходная дифференциальная задача корректна и схема аппроксимирует эту задачу, то устойчивость необходима и достаточна для сходимости.

В монографии [26] устойчивость однородной двухслойной линейной разност-

ной схемы с постоянными коэффициентами исследована методами комплексного анализа. Условие устойчивости здесь дается в терминах, связанных с понятием разностной функции Грина задачи Коши.

Отметим, что в диссертационной работе к исследованию устойчивости явных многослойных линейных разностных схем применяется теория амеб алгебраических гиперповерхностей. Понятие амебы позволяет сформулировать многомерный аналог условия, что все корни характеристического многочлена лежат в единичном круге, т.е. условия устойчивости многомерных разностных схем.

Пионерской работой по теории амеб является статья Форсберга – Пассаре – Циха [34]. После этой работы появилось множество других, связанных как с описанием самих амеб, так и с их применением в теории димеров, в теории расширений неархимедовых полей и др. Недавно Лейнартасом – Пассаре – Цихом [17] теория амеб была применена к исследованию асимптотик многомерных разностных уравнений, играющих важную роль в теории обработки цифровых сигналов, в частности, при исследовании устойчивости двумерных цифровых рекурсивных фильтров (см., например, [5]).

Целью диссертационной работы является отыскание условий разрешимости различных вариантов задачи Коши для полиномиальных разностных операторов и ее устойчивости в случае явных разностных схем.

Основные результаты работы:

1. Дан критерий, а также приведено легко проверяемое достаточное условие разрешимости задачи Коши с начально-краевыми условиями типа Рикье для полиномиального разностного оператора с постоянными коэффициентами.

2. Доказано, что разрешимость задачи Коши эквивалентна существованию некоторого определенного мономиального базиса в факторе кольца полиномов по идеалу, порожденному характеристическим многочленом.

3. Получены формулы, в которых решение задачи Коши для однородных и неоднородных многослойных явных разностных схем выражается через фундаментальное решение и начальные данные.

4. Используя эти формулы, в терминах теории амеб алгебраических гиперповерхностей найдены как необходимые, так и достаточные условия устойчивости однородных многослойных явных разностных схем. Для неоднородной схемы доказан критерий устойчивости.

Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют научный интерес.

Методы исследования. В работе рассматриваются полиномиальные разностные операторы, основным источником появления которых является теория разностных схем. В исследовании корректности разностных операторов используется терминология этой теории, методы линейной алгебры, математического анализа, а также методы теории амеб алгебраических гиперповерхностей.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты представляют теоретический интерес и могут быть применены в теории разностных схем и теории дискретных динамических систем.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на

1) Красноярском городском научном семинаре по комплексному анализу и алгебраической геометрии (СФУ, 2011-2014 гг.);

2) 50-ой международной научной конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2012 г.);

3) Четвертом российско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Красноярск, 2012 г.);

4) 51-ой международной научной конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2013 г.);

5) IX Всероссийской научно-технической конференция студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием «Молодежь и наука» (Красноярск, 2013 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 статьях и 4 тезисах. Все статьи опубликованы в изданиях из перечня, рекомендованного ВАК. Одна статья совместная, ее результаты получены в нераздельном соавторстве с Е.К. Лейнартасом.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав основного текста и списка литературы из 44 наименований. Содержит 4 рисунка. Общее число страниц диссертационной работы — 73.

Первая глава посвящена исследованию корректности полиномиальных разностных операторов некоторого специального вида и состоит из четырех параграфов. Поскольку такого рода разностные операторы характерны для теории схем, то в этой главе используется соответствующая терминология. В первых двух параграфах получены формулы, выражающие решение задачи Коши в однородном и неоднородном случаях через фундаментальное решение и начальные данные. В §3 и §4 эти формулы использованы для доказательства устойчивости задачи Коши.

Пусть δ_j оператор сдвига по j-ой переменной $\delta_j f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Обозначим $P(\delta, \delta_{n+1}) = \sum\limits_{(\alpha,\beta)\in A} c_{\alpha,\beta}\delta^\alpha\delta_{n+1}^\beta$ — полиномиальный разностный оператор, т.е. $A = (\alpha, \beta)$ — конечное подмножество целочисленной решетки, и $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}\ldots\delta_n^{\alpha_n}$. Рассмотрим разностные уравнения с постоянными коэффициентами такие, что $(0, m) \in A$

и для всех $(\alpha, \beta) \in A$, $(\alpha, \beta) \neq (0, m)$ *выполняется условие* $m > \beta$. *(*)*

Отметим, что при выполнении условия (*) разностный оператор можно записать в виде

$$P(\delta, \delta_n) = \delta_{n+1}^m + P_{m-1}(\delta)\,\delta_{n+1}^{m-1} + \cdots + P_0(\delta),$$

где $P_j(\delta)$ — полиномиальные разностные операторы с постоянными коэффициентами и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

В первом и втором параграфах рассматривается задача Коши для $(m+1)$-слойной линейной явной разностной схемы вида: *найти решение уравнения*

$$P(\delta, \delta_n) f(x, y) = g(x, y), \tag{4}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$f\,(x,\,y) = \varphi_y\,(x)\,,\;\; y = 0,\,1,\,\ldots,\,m-1, \tag{5}$$

где $\varphi_y\,(x)$ *— заданные функции переменных* $x = (x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Определение 3. *Решение* $\mathcal{P}(x,y)$ *разностного уравнения*

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in A} c_{\alpha,\beta}\mathcal{P}\,(x+\alpha, y+\beta) = \delta_{(0,0)}(x,y),\; (x,y) \in \mathbb{Z}^{n+1},$$

где

$$\delta_{(0,0)}(x,y) = \begin{cases} 0,\; \text{если}\,(x,y) \neq (0,0)\,, \\ 1,\; \text{если}\,(x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

называется фундаментальным решением.

Определим две функции φ и μ на $\mathbb{Z}^{n+1}$:

$$\varphi(x,\,y) = \begin{cases} \varphi_y(x),\; \text{для } x \in \mathbb{Z}^n \text{ и } y = 0,\,1,\,...,\,m-1, \\ 0,\; \text{для } x \in \mathbb{Z}^n \text{ и } y \geqslant m; \end{cases}$$

$$\mu(x,\,y) = \sum_{(\alpha,\,\beta)\in A} c_{\alpha,\beta}\varphi(x+\alpha,\,y+\beta),\; x \in \mathbb{Z}^n \text{ и } -m \leqslant y < 0.$$

Обозначим через $\Pi = \big\{(x,\,y) \in \mathbb{Z}^{n+1} : y \geqslant 0\big\}$ полупространство в $\mathbb{Z}^{n+1}$.

Теорема 2. *Если* $f(x,\,y)$ *решение неоднородной задачи Коши (4)–(5), то для* $(x,\,y) \in \Pi$ *справедлива формула* $f(x,\,y) = f_0(x,\,y) + f^*(x,\,y)$, *где*

$$f_0(x,\,y) = \sum_{(x',\,y')} \mu(x',\,y')\mathcal{P}(x-x',\,y-y'), \tag{9}$$

причем суммирование проводится по всем точкам $(x',\,y') \in \mathbb{Z}^{n+1}$, *удовлетворяющим условию* $-m \leqslant y' < 0$, *а*

$$f^*(x,\,y) = \sum_{(x',\,y')} g(x',\,y')\mathcal{P}(x-x',\,y-y'), \tag{10}$$

где суммирование проводится по всем точкам $(x',\, y') \in \mathbb{Z}^{n+1}$, *удовлетворяющим условию* $0 \leqslant y' \leqslant m-1$. *При этом для любого фиксированного* $(x,\, y) \in \Pi$ *число слагаемых для* f_0 *и* f^* *конечно.*

Замечание. Отметим, что $f_0(x,\, y)$ — решение однородной задачи (4)–(5), т.е. при $g(x, y) \equiv 0$, а $f^*(x,\, y)$ — частное решение неоднородной задачи (4)–(5) с нулевыми начальными данными.

Третий и четвертый параграфы посвящены исследованию устойчивости разностной схемы с использованием формул, выражающих решение через фундаментальное и методов теории амеб алгебраических гиперповерхностей. В третьем параграфе формулируются и доказываются необходимое и отдельно достаточное условия устойчивости задачи Коши для многослойной линейной однородной разностной схемы. В четвертом параграфе доказывается критерий устойчивости задачи Коши для многослойной линейной неоднородной разностной схемы.

Определение 1. *Многогранником Ньютона* N_P *многочлена* $P\,(z,\, w)$ *называется выпуклая оболочка в* $\mathbb{R}^{n+1}$ *элементов множества* A.

Пусть $V = \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \,:\, P\,(z,\, w) = 0\right\}$ — множество нулей многочлена $P\,(z,\, w)$, оно называется характеристическим множеством.

Определение 2. *Амебой алгебраической гиперповерхности называется образ множества нулей* V *многочлена* $P\,(z,\, w) = \sum\limits_{(\alpha,\,\beta)\in A} c_{\alpha,\beta} z^{\alpha} w^{\beta}$ *при отображении*

$$Log:\ (z, w) = (z_1, ..., z_n, w) \to (log|z_1|, ..., log|z_n|, log|w|) = (Log|z|, log|w|).$$

Отметим следующие нужные нам свойства амебы.

Множество V, а значит и $LogV$, замкнуто, поэтому его дополнение открыто. Оно состоит из конечного числа связных выпуклых компонент, причем всякой компоненте E соответствует точка из $N_P \cap \mathbb{Z}^{n+1}$ — порядок компоненты. Кроме того всякой вершине многогранника $N_P \cap \mathbb{Z}^{n+1}$ соответствует (непустая) компонента дополнения амебы.

Для произвольной функции $\varphi(x,\, y)$, заданной в полупространстве

$\Pi = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{Z}^{n+1} : y \geqslant 0\right\}$ определим ее норму следующим образом

$$\|\varphi\| = \sup_{(x,\, y)\in\Pi} |\varphi(x,\, y)|\,. \tag{11}$$

Определение 6. *Назовем однородную задачу (4)–(5) устойчивой, если существует константа $L > 0$ такая, что при любых ограниченных начальных данных (5) для соответствующего решения f выполняется неравенство*

$$\|f\| \leqslant L\,\|\varphi\|\,.$$

Теорема 3. *Пусть $E_{(0,m)}$ связная компонента дополнения амебы характеристического многочлена $P(z,\, w)$, соответствующая вершине $(0,\, m)$ многогранника Ньютона.*

1. Если однородная задача Коши (4)–(5) устойчива, то начало координат принадлежит замыканию $E_{(0,m)}$, т.е. $(0,\, 0) \in \overline{E}_{(0,m)}$.

2. Если начало координат $(0,\, 0) \in E_{(0,m)}$, то однородная задача Коши (4)–(5) устойчива.

В четвертом параграфе формулируется и доказывается критерий устойчивости задачи Коши для многослойной линейной неоднородной разностной схемы.

Определение 7. *Неоднородную задачу (4)–(5) назовем устойчивой, если существуют константы $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ такие, что при любых ограниченных начальных данных (5) и ограниченной правой части $g(x,\, y)$ для соответствующего решения f выполняется неравенство*

$$\|f\| \leqslant M_1\,\|\varphi\| + M_2\,\|g\|\,.$$

Теорема 4. *Пусть $E_{(0,m)}$ связная компонента дополнения амебы характеристического многочлена $P(z,\, w)$, соответствующая вершине $(0,\, m)$ многогранника Ньютона. Неоднородная задача Коши (4)–(5) устойчива тогда и только тогда, когда начало координат принадлежит $E_{(0,m)}$, т.е. $(0,\, 0) \in E_{(0,m)}$.*

Вторая глава посвящена разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора с начально-краевыми условиями типа Рикье и состоит она из четырех параграфов. Для неявных разностных схем нетривиальным

является вопрос о существовании и единственности решения. В первом и третьем параграфах этот вопрос рассматривается для полиномиального разностного оператора порядка m

$$P(\delta) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \delta^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1} \ldots \delta_n^{\alpha_n}$, c_α — коэффициенты разностного оператора. Разностное уравнение имеет вид

$$P(\delta) f(x) = g(x), \;\; x \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{13}$$

где $f(x)$ — неизвестная, а $g(x)$ — заданная на $\mathbb{Z}_+^n = \mathbb{Z}_+ \times ... \times \mathbb{Z}_+$ функция и $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел.

Для двух точек x, y целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$ неравенство $x \geqslant y$ означает, что $x_i \geqslant y_i$ для $i = 1, ..., n$, а запись $x \ngeqslant y$ означает, что найдется $i_0 \in \{1, ..., n\}$ такое, что $x_{i_0} < y_{i_0}$.

Фиксируем мультииндекс β такой, что

$$|\beta| = m \text{ и } c_\beta \neq 0. \tag{$**$}$$

Обозначим $X_{0,\beta} = \{x \in \mathbb{Z}_+^n : x \ngeqslant \beta\}$ и сформулируем задачу: *найти решение $f(x)$ уравнения (13), которое для $x \in X_{0,\beta}$ совпадает с заданной функцией $\varphi(x)$, т.е. удовлетворяет условию*

$$f(x) = \varphi(x), x \in X_{0,\beta}. \tag{14}$$

Задачу (13)–(14) будем называть задачей Коши для полиномиального разностного оператора $P(\delta)$, а функцию $\varphi(x)$ — начальными данными этой задачи.

Если $\beta \neq (m, ..., 0)$ и $\beta \neq (0, ..., m)$, то условия (14) будем называть условиями типа Рикье.

Следующая теорема дает простое достаточное условие разрешимости задачи (13)–(14).

Теорема 5. *Если для коэффициентов полиномиального разностного оператора*

$P(\delta)$ выполнено условие

$$|c_\beta| > \sum_{|\alpha|=m, \alpha\neq\beta} |c_\alpha|\,, \tag{15}$$

то задача (13)–(14) имеет единственное решение.

Отметим, что условие, аналогичное условию (15) использовалось в [28] для доказательства разрешимости в классе аналитических функций варианта обобщенной задачи Коши для полиномиального дифференциального оператора $P(D)$ с начально-краевыми условиями типа Рикье. Коэффициенты разложения в степенной ряд аналитических решений этой задачи удовлетворяют соотношениям вида (13)–(14).

Система уравнений (13)–(14) представляет собой бесконечную систему уравнений относительно бесконечного числа переменных $f\,(x)$, $x \in \mathbb{Z}_+^n$. Она имеет специфический вид, а именно: в каждое уравнение системы входит только конечное число неизвестных. Такая система совместна, если любая подсистема из конечного числа уравнений совместна (см. [29], лемма 6.3.7). Построим последовательность подсистем системы (13)–(14), которые состоят из конечного числа уравнений и в каждую следующую входят все уравнения предыдущей. Совместность каждой такой подсистемы, в силу упомянутой леммы, будет означать совместность системы (13)–(14).

Возьмем произвольное $p \in \mathbb{Z}_+$. Неизвестные будем «нумеровать» элементами множества $J_p = \{y \in \mathbb{Z}_+^n : |y| \leqslant p\}$ и упорядочим это множество однородно-лексикографическим способом. Уравнения «занумеруем» элементами двух множеств $I_p = \{x \in \mathbb{Z}_+^n : |x| \leqslant p - m\}$ и $I_{\beta,p} = \{\mu \in X_{0,\beta} : |\mu| \leqslant p\}$. Если обозначить $\#M$ – число элементов конечного множества M, то нетрудно видеть, что $\#I_p + \#I_{\beta,p} = \#J_p$. Так как $I_{\beta,p} + \{\beta + I_p\} = J_p$, то элементам множества $I_{\beta,p}$ присвоим те же «номера», с которыми они входят в множество J_p, а элементам x множества I_p — те «номера», с которыми $\beta + x$ входят в J_p.

Рассмотрим систему уравнений относительно конечного числа упорядоченных неизвестных $f(y)$, $y \in J_p$ вида

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha f(x+\alpha) = g(x),\ x \in I_p, \tag{16}$$

$$f(\mu) = \varphi(\mu), \mu \in I_{\beta,p}. \tag{17}$$

Обозначим $\triangle_{\beta,p}$ определитель системы уравнений (16)–(17).

Теорема 6. *Задача (13)–(14) для всех $\varphi(x)$ и $g(x)$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда для всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ определители $\triangle_{\beta,p} \neq 0$.*

Отметим, что из условия (15) на коэффициенты разностного оператора следует, что для всех p определители $\triangle_{\beta,p} \neq 0$.

В случае разрешимости задачи (13)–(14) важную роль играет фундаментальное решение, так как через него и начальные данные можно выразить любое решение (см. [14], [36], [38]).

Формула для решения задачи (13)–(14) здесь отличается от формул (6), (9), (10) главы 1.

Теорема 7. *Если задача (13)–(14) для любых $g(x)$ и $\varphi(x)$ имеет единственное решение $f(x)$, то для любого $x \in \mathbb{Z}_+^n$ его можно записать в виде*

$$f(x) = \sum_{y \geqslant 0,\, y \not\geqslant \beta} \varphi(y) \sum_{\nu \not\leqslant y} c_\nu \mathcal{P}_\beta(x + \nu - y) + \sum_{y \geqslant 0} g(y) \mathcal{P}_\beta(x - y), \tag{18}$$

где $\mathcal{P}_\beta$ — фундаментальное решение задачи (13)–(14). При этом для любого фиксированного $x \in \mathbb{Z}_+^n$ число слагаемых в суммах правой части формулы (18) конечно.

Во втором параграфе главы показано, что условия теоремы 6, обеспечивающие разрешимость задачи (13)–(14), также являются необходимыми и достаточными для существования соответствующего мономиального базиса в факторкольце $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$, где $\langle P(z)\rangle$ — идеал, порожденный характеристическим многочленом $P(z)$ в кольце многочленов $\mathbb{C}[z]$.

Теорема 9. *Набор мономов $\{z^\mu\}_{\mu \in X_{0,\beta}}$ образует базис факторкольца $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$ тогда и только тогда, когда $\triangle_{\beta,p} \neq 0$ для всех $p = 0, 1, 2, \ldots$.*

Таким образом, указанный в теореме набор мономов образует базис пространства «остатков» от деления кольца $\mathbb{C}[z]$ на идеал, порожденный символом оператора.

В третьем параграфе главы для двумерного случая дано другое доказательство теоремы 5, в котором найденные на $(p-1)$-ом шаге значения неизвестных

$f(y_1,\, y_2)$, используются для нахождения неизвестных на p-ом шаге. В частности, вводится понятие ассоциированной матрицы. Это ленточная матрица бесконечного порядка и ее невырожденность является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (13)–(14) (лемма 4). Отметим еще теорему 10, в которой найдено обобщение хорошо известного рекуррентного соотношения для главных миноров трехдиагональной матрицы.

В четвертом параграфе главы исследуется разрешимость многослойных неявных разностных схем в «полосе» целочисленной решетки.

Введем необходимые обозначения и определения.

Зададим «полосу» $\Pi = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{Z}^2,\, 0 \leqslant x \leqslant B,\, y > 0\right\}$ в положительном октанте целочисленной решетки, число $B+1$ будем называть шириной «полосы» Π. Рассмотрим разностный полиномиальный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$P(\delta_1, \delta_2) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{b} c_{i,j} \delta_1^i \delta_2^j = \sum_{j=0}^{m} P_j(\delta_1) \delta_2^j, \tag{36}$$

где $P_j(\delta_1) = \sum\limits_{i=0}^{b} c_{i,j} \delta_1^i$, $j = 0, 1, ..., m$.

Степень m многочлена$P(z,w) = \sum\limits_{j=0}^{m}\sum\limits_{i=0}^{b} c_{i,j} z^i w^j$ по переменной w будем называть порядком разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2)$ и предполагать, что $b < B$.

Зафиксируем β такое, что $c_{\beta,m} \neq 0$ и рассмотрим множество $\Pi_\beta = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_+^2 : 0 \leqslant x - \beta \leqslant B - b, y > m-1\}$. Обозначим $L_\beta = \Pi \setminus \Pi_\beta$ и сформулируем следующую задачу: *найти решение разностного уравнения*

$$P(\delta_1, \delta_2) f(x,y) = g(x,y), (x,y) \in \mathit{\Pi}, \tag{37}$$

удовлетворяющее условию

$$f(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \in L_\beta, \tag{38}$$

где $g(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ — заданные функции целочисленных аргументов.

Теорема 11. *Если для коэффициентов полиномиального разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2)$ выполнено условие*

$$|c_{\beta,m}| > \sum_{\alpha=0,\, \alpha\neq\beta}^{b} |c_{\alpha,m}|\,, \tag{39}$$

то задача (37)–(38) имеет единственное решение.

Идея доказательства теоремы 11 та же, что и теоремы 5, а именно, доказательство опирается на лемму 6.3.7 из [29] и сводит вопрос о разрешимости задачи (37)–(38) к разрешимости подходящим образом сконструированной последовательности подсистем бесконечной системы уравнений (37)–(38).

Зафиксируем целое p такое, что $p \geqslant m$ и будем рассматривать прямоугольник $\Pi^p = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant B, 0 \leqslant y \leqslant p\}$. Неизвестные будем «нумеровать» элементами множества Π^p и упорядочим это множество лексикографически. Уравнения будем «нумеровать» элементами двух множеств $\Pi^p_\beta = \{(x,\, y) : 0 \leqslant x \leqslant B - b, 0 \leqslant y \leqslant p - m\}$ и $L^p_\beta = \Pi^p \setminus \{(\beta,\, m) + \Pi^p_\beta\}$. Так как $L^p_\beta \cup \{(\beta,\, m) + \Pi^p_\beta\} = \Pi^p$, то элементам множества L^p_β присвоим те же «номера», с которыми они входят в множество Π^p, а элементам (x, y) множества Π^p_β — те «номера», с которыми $(\beta, m) + (x, y)$ входят в Π^p.

Получим систему уравнений относительно упорядоченных неизвестных $f(x,\, y)$, $(x,\, y) \in \Pi^p$, вида

$$P(\delta_1, \delta_2) f(x, y) = g(x, y), (x, y) \in \Pi^p_\beta, \tag{40}$$

$$f(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in L^p_\beta. \tag{41}$$

Обозначим $\triangle_{p,\beta}$ определитель системы уравнений (40)–(41). Его порядок равен $N = (B + 1) \cdot (p + 1)$ и состоит он из строк двух видов. В строках, соответствующих уравнениям (41) все элементы, кроме одного (равного 1) равны 0. Строки соответствующие уравнениям (40), состоят из нулей и коэффициентов $c_{i,j}$ разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2)$.

Теорема 12. *Задача (37)–(38) для всех $\varphi\,(x, y)$ и $g\,(x, y)$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда для всех $p \geqslant m$ определители $\triangle_{p,\beta} \neq 0$.*

1 Корректность явных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей

В первом параграфе главы для многослойных однородных явных разностных схем получена формула для решения задачи Коши через ее фундаментальное решение (Теорема 1). В случае двухслойных разностных схем эта формула была получена в монографии [26], а для задачи Коши в положительном октанте $\mathbb{Z}_+^n$ целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$ в [16]. Во втором параграфе главы аналогичная формула получена для многослойных неоднородных разностных схем (теорема 2). В третьем и четвертом параграфах эти формулы используются для доказательства устойчивости явных разностных схем. Условия устойчивости формулируются в терминах теории амеб алгебраических гиперповерхностей. В случае однородной схемы приведены (теорема 3) необходимое и (отдельно) достаточное условия, а для неоднородной схемы дан (теорема 4) критерий устойчивости.

Поскольку разрешимость задачи Коши для многослойных явных разностных схем очевидна, то теоремы 3 и теоремы 4 фактически говорят о том, что задача Коши для многослойных явных разностных схем корректна.

Введем необходимые обозначения и определения. Пусть δ_j оператор сдвига по j-ой переменной $\delta_j f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Обозначим $P(\delta, \delta_{n+1}) = \sum\limits_{(\alpha,\beta)\in A} c_{\alpha,\beta}\delta^\alpha\delta_{n+1}^\beta$ — полиномиальный разностный оператор, т.е. $A = (\alpha, \beta)$ — конечное подмножество целочисленной решетки , и $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}\ldots\delta_n^{\alpha_n}$. Рассмотрим разностные уравнения с постоянными коэффициентами, символ которых имеет специальный вид. А именно, если записать характеристический многочлен $P(z, w)$ как многочлен по переменной w, коэффициенты которого $P_j(z)$ являются многочленами переменных $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, то он имеет вид

$$P(z, w) = P_m(z)\, w^m + p_{m-1}(z)w^{m-1} + \ldots + P_0(z)\,,$$

где $P_j(z)$ являются многочленами переменных $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и коэффициент при старшей по w степени $P_m \equiv 1$. Это означает, что $(0, m) \in A$

и для всех $(\alpha, \beta) \in A$, $(\alpha, \beta) \neq (0, m)$ *выполняется условие* $m > \beta$. *(*)*

Нам потребуются некоторые сведения из теории амеб алгебраических гиперповерхностей (см. [34]).

Определение 1. *Многогранником Ньютона N_P многочлена $P(z,\, w)$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^{n+1}$ элементов множества A.*

Пусть $V = \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \,:\, P(z,\, w) = 0\right\}$ — множество нулей многочлена $P(z,\, w)$, оно называется характеристическим множеством.

Определение 2. *Амебой алгебраической гиперповерхности называется образ множества нулей V многочлена $P(z,\, w) = \sum\limits_{(\alpha,\,\beta)\in A} c_{\alpha,\beta} z^{\alpha} w^{\beta}$ при отображении*

$$Log:\ (z, w) = (z_1, ..., z_n, w) \to (log|z_1|, ..., log|z_n|, log|w|) = (Log|z|, log|w|).$$

Применение термина «амеба» объясняется тем, что для $n = 2$ изображение множества $LogV$ в общем случае действительно напоминает амебу.

Отметим следующие свойства амебы.

Множество V, а значит и $LogV$, замкнуто, поэтому его дополнение открыто. Оно состоит из конечного числа связных выпуклых компонент. Всякой связной компоненте дополнения $\mathbb{R}^{n+1} \setminus LogV$ соответствует точка $\nu \in N_p \cap \mathbb{Z}^n$, обратное, вообще говоря, неверно, однако всякой вершине многогранника Ньютона N_P соответствует связная компонента дополнения амебы, в которой рациональная функция $\frac{1}{P(z,w)}$ разлагается в ряд Лорана. В частности, при выполнении условия (*), точка $(0,\, m)$ является вершиной и это разложение можно получить следующим образом:

$$\frac{1}{P(z,w)} = \frac{1}{w^m + \sum\limits_{(\alpha,\beta)\in A'} c_{\alpha,\beta} z^{\alpha} w^{\beta}} = \frac{1}{w^m(1 - \sum\limits_{(\alpha,\beta)\in A'} (-c_{\alpha,\beta}) z^{\alpha} w^{\beta-m})} =$$

$$= \frac{1}{w^m} \sum_{k=0}^{\infty} \left((-c_{\alpha,\beta}) z^{\alpha} w^{\beta-m}\right)^k = \sum_{(x,y)\in(0,m)+K_{0,m}\cap\mathbb{Z}^{n+1}} \frac{\mathcal{P}(x,y)}{z^x w^{y+1}},$$

где $A' = A \setminus \{0, m\}$, $(x, y) \in (0, m) + K_{0,m} \cap \mathbb{Z}^{n+1}$, а $K_{0,m}$ — конус, построенный на векторах $(0, m) - (\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) \in A$.

Непосредственно проверяется, что $\mathcal{P}(x,y)$ — фундаментальное решение.

Определение 3. *Решение $\mathcal{P}(x,y)$ разностного уравнения*

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in A} c_{\alpha,\beta}\mathcal{P}(x+\alpha,y+\beta)=\delta_{(0,0)}(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{Z}^{n+1},$$

где

$$\delta_{(0,0)}(x,y)=\begin{cases}0,\ \text{если}\,(x,y)\neq(0,0)\,,\\ 1,\ \text{если}\,(x,y)=(0,0)\,,\end{cases}$$

называется фундаментальным решением.

Конус рецессии выпуклого множества E — это наибольший конус, который можно поместить в E некоторым сдвигом.

Для $v\in\mathbb{Z}^{n+1}\bigcap N_P$ двойственным конусом называется множество $C_v^V=\left\{s\in\mathbb{R}^{n+1}:\langle s,v\rangle=max_{\alpha\in N_p}\langle s,\alpha\rangle\right\}$.

Двойственный конус к вершине N_P есть конус рецессии для соответствующей выпуклой компоненты дополнения амебы.

1.1 Однородные многослойные явные линейные разностные схемы

Рассмотрим задачу Коши для полиномиального разностного оператора

$$P(\delta,\delta_n)=\delta_{n+1}^m+P_{m-1}\left(\delta\right)\delta_{n+1}^{m-1}+\cdots+P_0\left(\delta\right),$$

где $P_j\left(\delta\right)$ — полиномиальные разностные операторы с постоянными коэффициентами и $x=(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)\in\mathbb{Z}^n$.

Задача Коши формулируется следующим образом:

найти решение уравнения (4)

$$P(\delta,\delta_n)f(x,y)=0, \tag{4}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$f\,(x,\,y) = \varphi_y\,(x)\,,\;\; y = 0,\,1,\,\ldots,\,m-1, \tag{5}$$

где $\varphi_y\,(x)$ *— заданные функции переменных* $x = (x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Следующее предложение носит вспомогательный характер и понадобиться для доказательства основной в этом параграфе теоремы 1.

Предложение 1. *Если вершина* $(0,\,m) \in N_P$ *удовлетворяет условию* $m > \beta$ *для любой точки* $(\alpha,\,\beta) \in N_P$, $(\alpha,\,\beta) \neq (0,\,m)$, *то для любого фиксированного* $y > m$ *число значений фундаментального решения* $\mathcal{P}(x,\,y)$ *не равных нулю конечно.*

Доказательству предложения предпошлем лемму.

Лемма 1. *Пусть* K *— конус в* $\mathbb{R}^{n+1}_{x,y}$ *порожденный векторами* $a^j = \left(a^j_1,\,...,\,a^j_n,\,a^j_{n+1}\right)$, $j = 1,\,2,\,...,\,m$

$$K = \left\{(x,\,y) \in \mathbb{R}^{n+1} :\, (x,\,y) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a^j,\; \lambda_j \geqslant 0\right\}.$$

Если $a^j_{n+1} > 0$ *для* $j = 1,\,...,\,m$, *то пересечение конуса* K *с гиперплоскостью* $y = const$ *является ограниченным множеством.*

Доказательство. Всякая точка $(x,\,y) \in K$ представляется в виде $(x,\,y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j a^j$, где $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1,\,...,\,m$. Точка $(x,\,y) \in K \cap \{y = const\}$, следовательно, определяется из уравнения

$$a^1_{n+1}\lambda_1 + ... + a^m_{n+1}\lambda_m = const,$$

в котором коэффициенты $a^j_{n+1} > 0$, $j = 1,\,2,\,...,\,m$. Множество Λ решений $\lambda = (\lambda_1,\,...,\,\lambda_m)$ такого уравнения – ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$, а конус K можно рассматривать как образ Λ при линейном преобразовании, матрица которого составлена из координат векторов a^j.

$\square$

Доказательство предложения 1. Разложим в ряд Лорана рациональную функцию $\frac{1}{P(z,w)}$ в вершине $(0,\, m)$ многогранника Ньютона:

$$\frac{1}{P(z,\, w)} = \sum_{(x,\, y)\in(0,\, m)+K_{0,m}\cap\mathbb{Z}^{n+1}} \frac{\mathcal{P}(x,\, y)}{z^x w^{y+1}},$$

где $A' = A\setminus\{0,\, m\}$, $(x,\, y) \in (0,\, m) + K_{0,m} \cap \mathbb{Z}^{n+1}$, а $K_{0,m}$ — конус, построенный на векторах $(0,\, m) - (\alpha,\, \beta)$, $(\alpha,\, \beta) \in A$. По условию предложения $m - \beta > 0$ для всех $(\alpha,\, \beta) \in N_P$, $(\alpha,\, \beta) \neq (0,\, m)$. Согласно лемме 1, для фиксированного y это означает, что число значений фундаментального решения $\mathcal{P}(x,\, y)$ не равных нулю конечно.

□

Определим две функции на $(n+1)$-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^{n+1}$:

$$\varphi(x,\, y) = \begin{cases} \varphi_y(x), \text{ для } x \in \mathbb{Z}^n \text{и } y = 0,\, 1,\, ...,\, m-1, \\ 0, \text{ для } x \in \mathbb{Z}^n \text{и } y \geqslant m; \end{cases}$$

$$\mu(x,\, y) = \sum_{(\alpha,\, \beta)\in A} c_{\alpha,\beta}\varphi(x+\alpha,\, y+\beta),\ x \in \mathbb{Z}^n \text{и} - m \leqslant y < 0.$$

Обозначим через $\Pi = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{Z}^{n+1} : y \geqslant 0\right\}$ полупространство в $\mathbb{Z}^{n+1}$.

Теорема 1. *Если $f(x,\, y)$ решение задачи Коши (4)–(5), то для $(x,\, y) \in \Pi$ справедлива формула*

$$f(x,y) = \sum_{(x',y')} \mu(x',\, y')\mathcal{P}(x-x',\, y-y'), \tag{6}$$

где суммирование проводится по всем точкам $(x',\, y') \in \mathbb{Z}^{n+1}$, удовлетворяющим условию $-m \leqslant y' < 0$. При этом для любого фиксированного $(x,\, y) \in \Pi$ число слагаемых в правой части формулы (6) конечно.

Доказательство. Докажем, что формула (6) дает решение уравнения (4). Действительно, с учетом определения фундаментального решения получим для любых $(x,\, y) \in \Pi$, что

$$P(\delta,\, \delta_{n+1})f = \sum_{(x',\, y')} \mu(x',\, y')P(\delta,\, \delta_{n+1})\mathcal{P}(x-x',\, y-y') =$$

$$= \sum_{(x',\, y')} \mu(x',\, y')\delta_{(0,\,0)}(x-x',\, y-y') = 0,$$

так как $y - y' > 0$ для всех $y \geqslant 0$.

Проверим выполнение условия (5). Пусть $0 \leqslant y \leqslant m-1$. Согласно определению $\mu(x,\, y)$, имеем

$$f(x,\, y) = \sum_{(x',\, y')} \left(\sum_{(\alpha,\, \beta)\in A} c_{\alpha,\beta}\varphi(x'+\alpha,\, y'+\beta) \right) \mathcal{P}(x-x', y-y').$$

Суммирование здесь ведется по всем $(x',\, y')$ таким, что $-m \leqslant y' \leqslant -1$, при этом во внутренней сумме суммируем по тем $(\alpha,\, \beta)$, для которых $-y' \leqslant \beta \leqslant m$. Это следует из определения $\varphi\,(x,\, y)$.

Поменяем порядок суммирования

$$f\,(x,\, y) = \sum_{(\alpha,\, \beta)\in A} c_{\alpha,\beta} \sum_{(x',\, y')} \varphi(x'+\alpha,\, y'+\beta)\mathcal{P}(x+\alpha-(x'+\alpha),\, y+\beta-(y'+\beta)),$$

и после замены индексов суммирования $x'' = x'+\alpha$, $y'' = y'+\beta$ и приведения во внутренней сумме подобных при $\varphi(x'',\, y'')$, получим

$$f(x,\, y) = \sum_{(\alpha,\, \beta)} c_{\alpha,\beta} \sum_{(x'',\, y'')} \varphi(x'',\, y'')\mathcal{P}(x+\alpha-x'',\, y+\beta-y'') =$$

$$= \sum_{(x'',\, y'')} \varphi(x'',\, y'') \sum_{(\alpha,\, \beta)\in A:\, y''+1\leqslant\beta\leqslant m} c_{\alpha,\beta}\mathcal{P}(x-x''+\alpha,\, y-y''+\beta),$$

где суммируем по $(x'',\, y'')$ таким, что $0 \leqslant y'' \leqslant m-1$ и по $(\alpha,\, \beta)$ таким, что $y''+1 \leqslant \beta \leqslant m$.

Для $0 \leqslant \beta \leqslant y''$ в силу условия $0 \leqslant y \leqslant m-1$ по определению 4 имеем $\mathcal{P}\,(x-x''+\alpha,\, y-y''+\beta) = 0$.

Тогда

$$f\,(x,\,y) = \sum_{(x'',\,y''):0\leqslant y''\leqslant m-1} \varphi(x'',\,y'') \sum_{(\alpha,\,\beta)\in A:0\leqslant\beta\leqslant m} c_{\alpha,\beta}\mathcal{P}(x-x''+\alpha,\,y-y''+\beta) =$$

$$= \sum_{(x'',\,y'')} \varphi(x'',\,y'')P(\delta,\,\delta_{n+1})\mathcal{P}(x-x'',\,y-y'') =$$

$$= \sum_{(x'',\,y'')} \varphi(x'',\,y'')\delta_{(0,\,0)}(x-x'',\,y-y'') = \varphi(x,\,y).$$

□

Отметим, что для двухслойной разностной схемы $P(z,w) = \sum\limits_{(\alpha,\beta):\,\beta\leqslant 1} c_{\alpha,\beta}z^{\alpha}w^{\beta}$ формула (6) примет вид $f(x,y) = \sum\limits_{(x',y')} \varphi(x',\,y')\mathcal{P}(x-x',\,y-y')$.

1.2 Неоднородные многослойные явные линейные разностные схемы

В данном параграфе для многослойных неоднородных явных разностных схем получена формула для решения задачи Коши через ее фундаментальное решение (Теорема 2).

Сформулируем задачу Коши для неоднородного разностного оператора вида

$$P(\delta,\delta_n) = \delta_{n+1}^m + \sum_{k=1}^{m} P_j\,(\delta)\,\delta_{n+1}^{m-k},$$

где $P_j\,(\delta)$ — полиномиальные разностные операторы с постоянными коэффициентами, $g(x,\,y)$ — заданная функция и $x = (x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Найти решение уравнения

$$P(\delta,\delta_n)f(x,y) = g(x,y), \tag{7}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$f(x,\,y) = \varphi_y(x),\;\; y = 0,1,...,m-1, \tag{8}$$

где $\varphi_y(x)$ — заданные функции переменного $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Определим на $(n+1)$-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^{n+1}$ две функции:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi_y(x), \text{ для } x \in \mathbb{Z}^n \text{ и } y = 0, 1, ..., m-1, \\ 0, \text{ для } x \in \mathbb{Z}^n \text{ и } y \geqslant m; \end{cases}$$

$$\mu(x,y) = \sum_{(\alpha,\beta)\in A} c_{\alpha,\beta}\varphi(x+\alpha, y+\beta),\ x \in \mathbb{Z}^n \text{ и } -m \leqslant y < 0.$$

Обозначим через $\Pi = \big\{(x,y) \in \mathbb{Z}^{n+1} : y \geqslant 0\big\}$ «полупространство» $\mathbb{Z}^{n+1}$. Приведем формулу для решения задачи (7)–(8), в которой искомое решение выражается через входные данные и фундаментальное решение.

Теорема 2. *Если $f(x,\, y)$ решение задачи Коши (7)–(8), то для $(x,\, y) \in \Pi$ справедлива формула $f(x,\, y) = f_0(x,\, y) + f^*(x,\, y)$, где*

$$f_0(x,\, y) = \sum_{(x',\, y')} \mu(x',\, y')\mathcal{P}(x-x',\, y-y'), \tag{9}$$

причем суммирование проводится по всем точкам $(x',\, y') \in \mathbb{Z}^{n+1}$, удовлетворяющим условию $-m \leqslant y' < 0$, а

$$f^*(x,\, y) = \sum_{(x',\, y')} g(x',\, y')\mathcal{P}(x-x',\, y-y'), \tag{10}$$

где суммирование проводится по всем точкам $(x',\, y') \in \mathbb{Z}^{n+1}$, удовлетворяющим условию $0 \leqslant y' \leqslant m-1$. При этом для любого фиксированного $(x,\, y) \in \Pi$ число слагаемых в правых частях формул для f_0 и f^* конечно.

Замечание 1. Отметим, что $f_0(x,\, y)$ — решение однородной задачи Коши (7)–(8), $f^*(x,\, y)$ — частное решение неоднородной задачи с нулевыми начальными данными.

В случае двухслойных разностных схем эта формула была получена в монографии [26], а для задачи Коши в положительном октанте $\mathbb{Z}_+^{n+1}$ целочисленной решетки в [15], для многослойных однородных разностных схем в [36].

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся леммой 1.

Доказательство теоремы 2. Покажем, что число слагаемых в правой части формул (9), (10) конечно. Из ограничения (*) на характеристический многочлен $P(z,\, w)$ следует, что $m-\beta>0$ для всех $(\alpha,\, \beta)\in A$, $(\alpha,\, \beta)\neq(0,\, m)$. Ниже будет показано, что носитель фундаментального решения $\mathcal{P}(x,\, y)$ (т.е. множество $supp\mathcal{P}(x,\, y)=\{(x,\, y):\mathcal{P}(x,\, y)\neq 0)\}$) лежит в конусе K порожденном векторами $(0,\, m)-(\alpha,\, \beta)$. Согласно лемме 1, для фиксированного y это означает, что число значений $\mathcal{P}(x,\, y)$ не равных нулю конечно.

Докажем, что формулы (9), (10) дают решение уравнения (7). Действительно,

$$P(\delta,\, \delta_{n+1})f=P(\delta,\, \delta_{n+1})f_0(x,\, y)+P(\delta,\, \delta_{n+1})f^*(x,\, y).$$

При $y\geqslant 0$ с учетом определения фундаментального решения для любых $(x,\, y)\in\Pi$, имеем $y-y'>0$, то есть $\sum\limits_{(x',\, y')}\mu(x',\, y')\delta_{(0,\, 0)}(x-x',\, y-y')=0$, тогда

$$P(\delta,\, \delta_{n+1})f=\sum_{(x',\, y'):-m\leqslant y'<0}\mu(x',\, y')\delta_{(0,\, 0)}(x-x',\, y-y')+$$

$$+\sum_{(x',\, y'):y'\geqslant 0}g(x',\, y')\delta_{(0,\, 0)}(x-x',\, y-y')=g(x,\, y).$$

Проверим выполнение условия (8). Пусть $0\leqslant y\leqslant m-1$. Так как суммирование здесь ведется по всем $(x',\, y')$ таким, что $-m\leqslant y'\leqslant -1$, то $f^*(x,\, y)=0$. Имеем

$$f(x,\, y)=f_0(x,\, y)=\sum_{(x',\, y')}\left(\sum_{(\alpha,\, \beta)\in A}c_{\alpha,\beta}\varphi(x'+\alpha,\, y'+\beta)\right)\mathcal{P}(x-x',\, y-y').$$

Во внутренней сумме суммируем по тем $(\alpha,\, \beta)$, для которых $-y'\leqslant\beta\leqslant m$, для остальных $(\alpha,\, \beta)$ $\varphi(x'+\alpha,\, y'+\beta)=0$. Поменяем порядок суммирования

$$f\,(x,\, y)=\sum_{(\alpha,\, \beta)\in A}c_{\alpha,\beta}\sum_{(x',y')}\varphi(x'+\alpha,\, y'+\beta)\mathcal{P}(x+\alpha-(x'+\alpha),\, y+\beta-(y'+\beta))$$

и после замены индексов суммирования $x''=x'+\alpha$, $y''=y'+\beta$ и приведения

во внутренней сумме подобных при $\varphi(x'',\, y'')$, получим

$$f(x,\, y) = \sum_{(\alpha,\,\beta)} c_{\alpha,\beta} \sum_{(x'',\,y'')} \varphi(x'',\, y'')\mathcal{P}(x+\alpha-x'',\, y+\beta-y'') =$$

$$= \sum_{(x'',\,y'')} \varphi(x'',\, y'') \sum_{(\alpha,\,\beta)\in A:y''+1\leqslant\beta\leqslant m} c_{\alpha,\beta}\mathcal{P}(x-x''+\alpha,\, y-y''+\beta).$$

Здесь уже суммируем по $(x'',\, y'')$ таким, что $0 \leqslant y'' \leqslant m-1$ и по $(\alpha,\, \beta)$ таким, что $y''+1 \leqslant \beta \leqslant m$, поэтому для $0 \leqslant \beta \leqslant y'$ в силу неравенств $0 \leqslant y \leqslant m-1$ по определению фундаментального решения имеем $\mathcal{P}\left(x-x''+\alpha,\, y-y''+\beta\right) = 0$.

Тогда

$$f\left(x,\, y\right) = \sum_{(x'',\,y''):0\leqslant y''\leqslant m-1} \varphi(x'',\, y'') \sum_{(\alpha,\,\beta)\in A:0\leqslant\beta\leqslant m} c_{\alpha,\beta}\mathcal{P}(x-x''+\alpha,\, y-y''+\beta) =$$

$$= \sum_{(x'',\,y'')} \varphi(x'',\, y'')P(\delta,\, \delta_{n+1})\mathcal{P}(x-x'',\, y-y'') =$$

$$= \sum_{(x'',\,y'')} \varphi(x'',\, y'')\delta_{(0,\,0)}(x-x'',\, y-y'') = \varphi(x,\, y).$$

$\square$

1.3 Устойчивость явных многослойных однородных линейных разностных схем

Данный параграф посвящен исследованию устойчивости однородной разностной схемы с использованием формул, выражающих решение через фундаментальное и методов теории амеб алгебраических гиперповерхностей. Здесь формулируются и доказываются необходимое и отдельно достаточное условия устойчивости задачи Коши для многослойной линейной однородной разностной схемы.

Для произвольной функции $\varphi(x,\, y)$, заданной в «полупространстве»

$\Pi = \{(x,\, y) \in \mathbb{Z}^{n+1} : y \geqslant 0\}$ определим ее норму следующим образом

$$\|\varphi\| = \sup_{(x,\, y)\in\Pi} |\varphi(x,\, y)|\,. \tag{11}$$

Определение 4. *Назовем задачу (4)–(5) устойчивой, если существует константа $L > 0$ такая, что при любых ограниченных начальных данных (5) для соответствующего решения f выполняется неравенство*

$$\|f\| \leqslant L\,\|\varphi\|\,.$$

Теорема 3. *Пусть $E_{(0,m)}$ связная компонента дополнения амебы характеристического многочлена $P(z,\, w)$, соответствующая вершине $(0,\, m)$ многогранника Ньютона.*

1. Если задача Коши (4)–(5) устойчива, то начало координат принадлежит замыканию $E_{(0,m)}$, т.е. $(0,\, 0) \in \overline{E}_{(0,m)}$.

2. Если начало координат $(0,\, 0) \in E_{(0,m)}$, то задача Коши (4)–(5) устойчива.

Доказательство.

1. Предположим, что $(0,\, 0) \notin \overline{E}_{(0,m)}$. Так как луч $(0,\, log\,|w|)$ лежит в конусе рецессии $C_{(0,m)}$, то найдется $\upsilon > 0$ такое, что точка $(0,\, \upsilon) \notin \overline{E}_{(0,m)}$ и $(0,\, \upsilon) \in LogV$.

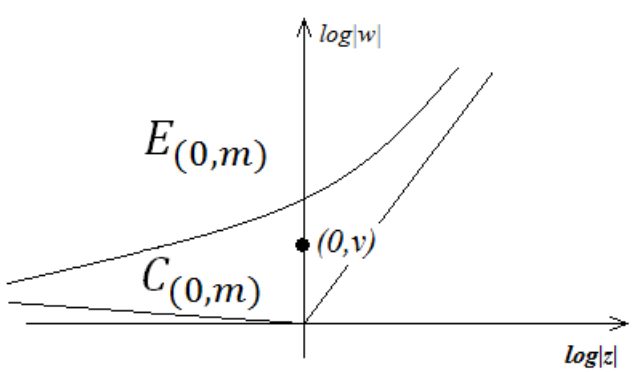

Рис. 1

Так как $(0,\, \upsilon) \in LogV$, то найдется точка $(z_0,\, w_0) \in \mathbb{C}^{n+1} : log|z_0| = 0$, $log|w_0| = \upsilon$ такая, что $f(x,\, y) = z_0^x w_0^y$ — решение, при этом $f(x,\, 0) = z_0^x$, а $f\,(x,\, m-1) = z_0^x w_0^{m-1}$.

Но $|z_0^x| = 1^x \equiv 1$, то есть начальные данные ограничены, а решение $f\,(x,\,y) = z_0^x w_0^y$ неограничено, так как, например, при $x = 0$ для соответствующего решения $|f(0,\,y)| = |w_0|^y = e^{vy} \to \infty$ при $y \to +\infty$.

2. Пусть $\varphi(x,\,y)$ — начальные данные и $\|\varphi\| < +\infty$. Согласно теореме 1 соответствующее решение задачи Коши (4)–(5) можно записать в виде

$$f(x,\,y) = \sum_{(x',\,y')} \mu(x',\,y')\mathcal{P}(x - x',\,y - y'),$$

где $\mu(x',\,y') = \sum\limits_{(\alpha,\,\beta)\in A} c_{\alpha,\beta}\varphi(x' + \alpha,\,y' + \beta)$.

Оценим функцию $f(x,\,y)$:

$$|f(x,\,y)| \leqslant \sum_{(x',\,y')} \sum_{(\alpha,\,\beta)\in A} |c_{\alpha,\beta}|\,|\varphi(x' + \alpha,\,y' + \beta)|\,|\mathcal{P}(x - x',\,y - y')|\,.$$

С учетом равенства (11), получим

$$|f(x,\,y)| \leqslant \|\varphi\| \sum_{(x',\,y')} \sum_{(\alpha,\,\beta)\in A} |c_{\alpha,\beta}|\,|\mathcal{P}(x - x',\,y - y')| \leqslant$$

$$\leqslant L_1\,\|\varphi\| \sum_{(x',\,y')} |\mathcal{P}(x - x',\,y - y')|\,,$$

где $L_1 = \sum\limits_{(\alpha,\,\beta)\in A} |c_{\alpha,\beta}|$.

Так как точка $(0,\,0) \in E_{(0,m)}$, то ряд $\sum\limits_{(x,\,y)\in\Pi} \frac{\mathcal{P}(x,\,y)}{z^x w^y}$ сходится, причем абсолютно в точке $z = 1$, $w = 1$, т.е. $\sum\limits_{(x,\,y)\in\Pi} |\mathcal{P}(x,\,y)| \leqslant L_2$, где L_2 — некоторая константа.

Получаем

$$|f(x,\,y)| \leqslant L_1 L_2\,\|\varphi\| = L\,\|\varphi\|\,,$$

и по определению 6 это означает, что задача Коши (4)–(5) устойчива.

□

Приведем пример показывающий, что необходимое условие теоремы 3 не

является достаточным. Рассмотрим разностное уравнение вида

$$\left(\delta_2^2 - \delta_2 - \delta_1\delta_2 + \delta_1\right) f\,(x,\, y) = 0 \tag{12}$$

с начальными данными $f\,(x,\, 0) \equiv 0,\ f\,(x,\, 1) \equiv 1$.

Убедимся, что в данном случае $(0,0) \in \partial E_{(0,2)} \subset \overline{E}_{(0,2)}$.

Решением этой задачи является функция $f(x,\, y) \equiv y$, которая очевидным образом неограничена, следовательно, задача Коши неустойчива.

Характеристический многочлен $P\,(z,\, w) = w^2 - w - zw + z$ разностного уравнения (12) имеет многогранник Ньютона, изображенный на рис. 2, а амеба представляет собой объединение двух прямых $log\,|w| = 0$ и $log\,|z| = log\,|w|$(см. рис. 3).

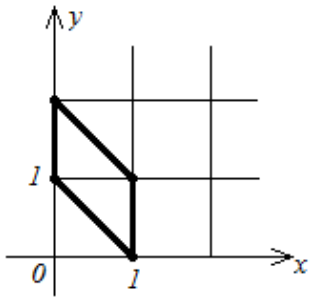

Рис. 2

Целым точкам $(0,2)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$ многогранника Ньютона соответствуют компоненты дополнения $E_{(0,2)}$, $E_{(1,1)}$, $E_{(1,0)}$, $E_{(0,1)}$ (см. рис. 3).

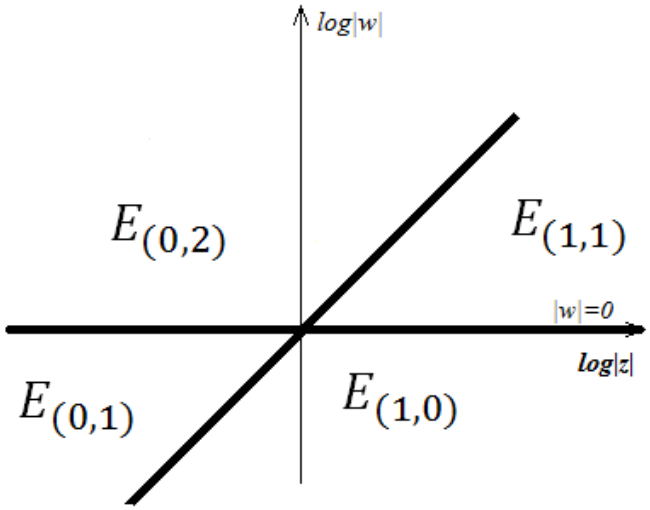

Рис. 3

1.4 Критерий устойчивости многослойных явных линейных неоднородных разностных схем

В данном параграфе, посвященном исследованию устойчивости неоднородной разностной схемы с использованием формул, выражающих решение через фундаментальное и методов теории амеб алгебраических гиперповерхностей, доказывается критерий устойчивости задачи Коши для многослойной линейной неоднородной разностной схемы.

Определение 5. *Неоднородную задачу (7)–(8) назовем устойчивой, если существуют константы $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ такие, что при любых ограниченных начальных данных (8) и ограниченной правой части $g(x,\, y)$ для соответствующего решения f выполняется неравенство*

$$\|f\| \leqslant M_1 \|\varphi\| + M_2 \|g\| .$$

Теорема 4. *Пусть $E_{(0,m)}$ связная компонента дополнения амебы характеристического многочлена $P(z,\, w)$, соответствующая вершине $(0,\, m)$ многогранника Ньютона. Задача Коши (7)–(8) устойчива тогда и только тогда, когда начало координат принадлежит $E_{(0,m)}$, т.е. $(0,\, 0) \in E_{(0,m)}$.*

Доказательство. Пусть задача (7)–(8) устойчива, докажем, что начало координат принадлежит $E_{(0,m)}$.

Для произвольной фиксированной точки $(x1,\, y1) \in \Pi$ найдем решение задачи (7)–(8) для начальных данных $\varphi(x,\, y) \equiv 0$ и правой части $g(x,\, y)$, построенной , следующим образом:

$$g_{(x_1,\, y_1)}(x,\, y) = \begin{cases} \frac{\overline{\mathcal{P}_m(x_1-x,\, y_1-y)}}{|\mathcal{P}_m(x_1-x,\, y_1-y)|}, & \mathcal{P}_m(x_1-x,\, y_1-y) \neq 0, \\ 0, & \mathcal{P}_m(x_1-x,\, y_1-y) = 0. \end{cases}$$

Согласно теореме 2, для решения $f_{(x_1,\, y_1)}(x,\, y)$ задачи (7)–(8) с этими входными данными $\varphi \equiv 0$, $g = g_{(x_1,\, y_1)}$ имеем

$$f_{(x_1,\, y_1)}(x,\, y) = \sum_{(x',\, y') \in \Pi} g_{(x_1,\, y_1)}(x',\, y') \mathcal{P}_m(x-x',\, y-y').$$

При $(x,\, y) = (x_1,\, y_1)$ получим, что

$$f_{(x_1,\, y_1)}(x,\, y) = \sum_{(x',\, y')\in\Pi} \frac{\overline{\mathcal{P}_m(x_1 - x',\, y_1 - y')}}{|\mathcal{P}_m(x_1 - x',\, y_1 - y')|}\mathcal{P}_m(x_1 - x',\, y_1 - y') =$$

$$= \sum_{(x',\, y')\in\Pi} |\mathcal{P}_m(x_1 - x',\, y_1 - y')| = \sum_{(x'',\, y'')} |\mathcal{P}_m(x'',\, y'')|$$

Так как$\|\varphi\| = 0$ и $\left\|g_{(x_1,\, y_1)}\right\| \leqslant 1$, то в силу устойчивости задачи (7)–(8) получим

$$\left|f_{(x_1,\, y_1)}(x_1,\, y_1)\right| = \sum_{(x'',\, y'')} |\mathcal{P}_m(x'',\, y'')| \leqslant K$$

для некоторого $K > 0$ и произвольной точке $(x_1,\, y_1) \in \Pi$. То есть ряд $\sum \frac{|\mathcal{P}_m(x,\, y)|}{z^x w^{y+1}}$ сходится при $z = I$, $w = 1$, а значит точка $(0,\, 0) \in E_{(0,m)}$.

Пусть начало координат $(0,\, 0) \in E_{(0,m)}$, докажем, что задача Коши (7)–(8) устойчива.

Пусть $\varphi(x,\, y)$ — начальные данные и $\|\varphi\| < +\infty$. Согласно теореме 2 соответствующее решение разностного уравнения можно записать в виде

$$f(x,\, y) = \sum_{(x',\, y')} \mu(x',\, y')\mathcal{P}(x - x',\, y - y') + \sum_{(x',\, y')} g(x',\, y')\mathcal{P}(x - x',\, y - y'),$$

где

$$\mu(x,\, y) = \sum_{(\alpha,\, \beta)\in A} c_{\alpha,\beta}\varphi(x + \alpha,\, y + \beta),\ x \in \mathbb{Z}^n \text{ и } -m \leqslant y < 0$$

Оценим функцию $f(x,\, y)$:

$$|f(x,\, y)| \leqslant \sum_{(x',\, y')} \sum_{(\alpha,\, \beta)\in A} |c_{\alpha,\beta}|\, |\varphi(x' + \alpha,\, y' + \beta)|\, |\mathcal{P}(x - x',\, y - y')| +$$

$$+ \sum_{(x',\, y')} |g(x',\, y')|\, |\mathcal{P}(x - x',\, y - y')| \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\| \sum_{(x',\,y')} \sum_{(\alpha,\,\beta)\in A} |c_{\alpha,\beta}|\,|\mathcal{P}(x-x',\,y-y')| + \|g\| \sum_{(x',\,y')} |\mathcal{P}(x-x',\,y-y')| \leqslant$$

$$\leqslant L_1\,\|\varphi\| \sum_{(x',\,y')} |\mathcal{P}(x-x',\,y-y')| + \|g\| \sum_{(x',\,y')} |\mathcal{P}(x-x',\,y-y')|,$$

где $L_1 = \sum\limits_{(\alpha,\,\beta)\in A} |c_{\alpha,\beta}|$.

Так как точка $(0,\,0) \in E_{0m}$, то ряд $\sum\limits_{(x,\,y)\in\Pi} \frac{\mathcal{P}(x,\,y)}{z^x w^y}$ сходится, причем абсолютно в точке $z = I$, $w = 1$, т.е. $\sum\limits_{(x,\,y)\in\Pi} |\mathcal{P}(x,\,y)| \leqslant L_2$, где L_2 — некоторая константа.

Получаем

$$|f(x,\,y)| \leqslant L_1 L_2\,\|\varphi\| + L_2\,\|g\| = M_1\,\|\varphi\| + M_2\,\|g\|\,.$$

По определению это означает, что задача Коши (7)–(8) устойчива.

□

В качестве примера, иллюстрирующего теорему 4, рассмотрим задачу (7)–(8) для разностного оператора $P(\delta_1,\,\delta_2) = \delta_2 - \frac{1}{4}\delta_1 - \frac{1}{3}$.

Амеба его характеристического многочлена $P(z, w) = w - \frac{1}{4}z - \frac{1}{3}$ представляет собой заштрихованное на рис. 4 множество.

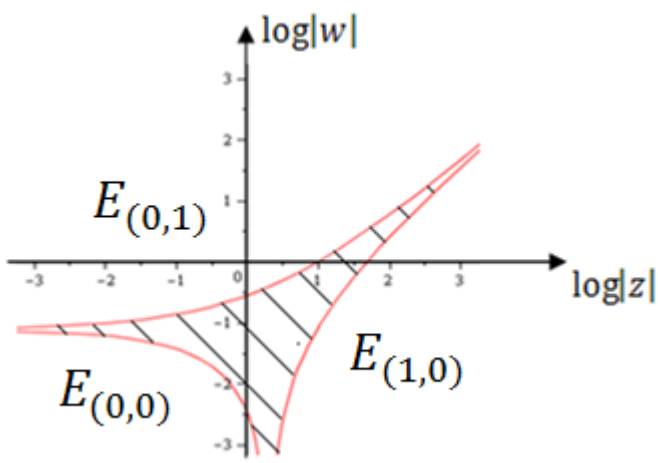

Рис. 4

Здесь $E_{(0,1)}$, $E_{(1,0)}$, $E_{(0,0)}$ — компоненты дополнения амебы, соответствующие вершинам (0, 1), (1, 0), (0, 0) многогранника Ньютона. Заштрихованная на рисунке область — амеба.

По рисунку видно, что $(0,\, 0) \in E_{(0,1)}$, поэтому задача (7)–(8) для этого оператора устойчива Тот же результат получается, если использовать известные (см., например, [20]) методы теории схем.

2 Разрешимость задачи Коши для полиномиального разностного оператора

Вопрос о дополнительных условиях на решения разностного уравнения, обеспечивающих его существование и единственность, тривиальный в одномерном случае, в многомерной ситуации является довольно сложным. Для многомерных разностных уравнений (рекуррентных соотношений), возникающих в перечислительном комбинаторном анализе, проблема правильной постановки задачи Коши исследовалась в работах [14] и [31].

Если коэффициенты дифференциального оператора являются аналитическими функциями, то поиск решения дифференциального уравнения в виде степенного ряда также ставит в соответствие дифференциальной задаче разностную, так как коэффициенты этого ряда будут удовлетворять некоторому разностному уравнению.

Для разностных уравнений в теории разностных схем эти дополнительные условия появляются естественным образом при аппроксимации начальных или краевых данных соответствующей дифференциальной задачи.

В первой главе диссертационной работы рассматривался случай таких явных разностных схем, для которых вопрос разрешимости является тривиальным, и упор делался на проблему устойчивости. В данной главе рассматриваются неявные разностные схемы.

Для комплекснозначных функций $f(x)$ целочисленных переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ определим операторы δ_j сдвига по переменным x_j: $\delta_j f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ и рассмотрим полиномиальный разностный оператор порядка m

$$P(\delta) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \delta^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1} \ldots \delta_n^{\alpha_n}$, c_α — коэффициенты разностного оператора.

Будем рассматривать разностные уравнения вида

$$P(\delta)f(x) = g(x), \;\; x \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{13}$$

где $f(x)$ — неизвестная, а $g(x)$ — заданная на $\mathbb{Z}_+^n = \mathbb{Z}_+ \times ... \times \mathbb{Z}_+$ функция и $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел.

Для $n > 1$ пространство решений уравнения (13) бесконечномерно, для выделения из него единственного решения требуются дополнительные условия, которые можно формулировать различными способами (см., например, [14], [31]). Рассмотрим следующий вариант таких дополнительных условий.

Для двух точек x, y целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$ неравенство $x \geqslant y$ означает, что $x_i \geqslant y_i$ для $i = 1, ..., n$, а запись $x \ngeqslant y$ означает, что найдется $i_0 \in \{1, ..., n\}$ такое, что $x_{i_0} < y_{i_0}$.

Фиксируем мультииндекс β такой, что

$$|\beta| = m \text{ и } c_\beta \neq 0. \tag{$**$}$$

Обозначим $X_{0,\beta} = \{x \in \mathbb{Z}_+^n : x \ngeqslant \beta\}$ и сформулируем задачу:

найти решение $f(x)$ уравнения (13), которое для $x \in X_{0,\beta}$ совпадает с заданной функцией $\varphi(x)$, т.е. удовлетворяет условию

$$f(x) = \varphi(x), x \in X_{0,\beta}. \tag{14}$$

Задачу (13)–(14) будем называть задачей Коши для полиномиального разностного оператора $P(\delta)$, а функцию $\varphi(x)$ — начальными данными этой задачи.

Если $\beta \neq (m, ..., 0)$ и $\beta \neq (0, ..., m)$, то условия (14), по аналогии с задачей Коши для полиномиальных дифференциальных операторов, будем называть условиями типа Рикье.

В первом параграфе приводится легко проверяемое достаточное условие разрешимости задачи (13)–(14) (теорема 5), необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (13)–(14) (теорема 6) и там же показано, что разрешимость определяется только коэффициентами однородной составляющей старшей степени разностного оператора $P(\delta)$ (теорема 8). Кроме того, в предполо-

жении разрешимости задачи Коши дана формула для ее решения (теорема 7).

Во втором параграфе главы показано, что условия теоремы 6, обеспечивающие разрешимость задачи (13)–(14), также являются необходимыми и достаточными для существования подходящего мономиального базиса в факторкольце $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$, где $\langle P(z)\rangle$ — идеал, порожденный характеристическим многочленом $P(z)$ в кольце многочленов $\mathbb{C}[z]$ (теорема 9).

В §3 главы 2 показано, что задачу (13)–(14) можно рассматривать как разностный аналог одной краевой задачи для полиномиального дифференциального оператора, рассмотренной в монографии Хермандера [28]. Кроме того, для $n = 2$ дано другое доказательство теоремы 5. А именно, для двумерного разностного полиномиального оператора вводится понятие ассоциированной матрицы. Это ленточная матрица бесконечного порядка и ее невырожденность является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (13)–(14) (лемма 4). Отметим еще теорему 11, в которой найдено обобщение хорошо известного рекуррентного соотношения для главных миноров трехдиагональной матрицы.

В четвертом параграфе главы исследуется разрешимость многослойных неявных разностных схем, рассматриваемых в «полосе». Дан критерий (теорема 12) разрешимости и простое достаточное условие (теорема 11). В теореме 13 отражена связь полученных результатов с известным методом исследования разностных схем — методом прогонки для систем линейных уравнений с ленточными матрицами (см., например, [9]).

2.1 Разрешимость задачи Коши для полиномиального разностного оператора

В данном параграфе нас интересуют условия на разностный оператор $P(\delta)$, обеспечивающие разрешимость задачи (13)–(14), т.е. существование и единственность решения для любых начальных данных $\varphi(x)$ и правых частей $g(x)$. Эти условия очевидны для $n = 1$, а также при $n > 1$ и $\beta = (m, 0, ..., 0)$ или $\beta = (0, 0, ..., m)$. Значительное место в работе [31], посвященной многомерным рекуррентным уравнениям с постоянными коэффициентами и их применению в комбинаторном анализе, уделено проблеме разрешимости задачи (13)–(14). Ес-

ли воспользоваться понятием многогранника Ньютона N_P характеристического многочлена $P(z) = \sum\limits_{\|\alpha\|\leqslant m} c_\alpha z^\alpha$, то одно из полученных в этой работе эквивалентных условий разрешимости означает (см. [14]), что β — вершина многогранника Ньютона такая, что $N_P \cap \{\beta + \mathbb{R}^n_+\} = \{\beta\}$. Следующая теорема существенно ослабляет это условие.

Теорема 5. *Если для коэффициентов полиномиального разностного оператора $P(\delta)$ выполнено условие*

$$|c_\beta| > \sum_{|\alpha|=m, \alpha\neq\beta} |c_\alpha|, \tag{15}$$

то задача (13)–(14) имеет единственное решение.

Отметим, что условие, аналогичное условию (15) использовалось в [28] для доказательства разрешимости в классе аналитических функций варианта обобщенной задачи Коши для полиномиального дифференциального оператора $P(D)$ с начально-краевыми условиями типа Рикье. Коэффициенты разложения в степенной ряд аналитических решений этой задачи удовлетворяют соотношениям вида (13)–(14). Отметим также работы [1], [4], [12], в которых отыскание аналитических решений дифференциальных уравнений приводит к соотношениям вида (13)–(14) для коэффициентов разложения в ряд этих решений.

Система уравнений (13)–(14) представляет собой бесконечную систему уравнений относительно бесконечного числа переменных $f(x)$, $x \in \mathbb{Z}^n_+$. Важной особенностью этой системы является то, что каждое уравнение в ней зависит от конечного числа неизвестных. Известно (см. [29], лемма 6.3.7), что такая система совместна тогда и только тогда, когда любая система из конечного числа этих уравнений совместна. Для исследования вопроса об условиях на оператор $P(\delta)$, при выполнении которых задача (13)–(14) разрешима, прежде всего упорядочим уравнения этой системы так, чтобы число неизвестных в каждом следующем уравнении было больше или равно числу неизвестных в предыдущем. Точнее, построим последовательность подсистем системы (13)–(14), которые состоят из конечного числа уравнений и в каждую следующую входят все уравнения предыдущей. Совместность каждой такой подсистемы будет означать совместность системы (13)–(14) ([29], лемма 6.3.7).

Возьмем произвольное $p \in \mathbb{Z}_+$. Неизвестные будем «нумеровать» элементами множества $J_p = \{y \in \mathbb{Z}_+^n : |y| \leqslant p\}$ и упорядочим это множество однородно-лексикографическим способом. Уравнения «занумеруем» элементами двух множеств $I_p = \{x \in \mathbb{Z}_+^n : |x| \leqslant p - m\}$ и $I_{\beta,p} = \{\mu \in X_{0,\beta} : |\mu| \leqslant p\}$. Если обозначить $\#M$ – число элементов конечного множества M, то нетрудно видеть, что $\#I_p + \#I_{\beta,p} = \#J_p$. Так как $I_{\beta,p} + \{\beta + I_p\} = J_p$, то элементам множества $I_{\beta,p}$ присвоим те же «номера», с которыми они входят в множество J_p, а элементам x множества I_p — те «номера», с которыми $\beta + x$ входят в J_p.

Обозначим L_p систему уравнений относительно конечного числа неизвестных $f(y)$, $y \in J_p$ вида

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha f(x + \alpha) = g(x),\ x \in I_p, \tag{16}$$

$$f(\mu) = \varphi(\mu), \mu \in I_{\beta,p}. \tag{17}$$

Число уравнений $\#(I_p \sqcup I_{\beta,p})$ этой системы равно числу неизвестных $\#J_p$ (и равно числу N_p целых неотрицательных решений y неравенства $|y| \leqslant p$). Отметим, что все уравнения из системы L_p входят в систему уравнений L_{p+1}.

Обозначим $\triangle_{\beta,p}$ определитель системы уравнений (16)–(17). Его порядок равен N_p и по построению в строках, соответствующих уравнениям (17), все элементы, кроме стоящей на главной диагонали единицы, равны нулю. В строках, соответствующих уравнениям (16), на главной диагонали стоит коэффициент c_β.

Пример 1. Рассмотрим для $n = 2$ разностный оператор $P(\delta_1, \delta_2) = c_{2,0}\delta_1^2 + c_{1,1}\delta_1\delta_2 + c_{0,2}\delta_2^2 + c_{1,0}\delta_1 + c_{0,1}\delta_2 + c_{0,0}$, где $m = 2$, $\beta = (1,\, 1)$. Для $p = 3$ система уравнений (16)–(17) примет вид

$$\begin{gathered} c_{2,0}f(x+2,y) + c_{1,1}f(x+1,y+1) + c_{0,2}f(x,y+2) + \\ + c_{1,0}f(x+1,y) + c_{0,1}f(x,y+1) + c_{0,0}f(x,y) = g(x,y), (x,y) \in I_3, \end{gathered} \tag{16'}$$

$$f(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \in I_{(1,1),3}. \tag{17'}$$

В ней десять неизвестных $f(y_1,\, y_2)$, $(y_1,\, y_2) \in J_p = \{(0,\, 0),\, (1,\, 0),\, (0,\, 1),\, (2, 0),$

$(1,\,1)$, $(0,\,2)$, $(3,\,0)$, $(2,\,1)\,(1,\,2)$, $(3,\,0)\}$. Уравнения $(16')$ «нумеруются» элементами множества $I_3 = \{(\bar{0},\,\bar{0}),\,(\bar{1},\,\bar{0})\,(\bar{0},\,\bar{1})\}$, а уравнения $(17')$ — элементами множества $I_{(1,\,1),3} = \{(0,\,0),\,(1,\,0),\,(0,\,1),\,(2,\,0),\,(0,\,2),\,(3,\,0),\,(0,\,3)\}$. Так как объединение $I_3 \sqcup I_{(1,\,1),3}$ дизъюнктное, то точки с координатами $(x,\,y)$ и $(\bar{x},\,\bar{y})$ считаются различными.

Определитель $\triangle_{(1,\,1),3}$ этой системы равен

$$\triangle_{(1,\,1),3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{0,0} & c_{1,0} & c_{0,1} & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{0,0} & 0 & c_{1,0} & c_{0,1} & 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{0,0} & 0 & c_{1,0} & c_{0,1} & 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теорема 6. *Задача (13)–(14) для всех $\varphi(x)$ и $g(x)$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда для всех $p = 0,\,1,\,2,\,\ldots$ определители $\triangle_{\beta,p} \neq 0$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что для некоторого $p_0 \in \mathbb{Z}_+$ определитель $\triangle_{\beta,p_0} = 0$. Это означает, что найдется нетривиальная линейная комбинация левых частей уравнений системы L_{p_0} равная нулю, т.е.

$$\sum_{x \in I_{p_0}} A_x \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha f(x+\alpha) + \sum_{\mu \in I_{\beta,p_0}} B_\mu f(\mu) = 0.$$

Но тогда и для любых правых частей $g(x)$ и $\varphi(\mu)$ этой системы получим

$$\sum_{x\in I_{p_0}} A_x g(x) + \sum_{\mu\in I_{\beta,p_0}} B_\mu \varphi(\mu) = 0,$$

а в силу произвольности выбора $g(x)$ и $\varphi(\mu)$ все коэффициенты A_x и B_μ равны нулю.

Достаточность. Так как для любого $p \in \mathbb{Z}_+$ определители $\triangle_{\beta,p} \neq 0$, то любая подсистема системы уравнений (13)–(14) из конечного числа уравнений совместна. Используя, упомянутую выше лемму из [29] (лемма 6.3.7) получим, что решение задачи (13)–(14) существует. Если предположить, что оно не единственное, то для некоторого p окажется, что система уравнений L_p с правой частью равной нулю имеет нетривиальное решение, т.е. $\triangle_{\beta,p} = 0$. Противоречие.

□

В случае разрешимости задачи (13)–(14) важную роль играет фундаментальное решение, так как через него можно выразить любое решение (см., например, [14], [36], [38]). Напомним его определение.

Определение 6. *Фундаментальным решением задачи (13)–(14) называется решение $\mathcal{P}_\beta(x)$ уравнения $P(\delta)\mathcal{P}_\beta(x) = \delta_0(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $\mathcal{P}_\beta(x) = 0$ для $x \in X_{0,\beta}$, где* $\delta_0(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \neq 0, \\ 1, \text{ если } x = 0. \end{cases}$

Теорема 7. *Если задача (13)–(14) для любых $g(x)$ и $\varphi(x)$ имеет единственное решение $f(x)$, то для любого $x \in \mathbb{Z}_+^n$ его можно записать в виде*

$$f(x) = \sum_{y\geqslant 0,\, y\not\geqslant\beta} \varphi(y) \sum_{\nu\not\leqslant y} c_\nu \mathcal{P}_\beta(x+\nu-y) + \sum_{y\geqslant 0} g(y)\mathcal{P}_\beta(x-y), \tag{18}$$

где $\mathcal{P}_\beta$ — фундаментальное решение задачи (13)–(14). При этом для любого фиксированного $x \in \mathbb{Z}_+^n$ число слагаемых в суммах правой части формулы (18) конечно.

Доказательство. Обозначим $f_0(x) = \sum\limits_{y\geqslant 0,\, y\not\geqslant\beta} \varphi(y) \sum\limits_{\nu\not\leqslant y} c_\nu \mathcal{P}_\beta(x+\nu-y)$ и $f^*(x) = \sum\limits_{y\geqslant 0} g(y)\mathcal{P}_\beta(x-y)$. Покажем, что в формуле для $f_0(x)$ сумма конечна. По

определению фундаментального решения $\mathcal{P}_\beta(x) = 0$ для $x \not\geqslant \beta$, поэтому в выражении для $f_0(x)$ суммируем по y, ν таким, что $x + \nu - y \geqslant \beta$, т.е. $y \leqslant x + \nu - \beta$. При фиксированных x, β система неравенств $y \geqslant 0$, $y \leqslant x + \nu - \beta$, $0 \leqslant \|\nu\| \leqslant m$ определяет ограниченное множество в $\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\nu$. Что касается конечности числа слагаемых в выражении для $f^*(x)$, то это также следует из того, что $\mathcal{P}_\beta(\nu) = 0$ для $\nu \not\geqslant \beta$. Действительно, тогда $\mathcal{P}_\beta(x - y) \neq 0$ для $0 \leqslant y \leqslant x - \beta$, а таких y конечное число.

Проверим, что функция $f(x)$, определенная формулой (18), удовлетворяет разностному уравнению (13). Действительно, для $x \geqslant 0$ имеем

$$P(\delta)f(x) = \sum_{y \geqslant 0,\, y \not\geqslant \beta} \varphi(y) \sum_{\nu \not\leqslant y} c_\nu \delta_0(x + \nu - y) + \sum_{y \geqslant 0} g(y)\delta_0(x - y).$$

Так как $\nu \not\leqslant y$, то найдется j такое, что $\nu_j - y_j > 0$, поэтому $x_j + \nu_j - y_j > 0$ и тогда $\delta_0(x + \nu - y) = 0$ и, таким образом, $P(\delta)f(x) = \sum\limits_{y \geqslant 0} g(y)\delta_0(x - y) = g(x)$.

Осталось убедиться, что функция $f(x)$ определенная равенством (18) удовлетворяет начальным данным (14).

Возьмем $x \geqslant 0$ и $x \not\geqslant \beta$, тогда $x - \beta \not\geqslant 0$, поэтому $\mathcal{P}_\beta(x - y) = 0$, т.е. $f^*(x) = 0$.

Для $\nu \leqslant y$ имеем $x + \nu - y \leqslant x$, а так как $x \not\geqslant \beta$, то $\mathcal{P}_\beta(x + \nu - y) = 0$, тогда $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{y \geqslant 0,\, y \not\geqslant \beta} \varphi(y) \sum_{0 \leqslant \|\nu\| \leqslant m} c_\nu \mathcal{P}_\beta(x + \nu - y) = \sum_{y \geqslant 0,\, y \not\geqslant \beta} \varphi(y)\delta_0(x - y) = \varphi(x).$$

□

В определителях $\triangle_{\beta,p}, p = 0, 1, 2, \ldots$, отвечающих за разрешимость задачи Коши, присутствуют все коэффициентам c_α характеристического многочлена $P(z)$. Покажем, что разрешимость задачи (16)–(17) зависит в действительности только от коэффициентов однородной составляющей старшей степени этого многочлена, т.е. определяется главным символом разностного оператора.

Обозначим $I'_q = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ : |x| = q - m\}$, $I'_{\beta,q} = \{\mu \in X_{0,\beta} : |\mu| = q\}$ и $J'_q = \{y \in \mathbb{Z}^n_+ : |y| = q\}$. Нетрудно видеть, что $\#I'_q + \#I'_{\beta,q} = \#J'_q = N'_q$, где N'_q — число целых неотрицательных решений уравнения $y_1 + \ldots + y_n = q$. Заметим, что

$N'_0 + N'_1 + ... + N'_p = N_p$ — числу целых неотрицательных решений неравенства $y_1 + ... + y_n \leqslant p$.

Для $q = 0,\ 1,\ ...,\ p$ обозначим $D_{\beta,q}$ миноры определителя $\triangle_{\beta,p}$, составленные из его строк, соответствующих уравнениям

$$P(\delta)f(x) = g(x), \ \ x \in I'_q, \tag{19}$$

$$f(\mu) = \varphi(\mu), \ \ \mu \in I'_{\beta,q} \tag{20}$$

и столбцов, соответствующих неизвестным $f(y)$, где $y \in J'_q$.

Отметим, что в определителях $D_{\beta,q}$ присутствуют только коэффициенты однородной составляющей старшей степени многочлена $P(z)$.

Пример 2. Для разностного оператора $P(\delta_1,\ \delta_2)$, рассмотренного в примере 1, имеем для $q = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$$D_{(1,1),0} = 1,\ D_{(1,1),1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, D_{(1,1),2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$D_{(1,1),3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 \\ 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Связь между определителями $\triangle_{\beta,p}$ и $D_{\beta,q}$ дается следующей леммой.

Лемма 2. *Для всякого $p \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство $\triangle_{\beta,p} = D_{\beta,0} \cdot D_{\beta,1} \cdot ... \cdot D_{\beta,p}$.*

Доказательство. Будем последовательно преобразовывать определитель $\triangle_{\beta,p}$, пользуясь теоремой Лапласа (см., например, [10]).

На первом шаге ($q = 0$) разложим определитель $\triangle_{\beta,p}$ по строкам с номерами $x \in I'_0$, $\mu \in I'_{\beta,0}$. Единственный отличный от нуля минор порядка $N'_0 = 1$ обозначим $D_{\beta,0}$, очевидно $D_{\beta,0} = 1$.

Определитель, полученный из $\triangle_{\beta,p}$ вычеркиванием этой строки и столбца, соответствующего неизвестной $f(0)$, обозначим $\triangle^1_{\beta,p}$. Очевидно, что $\triangle_{\beta,p} = D_{\beta,0} \cdot \triangle^1_{\beta,p}$.

На втором шаге ($q = 1$) разложим определитель $\triangle^1_{\beta,p}$ по строкам с номерами из множеств I'_1 и $I'_{\beta,1}$. Среди миноров порядка N'_1 не содержит нулевых строк только определитель, составленный из столбцов с номерами $y \in J'_1$. Обозначим этот минор $D_{\beta,1}$, тогда

$$\triangle^1_{\beta,p} = D_{\beta,1} \cdot \triangle^2_{\beta,p},$$

где определитель $\triangle^2_{\beta,p}$ получен из определителя $\triangle^1_{\beta,p}$ вычеркиванием строк с номерами $x \in I'_1$ и $\mu \in I'_{\beta,1}$ и столбцов с номерами $y \in J'_1$.

Продолжая процедуру, на $(q+1)$-ом шаге среди миноров порядка N'_q определителя $\triangle^q_{\beta,p}$, соответствующих строкам с номерами из множеств I'_q и $I'_{\beta,q}$ не содержит нулевой строки только определитель, составленный из столбцов с номерами $y \in J'_q$, т.е. $D_{\beta,q}$. Таким образом, $\triangle^q_{\beta,p} = D_{\beta,q} \cdot \triangle^{(q+1)}_{\beta,p}$.

Так как на последнем p-ом шаге $\triangle^p_{\beta,p} = D_{\beta,p}$, то

$$\triangle_{\beta,p} = D_{\beta,0} \cdot D_{\beta,1} \cdot \ldots \cdot D_{\beta,p}.$$

$\square$

Пример 3. Для оператора $P(\delta_1,\, \delta_2)$ из примеров 1, 2 в соответствии с леммой 2 имеем

$$D_{(1,1),0} = 1,\ \triangle^1_{(1,1),3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{1,0} & c_{0,1} & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{0,0} & 0 & c_{1,0} & c_{0,1} & 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 \\ 0 & c_{0,0} & 0 & c_{1,0} & c_{0,1} & 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$D_{(1,1),1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \triangle^2_{(1,1),3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{1,0} & c_{0,1} & 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 \\ 0 & c_{1,0} & c_{0,1} & 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$D_{(1,1),2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \triangle^3_{(1,1),3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} & 0 \\ 0 & c_{2,0} & c_{1,1} & c_{0,2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = D_{(1,1),3}.$$

Таким образом, $\triangle_{(1,1),3} = D_{(1,1),0} D_{(1,1),1} D_{(1,1),2} D_{(1,1),3}$.

Из теоремы 6 и леммы 2 сразу следует

Теорема 8. *Задача (16)–(17) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $D_{\beta,k} \neq 0$ для всех $k = 0,\ 1,\ 2,\ ....$*

Доказательство теоремы 5. У определителя матрицы системы уравнений (16)–(17) $\triangle_{\beta,p}$ на главной диагонали стоят единицы и выделенный коэффициент c_β. Согласно лемме 2 имеем $\triangle_{\beta,p} = D_{\beta,0} \cdot D_{\beta,1} \cdot ... \cdot D_{\beta,p}$, где $D_{\beta,q}$ — главные миноры определителя $\triangle_{\beta,p}$ порядка N'_q. Определители $D_{\beta,q}$ зависят только от коэффициентов c_α однородной составляющей старшей степени. Если выполнено условие (15), то $D_{\beta,q}$ являются определителями матриц с диагональным преобладанием (говорят, что квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$ обладает свойством диагонального преобладания, если $|a_{ii}| \geqslant \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$, $i = 1,\ 2,\ ...$, причем хотя бы одно неравенство является строгим), поэтому $D_{\beta,q} \neq 0$ (см. например, [30]). По теореме 8 задача (16)–(17) имеет единственное решение.

2.2 Разрешимость задачи Коши и мономиальный базис факторкольца $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$

В этом параграфе покажем, что разрешимость задачи (13)–(14) тесно связана с наличием подходящего мономиального базиса факторкольца $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$, где $\langle P(z)\rangle$ — главный идеал в кольце многочленов $\mathbb{C}[z]$. Точнее, докажем, что условие $\triangle_{\beta,p} \neq 0,\ p = 0, 1, 2, \ldots$ на построенные в предыдущем параграфе определители является необходимым и достаточным для существования такого базиса (теорема 9). Таким образом, разрешимость задачи Коши (13)–(14) эквивалентна существованию некоторого определенного мономиального базиса в факторе $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$.

Прежде всего приведем простое утверждение, показывающее связь между разрешимостью задачи Коши (13)–(14) для полиномиального разностного оператора $P(\delta)$ и существованием мономиального базиса факторкольца $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$. Отметим, что для систем разностных уравнений $P_j(\delta)f(x) = 0$, $i = 1, \ldots, n$ аналогичное утверждение доказано в [17].

Существование мономиального базиса в факторкольце можно рассматривать как некоторое правило «деления с остатком» кольца $\mathbb{C}[z]$ на многочлен $P(z)$. При изучении уравнений в частных производных преобразование Фурье-Лапласа сводит вопрос о существовании и единственности решения к наличию такого рода правила (см., например, [19], гл. 2, §4), и связанного с ним «фундаментального принципа» Эренпрайса-Паламодова. Отметим еще работу [35], в которой для доказательства «фундаментального принципа» вместо преобразования Фурье-Лапласа использовались методы теории z-преобразований (производящих функций).

Предложение 2. *Если выполнено условие (*) и набор мономов $\{z^\mu\}_{\mu\in X_{0,\beta}}$ образует базис факторкольца $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$, то всякое решение $f(x)$ уравнения (13) однозначно определяется своими значениями на множестве $X_{0,\beta}$.*

Доказательство. Возьмем $y \in \mathbb{Z}_+^n \setminus X_{0,\beta}$, тогда по условию предложения найдутся константы $a_\mu(y)$, зависящие от y и многочлен $A(z, y)$ с зависящими от y коэффициентами такие, что

$$z^y = \sum_{\mu \in X_{0,\beta}} a_\mu(y) z^\mu + A(z;y)P(z). \tag{21}$$

Обозначим $F(z) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \frac{f(x)}{z^x}$ производящую функцию (производящий ряд) решения $f(x)$. Умножив тождество (21) на ряд $F(z) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \frac{f(x)}{z^x}$, получим

$$z^y F(z) = \sum_{\mu \in X_{0,\beta}} a_\mu(\mu) z^\mu F(z) + A(z,y)P(z)F(z). \tag{22}$$

С другой стороны, умножение ряда $F(z)$ на мономы z^y и z^μ дает соответственно $z^y F(z) = \sum\limits_{x} \frac{f(x+y)}{z^x}$ и $z^\mu F(z) = \sum\limits_{x} \frac{f(x+\mu)}{z^x}$. Произведение $P(z)F(z)$ в правой части тождества (22) можно записать следующим образом:

$$P(z)F(z) = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha z^\alpha \right) \left(\sum_{x \geqslant 0} \frac{f(x)}{z^x} \right) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha z^\alpha \left(\sum_{x \geqslant \alpha} \frac{f(x)}{z^x} + \sum_{x \ngeqslant \alpha} \frac{f(x)}{z^x} \right) =$$

$$= \sum_{x \geqslant 0} \frac{P(\delta)f(x)}{z^x} + \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha z^\alpha \sum_{x \ngeqslant \alpha} \frac{f(x)}{z^x} = \sum_{x \geqslant 0} \frac{g(x)}{z^x} + \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha z^\alpha \sum_{x \ngeqslant \alpha} \frac{f(x)}{z^x}.$$

Таким образом, тождество (22) можно записать следующим образом

$$\begin{gathered} \sum_{x \geqslant 0} \tfrac{f(x+y)}{z^x} = \sum_{\mu \in X_{0,\beta}} a_\mu(y) \sum_{x \geqslant 0} \tfrac{f(x+\mu)}{z^x} + \\ + A(z,y) \left(\sum_{x \geqslant 0} \tfrac{g(x)}{z^x} + \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha z^\alpha \sum_{x \ngeqslant \alpha} \tfrac{f(x)}{z^x} \right). \end{gathered} \tag{23}$$

В сумме $\sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha z^\alpha \sum\limits_{x \ngeqslant \alpha} \frac{f(x)}{z^x}$ любой моном имеет положительную степень хотя бы по одной переменной, поэтому приравнивая в (23) коэффициенты при z^0, получим

$$f(y) = \sum_{\mu \in X_{0,\beta}} a_\mu(y) f(\mu) + A(\delta;y) g(0).$$

Здесь воспользовались тем, что коэффициент при z^0 произведения многочлена

$A(z,y) = \sum\limits_s d_s(y) z^s$ на ряд $\sum\limits_{x \geqslant 0} \frac{g(x)}{z^x}$ равен $\sum\limits_s d_s(y) g(y) = A(\delta, y) g(0)$. Это и означает, что для всех $y \in \mathbb{Z}_+^n \setminus X_{0,\beta}$ значения решения $f(y)$ уравнения (13) в любой точке $y \in \mathbb{Z}_+^n \setminus X_{0,\beta}$ выражаются через его значения в точках $\mu \in X_{0,\beta}$.

□

Приведем способ построения определителей $\triangle_{\beta,p}$, аналогичный в некотором смысле конструкции результанта двух многочленов.

Множества I_p, $I_{\beta,p}$, J_p — те же, что в предыдущем параграфе и упорядочены они тем же способом.

Рассмотрим два тождества относительно $z = (z_1, \ldots, z_n)$

$$\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha = P(z) \text{ и } 1 = 1.$$

Умножим эти тождества на z^x z^x, $x \in I_p$ и на z^μ, $\mu \in I_{\beta,p}$ соответственно, получим набор тождеств вида

$$\sum_\alpha c_\alpha z^{\alpha + x} = z^x P(z), x \in I_p, \tag{24}$$

$$z^\mu = z^\mu, \mu \in I_{\beta,p}. \tag{25}$$

Если рассматривать (24), (25) как систему уравнений относительно «неизвестных» z^y, $y \in J_p$, то у этой системы будет тот же определитель, что и у системы (16)–(17), т.е. $\triangle_{\beta,p}$.

Следующая теорема, показывает, что наличие мономиального базиса факторкольца $\mathbb{C}[z]/\langle P(z) \rangle$ эквивалентно разрешимости задачи (13)–(14).

Теорема 9. *Набор мономов* $\{z^\mu\}_{\mu \in X_{0,\beta}}$ *образует базис факторкольца* $\mathbb{C}[z]/\langle P(z) \rangle$ *тогда и только тогда, когда* $\triangle_{\beta,p} \neq 0$ *для всех* $p = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что для некоторого p_0 определитель $\triangle_{\beta,p_0} = 0$. Это означает, что существует нетривиальная линейная комбинация левых частей соотношений (24) и (25), тождественно равная

нулю:

$$\sum_{x\in I_{p_0}} A_x \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha z^{\alpha+x} \right) + \sum_{\mu\in I_{\beta,p_0}} B_\mu z^\mu \equiv 0.$$

Но тогда и для правых частей уравнений системы (24)–(25) получим

$$\left(\sum_{x\in I_{p_0}} A_x z^x \right) P(z) + \sum_{\mu\in I_{\beta,p_0}} B_\mu z^\mu \equiv 0.$$

Если в последнем тождестве найдется μ такое, что $B_\mu \neq 0$, то это противоречит независимости элементов базиса. Если же все коэффициенты $B_\mu = 0$, тогда найдется $x \in I_{p_0}$ такое, что $A_x \neq 0$, но это означает, что $P(z) \equiv 0$. Противоречие.

Достаточность. Нужно доказать, что для любого $y \in \mathbb{Z}_+^n \setminus X_{0,\beta}$ моном z^y выражается через мономы набора $\{z^\mu\}_{\mu\in X_{0,\beta}}$ и что эти мономы независимы.

Пусть $y \in \mathbb{Z}_+^n \setminus X_{0,\beta}$, обозначим $p = |y|$ и рассмотрим соответствующую систему уравнений (24), (25). Обозначим $\triangle_{\beta,p}[y]$ определитель, полученный из определителя $\triangle_{\beta,p}$ заменой столбца, соответствующего неизвестной z^y на столбец правых частей уравнений (24), (25). Поскольку $\triangle_{\beta,p} \neq 0, \text{то} z^y = \frac{\triangle_{\beta,p}[y]}{\triangle_{\beta,p}}$ и разлагая $\triangle_{\beta,p}[y]$ по столбцу, составленному из правых частей системы (24)–(25), получим, что z^y выражается через элементы базиса.

Независимость элементов мономиального базиса $\{z^\mu\}_{\mu\in X_{0,\beta}}$ докажем от противного. Предположим, что найдутся конечное множество $M \subset X_{0,\beta}$ и многочлен $B(z) = \sum\limits_s b_s z^s$ такие, что

$$\sum_{\mu\in M} a_\mu z^\mu + \left(\sum_s b_s z^s \right) P(z) \equiv 0.$$

Но это означает, что соответствующая комбинация левых частей системы уравнений (24), (25) тождественно равна нулю и, следовательно, для подходящего p получим $\triangle_{\beta,p} = 0$. Противоречие.

$\square$

2.3 Двумерный разностный аналог теоремы Хермандера

В монографии Л. Хермандера в связи с исследованием задачи Коши получена теорема о разрешимости одной краевой задачи полиномиальных дифференциальных операторов. Следствием этой теоремы являются как теорема Коши-Ковалевской, так и теорема Дарбу-Гурса-Бодо. Приведем ее формулировку.

Пусть $P(D) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha$ — полиномиальный дифференциальный оператор, где коэффициенты $c_\alpha(z)$ — аналитические функции от $z = (z_1, ..., z_n)$ в окрестности нуля в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, а $D = (D_1, ..., D_n)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ — мультииндексы, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$.

Фиксируем мультииндекс β такой, что $|\beta| = m$. Для полиномиального дифференциального оператора $P(D) = D^\beta + \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m,\, \alpha\neq\beta} c_\alpha D^\alpha$ справедлива (см. [28], теорема 5.1.1)

Теорема. *Рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$P(D)u = h \tag{26}$$

и зададим краевые условия

$$D_j^k(u - \Phi) = 0 \text{ при } z_j = 0, \text{ если } 0 \leqslant k < \beta_j, \text{ и } j = 1, ..., n. \tag{27}$$

Если $\sum\limits_{|\alpha|=|\beta|} |c_\alpha(0)|$ *меньше некоторого положительного числа, зависящего только от* $|\beta|$, *то для любых функций* h *и* Φ, *аналитических в окрестности нуля, краевая задача (26)–(27) имеет, и притом единственное, аналитическое в окрестности нуля решение* $u(z)$.

Отметим, что теорема Коши-Ковалевской (см. [28], теорема 5.1.2) получается из представленной теоремы, если $\beta = (m, 0, ..., 0)$ и $c_\beta \neq 0$, а теорема Дарбу-Гурса-Бодо (см. [28], теорема 5.1.3) при $\beta = (m-1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n)$, где $\beta_j = 1$ для некоторого $j = 2, ..., n$, а остальные равны нулю, $c_{(m,0,...,0)} = 0$, $c_{(m-1,\beta_2,...,\beta_n)} \neq 0$.

В случае дифференциального оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами задаче (26)–(27) можно поставить в соответствие некоторую задачу для

разностного оператора $P(\delta)$ с тем же символом. Для того, чтобы привести соответствующее утверждение, нам потребуются некоторые обозначения.

Обозначим $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}$ — n-мерную целочисленную решетку и $\mathbb{Z}^n_+$ — подмножество этой решетки, состоящее из точек с целыми неотрицательными координатами.

Пусть δ_j — оператор сдвига по переменной x_j, то есть $\delta_j f(x_1, ..., x_j, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, ..., x_n)$ и $\delta = (\delta_1, ..., \delta_n)$. Будем рассматривать полиномиальный разностный оператор вида

$$P(\delta) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \delta^\alpha,$$

где $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1} ... \delta_n^{\alpha_n}$, константы c_α — коэффициенты оператора, m — порядок разностного оператора $P(\delta)$.

Для двух точек $x, y \in \mathbb{Z}^n$ неравенство $x \geqslant y$ означает, что $x_i \geqslant y_i$ для $i = 1, ..., n$, а запись $x \ngeqslant y$ означает, что найдется $i_0 \in \{1, ..., n\}$ такое, что $x_{i_0} < y_{i_0}$.

Лемма 3. *Степенной ряд* $u(z) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \frac{f(x)}{x!} z^x$ *является решением задачи (26)–(27) тогда и только тогда, когда* $f(x)$ *удовлетворяет разностному уравнению* $P(\delta) f(x) = g(x)$, $x \geqslant 0$ *и «начальным» условиям вида* $f(x) = \varphi(x)$ *для* $x \ngeqslant \beta$, *где* $h(z) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \frac{g(x) z^x}{x!}$, *а* $\Phi(z) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \frac{\varphi(x) z^x}{x!}$.

Доказательство. Подставим ряд $u(z) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \frac{f(x)}{x!} z^x$ в правую часть уравнения $P(D) u(z) = h(z)$ и после стандартных преобразований получим

$$P(D) u(z) = \left(\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha \right) \left(\sum_{x \geqslant 0} \frac{f(x)}{x!} z^x \right) = \sum_\alpha c_\alpha \sum_{x \geqslant \alpha} \frac{f(x) z^{x-\alpha}}{(x-\alpha)!} =$$

$$= \sum_\alpha c_\alpha \sum_{x \geqslant 0} \frac{f(x+\alpha) z^x}{x!} = \sum_{x \geqslant 0} \left(\sum_\alpha c_\alpha f(x+\alpha) \right) \frac{z^x}{x!} = \sum_{x \geqslant 0} P(\delta) f(x) \frac{z^x}{x!}.$$

Сравнивая коэффициенты $\frac{P(\delta) f(x)}{x!}$ полученного ряда с коэффициентами ряда $h(z)$ получим утверждение 1 леммы 3.

Подставим ряды $u(z) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \frac{f(x)}{x!} z^x$ и $\Phi(z) = \sum \frac{\varphi(x) z^x}{x!}$ в правую часть уравнения $D_j^k(u - \Phi) = 0$. И после преобразований, аналогичным проведенным выше, получим выполнение второго условия леммы.

$\square$

Отметим, что в лемме 3 ряды $u(z)$, $h(z)$, $\Phi(z)$, вообще говоря, формальные.

С учетом леммы 3 легко видеть, что в случае постоянных коэффициентов c_α разрешимость задачи (26)–(27) равносильна разрешимости некоторой задачи Коши (13)–(14) для разностного оператора $P(\delta)$. Напомним ее точную формулировку.

Пусть $P(\delta) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \delta^\alpha$ *— разностный оператор,* $g(x)$ *и* $\varphi(x)$ *— заданные функции целочисленных аргументов* x*. Фиксируем* β *такое, что* $|\beta| = m$ *и* $c_\beta \neq 0$*.*

Найти решение $f(x)$ *разностного уравнения*

$$P(\delta) f(x) = g(x), \;\; x \geqslant 0, \tag{28}$$

удовлетворяющее условию

$$f(x) = \varphi(x), \;\; x \geqslant 0, \, x \not\geqslant \beta. \tag{29}$$

Если $\beta = (m, 0, ..., 0)$ или $\beta = (0, ..., 0, m)$, то с точки зрения теории разностных схем мы имеем явную разностную схему (см., например, [23]). В этом случае разрешимость и единственность задачи (28)–(29) очевидны.

Для других β таких, что $|\beta| = m$ может оказаться, что решение не единственное или что задача не имеет решений. Например, рассмотрим задачу (28)–(29) для разностного уравнения $\left(\delta_1^2 - \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2\right) f(x, y) = g(x, y)$. В качестве β выберем $\beta = (1, 1)$ и возьмем $g(x, y) = 0$, а «начальные» данные

$f(0,\,k) = f(k,\,0) = 0$, $k = 0,\,1,\,...$, тогда для любой константы A функция

$$f(x,\,y) = \begin{cases} A, \text{ если } (x,\,y) = (6k-5,\,3p-1) \text{ или } (x,\,y) = (6k-4, 3p-2), \\ \text{ для } k, p = 1, 2, ..., \\ -A, \text{ если } (x,\,y) = (6k-2,\,3p-1) \text{ или } (x,\,y) = (6k-1, 3p-2), \\ \text{ для } k, p = 1, 2, ..., \\ 0, \text{ для остальных точек } (x,\,y) \end{cases}$$

будет решением задачи (28)–(29). Поскольку A можно выбрать произвольным, это означает, что решение не единственное.

Приведем пример, когда задача вида (28)–(29) не имеет решений. Пусть $g(x,\,y) = 1$, а начальные данные те же, что и в предыдущем случае, то есть требуется найти решение уравнения $\left(\delta_1^2 - \delta_1\delta_2 + \delta_2^2\right) f(x,\,y) = 1$, $(x,\,y) \geqslant (0,\,0)$, удовлетворяющее «начальным» данным $f(0,\,k) = f(k,\,0) = 0$, $k = 0,\,1,\,....$ Если предположить, что решение этой задачи $f(x,\,y)$ существует, то, подставляя в уравнение $(x,\,y)$ равные $(1,\,0)$ и $(0,\,1)$, получим противоречивые равенства $f(2,\,1) - f(1,\,2) = 1$ и $f(2,\,1) - f(1,\,2) = -1$.

Поясним, что означает условие (15) разрешимости краевой задачи (28)–(29) с точки зрения теории амеб алгебраических гиперповерхностей.

Обозначим $\Pi_m = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : |\alpha| \leqslant m\}$ — полупространство, тогда очевидно, что $N_P \subset \Pi_m$ и $N_P \cap \{\alpha : |\alpha| = m\} \cap \mathbb{Z}^n$ состоит из конечного числа точек, из которых и выбран мультииндекс β при постановке задачи (28)–(29).

Множество V, а значит и $LogV$, замкнуто, поэтому его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus LogV$ открыто. Оно состоит из конечного числа связных выпуклых компонент, причем каждой компоненте соответствует точка $\alpha \in N_P \cap \mathbb{Z}^n$, а обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Однако, *выполнение условия (15) для точки β многогранника Ньютона означает, что этой точке соответствует компонента E_β дополнения амебы характеристического многочлена $P(z)$. Наличие же компоненты дополнения E_β амебы позволяет предъявить дискретный аналог известного (см. [27]) представления фундаментального решения урав-*

нения (26):

$$\mathcal{P}_\beta(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_\Gamma \frac{\xi^x}{P(\xi)} \frac{d\xi}{\xi},$$

где $\xi^x = \xi_1^{x_1} ... \xi_n^{x_n}$, $d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n$, $\Gamma_\beta = Log^{-1} v$, $v \in E_\beta$, *причем для различных* $v \in E_\beta$ *циклы* Γ_β *гомологичны в* $\mathbb{C}^n \setminus V$. *Таким образом, условие разрешимости (15) краевой задачи тесно связано с некоторым геометрическим свойством характеристического многочлена. Кроме того, наличие компоненты* E_β *важно для исследования устойчивости задачи (28)–(29) (см. [26], [36]).*

Рассмотрим случай $n = 2$ и дадим другое доказательство теоремы 5, в котором найденные на $(p-1)$-ом шаге значения неизвестных $f(x,\, y)$, используются для нахождения неизвестных на p-ом шаге. А именно, для двумерного разностного полиномиального оператора введем понятие ассоциированной матрицы. Это ленточная матрица бесконечного порядка и ее невырожденность является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (28)–(29). Введем необходимые обозначения и определения.

В двумерном случае разностный оператор $P(\delta)$ можно записать в виде $P(\delta_1, \delta_2) = \sum\limits_{\alpha_1+\alpha_2 \leqslant m} c_{\alpha_1,\alpha_2} \delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2}$. Фиксируем $\beta = (l, k)$ такое, что $l + k = m$ и $c_{l,k} \neq 0$. Тогда задача (28)–(29) запишется следующим образом:

Найти решение разностного уравнения

$$P(\delta_1,\, \delta_2) f(x,\, y) = g(x,\, y),\ (x,\, y) \geqslant (0,\, 0), \tag{30}$$

удовлетворяющее условию

$$f(x,\, y) = \varphi(x,\, y),\ \ (x,\, y) \ngeqslant (l,\, k). \tag{31}$$

Переобозначим коэффициенты c_{α_1,α_2} однородной составляющей $\sum\limits_{\alpha_1+\alpha_2=m} c_{\alpha_1,\alpha_2} \delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2}$ старшей степени многочлена $P(\delta_1,\, \delta_2)$:

$$\begin{gathered} q_{-l} = c_{0,m},\ q_{-l+1} = c_{1,m-1},\ \dots,\ q_{-1} = c_{-l+1,k+1},\ q_0 = c_{l,k}, \\ q_1 = c_{l+1,k-1},\ \dots,\ q_{k-1} = c_{m-1,1},\ q_k = c_{m,0}. \end{gathered} \tag{32}$$

Условие (15) теоремы 5 примет вид

$$|q_0| > \sum_{j=-l, j\neq 0}^{k} |q_j| \,. \tag{33}$$

Определение 7. *Ассоциированной с задачей (30)–(31) матрицей будем называть матрицу бесконечного порядка вида:*

$$\mathrm{T}_\infty = \left\| \begin{matrix} q_0 & q_1 & q_2 & \cdots & q_k & 0 & \cdots \\ q_{-1} & q_0 & q_1 & \ddots & \vdots & q_k & \ddots \\ q_{-2} & q_{-1} & \ddots & \ddots & q_2 & \vdots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & q_1 & q_2 & \vdots \\ q_{-l} & \cdots & q_{-2} & q_{-1} & q_0 & q_1 & \ddots \\ 0 & q_{-l} & \cdots & q_{-2} & q_{-1} & q_0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{matrix} \right\| .$$

Свойства матрицы T_∞ и играют решающую роль в проблеме разрешимости задачи (30)–(31). Матрица T_∞ теплицева (см., например, [11]), т.е. на всех диагоналях матрицы $\|a_{ij}\|$, параллельных главной диагонали и на самой главной диагонали, элементы матрицы одинаковы: $a_{ij} = q_{j-i}$. Далее обозначим D_p — главный минор матрицы T_∞ порядка p. Например, для разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2) = q_2\delta_1^3 + q_1\delta_1\delta_2^2 + q_0\delta_1^2\delta_2 + q_{-1}\delta_2^3 + \sum\limits_{\alpha_1+\alpha_2<2} c_{\alpha_1,\alpha_2}\delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}$ эти миноры выглядят следующим образом:

$$D_1 = q_0,\ D_2 = \begin{vmatrix} q_0 & q_1 \\ q_{-1} & q_0 \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} q_0 & q_1 & q_2 \\ q_{-1} & q_0 & q_1 \\ 0 & q_{-1} & q_0 \end{vmatrix},\ D_4 = \begin{vmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & 0 \\ q_{-1} & q_0 & q_1 & q_2 \\ 0 & q_{-1} & q_0 & q_1 \\ 0 & 0 & q_{-1} & q_0 \end{vmatrix},\ \ldots .$$

Доказательство теоремы 10 сводится к доказательству приведенных ниже утверждений.

Приведем необходимое и достаточное условие разрешимости.

Определение 8. *Матрицу* T_∞ *назовем невырожденной, если для любого* p *главные миноры* $D_p \neq 0$.

Лемма 4. *Задача (30)–(31) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ассоциированная матрица* T_∞ *невырожденная.*

Доказательство. Пусть для любых p главные миноры ассоциированной матрицы $D_p \neq 0$. Докажем, что при любом выборе φ и g задача (30)–(31) имеет единственное решение. Доказательство состоит в последовательном решении систем линейных уравнений относительно неизвестных $f(x,y)$, "занумерованных" парами $(x,y) \in \mathbb{Z}_+^2$. Определителями этих систем служат главные миноры D_p ассоциированной матрицы T_∞.

Воспользуемся обозначениями (32) для коэффициентов однородной составляющей старшей степени и запишем уравнение (30) в виде

$$\sum_{t=0}^{m} q_{-l+t} f(x+t, y+m-t) + \sum_{\alpha+\beta<m} c_{\alpha,\beta} f(x+\alpha, y+\beta) = g(x,y). \qquad (34)$$

На первом шаге возьмем точку $(0,0)$, подставим в уравнение (34). Получим

$$\sum_{t=0}^{m} q_{-l+t} f(t, m-t) + \sum_{\alpha+\beta<m} c_{\alpha,\beta} f(\alpha,\beta) = g(0,0).$$

В этом уравнении все значения слагаемых $f(\alpha,\beta)$ второй суммы и слагаемые первой суммы $f(t, m-t)$ для $t = 0,\ 1,\ 2,\ l-1,\ l+1,\ ...,\ m$ определяются из условий (31).

Таким образом, в первой сумме неизвестно только слагаемое $f(l,k)$, относительного которого уравнение имеет вид $q_0 f(l,k) = g_0$ и очевидным условием его разрешимости является условие $D_1 = det\,|q_0| = q_0 \neq 0$.

На втором шаге подставим в уравнение (34) координаты точек $(0,1)$ и $(1,0)$. И получим два соотношения

$$\sum_{t=0}^{m} q_{-l+t} f(t+1, m-t) + \sum_{\alpha+\beta<m} c_{\alpha,\beta} f(\alpha+1,\beta) = g(1,0),$$

$$\sum_{t=0}^{m} q_{-l+t} f(t, m-t+1) + \sum_{\alpha+\beta<m} c_{\alpha,\beta} f(\alpha,\beta+1) = g(0,1).$$

В этих соотношениях, в силу условий (31) и вычислений первого шага, нам известны все значения $f(\alpha+1,\beta)$ и $f(\alpha,\beta+1)$ вторых сумм и значения $f(t+1,m-t)$ и $f(t,m-t+1)$ первых сумм, кроме двух значений: $f(l,k+1)$, $f(l+1,k)$.

Таким образом, имеем систему двух уравнений относительно двух неизвестных $f(l,k+1)$, $f(l+1,k)$

$$\begin{cases} q_0 f(l,k+1) + q_1(l+1,k) = g_0, \\ q_{-1} f(l,k+1) + q_0 f(l+1,k) = g_1. \end{cases}$$

Эта система будет иметь единственное решение при условии, что

$$D_2 = \begin{vmatrix} q_0 & q_1 \\ q_{-1} & q_0 \end{vmatrix} = q_0^2 - q_{-1}q_1 \neq 0.$$

Продолжая процесс и подставляя в уравнение (34) все точки $(x,y) \in \mathbb{Z}_+^2$ такие, что $x+y=p$, на p-ом шаге получим систему линейных уравнений относительно p неизвестных $f(l+i,\, p-1+k-i)$, где $i=0,\, 1,\, 2,\, ...,\, p-1$:

$$\sum_{i=0}^{p-1} q_{i-j} f\left(l+i, p+k-i\right) = g_j,\ j=0,\, 1,\, ...,\, p-1, \tag{35}$$

с определителем D_p порядка p вида

$$D_p = \begin{vmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & \cdots & q_k & 0 & \cdots \\ q_{-1} & q_0 & q_1 & \ddots & \vdots & q_k & \ddots \\ q_{-2} & q_{-1} & \ddots & \ddots & q_2 & \vdots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & q_1 & q_2 & \vdots \\ q_{-l} & \cdots & q_{-2} & q_{-1} & q_0 & q_1 & \ddots \\ 0 & q_{-l} & \cdots & q_{-2} & q_{-1} & q_0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}.$$

Таким образом, условие: для любого p $D_p \neq 0$ обеспечивает существование и единственность решения задачи (30)–(31) при произвольном выборе правой части $g(x,\, y)$ и начальных данных $\varphi(x,\, y)$.

Покажем, справедливость обратного утверждения.

Возьмем $g(x,\, y) \equiv 0$, $\varphi(x,\, y) \equiv 0$. По условию, единственным решением может быть только тождественный нуль: $f(x,\, y) \equiv 0$ для $(x,\, y) \in \mathbb{Z}_+^2$.

Далее действуем по схеме доказательства первой части. Уравнение (30) запишем в виде (34).

На первом шаге возьмем точку $(0, 0)$ и, подставив в уравнение (34), получим уравнение относительно $f(l, k)$ вида $q_0 f(l, k) = 0$. Поскольку единственное решение данного уравнения тривиально $f(l, k) = 0$, то $q_0 \neq 0$, то есть $D_1 \neq 0$.

На втором шаге, подставив в уравнение (34) координаты точек $(0, 1)$ и $(1, 0)$, получим однородную систему уравнений вида

$$\begin{cases} q_0 f(l, k+1) + q_1 f(l+1, k) = 0, \\ q_{-1} f(l, k+1) + q_0 f(l+1, k) = 0. \end{cases}$$

Так как эта система имеет только тривиальное решение $f(l, k+1) = f(l+1, k) = 0$, то определитель этой системы не равен нулю: $D_2 = \begin{vmatrix} q_0 & q_1 \\ q_{-1} & q_0 \end{vmatrix} = q_0^2 - q_{-1} q_1 \neq 0$.

Продолжая процесс и подставляя в уравнение (34) все точки $(x, y) \in \mathbb{Z}_+^2$ такие, что $x + y = p$, на p-ом шаге получим однородную систему линейных уравнений с определителем D_p. Эта система по условию имеет только тривиальное решение, поэтому $D_p \neq 0$.

$\square$

Замечание 2. Для решения системы линейных относительно $f\,(x, y)$ уравнений (34) можно использовать различные методы, например, в работе [9] предложен специальный метод решения для систем с ленточными теплицевыми матрицами.

Отметим случай, когда β — единственная точка на гиперплоскости $\alpha_1 + ... + \alpha_n = m$, для которой $c_\beta \neq 0$. Задача (28)–(29) в этом случае изучалась в работе [31], где даны несколько условий ее разрешимости. Для $n = 2$ из леммы 4 легко получить следующее условие разрешимости:

Если среди мономов однородной составляющей старшей степени характеристического многочлена $P(z)$ только один коэффициент $c_{l,k} \neq 0$, то задача (30)–(31) имеет единственное решение.

Доказательство этого условия сразу следует из леммы 4, так как в этом случае ассоциированная матрица T_∞ будет диагональной, с элементом $c_{l,k}$ на главной диагонали, а значит невырожденной.

Таким образом, получено новое, простое, в случае $n = 2$, по сравнению с известными [31], условие существования и единственности решения задачи Коши, в случае, когда β является вершиной многогранника Ньютона N_P и β лежит на гиперплоскости $|\alpha| = degP = m$.

Определение 9. (см., например, [30]) *Матрица $\|a_{ij}\|_{p\times p}$ называется матрицей со строгим диагональным преобладанием, если для любого i*

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\,, i = 1, ..., p.$$

Лемма 5. *При выполнении условия (15) ассоциированная матрица T_∞ является матрицей с диагональным преобладанием и, следовательно, она невырожденная.*

Доказательство. Условие (15) означает, что матрица T_∞ является матрицей с диагональным преобладанием. По признаку Адамара (см. [30]) матрица с диагональным преобладанием невырожденная, значит для любого p главные миноры D_p ассоциированной матрицы T_∞ не равны нулю.

□

Отметим, что в данном случае $\beta \in N_p$ не обязана быть вершиной многогранника Ньютона N_p.

Сейчас приведем и докажем одно полезное свойство ассоциированной матрицы T_∞.

Определение 10. *Матрица $B = \|b_{ij}\|$ называется ленточной, если все ненулевые элементы заключены внутри ленты, образованной между диагоналями,*

параллельными главной. Если для матрицы B справедливо: $b_{ij} = 0$ при $i > j+l$ и $b_{ij} = 0$ при $j > i+k$, то l называется нижней шириной ленты, k — верхней шириной ленты. Величина $s = l+k+1$ называется шириной ленты матрицы B.

Отметим, что ассоциированная матрица T_∞ является ленточной.

Теорема 10. *Последовательность D_p главных миноров ассоциированной матрицы T_∞ с верхней шириной ленты $k = 1$ (нижней шириной ленты $l = 1$) удовлетворяет рекуррентному соотношению порядка $l+1$ $(k+1)$*

$$D_p = q_0 D_{p-1} + \sum_{v=1}^{l} (-1)^v q_1^v q_{-v} D_{p-1-v},\ p = 3,\ 4, \dots,\ l = 1,\ 2,\ \dots$$

$$\left(D_p = q_0 D_{p-1} + \sum_{v=1}^{k} (-1)^v q_{-1}^v q_v D_{p-1-v},\ p = 3,\ 4, \dots,\ k = 1,\ 2,\ \dots \right).$$

Доказательство. Пусть матрица T_∞ имеет одну наддиагональ, то есть $k = 1$. Нетрудно проверить, что $D_1 = det\,|q_0| = q_0$, $D_2 = \begin{vmatrix} q_0 & q_1 \\ q_{-1} & q_0 \end{vmatrix} = q_0^2 - q_1 q_{-1}$, а для D_3 имеем

$$D_3 = \begin{vmatrix} q_0 & q_1 & 0 \\ q_{-1} & q_0 & q_1 \\ q_{-2} & q_{-1} & q_0 \end{vmatrix} = q_0 D_2 - q_1 \begin{vmatrix} q_{-1} & q_1 \\ q_{-2} & q_0 \end{vmatrix} = q_0 D_2 - q_1 q_{-1} D_1 + q_1^2 q_{-2}.$$

В общем случае, последовательно разлагая определить D_p

$$D_p = \begin{vmatrix} q_0 & q_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q_{-1} & q_0 & q_1 & \dots & 0 & 0 \\ q_{-2} & q_{-1} & q_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{-l} & q_{1-l} & q_{2-l} & \dots & q_0 & q_1 \\ 0 & q_{-l} & q_{1-l} & \dots & q_{-1} & q_0 \end{vmatrix}$$

p раз по элементам первой строки, получим

$$D_p = q_0 D_{p-1} - q_1 q_{-1} D_{p-2} + q_1^2 q_{-2} D_{p-3} - ... + (-1)^{p-1} q_1^{p-1} q_{-l} D_{p-1+l},$$

где $p = 3, 4, ...$, а $l = 1, 2, ...$.

$\square$

В качестве примера укажем рекуррентное соотношение для главных миноров матрицы ассоциированной с разностным оператором $P(\delta_1, \delta_2) = \delta_1^3 + 3\delta_1^2\delta_2 + \delta_1\delta_2^2 + \delta_2^3 + 1$ порядка $m = 3$. Тогда $q_1 = 1$, $q_0 = 3$, $q_{-1} = 1$, $q_{-2} = 1$ и

$$\mathrm{T}_\infty = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \ddots \\ 0 & 1 & 1 & 3 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{Vmatrix}.$$

Далее $D_1 = 3$, $D_2 = 8$, $D_3 = 27$. Следующие значения главных миноров D_p можно найти из рекуррентного соотношения

$$D_{p+3} = 3D_{p+2} - D_{p+1} + D_p.$$

2.4 Разрешимость задачи Коши в «полосе»

В данном параграфе исследуется разрешимость разностных уравнений с начально-краевыми условиями типа Рикье. С точки зрения теории разностных схем это многослойные неявные разностные схемы. Дан критерий (теорема 12) разрешимости и простое достаточное условие (теорема 11). В теореме 13 отражена связь полученных результатов с известным методом исследования разностных схем — методом прогонки для систем линейных уравнений с ленточными матрицами (см., например, [9]).

Введем необходимые обозначения и определения.

$\mathbb{Z}^2$ — целочисленная решетка и $\mathbb{Z}^2_+$ — подмножество этой решетки, состоящее из точек с целыми неотрицательными координатами. Пусть δ_1 — оператор сдвига по переменной x, т.е. $\delta_1 f(x,\, y) = f(x+1,\, y)$, а δ_2 — оператор сдвига по переменной y, т.е. $\delta_2 f(x,\, y) = f(x,\, y+1)$. Зададим «полосу» $\Pi = \big\{(x,\, y) \in \mathbb{Z}^2,\, 0 \leqslant x \leqslant B,\, y > 0\big\}$ в положительном октанте целочисленной решетки, число $B+1$ будем называть шириной «полосы» Π. Рассмотрим разностный полиномиальный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$P(\delta_1, \delta_2) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{b} c_{i,j} \delta_1^i \delta_2^j = \sum_{j=0}^{m} P_j(\delta_1) \delta_2^j, \tag{36}$$

где $P_j(\delta_1) = \sum\limits_{i=0}^{b} c_{i,j} \delta_1^i$, $j = 0, 1, ..., m$.

Многочлен $P(z, w) = \sum\limits_{j=0}^{m} \sum\limits_{i=0}^{b} c_{i,j} z^i w^j$ называется характеристическим. Степень m многочлена $P(z, w)$ по переменной w будем называть порядком разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2)$ и предполагать, что $b < B$.

Зафиксируем β такое, что $c_{\beta,m} \neq 0$ и рассмотрим множество $\Pi_\beta = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2_+ : 0 \leqslant x - \beta \leqslant B - b, y > m - 1\}$. Обозначим $L_\beta = \Pi \setminus \Pi_\beta$ и сформулируем следующую задачу:

найти решение разностного уравнения

$$P(\delta_1, \delta_2) f(x, y) = g(x, y), (x, y) \in \mathit{\Pi} \tag{37}$$

удовлетворяющее условию

$$f(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in L_\beta, \tag{38}$$

где $g(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ — заданные функции целочисленных аргументов.

Задачу (37)–(38) назовем задачей Коши для полиномиального разностного оператора (36) и приведем легко проверяемое условие ее разрешимости.

Теорема 11. *Если для коэффициентов полиномиального разностного операто-*

ра $P(\delta_1, \delta_2)$ выполнено условие

$$|c_{\beta,m}| \geqslant \sum_{\substack{\alpha=0,\\ \alpha\neq\beta}}^{b} |c_{\alpha,m}|, \tag{39}$$

то задача (37)–(38) имеет единственное решение.

Система уравнений (37)–(38) представляет собой бесконечную систему уравнений относительно переменных $f(x, y)$, $(x, y) \in \Pi$. Важной особенностью этой системы является то, что каждое уравнение в ней зависит от конечного числа неизвестных. Известно (см. [29], лемма 6.3.7), что такая система совместна тогда и только тогда, когда любая система из конечного числа этих уравнений совместна. Для исследования вопроса об условиях на оператор $P(\delta_1, \delta_2)$, при выполнении которых задача (37)–(38) разрешима, прежде всего упорядочим уравнения этой системы так, чтобы число неизвестных в каждом следующем уравнении было больше или равно числу неизвестных в предыдущем. Точнее, построим последовательность подсистем системы (37)–(38), которые состоят из конечного числа уравнений и в каждую следующую входят все уравнения предыдущей. Совместность каждой такой подсистемы будет означать совместность системы (37)–(38) ([29], лемма 6.3.7).

Зафиксируем p такое, что $p \geqslant m$ и будем рассматривать прямоугольник $\Pi^p = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant B, 0 \leqslant y \leqslant p\}$. Неизвестные будем «нумеровать» элементами множества Π^p и упорядочим это множество лексикографически. Уравнения будем «нумеровать» элементами двух множеств $\Pi^p_\beta = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant B - b, 0 \leqslant y \leqslant p - m\}$ и $L^p_\beta = \Pi^p \setminus \{(\beta, m) + \Pi^p_\beta\}$. Так как $L^p_\beta \cup \{(\beta, m) + \Pi^p_\beta\} = \Pi^p$, то элементам множества L^p_β присвоим те же «номера», с которыми они входят в множество Π^p, а элементам (x, y) множества Π^p_β — те «номера», с которыми $(\beta, m) + (x, y)$ входят в Π^p.

Получим систему уравнений относительно неизвестных $f(x, y), (x, y) \in \Pi^p$, вида

$$P(\delta_1, \delta_2) f(x, y) = g(x, y), (x, y) \in \Pi^p_\beta, \tag{40}$$

$$f(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in L^p_\beta. \tag{41}$$

Число уравнений $\#(L^p_\beta \sqcup \Pi^p_\beta)$ этой системы равно числу неизвестных $\#\Pi^p$. Символ "$\sqcup$" означает дизъюнктное объединение.

Пример 4. Рассмотрим разностный оператор $P(\delta_1, \delta_2) = c_{2,1}\delta_1^2\delta_2 + c_{1,1}\delta_1\delta_2 + c_{0,1}\delta_2 + c_{2,0}\delta_1^2 + c_{1,0}\delta_1 + c_{0,0}$, где $m = 1$, $b = 2$, $\beta = 1$. Пусть $B = 3$, $p = 2$, тогда система уравнений (40)–(41) примет вид

$$c_{2,1}f(x+2, y+1) + c_{1,1}f(x+1, y+1) + c_{0,1}f(x, y+1) + c_{2,0}f(x+2, y) + \\ + c_{1,0}f(x+1, y) + c_{0,0}f(x, y) = g(x, y), (x, y) \in \Pi^2_{(1,1)}, \tag{40'}$$

$$f(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in L^2_{(1,1)}, \tag{41'}$$

относительно неизвестных $f(y_1, y_2)$, $(y_1, y_2) \in \Pi^2 = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (0,2), (1,2), (2,2), (3,2)\}$. Уравнения $(40')$ нумеруются элементами множества $\Pi^2_{(1,1)} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1})\}$, а уравнения $(41')$ — элементами множества $L^2_{(1,1)} = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (0,1), (3,1), (0,2), (3,2)\}$. Так как объединение $L^p_\beta \sqcup \Pi^p_\beta$ дизъюнктное, то точки с координатами (x, y) и $(\bar{x}, \bar{y})$ считаются различными.

Возвращаясь к общему случаю, обозначим $\triangle_{p,\beta}$ определитель системы уравнений (40)–(41). Его порядок равен $N = (B+1) \cdot (p+1)$ и состоит он из строк двух видов. В строках, соответствующих уравнениям (41) все элементы, кроме одного (равного 1) равны 0. Строки соответствующие уравнениям (40), состоят из нулей и коэффициентов $c_{i,j}$ разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2)$.

Пример 5. Для разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2)$, рассмотренного в примере 1 имеем

$$\triangle_{2,(1,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{0,0} & c_{1,0} & c_{2,0} & 0 & c_{0,1} & c_{1,1} & c_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{0,0} & c_{1,0} & c_{2,0} & 0 & c_{0,1} & c_{1,1} & c_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{0,0} & c_{1,0} & c_{2,0} & 0 & c_{0,1} & c_{1,1} & c_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{0,0} & c_{1,0} & c_{2,0} & 0 & c_{0,1} & c_{1,1} & c_{2,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теорема 12. *Задача (37)–(38) для всех $\varphi(x,y)$ и $g(x,y)$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда для всех $p \geqslant m$ определители $\triangle_{p,\beta} \neq 0$.*

В определителях $\triangle_{p,\beta}$, отвечающих за разрешимость задачи Коши, присутствуют все коэффициентам $c_{i,j}$ характеристического многочлена $P(z,w)$. Оказалось, что разрешимость задачи (37)–(38) зависит в действительности только от коэффициентов многочлена $P_m(z) = \sum\limits_{i=0}^{b} c_{i,m} z^i$.

Обозначим $\widetilde{\Pi}^q = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant B, y = q\}$, $\widetilde{\Pi}^q_\beta = \{(x,y) : 0 \leqslant x - \beta \leqslant B - b, y = q\}$, $\widetilde{L}^q_\beta = \widetilde{\Pi}^q \setminus \widetilde{\Pi}^q_\beta$. Нетрудно видеть, что $\#\widetilde{\Pi}^p_\beta + \#\widetilde{L}^p_\beta = \#\widetilde{\Pi}^p$.

Для $q = 0, 1, ..., p$ обозначим $D_{q,\beta}$ миноры определителя $\triangle_{p,\beta}$, составленные из его строк, соответствующих уравнениям

$$P(\delta_1, \delta_2) f(x,y) = g(x,y), (x,y) \in \widetilde{\Pi}^q_\beta, \tag{42}$$

$$f(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \in \widetilde{L}^q_\beta. \tag{43}$$

и столбцов, соответствующих неизвестным $f(x,y)$, где $(x,y) \in \widetilde{\Pi}^q$.

Отметим, что в определителях $D_{q,\beta}$ присутствуют только коэффициенты многочлена $P_m(\delta_1,\delta_2) = \sum\limits_{i=0}^{b} c_{i,m} z^i$ и порядок всех определителей $D_{q,\beta}$ равен $B+1$, т.е. ширине полосы.

Пример 6. Для разностного оператора $P(\delta_1,\delta_2)$, рассмотренного в примерах 4, 5 для $q = 0,1,2$ имеем

$$D_{0,(1,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \; D_{1,(1,1)} = D_{2,(1,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{0,1} & c_{1,1} & c_{2,1} & 0 \\ 0 & c_{0,1} & c_{1,1} & c_{2,1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Связь между определителями $\triangle_{p,\beta}$ и $D_{p,\beta}$ дается следующей леммой.

Лемма 6. *Для всякого p справедливо равенство $\triangle_{p,\beta} = D_{m,\beta}^{p-m+1}$.*

Доказательство. Будем последовательно преобразовывать определитель $\triangle_{p,\beta}$, пользуясь теоремой Лапласа (см., например, [10]).

На первом шаге ($q = 0$) разложим определитель по строкам с номерами $(x,y) \in \widetilde{\Pi}_\beta^0$ и $(x,y) \in \widetilde{L}_\beta^0$. Таких строк будет $B+1$ и в них ненулевым (равным 1) является один элемент, который стоит на главной диагонали, т.е. $D_{0,\beta} = 1$.

Определитель, полученный из $\triangle_{p,\beta}$ вычеркиванием этих строк и столбцов, соответствующих неизвестным $f(0,0), f(1,0), f(2,0), ..., f(B,0)$, обозначим $\triangle_{p,\beta}^1$. Очевидно, что $\triangle_{p,\beta} = D_{0,\beta}\triangle_{p,\beta}^1$.

На втором шаге ($q = 1$) разложим определитель $\triangle_{p,\beta}^1$ по строкам с номерами из множеств $\widetilde{\Pi}_\beta^1$ и $\widetilde{L}_\beta^1$. Среди миноров порядка $B+1$ не содержит нулевой строки только определитель, составленный из столбцов с «номерами» $(x,y) \in \widetilde{\Pi}^1$, то есть минор $D_{1,\beta}$, поэтому

$$\triangle_{p,\beta}^1 = D_{1,\beta}\triangle_{p,\beta}^2,$$

где определитель $\triangle_{p,\beta}^2$ получен из определителя $\triangle_{p,\beta}^1$ вычеркиванием строк с «номерами» $(x,y) \in \widetilde{\Pi}_\beta^1$ и $(x,y) \in \widetilde{L}_\beta^1$ и столбцов с «номерами» $(x,y) \in \widetilde{\Pi}^1$.

Продолжая процедуру, на $(q+1)$-ом шаге среди миноров порядка $B+1$ определителя $\triangle_{\beta,p}^{q-1}$, соответствующих строкам с номерами из множеств $\widetilde{\Pi}_\beta^q$ и $\widetilde{L}_\beta^q$

не содержит нулевой строки только определитель, составленный из столбцов с номерами $(x, y) \in \widetilde{\Pi}^q$, т.е. $D_{q,\beta}$. Таким образом,$\triangle^q_{p,\beta} = D_{q,\beta} \cdot \triangle^{(q+1)}_{p,\beta}$.

Так как на последнем p-ом шаге $\triangle^p_{p,\beta} = D_{p,\beta}$, то $\triangle_{p,\beta} = D_{0,\beta} \cdot D_{1,\beta} \cdot ... \cdot D_{p,\beta}$. Поскольку $D_{0,\beta} = ... = D_{m-1,\beta} = 1$, а $D_{m,\beta} = D_{m+1,\beta} = ... = D_{p,\beta}$, то

$$\triangle_{p,\beta} = D^{p-m+1}_{m,\beta}.$$

□

Пример 7. Для разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2)$ рассмотренного в примерах 4-6, в соответствии с леммой имеем

$$\triangle_{2,(1,1)} = D_{0,(1,1)} D_{1,(1,1)} D_{2,(1,1)} = D^2_{1,(1,1)} = (c^2_{1,1} - c_{0,1} c_{2,1})^2.$$

Доказательство теоремы 12. Пусть для всех $p \geqslant m$ определитель $\triangle_{p,\beta} \neq 0$. Докажем, что при любом выборе φ и g задача (40)–(41) имеет единственное решение. Доказательство состоит в последовательном решении систем линейных уравнений относительно неизвестных $f(x, y)$. Определителем этой системы является $\triangle_{p,\beta} \neq 0$.

На первом шаге берем $p = m$. Точки с координатами $(0, 0)$, $(1, 0)$, ..., $(B-b, 0)$ подставляем в уравнение (40), а точки с координатами $(x, y) \in L^m_\beta$ – в уравнение (41). Получим систему уравнений с ленточной матрицей, определитель (порядка $(m + 1) \cdot (B + 1)$) которой имеет вид

$$\triangle_{m,\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & \dots & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \dots & c_{\beta-1,m} & c_{\beta,m} & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & \dots & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & ... & c_{\beta,m} & c_{\beta+1,m} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Очевидным условием разрешимости этой системы является $\triangle_{m,\beta} \neq 0$

На втором шаге берем $p = m + 1$. Точки с координатами $(0, 0)$, $(1, 0)$, ..., $(B - b, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, ..., $(B - b, 1)$ подставляем в уравнение (40), а точки с координатами $(x, y) \in L_\beta^{m+1}$ – в уравнение (41). Получим систему уравнений с определителем $\triangle_{m+1,\beta}$ порядка $(m + 2) \cdot (B + 1)$. Очевидным условием разрешимости системы является $\triangle_{m+1,\beta} \neq 0$.

Продолжая процесс, на $(p + 1)$-ом шаге подставим в уравнение (40) точки с координатами $(0, 0)$, $(1, 0)$, ..., $(B-b, 0)$, ..., $(0, p-m)$, $(1, p-m)$, ..., $(B-b, p-m)$, а точки с координатами $(x, y) \in L_{p,\beta}$ – в уравнение (41). Получим систему уравнений с определителем $\triangle_{p,\beta}$ порядка $(p + 1) \cdot (B + 1)$. Очевидным условием разрешимости системы является $\triangle_{p,\beta} \neq 0$.

Таким образом, условие: *для всех* $p \geqslant m$ *определители* $\triangle_{p,\beta} \neq 0$, обеспечивает существование и единственность решения задачи (37)–(38), при произвольном выборе правой части $g(x, y)$ и начальных данных $\varphi(x, y)$.

Покажем справедливость обратного утверждения.

Возьмем $g(x, y) \equiv 0$, $\varphi(x, y) \equiv 0$. По условию единственным решением может быть только тождественный нуль: $f(x, y) \equiv 0$ для $(x, y) \in \Pi_p$.

Далее действуем по схеме доказательства первой части.

На первом шаге $(p = m)$ точки с координатами $(0, 0)$, $(1, 0)$, ..., $(B-b, 0)$ под-

ставляем в уравнение (40), а точки с координатами $(x, y) \in L_{m,\beta}$ – в уравнение (41). Получим однородную систему линейных уравнений. Так как эта система имеет только тривиальное решение $f(x, y) = 0$, то определитель этой системы $\triangle_{m,\beta}$ не равен нулю.

Продолжая процесс и подставляя в уравнения (40), (41) все точки $(x, y) \in \Pi_p$, на p-ом шаге получим однородную систему линейных уравнений с определителем $\triangle_{p,\beta}$. Эта система имеет по условию только тривиальное решение, поэтому $\triangle_{p,\beta} \neq 0$.

□

Из теоремы 12 и леммы 6 сразу следует

Теорема 13. *Задача (37)–(38) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $D_{p,\beta} \neq 0$ для всех $p = 0, 1, ...$*

Доказательство теоремы 11. У определителя $\triangle_{p,\beta}$ на главной диагонали стоят единицы и выделенный коэффициент c_β. Согласно лемме 6 имеем $\triangle_{\beta,p} = D_{0,\beta} \cdot D_{1,\beta} \cdot ... \cdot D_{p,\beta}$, где $D_{\beta,j}$ – главные миноры определителя $\triangle_{p,\beta}$ порядка $B + 1$. Определители $D_{\beta,j}$ зависят только от коэффициентов $P_m(\delta_1, \delta_2) = \sum\limits_{i=0}^{b} c_{i,m} z^i$. Если выполнено условие (39), то $D_{\beta,j}$ являются определителями матриц с диагональным преобладанием (говорят, что квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$ обладает свойством диагонального преобладания, если $|a_{ii}| \geqslant \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$, $i = 1, 2...$, причем хотя бы одно неравенство является строгим), поэтому $D_{\beta,j} \neq 0$ (см. например, [30]). По теореме 12 задача (37)–(38) имеет единственное решение.

□

В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности (см. [20]):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(0,\, t) = u_1(t),\ u(l,\, t) = u_2(t), \\ u(x,\, 0) = u_0(x). \end{cases} \tag{44}$$

и ее аппроксимацию разностной шеститочечной параметрической схемой вида

$$\frac{u_i^{m+1}-u_i^m}{\tau}=\sigma\frac{u_{i+1}^{m+1}-2u_i^{m+1}+u_{i-1}^{m+1}}{h^2}+(1-\sigma)\frac{u_{i+1}^m-2u_i^m+u_{i-1}^m}{h^2},\ i=1,\ 2,\ ...,\ N-1, \tag{45}$$

$$u_0^m=u_1(t_m),\ u_N^m=u_2(t_m),\ u_i^0=u_0(x_i),\ m=0,\ 1,\ ..., \tag{46}$$

где $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ – произвольный вещественный параметр схемы.

Для простоты рассмотрим чисто неявную схему, то есть $\sigma=1$. Тогда (45) запишется в виде $\frac{u_i^{m+1}-u_i^m}{\tau}=\frac{u_{i+1}^{m+1}-2u_i^{m+1}+u_{i-1}^{m+1}}{h^2}$. Обозначим $\gamma=\frac{\tau}{h^2}$, тогда $u_i^{m+1}-\frac{1}{1+2\gamma}u_i^m-\frac{\gamma}{1+2\gamma}u_{i+1}^{m+1}-\frac{\gamma}{1+2\gamma}u_{i-1}^{m+1}=0$. Если обозначить $a=-\frac{\gamma}{1+2\gamma}$, то в обозначениях данной работы разностный оператор будет иметь вид $P(\delta_1,\delta_2)=a\delta_2+\delta_1\delta_2+a\delta_1^2\delta_2+(2a-1)\delta_1$, где $c_{0,1}=c_{2,1}=a$, $c_{1,1}=1$.

Если переобозначить $u_i^m=f(i,m)$, то задача (45)–(46) для этой схемы примет вид

$$P(\delta_1,\delta_2)f(x,y)=0, 0<x<N-1, y=0,1,..., \tag{47}$$

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} f(0,y),\ y=0,\ 1,\ ..., \\ f(N,y),\ y=0,\ 1,\ ..., \\ f(x,0),\ x=1,\ 2,\ ...,\ N-1. \end{cases} \tag{48}$$

Так как $2|a|<1$, то выполнено условие диагонального преобладания теоремы 12, следовательно, задача (45)–(46) имеет единственное решение.

Список литературы

[1] Вишик, М.И. Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющих дивергентную форму / М.И. Вишик // Труды Московского математического общества. — 1963. — Т. 12. — С. 125–184.

[2] Волков, Ю.С. Оценка норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам / Ю.С. Волков, В.Л. Мирошниченко // Сибирский математический журнал. — 2009. — Том 50, №6. — С. 1249–1254.

[3] Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд. — М. : Наука, 1967. — 375 с.

[4] Гюнтер, Н.М. О распространении теоремы Коши на любую систему уравнений в частных производных / Н.М. Гюнтер // Математический сборник. — 1925. — Т. 32, № 2. — С. 367–447.

[5] Даджион, Д. Цифровая обработка многомерных сигналов / Д. Даджион, О. Мерсеро. — М. : Мир, 1988. — 488 с.

[6] Данилов, О.А. Интерполяционная формула Лагранжа для дискретной аналитической функции / О.А. Данилов // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2008. — Т. 8, № 4. — С. 33–39.

[7] Данилов, О.А. Дискретные аналитические функции многих переменных и формула Тейлора / О.А. Данилов, А.Д. Медных // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2009. — Т. 9, № 2. — С. 38–46.

[8] Изерман, Р. Цифровые системы управления / Р. Изерман. — М. : Мир, 1984. — 541 с.

[9] Ильин, В.П. О решении алгебраических уравнений с ленточными теплицевыми матрицами / В.П. Ильин, И.М. Лиснянский // Сибирский математический журнал. — 1978. — Т. 19, №1. — С. 44–48.

[10] Ильин, В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — М. : Физматлит, 2005. — 280 с.

[11] Иохвидов, И.С. Ганкелевы и теплицевы матрицы / И.С. Иохвидов. — М. : Наука, 1974. — 264 с.

[12] Казаков, А.Л. Обобщенная задача Коши с данными на двух поверхностях для квазилинейной аналитической системы / А.Л. Казаков // Сибирский математический журнал. — 2007. — Т. 48, № 5. — С. 1041–1055.

[13] Лейнартас, Е.К. Кратные ряды Лорана и разностные уравнения / Е.К. Лейнартас // Сибирский математический журнал. — 2004. — Т. 45, № 2. — С. 387–393.

[14] Лейнартас, Е.К. Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений / Е.К. Лейнартас // Сибирский математический журнал. — 2007. — Т.48, №2. — С. 335–341.

[15] Лейнартас, Е.К. Устойчивость задачи Коши для многомерного разностного оператора и амеба характеристического множества / Е.К. Лейнартас // Сибирский математический журнал. — 2011. — Т. 52, №5. — С. 387–393.

[16] Лейнартас, Е.К. Многомерные разностные уравнения : учеб. пособие / Е.К. Лейнартас, Д.Е. Лейнартас. — Красноярск : СФУ, 2010. — 154 с.

[17] Лейнартас, Е.К. Многомерная версия теоремы Пуанкаре для разностных уравнений / Е.К. Лейнартас, М. Пассаре, А.К. Цих // Математический сборник. — 2008. — Т. 199, №10. — С. 87–104.

[18] Первозванский, А.А. Курс теории автоматического управления / А.А. Первозванский. — М. : Наука, 1986. — 616 с.

[19] Паламодов, В.П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами / В.П. Паламодов. — М. : Наука, 1967. — 488 с.

[20] Рябенький, В.С. Введение в вычислительную математику : учеб. пособие, изд. 2-е, исправл. / В.С. Рябенький. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000. — 296 с.

[21] Рябенький, В.С. Об устойчивости разностных уравнений / В.С. Рябенький, А.Ф. Филиппов. — М. : Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1956. — 172 с.

[22] Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. — М. : Наука, 1971. — 553 с.

[23] Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 656 с.

[24] Стенли, Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции / Р. Стенли. — М. : Мир, 2005. — 767 с.

[25] Стенли, Р. Перечислительная комбинаторика / Р. Стенли. — М. : Мир, 1990. — 440 с.

[26] Федорюк, М.В. Асимптотика: интегралы и ряды / М.В. Федорюк. — М. : Наука, 1987. — 544 с.

[27] Хермандер, Л. О делении обобщенных функций на полиномы / Л. Хермандер // Математика. — 1959. — Т. 3, № 5. — С. 117–130.

[28] Хермандер, Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. — М. : Мир, 1965. — 376 с.

[29] Хермандер, Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных / Л. Хермандер. — М. : Мир, 1968. — 280 с.

[30] Шарый, С.П. Курс вычислительных методов / С.П. Шарый. — Новосибирск : Изд-во НГУ, 2012. — 316 с.

[31] Bousquet-Melou, M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case / M. Bousquet-Melou, M. Petkovšek // Discrete Mathematics. 2000. V. 225. P. 51–75.

[32] Duffin, R.J. Basic Properties of Discrete Analytic Functions / R.J. Duffin // Duke Math. J. 1956. Vol. 23. P. 335–363.

[33] Duffin, R.J. Potential theory on rhombic lattice / R.J. Duffin // J. Combinatorial Theory. 1968. Vol. 5. P. 258–272.

[34] Forsberg, M. Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas / M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh // Advances in Mathematics. 2000. V. 151, №1. P. 45–70.

[35] Zeilberger, D. A new proof to ehrenpreis's semilocal quotient structure theorem / D. Zeilberger // American Journal of Mathematics. 1978. V. 100, №6. P. 1317–1332.

Работы автора по теме диссертации

[36] Рогозина, М.С. Устойчивость многослойных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей / М.С. Рогозина // Журнал СФУ. Серия Математика и физика. — 2012. — №2. — С.256–263.

[37] Рогозина, М.С. Устойчивость многослойных линейных неоднородных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей / М.С. Рогози-

на // Вестник СибГАУ. Математика, механика, информатика. — 2013. — №3(49). — С.95–99.

[38] Рогозина, М.С. О разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора / М.С. Рогозина // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2014. — Т. 14, №3. — С. 83–94.

[39] Рогозина, М.С. Разрешимость разностной задачи Коши для многослойных неявных разностных схем / М.С. Рогозина // Вестник СибГАУ. Математика, механика, информатика. — 2014. — №3 (55) — С. 126–130.

[40] Лейнартас, Е.К. Разрешимость задачи Коши для полиномиального разностного оператора и мономиальные базисы факторов в кольце полиномов / Е.К. Лейнартас, М.С. Рогозина // Сибирский математический журнал. — 2015. — Т. 56, № 1. — С. 111–121.

[41] Рогозина, М.С. Устойчивость задачи Коши для многослойных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей / М.С. Рогозина // Материалы Юбилейной 50-й международной научной студенческой конференции Студент и научно-технический прогресс: Математика. — Новосибирск, Новосибирский государственный университет. — 2012. — С.68.

[42] Рогозина, М.С. Разностный аналог одной теоремы Хермандера / М.С. Рогозина // Четвертое российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам. — Красноярск, Сибирский федеральный университет. — 2012. — С. 60–62.

[43] Рогозина, М.С. Рекуррентное соотношение для определителей ленточных матриц Хессенберга / М.С. Рогозина // Материалы 51-й международной научной студенческой конференции Студент и научно-технический прогресс: Математика. — Новосибирск, Новосибирский государственный университет. — 2013. — С.48.

[44] Рогозина, М.С. Устойчивость задачи Коши для многослойных линейных неоднородных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей / М.С. Рогозина // Молодежь и наука: сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска. — Красноярск, Сибирский федеральный университет. — 2013.