Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова"

На правах рукописи

Поисеева Саргылана Семеновна

ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СТЕПЕНИ НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРОВ

«01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Казарин Л.С.

Ярославль — 2017

Оглавление

Введение

Постановка задачи и актуальность темы диссертации

Известно, что одним из мощных методов изучения особенностей строения групп является теория характеров. Начало развитию теории характеров положил фундаментальный труд, построенный в 1896-1899 гг. Ф.Г.Фробениусом «Теория характеров и представлений групп». Но лишь в конце 60-х годов XX века, в связи с интенсивными исследованиями конечных простых групп и их классификацией, теория характеров стала развиваться как самостоятельный объект современной теории групп.

Важным направлением теории характеров является изучение влияния степеней неприводимых характеров на строение группы. Впервые подобные исследования были начаты И.М.Айзексом и Д.С.Пассманом в [26]. В 1965 г. ими была предпринята первая попытка классифицировать группы, имеющие ровно две степени неприводимых характеров. Они свели задачу к случаю $d = p^\alpha$, где d – наибольшая степень неприводимого характера, p – простое число и группам с неабелевой силовской p-подгруппой. В 1968 г. Г.Зейцем в [33] исследованы группы, имеющие ровно одно неприводимое неодномерное представление, т.е. K-представление степени больше чем 1, где K – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Было доказано, что таковыми являются либо группы порядка 2^k (k – натуральное нечетное число), центр которых совпадает с коммутантом и имеет порядок 2, либо группы преобразований $x \to ax + b$ конечного поля $GF(p^n)$.

В общем случае степени неприводимых характеров несут довольно скудную информацию о строении группы. Поэтому естественно изучать группы, у которых степени неприводимых характеров имеют некоторые дополнительные свойства и удовлетворяют определенным ограничениям.

Представляют особый интерес случаи, когда степени неприводимых характеров удовлетворяют некоторым экстремальным свойствам.

В 2006-2008 гг. Н.Снайдером в [34] изучались группы с неприводимым комплексным характером степени d, для которого

$$|G| = d(d + e)$$

для некоторой константы e. Было доказано, что в этом случае при $e > 1$ порядок группы G ограничен функцией от числа e. Ранее, в 1999 г. Я.Берковичем в [13] были классифицированы группы с $e = 1$ и $e = 2$. В случае $e = 1$ группа G изоморфна группе Фробениуса с ядром

порядка $d+1$. Для $e>1$ И.М.Айзекс 2011 г. в [27] показал, что для некоторой постоянной B выполнено
$$|G| \leq Be^6.$$
Тогда же К.Дюрфи и С.Дженсен в [24] доказали, что
$$|G| \leq e^6 - e^4.$$
Наконец, в 2012 г. М.Л.Льюис в [29] указал наилучшую возможную границу:
$$|G| \leq e^4 - e^3,$$
при $d \leq e^2 - e$.

Несмотря на полученные ограничения на порядок группы в терминах числа e, возникает вопрос о строении группы, порядок которой связан со степенью d неприводимого характера соотношением $|G| \leq 2d^2$.

В силу известной теоремы Фробениуса порядок группы является суммой квадратов степеней ее неприводимых комплексных характеров. При этом часто он значительно больше степени любого ее неприводимого характера. Однако Л.С. Казариным и И.А. Сагировым [6] в 2001 г. доказано, что у любой конечной простой неабелевой группы G имеется неприводимый характер степени, большей $|G|^{1/3}$.

Возникает вопрос, как устроены конечные группы, обладающие неприводимым характером Θ таким, что $|G| \leq c\Theta(1)^2$ для небольшой константы $c > 1$?

В общем случае задача описания строения группы, обладающей неприводимым характером Θ, таким, что $|G| \leq c\Theta(1)^2$ при $c < 5$ представляется довольно сложной. «Атлас конечных групп» [20] содержит таблицу характеров 90 конечных простых групп, из них всего 23 группы обладают таким неприводимым комплексным характером Θ степени $\Theta(1)$, для которой верно неравенство $c\Theta(1)^2 \geq |G|$, при $c < 5$. Из 23 групп: 8 – спорадических простых групп ($M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, Th, J_1, HS$), 6 – знакопеременных ($A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{11}$), 6 – классических простых групп лиева типа ($L_2(11), L_3(2), L_3(3), L_3(4), U_4(2), U_4(3)$), и 3 – исключительных простых групп лиева типа ($Sz(8)$, ${}^2F_4(2)', O_8^+(2)$). При $c < 4$ групп, для которых выполняется неравенство $c\Theta(1)^2 \geq |G|$ всего 15. При $c < 3$ условию удовлетворят только 8 групп:

Таким неприводимым характером Θ степени $\Theta(1) = 190373976$, при $c < 2{,}6$ обладает спорадическая группа Томпсона $Th = F_{3|3}$, т.е. $|Th| < 2{,}51\Theta(1)^2$. При $c < 3$ четыре группы Матье $M_{11}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$, имеют неприводимый характер Θ степени $\Theta(1)$ равный соответственно 55, 385, 2024, 10395. При $c < 2{,}7$ группа $L_3(2)$ порядка 168, обладает неприводимым характером степени $\Theta(1) = 8$. Знакопеременные группы A_5, A_7 при $c < 2{,}5$ имеют неприводимый характер степени 5 и 35 соответственно (см. приложение B).

Заметим, что в [20] не нашлось таких групп, у которых степень неприводимого комплексного характера Θ удовлетворяла бы условию $c\Theta(1)^2 \geq |G|$, при $c \leq 2$. Поэтому рабочая гипотеза диссертационного исследования базируется на предположении о том, что все группы обладающие таким неприводимым комплексным характером Θ степени $\Theta(1)$, для которого выполняется неравенство $|G| \leq c\Theta(1)^2$, при $c \leq 2$ являются разрешимыми.

Конечную нееденичную группу порядка больше двух, обладающую неприводимым комплексным характером Θ для которого, $2\Theta(1)^2 \geq |G|$, будем называть $LC(\Theta)$-группой[1]. $LC(\Theta)$-группы представляют особый интерес, поскольку очевидно обладают экстремальным свойством.

В качестве первого нетривиального примера $LC(\Theta)$-группы можно указать экстраспециальную 2-группу порядка 2^{2n+1}, которая обладает неприводимым характером Θ степени 2^n. На ней достигается равенство $|G| = 2\Theta(1)^2$. Однако указанное равенство вовсе не означает, что G будет 2-группой. Другой пример дает группа, являющаяся прямым произведением групп S_3 и A_4, для которой $\Theta(1) = 6$, так что $G \cong S_3 \times A_4$ имеет порядок $72 = 2\Theta(1)^2$ (см. таблицу 19 в приложении A).

Цель и методы работы

Целью данной работы является изучение конечных $LC(\Theta)$-групп с ограничениями на степени неприводимых характеров. В диссертации используются методы доказательств теории конечных групп и теории характеров. Для дополнительных вычислений использована система компьютерной алгебры GAP [35].

Научная новизна:

Все результаты диссертации являются новыми.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказано, что любой неприводимый характер $LC(\Theta)$-группы, не являющейся 2-группой, является конституентой характера Θ^2.

2. Получено полное описание строения $LC(\Theta)$-групп с абелевой силовской p-подгруппой, у которых $\Theta(1)$ – степень простого числа p.

3. Получено полное описание строения $LC(\Theta)$-групп, у которых $\Theta(1)$ – произведение двух простых чисел p и q, в том числе, когда $p = q$.

4. Получено описание строения $LC(\Theta)$-групп с $\Theta(1) = p^2q$, где $p > q$ и p, q – различные простые числа.

[1] от "Large character".

Научная и теоретическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях по теории конечных групп, теории характеров и их представлениям, в алгебраической комбинаторике и в интерпретации некоторых задач теоретической физики.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на Международной молодежной научно-практической конференции «Путь в науку» (Ярославль, 2014-2015 гг.), на конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2014 г.), на Международной школе-конференции по теории групп, посвященной 70-летию В.В. Кабанова (Нальчик, 2014 г.), на 67, 68 и 69 всероссийской научно-технической конференции студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием (Ярославль, 2014-2016 гг.), на Международной летней школе-конференции «Группы и графы, алгоритмы и автоматы», посвященной 80-летию В.А. Белоногова и 70-летию В.А. Баранского (Екатеринбург, 2015 г.).

Работа отмечена грамотой за лучший доклад в Международной молодежной научно-практической конференции «Путь в науку» (Ярославль, 2014 г.), дипломом лауреата 68-й Всероссийской научно-технической конференции студентов, магистрантов и аспирантов с международным участием (Ярославль, 2015 г.).

Публикация результатов

Материал диссертации был опубликован в цикле работ, состоящей из 5 статей (в том числе 4 статьи в журнале из списка рекомендованных ВАК РФ) и 6 тезисов докладов. Из 5 статей 3 написаны без соавторов, 2 – двумя авторами (Казарин Л.С., Поисеева С.С.). Все совместные работы написаны в нераздельном соавторстве.

Объем и структура работы.

Диссертация состоит из оглавления, введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложения. Полный объем диссертации составляет 98 страниц. Список литературы содержит 37 наименований.

Содержание диссертации

Диссертация разбита на главы, которые, в свою очередь, подразделяются на параграфы. Нумерация всех результатов (теорем, лемм, следствий, предложений, определений) сквозная и состоит из трех цифр: первая цифра – номер главы, вторая – номер параграфа и третья – порядковый номер внутри параграфа. Формулы и таблицы имеют сквозную нумерацию внутри всей диссертации.

Введение

Во введении дается обоснование актуальности проблемы, описывается постановка задачи, приводится краткий обзор уже известных результатов. Далее следует содержание диссертации, а также обзор полученных результатов.

1. Вспомогательные результаты

Глава 1 носит вспомогательный характер. Даны необходимые определения, известные утверждения и результаты, используемые на протяжении всей работы.

В параграфе 1.1. приводятся некоторые сведения из теории чисел, поскольку в данной работе изучаются конечные группы. Вводится понятие простых чисел Мерсенна и Ферма, формулируется теорема Жигмонди о существовании простого числа с дополнительными ограничениями.

В параграфе 1.2. изложены сведения теоретико-группового характера. Даны определения разрешимой и нильпотентной группы, группы Фробениуса, а также сформулированы некоторые известные свойства и признаки данных групп в виде лемм и предложений.

В параграфе 1.3. приводятся сведения из теории представлений и теории характеров. Вводится понятие индуцированного характера, дается закон взаимности Фробениуса. Приводятся основные формулировки теории Клиффорда и некоторые сведения о характерах простых групп и групп Фробениуса.

2. Свойства $LC(\Theta)$-групп

В этой главе в основном изучаются характеры $LC(\Theta)$-групп и излагаются некоторые свойства $LC(\Theta)$-группы и ее характеров. Напомним определение $LC(\Theta)$-группы.

Определение 2.1.1. Конечную группу $G \neq 1$ порядка больше двух, обладающую неприводимым характером Θ таким, что $2\Theta(1)^2 \geq |G|$, будем называть $LC(\Theta)$-группой.

В начале главы в параграфе 2.1. дается формулировка основной теоремы:

Теорема 2.1.2. Пусть G является $LC(\Theta)$-группой. Если порядок G не является степенью числа 2, то любой неприводимый характер G является конституентой характера Θ^2.

Напомним, что если характер χ представить в виде $\chi = \sum_{i=1}^{k} n_i\chi_i$, где $n_i \geq 0$ и $k = |Irr(G)|$, а $n_j > 0$, то $\chi_j \in Irr(G)$ называется конституентой характера χ.

В параграфе 2.2. доказываются вспомогательные леммы, описывающие свойства неприводимых характеров $LC(\Theta)$-группы:

Лемма 2.2.1. Пусть G является $LC(\Theta)$-группой. Тогда характер Θ является единственным неприводимым характером группы G наибольшей степени. В частности, $\Theta(g)$ – целое рациональное число для всякого $g \in G$.

Лемма 2.2.2. Если G – $LC(\Theta)$-группа, то Θ является точным характером.

Лемма 2.2.3. Пусть G – $LC(\Theta)$-группа и M — ее собственная нормальная подгруппа. Тогда характер Θ_M приводим.

Далее доказываются некоторые свойства $LC(\Theta)$-группы:

Лемма 2.2.4. Пусть G – $LC(\Theta)$-группа и N — ее собственная нормальная подгруппа. Если $\Theta(1) = m$, то $(|G/N|, m) \neq 1$.

Лемма 2.2.5. Пусть G является $LC(\Theta)$-группой. Если порядок G не является степенью числа 2, то $Z(G) = 1$.

Все свойства выводятся из определения $LC(\Theta)$-группы и некоторых свойств неприводимых характеров конечной группы.

Доказательство основной теоремы 2.1.2. представлено в параграфе 2.3.

3. Строение $LC(\Theta)$-групп, у которых $\Theta(1)$ – степень простого числа p

Глава 3 посвящена изучению $LC(\Theta)$-групп с абелевой силовской p-подгруппой, у которых $\Theta(1)$ – степень простого числа p.

В первом параграфе 3.1. даются формулировки основных результатов:

Напомним, что p-нильпотентной называется группа, у которой все элементы порядка, взаимно простого с числом p, образуют подгруппу.

Теорема 3.1.1. Пусть G – $LC(\Theta)$-группа. Если для некоторого простого числа p силовская p-подгруппа группы G абелева, а $\Theta(1) = p^m$ для некоторого натурального числа m, то G является p-нильпотентной группой, $O_p(G) = 1$ и силовская p-подгруппа группы G имеет порядок p^m.

Следующая теорема дает полное описание $LC(\Theta)$-групп с $\Theta(1) = p^m$ и абелевой силовской p-подгруппой.

Теорема 3.1.2. Пусть G – $LC(\Theta)$-группа с абелевой силовской p-подгруппой и неприводимым характером Θ степени p^m, где p – простое число, а m – натуральное число. Тогда либо p – простое число Мерсенна и группа G – прямое произведение m групп Фробениуса порядков $p(p+1)$, либо $p = 2$ и G – прямое произведение групп, каждая из которых является группой Фробениуса порядка $q_i 2^{m_i}$ (где $q_i = 2^{m_i} + 1$ – простые числа Ферма) или группой Фробениуса порядка $3^2 2^3$ (в этом случае $m_i = 3$), причем $\sum_i m_i = m$.

Конечная группа G называется группой Фробениуса, если в ней найдется собственная подгруппа H, совпадающая со своим нормализатором и взаимно простая со своими сопряженными подгруппами, отличными от H.

Таким образом, $LC(\Theta)$-группа с абелевой силовской p-подгруппой и неприводимым характером Θ степени p^m может быть одной из следующих групп:

1. группой Фробениуса порядка 72, причем $p = 2$ и $m = 3$;

2. прямым произведением m групп Фробениуса порядков $p(p+1)$ и p – простое число Мерсенна;

3. прямым произведением групп Фробениуса, каждая из которых порядка $2^{m_i}(2^{m_i} + 1)$, где $\sum_i m_i = m$ и $2^{m_i} + 1$ – простые числа Ферма.

Доказательство этого утверждения представлено в параграфе 3.2.

Примеры $LC(\Theta)$-групп, у которых $\Theta(1)$ – степень простого числа p:

1. Пусть G – прямое произведение двух групп Фробениуса порядков 6 и 72 (см. таблицу 15 в приложении A). Тогда G является $LC(\Theta)$-группой с наибольшей степенью неприводимого характера, равной $16 = 2^4$ и абелевой силовской 2-подгруппой.

2. Группа $G = A_4 \times A_4$ является $LC(\Theta)$-группой с наибольшей степенью неприводимого характера, равной $9 = 3^2$ и абелевой силовской 3-подгруппой (см. таблицу 11 в приложении A).

3. Группа $G = AGL_2(3)$ – полупрямое произведение элементарной абелевой группы V порядка 9 и группы $GL_2(3)$, действующей на V как группа невырожденных линейных преобразований. $|G| = 9 \cdot 48 = 432$. В.И. Зенковым в [4] показано, что группа G имеет неприводимый характер Θ степени 2^4, так, что $|G| < 2\Theta(1)^2$, но силовская 2-подгруппа группы G – неабелева.

4. Строение $LC(\Theta)$-групп, у которых $\Theta(1)$ – произведение двух простых чисел p и q

В главе 4 изучаются $LC(\Theta)$-группы, с неприводимым характером Θ степени $\Theta(1) = pq$, где p и q – простые числа.

В первом параграфе 4.1. даются формулировки основных результатов:

Вначале рассматриваются $LC(\Theta)$-группы, у которых $\Theta(1)$ – квадрат простого числа, т.е. $p = q$. При этом не предполагается, что силовская p–подгруппа является абелевой.

Теорема 4.1.1. Пусть G – $LC(\Theta)$-группа с неприводимым характером Θ степени p^2, где p-простое число. Тогда либо группа G – прямое произведение двух групп Фробениуса порядков $p(p+1)$, либо $p = 2$ и $|G| \in \{20, 32\}$.

Далее рассматриваются $LC(\Theta)$-группы, у которых $\Theta(1)$ – произведение двух простых чисел p и q, причем $p > q$:

Теорема 4.1.2. Пусть G является $LC(\Theta)$-группой. Если $\Theta(1) = pq$, где p, q различные простые числа и $p > q$, то G – p-разрешимая группа.

Теорема 4.1.3. Пусть G является $LC(\Theta)$-группой с $\Theta(1) = pq$, где $p > q$ и p, q – простые числа. Тогда G имеет абелеву нормальную подгруппу K индекса pq.

В параграфе 4.2. с помощью классификации простых конечных групп доказано, что группа, порядок которой делится на простое число p и не превышает $2p^4$, изоморфна одной из следующих групп: $L_2(q), L_3(q), U_3(q), Sz(8), A_7, M_{11}, J_1$.

Параграф 4.3. посвящен доказательству теоремы 4.1.1. Изучаются $LC(\Theta)$-группы с неприводимым характером Θ степени p^2, порядки силовских p-подгрупп которых не превосходят p^5.

В параграфе 4.4. доказано, что в случае, когда $\Theta(1)$ – произведение двух различных простых чисел p и q, группа G является разрешимой группой с абелевой нормальной подгруппой K индекса pq.

Примеры $LC(\Theta)$-групп, у которых $\Theta(1)$ – произведение двух простых чисел p и q:

1. Пусть $p = 2^a - 1$ и $q = 2^b - 1$ – два различных простых числа Мерсенна. Тогда группа $G = M \times K$, являющаяся прямым произведением групп Фробениуса порядков $p(p+1)$ и $q(q+1)$ соответственно имеет неприводимый характер Θ с $\Theta(1) = pq$.

2. Пусть $p = 5$ и $q = 3$ и G – группа Фробениуса порядка $16 \cdot 15$ (см. таблицу 21 в приложении A). Тогда G – $LC(\Theta)$-группа.

3. Пусть $p = 2^a - 1$ – простое число Мерсенна, $q = 2$. Тогда группа $G = M \times K$, являющаяся прямым произведением групп Фробениуса порядков $(p+1)p$ и 6 является $LC(\Theta)$-группой.

5. Строение $LC(\Theta)$-групп, у которых $\Theta(1) = p^2q$, где p и q простые числа

В данной главе изучаются $LC(\Theta)$-группы, у которых $\Theta(1) = p^2q$, где $p > q$ и p, q простые числа.

В первом параграфе 5.1. даются формулировки основных результатов:

Теорема 5.1.1. Пусть G является $LC(\Theta)$-группой. Если $\Theta(1) = p^2q$, где p и q различные простые числа, $p > q$, то G – p-разрешимая группа.

Теорема 5.1.2. Пусть G является $LC(\Theta)$-группой с $\Theta(1) = p^2q$, где $p > q$ и p, q – простые числа. Тогда G имеет абелеву нормальную подгруппу M индекса p^2q.

В параграфе 5.2. с помощью классификации простых конечных групп доказано, что конечная простая неабелева группа с абелевой силовской p-подгруппой $P \neq 1$ порядка не более p^2 для которой $2|P|^3 > |G|$ изоморфна группе $L_2(q)$, где q – либо простое число, либо квадрат простого числа.

Параграф 5.3. посвящен доказательству теорем 5.1.1. и 5.1.2.

Заключение

Заключение содержит гипотезы, которые могут служить ориентирами для дальнейшего изучения $LC(\Theta)$-групп.

Далее следует список литературы из 37 наименований. Отдельно выделены публикации автора по теме диссертации.

Приложения

В приложениях даны таблицы характеров некоторых $LC(\Theta)$-групп с $\Theta(1) = p^m$, $\Theta(1) = pq$, $\Theta(1) = p^2q$, где p и q различные простые числа, а также списки простых неабелевых групп для которых выполняется условие $c\chi(1)^2 > |G|$, где $c \in \{3, 4, 5, 6\}$.

1. Вспомогательные результаты

1.1 Сведения из теории чисел

Определение 1.1.1. *Числа Мерсенна – простые числа вида $2^n - 1$, где n – натуральное число.*

Определение 1.1.2. *Числа Ферма – простые числа вида $2^{2^n} + 1$, где n – неотрицательное целое число.*

Предложение 1.1.3. *(Теорема Жигмонди) Если $a > b > 0$ являются взаимно простыми целыми числами, то для любого натурального числа n, существует простое число p, которое делит $a^n - b^n$ и не делит $a^k - b^k$ для любого натурального $k < n$, со следующими исключениями: $a - b = 1$ и $n = 1$; $a = 2, b = 1$ и $n = 6$; или $a + b$ это степень двойки и $n = 2$.*

Доказательство. См. [37].

1.2 Теоретико-групповые сведения

Все группы в работе предполагаются конечными.

Пусть G – группа. Через $G^{\#}$ будем обозначать множество неединичных элементов группы. Тривиальная группа и нейтральный элемент обозначаются символом 1.

Для элементов a и b группы G и собственной подгруппы H, будем использовать обозначения: $a^{-1}ba = b^a$, $a^{-1}Ha = H^a$, $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$. Если H и K подгруппы группы G, то $[H, K]$ – подгруппа группы G порожденная всеми элементами вида $[h, k]$, где $h \in H$ и $k \in K$.

Предложение 1.2.1. *(Лемма о трех подгруппах) Пусть x, y, z — элементы, а H, K, L — подгруппы группы G. Тогда:*

1. $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$.

2. Если $[H, K, L] = 1$ и $[K, L, H] = 1$, то $[L, H, K] = 1$.

Доказательство. См. [22], с. 19-20.

Пусть p – простое число. Множество p-силовских подгрупп группы G обозначается через $Syl_p(G)$.

Через p' обозначается множество всех простых чисел, отличных от p.

Через $H \times K$ обозначается прямое произведение подгрупп H и K группы G.

Через $H \rtimes K$ обозначается полупрямое произведение подгрупп H и K группы G с нормальной подгруппой H.

Определение 1.2.2. *Полупрямым произведением подгрупп H и K называется группа $G = H \rtimes K$, если $H \trianglelefteq G$, $H \cap K = 1$ и $K \leq G$.*

Определение 1.2.3. *Группа G называется группой Фробениуса с дополнением H и ядром F, если F и H - такие собственные подгруппы группы G, что*

1. *$H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$,*

2. *$G \setminus F^{\#} = \bigcup H^g$,*

3. *$F \lhd G$ и $G = F \rtimes H$.*

Определение 1.2.4. *Возрастающим рядом подгрупп группы G называется конечная последовательность $G_0, G_1, \ldots, G_n$ подгрупп из G такая, что $G_i \leq G_{i+1}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1, G_0 = 1$ и $G_n = G$. Такой ряд записывают в виде*

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = G \tag{1.1}$$

Определение 1.2.5. *Ряд (1.1) называется*

1. *нормальным, если $G_i \trianglelefteq G$ для всех $i \in \{0, \ldots, n-1\}$,*

2. *композиционным, если G_i – максимальная нормальная в G_{i+1} для всех $i \in \{0, \ldots, n-1\}$,*

3. *центральным, если $G_i \trianglelefteq G$ и $G_{i+1}/G_i \subseteq Z(G/G_i)$ для всех $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.*

Определение 1.2.6. *Если ряд подгрупп (1.1), в котором $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ для $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, то фактор-группы G_{i+1}/G_i называются его факторами.*

Определение 1.2.7. *Конечная группа G называется*

1. *разрешимой, если она обладает нормальным рядом подгрупп, факторы которых все абелевы,*

2. *p-разрешимой, если все неабелевы композиционные факторы имеют порядок, взаимно простой с p,*

3. *нильпотентной, если она обладает центральным рядом подгрупп,*

4. *p-нильпотентной, если все элементы порядка, взаимно простого с числом p, образуют подгруппу.*

Предложение 1.2.8. *Конечная группа G является нильпотентной тогда и только тогда, когда G изоморфна прямому произведению своих силовских подгрупп.*

Доказательство. См. [22], с. 23.

Предложение 1.2.9. *(Теорема Бернсайда) Если силовская p-подгруппа P группы G содержится в центре своего нормализатора, то G имеет нормальное p-дополнение.*

Доказательство. См. [22], с. 252.

Лемма 1.2.10. *Пусть P – силовская p-подгруппа группы G имеет порядок p. Если подгруппа H группы G содержит $N_G(P)$, то $|G : H| \equiv 1(mod\ p)$.*

Доказательство. Пусть $x \in G \backslash H$. Если $|H : H \cap H^x| \not\equiv 0(mod\, p)$, то найдется силовская p-подгруппа P_1 группы H, содержащаяся в $H \cap H^x$. По теореме Силова $P_1 = P^h$ для некоторого $h \in H$. Так как $P_1 \subseteq H^x$, то $P_1^{x^{-1}} \subseteq H$. Отсюда $P_1^{x^{-1}} = P_1^{h_1}$ для подходящего $h_1 \in H$. Следовательно, $h_1 x \in N_G(P) \leq H$ и $x \in H$ вопреки предположению. Значит, $|H : H \cap H^x| \equiv 0(mod\, p)$ для любого $x \in G \setminus H$. Так как $G = \bigcup_{y \in G} HyH$, то $|G| = |H| + pk|H|$ для некоторого целого неотрицательного k, что и доказывает лемму.

Предложение 1.2.11. *Пусть P – силовская p-подгруппа группы G. Два нормальных подмножества P сопряжены в G тогда и только тогда, когда они сопряжены в $N_G(P)$. В частности, два элемента из $Z(P)$ сопряжены в G тогда и только тогда, когда они сопряжены в $N_G(P)$.*

Доказательство. См. [22], с. 240.

Предложение 1.2.12. *Пусть G конечная группа с силовской p-подгруппой P, $p > 3$ и $N_G(P) = P$. Тогда G разрешима.*

Доказательство. См. [23].

Предложение 1.2.13. *(Теорема В.С. Монахова) Пусть G – разрешимая группа порядка $p^a m$ и $(p, m) = 1$. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

1. *G обладает характеристической p-подгруппой порядка $> p^a m^{-1}$,*
2. *$p = 2$, $q = 2^n + 1$ – простое число Ферма и q^2 делит порядок G, причем $a \geq 4$, при $n = 1$ и $a \geq 2n + 1$, при $n > 1$,*
3. *$p = 2^n - 1$ – простое число Мерсенна, $q = 2$, причем $a \geq p + 1$ и 2^{np} делит порядок G,*
4. *$p = 2$, $a \geq 23$ и 7^8 делит порядок G.*

Доказательство. См. [8].

Определение 1.2.14. *Подгруппа $\Phi(G)$, являющаяся пересечением всех максимальных подгрупп группы G, называется подгруппой Фраттини.*

Предложение 1.2.15. *Подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ группы G нильпотентна.*

Предложение 1.2.16. *Фактор-группа Фраттини $P/\Phi(P)$ p-группы P является элементарной абелевой. Кроме того, $\Phi(P) = 1$ тогда и только тогда, когда P является элементарной абелевой.*

Доказательство. См. [22], с. 174.

Определение 1.2.17. *Подгруппа $F(G)$, порожденная всеми нильпотентными нормальными подгруппами группы G, называется подгруппой Фиттинга.*

Предложение 1.2.18. *(Теорема Бродки) Пусть G – конечная группа с абелевой силовской p-подгруппой P. Тогда пересечение всех силовских p-подгрупп группы G является пересечением подгруппы P с одной из ее сопряженных.*

Доказательство. См. [16].

Определение 1.2.19. *Подгруппа $O_p(G)$, порожденная всеми нормальными p-подгруппами группы G, называется наибольшей нормальной p-подгруппой группы G, причем, $O_p(G) = \bigcap_{P\in Syl_p(G)} P$.*

Предложение 1.2.20. *(Теорема А. Манн) Если порядок конечной разрешимой группы G с $O_p(G) = 1$ не делится на простые числа Ферма и Мерсенна, то в G найдутся две силовские p-подгруппы, пересекающиеся по единице.*

Доказательство. См. [30].

Предложение 1.2.21. *(Теорема В.И. Зенкова) Пусть G – конечная группа с силовской p-подгруппой P. Если $p \neq 2$ и не простое число Мерсенна, то $P \cap P^x = O_p(G)$ для некоторого $x \in G$. Если $O_p(G) = 1$, то $|P|^2 < |G|$.*

Доказательство. См. [5].

Предложение 1.2.22. *Если P – силовская p-подгруппа p-разрешимой группы G, то $C_G(P\cap O_{p',p}(G)) \subseteq O_{p',p}(G)$. В частности, $Z(P) \subseteq O_{p',p}(G)$.*

Доказательство. См. [22], с. 228.

Предложение 1.2.23. *(Теорема В.И. Зенкова) Пусть G – конечная группа, p – простое число, $S(G)$ – разрешимый радикал группы G, P – силовская p-подгруппа из G. Если $P\cap P^x \neq O_p(G)$ для любого элемента x из G, то справедливо одно из следующих утверждений:*

1. *$(P \cap S(G)) \cap (P \cap S(G))^x \neq O_p(G)$ для любого элемента x из G, и в фактор-группе $\overline{S(G)} = S(G)/O_p(G)$ выполняются утверждения одного из следующих пунктов:*

   (a) $p = 2, q = 2^n - 1$ – простое число Мерсенна и $\overline{S(G)}$ содержит подгруппу, изоморфную $(Z_q \times Z_q) \rtimes D_{2^{n+1}}$, и $D_{2^{n+1}}$ действует точно на $Z_q \times Z_q$;

(b) $p = 2^n - 1$ — *простое число Мерсенна и* $\overline{S(G)}$ *содержит подгруппу, изоморфную* $F \wr Z_p$, *где* F – *группа Фробениуса, изоморфная* $V_{p+1} \rtimes Z_p$;

(c) $p = 2, q = 2^n + 1$ – *простое число Ферма и* $\overline{S(G)}$ *содержит подгруппу, изоморфную* $(Z_q \times Z_q) \rtimes Z_4 * D_{2^{n+1}}$, *и* $Z_4 * D_{2^{n+1}}$ *действует точно на* $Z_q \times Z_q$;

(d) $\overline{S(G)}$ *содержит подгруппу, изоморфную* $(Q_8 * Q_8 * Q_8) \rtimes (Z_3 \wr Z_3)$, *где* $|Z(Q_8 * Q_8 * Q_8)| = 2$ *и* $Z_3 \wr Z_3$ *действует на* $Q_8 * Q_8 * Q_8$, *как подгруппа из* $Hol(Q_8 * Q_8 * Q_8)$;

2. $(P \cap S(G)) \cap (P \cap S(G))^y = O_p(G)$ *для некоторого элемента* y *из* G, *и в фактор-группе* $\tilde{G} = G/S(G)$ *выполняются утверждения одного из следующих пунктов:*

(a) $p = 3$ *и группа* $\tilde{G}$ *содержит нормальную подгруппу* $\tilde{N}$, *изоморфную подгруппе* $\tilde{K}$, *где* $(P\Omega_8^+(3))^t < \tilde{K} \leq (P\Omega_8^+(3) \rtimes \langle g \rangle)^t$ *и* g — *графовый автоморфизм порядка три группы* $P\Omega_8^+(3)$;

(b) $p = 2$ *и группа* $\tilde{G}$ *содержит компоненту, изоморфную*

i. *простой группе типа Ли над полем из* q *элементов, где* $q = 9$ *или* q — *простое число Ферма или Мерсенна;*

ii. $L_3(4), L_n(2), n \geq 3, \Omega_n(2), n \geq 7, F_4(2), E_6(2), E_7(2), E_8(2), {}^2F_4'(2)$.

Доказательство. См. [5].

Предложение 1.2.24. *Пусть* G – *конечная с* $S(G) = 1$, P – *силовская* p*-подгруппа из* G *и* p – *нечетное простое. Тогда либо* $p = 3$ *и* $P \cap P^x \neq 1$ *для любого элемента* x *из* G, *либо* $P \cap P^x = 1$ *для некотрого* $x \in G$.

Доказательство. См. [5].

Предложение 1.2.25. *(Теорема Л.С. Казарина) Пусть* G — *конечная группа,* $x \in G$ *элемент простого порядка* q. *Если* $|G : C_G(x)|$ – *степень простого числа* p, *то* $\langle x^G \rangle' = O_p(\langle x^G \rangle)$. *В частности, нормальное замыкание* x *в* G *имеет коммутант, являющийся* p*–группой.*

Доказательство. См. [7].

Предложение 1.2.26. *(Теорема А. и Р. Камины) Пусть* G *конечная группа и пусть* x *элемент группы* G, *индекс централизатора которого равен* p^n, *где* p – *простое и* n – *натуральное число. Тогда*

$$[x^G, x^G] \subseteq O_p(G).$$

Доказательство. См. [17].

1.3 Сведения из теории характеров

Необходимые сведения, касающиеся представлений и характеров конечных групп, можно найти в [1] и [28]. Рассматриваются представления над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Множество неприводимых характеров группы G обозначается через $Irr(G)$.

1.3.1 Начальные сведения

Определение 1.3.1. *Размерность представления группы с характером χ называется степенью χ и обозначается $\chi(1)$.*

Предложение 1.3.2. *Пусть G – группа. Тогда $|Irr(G)|$ равен числу сопряженных классов группы G и*

$$\sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(1)^2 = |G|.$$

Доказательство. См. [28], с. 16.

Предложение 1.3.3. *Пусть G – разрешимая группа. Тогда G имеет нормальную абелеву силовскую p-подгруппу тогда и только тогда, когда каждый элемент $\{\chi(1)|\chi \in Irr(G)\}$ взаимно прост с p.*

Доказательство. См. [28], с. 216.

Определение 1.3.4. *Если характер χ представить в виде $\chi = \sum_{i=1}^{k} n_i\chi_i$, где $n_i \geq 0$ и $k = |Irr(G)|$, а $n_j > 0$, то $\chi_j \in Irr(G)$ называется конституентой характера χ.*

Для любого элемента y группы G через h_y обозначается число элементов группы G, сопряженных с y.

Предложение 1.3.5. *Если K – класс сопряженных элементов группы G и $y \in K$. Тогда $|K|\chi(y)/\chi(1)$ для $\chi \in Irr(G)$ является целым алгебраическим числом.*

Доказательство. См. [22], с. 126.

Предложение 1.3.6. *Пусть $\chi \in Irr(G)$ и $y \in G$, причем $(h_y,\chi(1)) = 1$. Тогда либо $\chi(y) = 0$, либо $|\chi(y)| = \chi(1)$.*

Доказательство. См. [22], с. 130.

Скалярное произведение характеров χ и ψ группы G обозначается $\langle\chi, \psi\rangle$:

$$\langle\chi, \psi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi(g)\overline{\psi(g)}.$$

Когда требуется уточнить, на какой именно группе рассматривается скалярное произведение, то знак скалярного произведения пишется с индексом внизу: $\langle\chi, \psi\rangle_G$. Когда ясно из контекста, в какой группе рассматривается скалярное произведение, то индекс внизу опускается.

Предложение 1.3.7. *(Первое соотношение ортогональности)*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi(g)\psi(g^{-1}) = \delta_{\chi,\psi},$$

где $\delta_{\chi,\psi}$ – символ Кронекера.

Доказательство. См. [28], с. 19-20.

Предложение 1.3.8. *(Второе соотношение ортогональности) Пусть $g, h \in G$. Тогда*

$$\sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(g)\overline{\chi(h)} = \begin{cases} 0, & \text{если } g \text{ и } h \text{ не сопряжены в } G; \\ |C_G(g)|, & \text{если } g \text{ и } h \text{ сопряжены в } G. \end{cases}$$

Доказательство. См. [28], с. 21.

Определение 1.3.9. *Пусть χ – характер группы G. Тогда $ker\chi = \{g \in G | \chi(g) = \chi(1)\}$.*

Определение 1.3.10. *Характер χ группы G называется точным, если $ker\chi = 1$.*

Определение 1.3.11. *Пусть χ – характер группы G. Тогда $Z(\chi) = \{g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(1)\}$.*

Определение 1.3.12. *Пусть $\chi \in Irr(G)$. p-дефектом характера χ называется число $d_p(\chi)$, определяемое равенством*

$$p^{d_p(\chi)} = \left(\frac{|G|}{\chi(1)}\right)_p.$$

p-дефектом p-блока B группы G называется число

$$d_p(B) = max\{d_p(\chi) | \chi \in B\}.$$

Предложение 1.3.13. *1. Если G имеет точный неприводимый характер, то центр группы циклический.*

2. Если G является p-группой и центр группы циклический, то G имеет точный неприводимый характер.

Доказательство. См. [28], с. 29.

Предложение 1.3.14. *Если χ – характер группы G, то $\chi(g)$ – сумма корней $|G|$-й степени из единицы для любого элемента $g \in G$. В частности, $\chi(g)$ – целое алгебраическое число.*

Доказательство. См. [22], с. 113.

Предложение 1.3.15. *Пусть χ – характер представления φ группы G степени n и $g \in G$. Тогда:*

1. $|\chi(g)| \leq n$.

2. $|\chi(g)| = n$ тогда и только тогда, когда $\varphi(g)$ является скалярным преобразованием.

3. $\chi(g) = n$ тогда и только тогда, когда $\varphi(g)$ является единичным преобразованием.

Доказательство. См. [22], с. 114.

Предложение 1.3.16. *Если $\chi \in Irr(G)$, то $\chi(1) \mid |G|$.*

Доказательство. См. [28], с. 38.

Лемма 1.3.17. *(Теорема Ито) Пусть $N \lhd G$ и N – абелева. Тогда $\chi(1) || G : N|$, для всех $\chi \in Irr(G)$.*

Доказательство. См. теорему 6.15 из [28].

1.3.2 Индуцированные характеры

Определение 1.3.18. *Пусть $H \leq G$ и пусть φ является характером H. Тогда φ^G – характер, индуцированный характером φ на G:*

$$\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\varphi^\circ(xgx^{-1}),$$

где φ° соответствует $\varphi^\circ(h) = \varphi(h)$, если $h \in H$ и $\varphi^\circ(y) = 0$, если $y \notin H$.

Ограничения характера χ группы G на ее подгруппу H, будем обозначать через $\chi|_H$.

Предложение 1.3.19. *(Закон взаимности Фробениуса) Для любых характеров χ группы G и φ ее подгруппы H справедливо равенство:*

$$\langle\varphi, \chi|_H\rangle_H = \langle\varphi^G, \chi\rangle_G.$$

Доказательство. См. лемму 5.2 из [28].

1.3.3 Теория Клиффорда

Напомним, фундаментальный результат А. Клиффорда [19] об ограничении неприводимого характера χ группы G на ее нормальную подгруппу N.

Определение 1.3.20. *Пусть N – нормальная подгруппа группы G, θ – характер N. Сопряженным к характеру θ с помощью элемента $g \in G$ называется характер $\theta^g : H \longrightarrow \mathbb{C}$ определяемый равенством $\theta^g(h) = \theta(ghg^{-1})$.*

Определение 1.3.21. *Пусть G – конечная группа, N – ее нормальная подгруппа и θ – характер N. Подгруппа $I_G(\theta)$, состоящая из всех $g \in G$, для которых $\theta^g = \theta$ называется подгруппой инерции характера θ.*

Лемма 1.3.22. *(Теорема Клиффорда) Пусть $N \lhd G$ и $\chi \in Irr(G)$, а $\theta \in Irr(N)$. Тогда из $\langle\chi_N, \theta\rangle_N = e \neq 0$ следует, что*

$$\chi_N = e\textstyle\sum_{i=1}^t \theta_i,$$

где $\theta = \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_t$ – характеры, сопряженные θ.

Доказательство. См. теорему 6.2 из [28].

Предложение 1.3.23. *Пусть $N \lhd G$ и $\chi \in Irr(G)$, а $\theta \in Irr(N)$. Если $I_G(\theta)/N$ — циклическая группа, то $e(\chi) = 1$, т.е. $\chi_N = \sum_{i=1}^t \theta_i$.*

Доказательство. См. 9.12 из [21].

Лемма 1.3.24. *Пусть H – нормальная подгруппа конечной группы G и ψ — неприводимый характер H. Тогда $\psi^G = \sum_{i=1}^{s} e_i\chi_i$, где $\chi_i \in Irr(G)$, e_i делят $|I_G(\psi)/H|$, $\chi_i|_H = e_i\sum_{j=1}^{l}\psi_j$, где ψ_j – сопряженные характеры к характеру $\psi = \psi_1$, $l = |G : I_G(\psi)|$ и $\sum_{i=1}^{s} e_i^2 = |I_G(\psi) : H|$. Если $\chi \in Irr(G)$ и $\langle\chi|_H, \psi\rangle \neq 0$, то $\chi = \chi_i$ для некоторого $i \leq s$.*

Доказательство. См. [28], глава 6 и глава 11.

1.3.4 Характеры простых групп

Предложение 1.3.25. *(Теорема Е.П. Вдовина) Пусть G — неабелева конечная простая группа и $G \not\cong L_2(q)$, где $q = p^t$ для некоторого простого числа p. Пусть A — абелева подгруппа группы G. Тогда $|A|^3 < |G|$.*

Доказательство. См. [2].

Предложение 1.3.26. *Пусть L – неабелева простая группа, не изоморфная $L_2(4)$. Тогда $4|Out(L)| < |L|^{1/2}$. В любом случае $|Out(L)| < |L|^{1/3}$.*

Доказательство. См. [12], с. 12.

Предложение 1.3.27. *Пусть L – неабелева простая группа, не изоморфная $L_n(q)$ или $U_n(q)$ при $n \leq 4$. Тогда $|Out(L)| < |L|^{1/8}$. Если $L \simeq L_4(q)$ или $U_4(q)$, то $|Out(L)| \leq |L|^{1/6}$.*

Доказательство. См. [12], с. 12.

Предложение 1.3.28. *Пусть $G = G'$ – группа с силовской p-подгруппой P порядка $p > 3$ и $H = O_{p'}(G)$, причем число силовских p-подгрупп группы G равно $1 + np$. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

(i) $G/H \simeq L_2(r)$, где либо $r = p$, либо $r = 2^a = p - 1$;

(ii) $n \geq (p + 3)/2$.

Доказательство. См. теорему 5.1, глава VIII из [10].

Предложение 1.3.29. *Пусть $G = G'$ – не p–разрешимая группа с силовской p–подгруппой P порядка $p > 3$, не имеющая нормальных подгрупп порядка 2. Если $|G| < p^3$, то $G \simeq L_2(r)$, где $r = p$ или $r = 2^a = p - 1$.*

Доказательство. См. следствие 5.2, глава VIII из [10].

Предложение 1.3.30. *(Теорема Брауэра и Туана). Пусть G – простая группа порядка pq^bm, где p,q – простые числа, b,m – натуральные числа и $m < p - 1$. Тогда $G \simeq L_2(r)$, где $q = 2$ и либо $r = p = 2^a \pm 1$, либо $r = 2^a = p - 1$.*

Доказательство. См. теорему 5.4, глава VIII из [10].

Предложение 1.3.31. *Пусть G — конечная простая группа. Если силовская 2-подгруппа группы G абелева, то G изоморфна $L_2(q), {}^2G_2(q)$ или J_1. Если силовская 2-подгруппа группы G имеет нетривиальный циклический коммутант, то G изоморфна группе $L_2(q), L_3(q), U_3(q)$ (q нечетно), A_7 или M_{11}.*

Доказательство. Содержится в [18] и в [36].

Предложение 1.3.32. *Пусть G – неразрешимая группа. Тогда число различных степеней неприводимых характеров группы G не меньше 3.*

Доказательство. См. следствие 12.6 из [28].

Предложение 1.3.33. *Пусть G – простая неабелева группа. Тогда существует такой комплексный неприводимый характер χ группы G, что $|G|$ меньше $\chi(1)^3$.*

Доказательство. См. [6].

Предложение 1.3.34. *Степени неприводимых характеров группы $PGL_2(q)$, где q нечетно, $q > 3$ и группы $L_2(q), q = 2^a, a > 1$, состоят из чисел $1, q, q-1, q+1$.*

Доказательство. См. [14] и [1], с. 260.

1.3.5 Характеры групп Фробениуса

Предложение 1.3.35. *Пусть $G \cong F \rtimes H$ – группа Фробениуса с ядром F и дополнением H. Тогда:*

1. Если ψ – неприводимый неглавный характер группы F, тогда ψ^G неприводимый характер G.

2. Если χ неприводимый характер G и ядро χ не принадлежит F, тогда $\chi = \psi^G$, где ψ неприводимый характер F.

Доказательство. См. теорему 4.5.3 в [22], с. 143.

2. Свойства $LC(\Theta)$-групп

2.1 Формулировка результатов

В данной главе изучаются $LC(\Theta)$-группы. Напомним определение $LC(\Theta)$-группы.

Определение 2.1.1. *Конечную группу $G \neq 1$ порядка больше двух, обладающую неприводимым характером Θ таким, что $2\Theta(1)^2 \geq |G|$, будем называть $LC(\Theta)$-группой.*

Основной результат главы показывает, что любой неприводимый характер $LC(\Theta)$-группы G всегда входит в разложение квадрата характера Θ, при условии, что G не является 2-группой.

Теорема 2.1.2. *Пусть G является $LC(\Theta)$-группой. Если порядок G не является степенью числа 2, то любой неприводимый характер G является конституентой характера Θ^2.*

2.2 Вспомогательные результаты

Сформулируем и докажем некоторые свойства неприводимого характера Θ $LC(\Theta)$-группы.

Лемма 2.2.1. *Пусть G является $LC(\Theta)$-группой. Тогда характер Θ является единственным неприводимым характером группы G наибольшей степени. В частности, $\Theta(g)$ – целое рациональное число для всякого $g \in G$.*

Доказательство. Согласно предложению 1.3.2, имеем, что $\sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(1)^2 = |G|$. Докажем лемму 2.2.1 от противного, т.е. пусть Θ, Θ' – неприводимые характеры, для которых выполняется $2\Theta(1)^2 \geq |G|$. Тогда $2\Theta(1)^2 \geq |G|$, $2\Theta'(1)^2 \geq |G|$, то есть $\Theta(1)^2 \geq |G|/2$, $\Theta'(1)^2 \geq |G|/2$. Значит, $\Theta(1)^2 + \Theta'(1)^2 \geq |G|$, что невозможно (так как еще есть главный характер).

С другой стороны $|G| = \sum_{i=1}^{k} \Theta_i(1)^2$, где $k = k(G)$ – число классов сопряженных элементов G, откуда $k = 2$, только при $\Theta = \Theta'$. Однако $|G| = 2$ для $k(G) = 2$. Противоречие с определением 2.1.1.

Итак, характер Θ является единственным неприводимым характером группы G наибольшей степени. Поэтому все сопряженные с ним под действием группы Галуа характеры расширения $\mathbb{Q}(\Theta)$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с помощью присоединения к нему элементов $\Theta(g)$ для всех $g \in G$, совпадают с Θ. Отсюда все значения $\Theta(g)$, $g \in G$ являются целыми рациональными числами. В частности, $\overline{\Theta(g)} = \Theta(g)$ для всякого $g \in G$. Лемма доказана.

Лемма 2.2.2. *Если G – $LC(\Theta)$-группа, то Θ является точным характером.*

Доказательство. Так как $|\Theta(t)| \leq \Theta(1)$ и $|\Theta(t)| = \Theta(1)$ только для $t \in Z^*(\Theta)$, то $|\ker\Theta| \leq 2$, причем в случае $|ker\Theta| = 2$ характер Θ исчезает на всех элементах из $G - ker\Theta$, что возможно только при $|G| = 2$ в силу соотношений ортогональности (предложения 1.3.7 и 1.3.8) характеров Θ и главного характера 1_G. Если же $|ker\Theta| = 1$, то Θ – точный характер по определению 1.3.10. Лемма доказана.

Лемма 2.2.3. *Пусть G – $LC(\Theta)$-группа и M — ее собственная нормальная подгруппа. Тогда характер Θ_M приводим.*

Доказательство. Допустим, что M нормальная в G и Θ_M неприводим. Тогда по предложению 1.3.2 $\Theta(1)^2 \leq |M| - 1 < |M|$. Однако $2\Theta(1)^2 \geq |G| \geq 2|M|$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.2.4. *Пусть G – $LC(\Theta)$-группа и N — ее собственная нормальная подгруппа. Если $\Theta(1) = m$, то $(|G/N|, m) \neq 1$.*

Доказательство. Допустим, что N нормальная в G. По лемме 2.2.3 характер Θ_N приводим. Согласно лемме 1.3.22, $\Theta_N = e\sum_{i=1}^{s}\phi_i$, где ϕ_i – неприводимые характеры группы N, сопряженные с характером ϕ_1, а e и s делят $|G/N|$. Поэтому $m = \Theta(1) = es\phi_1(1)$. Если $(|G/N|, m) = 1$, то $\Theta_N = \phi_1 \in Irr(N)$. Однако $\Theta(1)^2 < |N| \leq |G|/2$, противоречие. Следовательно, $(|G/N|, m) \neq 1$. Лемма доказана.

Лемма 2.2.5. *Пусть G является $LC(\Theta)$-группой. Если порядок G не является степенью числа 2, то $Z(G) = 1$.*

Доказательство. Допустим сначала, что $Z(G) \neq 1$. Значит, $z \in Z(G)$ и $z \neq 1$. Тогда имеется представление φ с характером Θ, при этом $\Theta(z) = \lambda\Theta(1)$ и $|\Theta(z)| = \Theta(1)$.

Действительно, так как Θ – неприводимый характер группы G, то по первому соотношению ортогональности (предложение 1.3.7) имеем

$$|G|\langle\Theta,\Theta\rangle = \sum_{g\in G}|\Theta(g)|^2 = \Theta(1)^2 + |\Theta(z)|^2 + \sum_{g\in G\setminus\{1,z\}}|\Theta(g)|^2 = |G| \leq 2\Theta(1)^2$$

Таким образом, $|G| = 2\Theta(1)^2$. Более того, для всякого $g \in G\setminus\{1,z\}$ будет $\Theta(g) = 0$. Следовательно, $\Theta(z)^2 = \Theta(1)^2 = \frac{|G|}{2}$. В частности, $Z(G) = \{1,z\} = \langle z\rangle$.

Из второго соотношения ортогональности (предложение 1.3.8) теперь следует, что любой элемент gz при $g \in G \backslash Z(G)$ сопряжен с элементом g. Однако элемент $x \in G$ нечетного простого порядка m не может быть сопряжен с xz, который имеет порядок $2m$.

Рассмотрим фактор-группу $G/\langle z\rangle$. Так как $|G/\langle z\rangle| = \Theta(1)^2$ и один из характеров $Irr(G) - Irr(G/\langle z\rangle)$ есть Θ, а

$$|G| = \sum_{\chi \in Irr(G/\langle z\rangle)} \chi(1)^2 + \sum_{\chi \in Irr(G) - Irr(G/\langle z\rangle)} \chi(1)^2,$$

то $\{Irr(G) - Irr(G/\langle z\rangle)\} = \{\Theta\}$. Отсюда $k(G) = k(G/\langle z\rangle) + 1$. Поэтому $|G|$ будет степенью двойки.

Если $ker\Theta = \{1, z\}$ характер Θ исчезает на всех элементах из $G \backslash ker\Theta$, т.е. $\Theta(z) = \Theta(1)$, где $|G| = 2\Theta(1)^2$.

Пусть $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ – все неприводимые характеры группы G, содержащие в своем ядре $Z(G)$. Очевидно, они исчерпывают все неприводимые характеры группы $G/Z(G)$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{k} \chi(1)^2 = \frac{|G|}{2} = \Theta(1)^2.$$

Таким образом,

$$|G| = |G/Z(G)| + \Theta(1)^2.$$

Отсюда число классов сопряженных элементов группы G на единицу больше числа классов группы $G/Z(G)$. В этом случае $Z(G)$ содержится в ядре любого неприводимого характера группы G, отличного от Θ. Лемма доказана.

2.3 Доказательство теоремы 2.1.2.

Пусть для G и Θ выполнено условие теоремы 2.1.2. Допустим, что $\Phi = \Theta^2$ и порядок G не больше $2\Phi(1)$. Заметим, что из вещественности значений Θ следует, что $\Phi(g) \geq 0$ для любого $g \in G$. Допустим, что неприводимый харктер χ обладает свойством $\langle \Phi, \chi \rangle = 0$, т.е. кратность вхождения неприводимого характера χ в Φ равна 0. Тогда

$$\sum_{t \in G^{\#}} \Phi(t)\chi(t) + \Phi(1)\chi(1) = 0.$$

Так как Θ – неприводимый характер группы G, то

$$|G|\langle \Theta, \Theta \rangle = \sum_{t \in G^{\#}} \Phi(t) + \Phi(1) = |G| \leq 2\Phi(1).$$

Стало быть,

$$\Big|\sum_{t\in G^{\#}}\Phi(t)\Big| = \sum_{t\in G^{\#}}\Phi(t) \leq \Phi(1).$$

Далее, учитывая, что все значения $\Phi(t)$ неотрицательны, получаем неравенство

$$\Phi(1)\chi(1) \geqslant \sum_{t\in G^{\#}}\Phi(t)\chi(1) = \Big|\sum_{t\in G^{\#}}\Phi(t)\Big|\chi(1) \geq \Big|\sum_{t\in G^{\#}}\Phi(t)\chi(t)\Big| = \Phi(1)\chi(1).$$

Таким образом, полученные промежуточные неравенства превращаются в равенства, что возможно только при

$$|G| = 2\Phi(1) = 2\Theta(1)^2.$$

При этом $\Phi(t) \neq 0$, тогда и только тогда, когда $|\chi(t)| = \chi(1)$. В частности, из предложений 1.3.14 и 1.3.15 следует, что в этом случае $\lambda = \chi(t)/\chi(1)$ является корнем из единицы. Отметим, что для группы G нечетного порядка теорема доказана и далее можно считать, что порядок группы G четный. Более того, $|G| = 2\Theta(1)^2$.

Допустим сначала, что $\chi = \Theta$ и χ не является конституентой Φ. По сказанному выше имеется неединичный элемент $t_0 \in G$, для которого $\Theta(t_0) \neq 0$. Однако $\Theta(t_0) \neq 0$ только при $\Theta(t_0) = |\Theta(1)|$. Действительно, так как Θ – неприводимый характер группы G, то по первому соотношению ортогональности (предложение 1.3.7) имеем

$$|G|\langle\Theta,\Theta\rangle = \sum_{t\in G}|\Theta(t)|^2 = |G| = 2\Theta(1)^2.$$

В таком случае найдется ровно одно значение $t_0 \in G^{\#}$, для которого $|\Theta(t_0)| = \Theta(1)$. В частности, $Z(G) = \{1, t_0\}$. Более того, для всякого $t \in G\backslash\{1, t_0\}$ будет $\Theta(t) = 0$.

Пусть $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ – все неприводимые характеры группы G, содержащие в своем ядре $Z(G)$. Очевидно, они исчерпывают все неприводимые характеры группы $G/Z(G)$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{k}\chi(1)^2 = \frac{|G|}{2} = \Theta(1)^2.$$

Таким образом,

$$|G| = |G/Z(G)| + \Theta(1)^2.$$

Отсюда число классов сопряженных элементов группы G на единицу больше числа классов группы $G/Z(G)$. В этом случае $Z(G)$ содержится в ядре любого неприводимого характера группы G, отличного от Θ.

Если $g \in G \setminus Z(G)$, то $\Theta(g) = 0$. Из второго соотношения ортогональности (предложение 1.3.8) теперь следует, что любой элемент gt_0 при $g \in G\backslash Z(G)$ сопряжен с элементом g. Однако элемент $x \in G$ нечетного простого порядка m не может быть сопряжен с xt_0, который имеет порядок $2m$. Поэтому $|G|$ будет степенью двойки.

Учитывая, что характер Θ исчезает вне $Z(G)$, для любого $\chi \in Irr(G)$ имеем

$$\langle \Phi, \chi \rangle = |G|^{-1}(\chi(1)\Theta^2(1) + \chi(t_0)\Theta^2(t_0)) = \chi(1).$$

Однако при $\chi = \Theta$ получим $\langle \Phi, \Theta \rangle = 0$.

Теперь можно считать, что $\chi \neq \Theta$. Напомним, что неприводимый характер χ может не входить в разложение Φ лишь в случае $|G| = 2\Theta(1)^2$. Так как $\chi \neq \Theta$, то по соотношению ортогональности $\langle \chi, \Theta \rangle = 0$. Поэтому

$$\sum_{g \in G^{\#}} \chi(g)\Theta(g) = -\chi(1)\Theta(1).$$

Так как,

$$|G|\langle \Theta, \Theta \rangle = \sum_{t \in G^{\#}} \Phi(t) + \Phi(1) = |G| = 2\Phi(1),$$

то

$$\sum_{t \in G^{\#}} \Phi(t) = \Phi(1).$$

Пусть $t_0 = 1, t_1, t_2, \ldots, t_k$ – все элементы группы G, для которых $\Phi(t) \neq 0$. В этом случае также $\chi(t) \neq 0$. Напомним, что тогда $|\chi(t_i)| = \chi(1)$, а так что $\chi(t_i) = \lambda_i \chi(1)$, где λ_i – корень из единицы для любого i. Итак,

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(t_i)\chi(t_i) + \Phi(1)\chi(1) = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \Phi(t_i) = \Phi(1).$$

Обозначим $\lambda_i = \chi(t_i)/\chi(1)$ для $i = 1, \ldots, k$. Согласно доказанному выше, $|\lambda_i| = 1$ для всех i. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(t_i)\lambda_i + \Phi(1) = 0.$$

Обозначим через $a_i = Re(\lambda_i)$, вещественную часть чисел λ_i. Легко видеть, что $|a_i| \leq 1$. Поэтому, учитывая, что $\Phi(t) \geq 0$ для любого $t \in G$, получим

$$\Phi(1) = \left| \sum_{i=1}^{k} \Phi(t_i) a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{k} \Phi(t_i)|a_i| \leq \Phi(1).$$

Отсюда $\lambda_i = -1$ для всех $i \leq k$. Из сказанного и ортогональности χ и Θ имеем

$$0 = \sum_{g \in G^{\#}} \chi(g)\Theta(g) + \chi(1)\Theta(1) = -\chi(1) \sum_{g \in G^{\#}} \Theta(g) + \chi(1)\Theta(1).$$

Поэтому

$$-\sum_{g \in G^{\#}} \Theta(g) + \Theta(1) = 0.$$

Однако $\langle \Theta, 1_G \rangle = 0$, откуда

$$\sum_{g \in G^{\#}} \Theta(g) + \Theta(1) = 0.$$

Противоречие. Итак, для любого $\chi \in Irr(G) \backslash \{\Theta\}$ имеем $\langle \Phi, \chi \rangle \neq 0$. Теорема 2.1.2 доказана.

3. Строение $LC(\Theta)$-групп, у которых $\Theta(1)$ – степень простого числа p

Буква p везде используется для обозначения простого числа. Ниже будут доказаны результаты об $LC(\Theta)$-группах с абелевой силовской p-подгруппой, у которых $\Theta(1)$ - степень простого числа p.

3.1 Формулировка результатов

Теорема 3.1.1. *Пусть G – $LC(\Theta)$-группа. Если для некоторого простого числа p силовская p-подгруппа группы G абелева, а $\Theta(1) = p^m$ для некоторого натурального числа m, то G является p-нильпотентной группой, $O_p(G) = 1$ и силовская p-подгруппа группы G имеет порядок p^m.*

Следующая теорема дает полное описание $LC(\Theta)$-групп с $\Theta(1) = p^m$ и абелевой силовской p-подгруппой.

Теорема 3.1.2. *Пусть G – $LC(\Theta)$-группа с абелевой силовской p-подгруппой и неприводимым характером Θ степени p^m, где p – простое число, а m – натуральное число. Тогда либо p – простое число Мерсенна и группа G – прямое произведение m групп Фробениуса порядков $p(p+1)$, либо $p = 2$ и G – прямое произведение групп, каждая из которых является группой Фробениуса порядка $q_i 2^{m_i}$ (где $q_i = 2^{m_i} + 1$ – простые числа Ферма) или группой Фробениуса порядка $3^2 2^3$ (в этом случае $m_i = 3$), причем $\sum_i m_i = m$.*

3.2 Доказательство теорем

3.2.1 Доказательство теоремы 3.1.1.

Пусть силовская p-подгруппа группы G абелева и $\Theta(1) = p^m$. Покажем, что порядок силовской p-подгруппы P группы G равен p^m и подгруппа $O_p(G) = 1$. Если $z \in P$ и $h_z = |G : C_G(z)|$, то $\frac{h_z \Theta(z)}{\Theta(1)}$ – целое алгебраическое число и из взаимной простоты h_z и p и предложения 1.3.6 следует, что либо $\Theta(z) = 0$, либо $z \in Z(\Theta)$, т.е. $|\Theta(z)| = \Theta(1)$.

Так как $\Theta \in Irr(G)$, то из первого соотношения ортогональности (предложение 1.3.7) получаем

$$|Z(\Theta)|\Theta(1)^2 = \sum_{z\in Z(\Theta)} |\Theta(z)|^2 \leq \sum_{t\in G} |\Theta(t)|^2 = |G|\langle\Theta,\Theta\rangle = |G| \leq 2\Theta(1)^2.$$

Поэтому либо $p = 2$ и $|G| = |P|$, что неверно ввиду абелевости P, либо $\Theta(z) = 0$ для любого $z \in P^{\#}$.

Допустим, сначала, что $O_p(G) \neq 1$. Ввиду абелевости P подгруппа $O_p(M)$ содержится в центре нормальной подгруппы $M = C_G(O_p(G))$ и M содержит P, так, что индекс $|G : M|$ не делится на p. Пусть $N = O_p(G)$. Согласно теории Клиффорда (лемма 1.3.22)

$$\Theta|_M = e\sum_{i=1}^{s} \chi_i,$$

где χ_i – сопряженные неприводимые характеры группы M (в частности, $\chi_i(1) = \chi_1(1)$ для всех $i \leq s$), число e делит индекс подгруппы инерции $I_G(\chi_1)$ в G, а s делит $|I_G(\chi_1) : M|$. Поэтому

$$p^m = \Theta(1) = es\chi_1(1).$$

Так как числа e и s делят $|G : M|$, то они взаимно просты с p. Следовательно, $e = s = 1$ и $\Theta|_M \in Irr(M)$. Последнее означает, что $N \leq Z(\Theta|_M)$. В частности, $|\Theta(g)| = \Theta(1)$ для любого $g \in O_p(G)$. Поэтому

$$|O_p(G)| = 2 = p \ \text{ и } \ |G| = 2p^{2m},$$

т.е. G – 2-группа. Как видно из предыдущего, это приводит к противоречию. Таким образом, $O_p(G) = 1$.

По теореме Бродки (предложение 1.2.18) существует силовская p-подгруппа P_1 группы G, для которой $P \cap P_1 = 1$. Пусть $N = N_G(P)$ и $N_1 = N_G(P_1)$. Так как P и P_1 – единственные силовские p-подгруппы в N и N_1, то $|N \cap N_1|$ не делится на p. При этом N и N_1 сопряжены. Поэтому $G \neq NN_1$. С другой стороны,

$$|NN_1| = \frac{|N|^2}{|N \cap N_1|} \geq |N : P||P|^2.$$

Если $N \neq P$, то $|G| > 2p^{2m}$, что противоречит условию. Значит, $P = N_G(P)$ и по теореме Бернсайда о переносе (предложение 1.2.9) группа G – p-нильпотентна. Теорема 3.1.1 доказана.

3.2.2 Доказательство теоремы 3.1.2.

Предпошлем доказательству теоремы 3.1.2. два вспомогательных утверждения:

Лемма 3.2.1. *Пусть G – $LC(\Theta)$-группа, обладающая абелевой силовской p-подгруппой P и неприводимым характером Θ степени p^m. Тогда $G = F(G) \rtimes P$ – полупрямое произведение подгруппы Фиттинга $F(G)$ группы G и P. При этом $F(G)$ является прямым произведением элементарных абелевых групп.*

Доказательство. В силу теоремы 3.1.1 группа G является p-нильпотентной, т.е.

$$G = M \rtimes P,$$

где $|G| < 2|P|^2$ и $|M| < 2|P|$, а $M = O_{p'}(G)$. Покажем сначала, что

$$M = O_{p'}(G) = F^*(G).$$

Напомним, что $F^*(G)$ есть центральное произведение подгруппы $L(G)$, являющейся центральным произведением квазипростых групп, нормальных в $L(G)$, и подгруппы Фиттинга группы G (не исключается случай, когда одна из упомянутых подгрупп тривиальна) (см. [3], с. 54-55). Так как G является p-нильпотентной и $O_p(G) = 1$ по теореме 3.1.1, то подгруппа $F^*(G)$ содержится в M.

Предположим, что $L(G)$ и $F(G)$ нетривиальны. Согласно предложению 1.27 в [3], имеем $C_G(F^*(G)) \leq F^*(G)$. По теореме Бродки (предложение 1.2.18) пересечение $P \cap P^g = 1$ для некоторого $g \in F^*(G)$. Представив группу $F^*(G)P$, в виде объединения двойных смежных классов $F^*(G)P = \cup_i P g_i P$, получим

$$|F^*(G)||P| \geq |P| + |PgP| = |P| + |P|^2.$$

Значит, $|F^*(G)| \geq |P| + 1$. Учитывая, что $|G| \leq 2|P|^2$, имеем

$$2|P|^2 \geq |G| \geq |P|(|P| + 1)|M : F^*(G)|.$$

Отсюда $M = F^*(G)$.

Пусть

$$|P/C_P(F(G))| = r \;\text{ и }\; |P/C_P(L(G))| = s.$$

По предложению 1.27 в [3] и теореме 3.1.1 пересечение подгрупп $C_P(F(G))$ и $C_P(L(G))$ тривиально. Длина орбиты P на $F(G)$ равна $|P : C_P(F(G))| = r$, а длина орбиты P на $L(G)$ равна $|P : C_P(L(G))| = s$. В силу тривиальности пересечения подгрупп $C_P(F(G))$ и $C_P(L(G))$ имеем

$$r \geq |C_P(L(G))| \;\text{ и }\; s \geq |C_P(F(G))|.$$

Пусть $\bar{L} = L(G)/Z(L(G))$. Группа P индуцирует группу автоморфизмов на $\bar{L}$. Если элемент a из P действует тождественно на $\bar{L}$, то он действует тождественно и на $L = L(G)$. В самом деле, если $[L,\langle a\rangle]\leq Z(L)$,то

$$[Z(L),L]=[L,\langle a\rangle,L]=[\langle a\rangle,L,L]=1.$$

По лемме о трех подгруппах (предложение 1.2.1) имеем $[L,L,\langle a\rangle]=1$. Так как L – квазипростая группа, то $[L,L]=L$. Отсюда $[L,\langle a\rangle]=1$. Применяя теорему Бродки (предложение 1.2.18), заключаем, что группа $P/C_P(L)$ имеет точную орбиту на $L/Z(L)$. В частности,

$$|L(G)|>|Z(L(G))|s.$$

Поэтому $|F(G)|>r$, $|L(G)|>s|Z(G)|$. В частности,

$$|M|=|F(G)L(G)|=\frac{|F(G)||L(G)|}{|F(G)\cap L(G)|}>rs.$$

Так как $C_P(L(G))\times C_P(F(G))$ – подгруппа группы P, то

$$rs=|P/C_P(L(G))||P/C_P(F(G))|=\frac{|P|^2}{|C_P(F(G))||C_P(L(G))|}>|P|.$$

При этом $|M|<2|P|$ только в случае $C_P(F(G))\times C_P(L(G))=P$. Таким образом,

$$G=MP=F(G)C_P(L(G))L(G)C_P(F(G)).$$

Обозначив

$$C_P(F(G))=P_1 \;\text{ и }\; C_P(L(G))=P_2,$$

получим две группы $M_1=L(G)\rtimes P_1$ и $M_2=F(G)\rtimes P_2$, с длинами орбит p-подгрупп P_1 на $L(G)$ и P_2 на $F(G)$ равными $r=|P_1|$ и $s=|P_2|$ соответственно. Таким образом, задача свелась к случаям, когда $F^*(G)=L(G)$ и когда $F^*(G)=F(G)$.

Покажем, что в случае $G=L(G)\rtimes P$, где P – абелева p-группа порядка, взаимно простого с порядком $L(G)=L$, выполнено $|L|\geq 2|Z(L)||P|$. Как замечено выше, P имеет точную орбиту на $L/Z(L)$. Поэтому, не ограничивая общности, допустим, что $Z(L)=1$ и L – прямое произведение $k\geq 1$ простых неабелевых групп. Будем доказывать наше утверждение индукцией по числу k. Если $k=1$, то из предложения 1.3.26 следует, что $|Out(L)|$ меньше, чем $|L|/2$. В этом случае утверждение доказано. Пусть $L=L_1\times L_2$ – прямое произведение двух собственных P-допустимых подгрупп группы L. По предположению индукции

$$|L_1|\geq 2|P/C_P(L_1)|,\; |L_2|\geq 2|P/C_P(L_2)|.$$

Так как $C_P(L_1)\cap C_P(L_2)=1$, то

$$|L|=|L_1||L_2|\geq 4|P/C_P(L_1)||P/C_P(L_2)|=4|P|\frac{|P|}{|C_P(L_1)||C_P(L_2)|}.$$

Так как $C_P(L_1) \cap C_P(L_2) = 1$, то получаем требуемое заключение: $|L| > 2|P|$.

Теперь мы можем считать, что L – прямое произведение $L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_k$ сопряженных в G простых неабелевых групп. Подгруппа P действует транзитивно на множестве $\{L_1, \ldots, L_k\}$ и потому P содержит подгруппу P_0 индекса $k \geq 2$, нормализующую подгруппу L_1. При этом P_0 нормализует также и любую другую подгруппу $L_i, i \leq k$. Поэтому P_0 действует точно на каждой из L_i. По предположению индукции $|L_i| > 2|P_0|$ для всякого $i \leq k$ и

$$|L| > 2^k|P_0| > 2k|P_0| = 2|P|.$$

Таким образом, можно считать, что $F^*(G) = F(G)$. Покажем, что $F(G)$ – прямое произведение элементарных абелевых групп. Как и выше, $G = F(G) \rtimes P$. Предположим сначала, что $s = 1$ и $Q_1 = Q \neq 1$ – силовская q-подгруппа группы $F = F(G)$. По теореме Томпсона (теорема 5.3.11 в [22]) существует такая характеристическая подгруппа Q_0 в Q, что $Q_0/Z(Q_0)$ – элментарная абелева группа и любой q'-автоморфизм группы Q действует нетривиально на $Q_0/\Phi(Q_0)$. Если $F = Q$, то P действует точно на $Q_0/\Phi(Q_0)$ и потому

$$|Q_0/\Phi(Q_0)| \geq |P| + 1.$$

Но если $Q_0 \neq Q$, то $|Q| > 2(|P| + 1)$, так что $|G| > 2|P|^2$, противоречие. Поэтому Q – элементарная абелева группа.

Если F не является силовской q-подгруппой группы G (т.е. $s > 1$), то, воспользовавшись индукцией, получим требуемое заключение. Лемма доказана.

Лемма 3.2.2. *Пусть G – $LC(\Theta)$-группа, удовлетворяющая условиям теоремы 3.1.2, P – ее силовская p-подгруппа, а $F = F(G)$ – подгруппа Фиттинга. Тогда G является прямым произведением групп Фробениуса порядка $q_i^{n_i}p^{m_i}$ с дополнительным множителем порядка p^{m_i}.*

Доказательство. По лемме 3.2.1 подгруппа $F(G) = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_s$ – прямое произведение q_i-подгрупп группы G, являющихся элментарными абелевыми P-допустимыми группами, q_i – простые числа. В силу леммы 3.2.1 любая силовская q-подгруппа Q группы $F(G)$ элементарная абелева и потому может рассматриваться как линейное векторное пространство V размерности n, где $|Q| = q^n$ и группа $P/C_P(V)$ обладает точным представлением на V степени n. Для любой минимальной нормальной подгруппы L группы Q по теореме Машке (теорема 3.3.1 в [22]) существует P-инвариантная (а потому и нормальная в $F(G)P$) подгруппа M в Q, для которой $L \times M = Q$. Поэтому можно считать, что наши обозначения выбраны так, что группа $F(G)$ – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп $Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_s$, каждая из которых элементарная абелева порядка $q_i^{n_i}$, где q_i – некоторое простое число, взаимно простое с p.

Группа $P_i = P/C_P(Q_i)$ обладает неприводимым представлением степени n_i над Q_i, рассматриваемым в качестве векторного пространства над полем $GF(q_i)$. Понятно, что группа

$G/C_G(Q_i)$ изоморфна полупрямому произведению $F_i = Q_i \rtimes P_i$ и является группой Фробениуса порядка $q_i^{n_i} p^{m_i}$, где m_i – натуральное число.

Пусть T_i – прямое произведение всех Q_j, $1 \le j \le s$ отличных от Q_i. Тогда

$$C_P(T_i) \cap C_P(Q_i) \subseteq Z(G) = 1.$$

В то же время длина орбиты P на Q_i равна $|P/C_P(Q_i)|$. Аналогично, $|P/C_P(T_i)|$ – длина орбиты P на T_i, при этом $C_P(Q_i) \times C_P(T_i)$ – подгруппа группы P. Легко видеть, что $|P/C_P(Q_i) \times P/C_P(T_i)| = |P|$, откуда

$$Q_i C_P(L_i) \times L_i C_P(Q_i) = G.$$

При этом $Q_i C_P(L_i) = F_i$ – группа Фробениуса. Теперь индукция завершает доказательство леммы 3.2.2.

Доказательство теоремы 3.1.2. По лемме 3.2.2 порядок подгруппы Фиттинга группы G равен $\prod_{i=1}^{s} q_i^{n_i}$, тогда как порядок силовской p-подгруппы P этой группы, равный степени характера Θ, есть $\prod_{i=1}^{s} p^{m_i} = p^m$.

Так как p^{m_i} – порядок дополнительного множителя группы Фробениуса F_i, то p^{m_i} делит $q_i^{n_i} - 1$. Так как $q_i^{n_i} - 1 = l_i p^{m_i}$, то

$$|G| \ge |P|^2 \prod_{i=1}^{s} \left(l_i + \frac{1}{p^{m_i}} \right).$$

Однако $|G| \le 2|P|^2$ и потому все $l_i = 1$, т.е. $p^{m_i} = q_i^{n_i} - 1$ для всякого $i \le s$.

Из теоремы Жигмонди (предложение 1.1.3) следует, что если a и b – натуральные числа, причем $a \ge 2, b \ge 3$ и $(a, b) \ne (2{,}6)$, то существует такое простое число r, делящее $a^b - 1$, что r не делит $a^i - 1$ при $1 \le i \le b - 1$. Если простое число $q > 2, n \ge 3$ и $q^n - 1 = p^m$, то $r = p = 2$ ибо $q^n - 1$ четно. Поэтому $n \le 2$. Если $n = 2$, то

$$q^2 - 1 = (q - 1)(q + 1) = 2^m$$

только при $q = 3, m = 3$. При $n = 1$ имеем $q - 1 = 2^m$, т.е. $q = 2^m + 1$ – простое число Ферма. Если же $q = 2$, то $2^n - 1 = p^m$ для простого числа p только при $m = 1$ по той же теореме Жигмонди (предложение 1.1.3). То есть p – простое число Мерсенна.

Таким образом, при $p = 2$ группа G – прямое произведение групп Фробениуса порядков $q_i(q_i - 1)$, где q_i – простое число Ферма и групп Фробениуса порядка $3^2 \cdot 2^3$, а при $p > 2$ – прямое произведение групп Фробениуса порядка $p(p+1)$, причем p – простое число Мерсенна. Теорема 3.1.2 доказана.

Примеры

1. Пусть G – прямое произведение двух групп Фробениуса порядков 6 и 72. Тогда G является $LC(\Theta)$-группой с наибольшей степенью неприводимого характера, равной $16 = 2^4$ и абелевой силовской 2-подгруппой (см. таблицу 15 в приложении A).

2. Группа $G = A_4 \times A_4$ является $LC(\Theta)$-группой с наибольшей степенью неприводимого характера, равной $9 = 3^2$ и абелевой силовской 3-подгруппой (см. таблицу 11 в приложении A).

3. Группа $G = AGL_2(3)$ – полупрямое произведение элементарной абелевой группы V порядка 9 и группы $GL_2(3)$, действующей на V как группа невырожденных линейных преобразований. В этом случае

$$|G| = 9 \cdot 48 = 432.$$

В.И. Зенковым в [4] показано, что группа G имеет неприводимый характер Θ степени 2^4, так, что $|G| < 2\Theta(1)^2$, но силовская 2-подгруппа группы G неабелева.

4. Строение $LC(\Theta)$-групп, у которых $\Theta(1)$ – произведение двух простых чисел p и q

4.1 Формулировка результатов

Полное описание $LC(\Theta)$-групп, у которых $\Theta(1)$ – квадрат простого числа p, сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4.1.1. *Пусть G – $LC(\Theta)$-группа с неприводимым характером Θ степени p^2, где p-простое число. Тогда либо группа G – прямое произведение двух групп Фробениуса порядков $p(p+1)$, либо $p = 2$ и $|G| \in \{20, 32\}$.*

Следующая теорема показывает, что в случае $\Theta(1) = pq$, где $p > q$ – простые числа, $LC(\Theta)$-группа будет p-разрешимой.

Теорема 4.1.2. *Пусть G является $LC(\Theta)$-группой. Если $\Theta(1) = pq$, где $p > q$ и p, q различные простые числа, то G – p-разрешимая группа.*

В доказательстве теоремы 4.1.2 также установлено, что при $|G| \notin \{54, 72\}$ порядок $|G|$ равен pq^bm, где $(pq,m) = 1$. Следующая теорема дает описание $LC(\Theta)$-групп с $\Theta(1) = pq$.

Теорема 4.1.3. *Пусть G является $LC(\Theta)$-группой с $\Theta(1) = pq$, где $p > q$ и p, q – простые числа. Тогда G имеет абелеву нормальную подгруппу K индекса pq.*

4.2 Вспомогательные результаты

Так как $|G| \leq 2p^2q^2 < 2p^4$, то первым шагом в изучении $LC(\Theta)$-групп с нашим условием будет описание простых неабелевых групп G, обладающих силовской p-подгруппой порядка p, для которых $|G| \leq 2p^4$.

Заметим, что группы с силовской подгруппой порядка p изучались в серии работ Р.Брауэра и его учеников, начиная с 40-х годов прошлого века, а позднее в работах У.Фейта (см. библиографию в книге [10]). Используя классификацию конечных простых групп, получен следующий результат.

Лемма 4.2.1. *Пусть G – конечная простая неабелева группа с силовской p-подгруппой простого порядка p. Если $|G| \leq 2p^4$, то G изоморфна одной из следующих групп: $L_2(q), q > 3, L_3(q), U_3(q)$ (q – степень простого числа), $Sz(8), A_7, M_{11}, J_1$.*

Доказательство. Согласно теореме классификации конечных простых неабелевых групп (см. [3] для более подробной информации), все простые неабелевы группы принадлежат одному из следующих семейств:

I. Классические простые группы лиева типа: $L_n(q), n \geq 2$, $U_n(q), n \geq 3$, $S_{2n}(q), n \geq 2$, $P\Omega_{2n+1}(q), n \geq 2$, $P\Omega^{\pm}_{2n}(q), n \geq 4$.

II. Исключительные простые группы лиева типа: $G_2(q)$, $F_4(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, ${}^2G_3(q)$, $({}^2F_4(q))'$, ${}^3D_4(q)$, ${}^2B_2(q)$, q – степень простого числа.

III. Спорадические простые группы.

IV. Знакопеременные группы $A_n, n \geq 5$.

Доказательство будем проводить шаг за шагом для всех перечисленных групп.

I. Классические простые группы лиева типа.

(a) Пусть $G \simeq L_n(q), n \geq 3$. Легко видеть, что $|G| > q^{n^2-n}$, а наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^n - 1 < q^n$. Допустим, что $2p^4 > q^{n^2-n}$. Тогда $2q^{4n} > q^{n^2-n}$ и потому $n^2 - 5n < 1$. Отсюда $n \leq 5$. При $n = 5$ имеем более точную оценку $|G| > q^{21} \geq 2q^{20}$. Поэтому $n \leq 4$. При $n = 4$ имеем:

$$|G| = 1/dq^6(q^4 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1), \text{ где } d = (4, q - 1).$$

Теперь наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^2 + q + 1 < 2q^2$. Если $2p^4 \geq |G| > q^{13}$, то $2(2q^2)^4 > q^{13}$, что исключает этот случай.

(b) Пусть $G \simeq U_n(q), n \geq 3$. Легко видеть, что $|G| > q^{n^2-n}$, а наибольший простой делитель порядка группы не превосходит q^n. Допустим, что $2p^4 > q^{n^2-n}$. Тогда $2q^{4n} > q^{n^2-n}$ и потому $n^2 - 5n < 1$. Отсюда $n \leq 5$. При $n = 5$ имеем более точную оценку $|G| > q^{21} \geq 2q^{20}$. Поэтому $n \leq 4$. При $n = 4$ имеем:

$$|G| = 1/dq^6(q^4 - 1)(q^3 + 1)(q^2 - 1), \text{ где } d = (4, q + 1).$$

Теперь наибольший простой делитель порядка группы (при $q > 2$) не превосходит $q^2 - q + 1 < 2q^2$. Если $2p^4 \geq |G| > q^{13}$, то $2(2q^2)^4 > q^{13}$, что исключает этот случай. Случай $q = 2$ также невозможен.

(c) Пусть $G \simeq S_{2n}(q)$ или $P\Omega_{2n+1}(q), n \geq 2$. Порядок G равен $1/dq^{n^2}(q^{2n} - 1)\dots(q^2 - 1)$, где $d = (2, q - 1)$. Если $n \geq 2$, то $|G| > q^{2n^2}$. Наибольший простой делитель порядка G не превосходит $q^n + 1$. Легко видеть, что $2(q^n + 1)^4 < q^{4n+3} < q^{2n^2}$ для $(q, n) \neq (2, 2)$. При $(q, n) = (2, 2)$ группа $G \simeq S_4(2)$ не проста и $S_4(2)' \simeq L_2(9)$.

(d) Пусть $G \simeq P\Omega^{\pm}_{2n}(q), n \geq 4$. Легко видеть, что $|G| > q^{2n^2-2n}$, а наибольший простой делитель ее порядка не превосходит q^n+1. Так как $2(q^n+1)^4 < q^{4n+3}$ при $n \geq 4$, то $2p^4 < |G|$.

I. Исключительные простые группы лиева типа.

(a) Пусть $G \simeq G_2(q)$. Порядок G равен $q^6(q^6-1)(q^2-1)$, так что наибольший простой делитель его не превосходит $q^2+q+1 < 2q^2$. Так как $|G| > q^{13}$, то этот случай исключен.

(b) Пусть $G \simeq F_4(q)$ порядка $q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$. Наибольший простой делитель порядка G не превосходит q^4+1. Так как $|G| > 2(q^4+1)^4$, то этот случай исключен.

(c) Пусть G – одна из групп $E_6(q), E_7(q), E_8(q)$ или ${}^2E_6(q)$. Порядок любой из этих групп больше q^{72}, а наибольший простой делитель порядка не превосходит q^9. Так что эти группы также исключены.

(d) Пусть $G \simeq {}^2G_2(q)$. Порядок этой группы равен $q^3(q^3+1)(q-1) > q^6$. При этом $q = 3^{2n+1}$, а наибольший простой делитель p порядка группы не превосходит $q+\sqrt{3q}+1 < 2q$. Если $q > 3$, то $|G| > 2p^4$. Если же $q = 3$, то $G \simeq L_2(8).3$ – не простая группа.

(e) Пусть $G \simeq ({}^2F_4(q))'$. Ее порядок больше чем $2q^{16}$, тогда как наибольший простой делитель p порядка группы не превосходит q^4-q^2+1. Этот случай исключен.

Пусть $G \simeq {}^3D_4(q)$ порядка $q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1) > q^{26}$, тогда как наибольший простой делитель p не превосходит $q^4+q^2+1 < 2q^5$. Поэтому и этот случай исключен.

Пусть $G \simeq {}^2B_2(q) \simeq Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1}$. Наибольший простой делитель p порядка G не превосходит $q+\sqrt{2q}+1$, так что $|G| > 2p^4$ при $q > 8$. Случай $q > 8$ исключен.

III. Спорадические простые группы. Все случаи рассматриваются с помощью [20]. Единственные возможности для p соответствуют группе Матье M_{11} и группе Янко J_1.

IV. Знакопеременные группы $A_n, n \geq 5$.

Случаи $5 \leq n \leq 6$ соответствуют группам $L_2(5)$ и $L_2(9)$. При $n = 7$ появляется группа A_7, где $p = 7$. Все остальные возможности исключены. Лемма доказана.

4.3 $LC(\Theta)$-группы, у которых $\Theta(1) = p^2$

Доказательство теоремы 4.1.1. Напомним, что G – $LC(\Theta)$-группа с $\Theta(1) = p^2$, где p – простое число. Зафиксируем данные обозначения, которые будут употребляться до конца доказательства теоремы 4.1.1.

Так как $|G| \leq 2p^4$, где p – простое число, то порядок силовской p-подгруппы не превосходит p^5. Так как $p^2 \| |G|$, то $|G| = p^a m$, $a, m \in \mathbb{N}$ и $a \leq 5$. Допустим, что $P \in Syl_p(G)$.

Начнем, со случая, когда $a \geq 4$.

Лемма 4.3.1. *Пусть G – $LC(\Theta)$-группа, силовская p-подгруппа, которой имеет порядок не меньше p^4. Тогда $p = 2$ и $|G| = 32$.*

Доказательство. Если $p > 2$, то $|P| = p^4$, где $P \in Syl_p(G)$. Так как $|P| = p^4$, то $|N_G(P)| = p^4 n$, при $n \in \mathbb{N}$ и $|G| = p^4 m = p^4 n(1+kp) \leq 2p^4$, k – целое неотрицательное, откуда $n(1+kp) \leq$

2. Т.к. p – простое и $p^4 < |G|$, то $k = 0$, а $n = 2$. Поэтому $|G| = 2p^4$ и $P \lhd G$. Отметим, что Θ – точный характер из леммы 2.2.2.

По лемме 1.3.22 имеем

$$\Theta|_P = e\sum_{i=1}^{s}\theta_i,$$

где θ_i – сопряженные неприводимые характеры группы P (в частности, $\theta_i(1) = \theta_1(1)$ для всех $i \leq s$), число e делит индекс подгруппы инерции $I_G(\theta_1)$ в G, а s делит $|I_G(\theta_1) : P|$. Поэтому

$$p^2 = \Theta(1) = es\theta_1(1).$$

Из лемм 2.2.3 и 2.2.4 получаем, что $p = 2$ и $|G| = 2^5$ (см. таблицу 5 в приложении A), т.е. G – 2-группа, противоречие. Лемма доказана.

Следующая лемма исключает случай, когда силовская p-подгруппа имеет порядок p^3.

Лемма 4.3.2. *Если G – $LC(\Theta)$-группа с неприводимым характером Θ степени p^2, отличная от группы порядка 32, то ее силовская p-подгруппа P имеет порядок p^2.*

Доказательство. По лемме 4.3.1 при $p > 2$ силовская p-подгруппа имеет порядок не больше p^3. Пусть $|P| = p^3$ и $|N_G(P)| = p^3 n$, при $n \in \mathbb{N}$. Тогда $|G| = p^3 m = p^3 n(1 + kp) \leq 2p^4$, где k – целое неотрицательное. Отсюда $m = n(1 + kp) \leq 2p$.

Если $n \geq 2$, то $1 + kp < p$, верно лишь при $k = 0$ т.е. $m = n \leq 2p$ и $P \lhd G$, где $(n, p) = 1$.

А если $n = 1$, то $1 + kp < 2p$, верно лишь при $k = 1$ т.е. $m = p + 1$.

Итак, $n = 1$ и $k = 1$. Т.е., $|G| = p^3(1 + p)$ и $P = N_G(P)$, причем $|G : N_G(P)| = 1 + p$ и $|N_G(P)| = |P|$. Представив группу в виде объединения двойных смежных классов, $G = \cup_i Px_iP$ получим

$$|G| \geq |P| + |PxP| = |P| + \frac{|P|^2}{|P \cap P^x|} = |P|(1 + \frac{|P|}{|P \cap P^x|}) = p^3(1 + p).$$

Значит, $|P \cap P^x| = p^2$, причем $P \cap P^x \lhd \langle P, P^x\rangle$ т.е., $P \cap P^x = D$ – нормальная подгруппа порядка p^2.

Если D абелева, то по лемме 1.3.17 имеем, что $\Theta(1)$ делит $|G : P \cap P^x| = p(p + 1)$, а это является противоречием. Лемма доказана.

Теперь $a = 2$, тогда p-силовская подгруппа P абелева порядка p^2. Закончим **доказательство теоремы 4.1.1**.

Пусть G – $LC(\Theta)$-группа, с силовской p-подгруппой P порядка p^2. Из теоремы 3.1.2 следует, что $G = F(G) \rtimes P$.

Если $F(G)$ является прямым произведением k силовских r_i-подгрупп группы G, то $k = 2$ и $G = (R_1 \rtimes C_P(R_2)) \times (R_2 \rtimes C_P(R_1))$, где $R_1 \in Syl_{r_1}(G), R_2 \in Syl_{r_2}(G)$. При этом R_1 и R_2 – абелевы группы. Отсюда следует, что $R_1 \rtimes C_P(R_2)$ и $R_2 \rtimes C_P(R_1)$ – группы Фробениуса порядков $p(p + 1)$.

Если же $F(G)$ – силовская r-подгруппа группы G, то G будет группой Фробениуса порядка $p^2(p^2+1)$, что возможно лишь при $p = 2$ и $|G| = 20$ (см. таблицу 4 в приложении A), что и утверждалось. Теорема доказана.

4.4 $LC(\Theta)$-группы, у которых $\Theta(1) = pq$

4.4.1 Доказательство теоремы 4.1.2.

Напомним, что G – $LC(\Theta)$–группа с $\Theta(1) = pq$, где p и q различные простые числа и $p > q$. Зафиксируем данные обозначения, которые будут употребляться на протяжении оставшейся части параграфа.

Так как $|G| \leq 2p^2q^2$, где p и q – различные простые числа и $p > q$, причем $p^2q^2 < |G| \leq 2p^2q^2 < 2p^4$, а поскольку $pq||G|$, то $|G| = p^aq^bm$, где $a, b, m \in \mathbb{N}$ т.е. $p^2q^2 < p^aq^bm \leq 2p^2q^2 < 2p^4$. И так как $p > 2$, то p^4 не делит $|G|$. Отсюда $a \leq 3$, т.е. силовская p-подгруппа группы G имеет порядок не больше p^3. Допустим, что $P \in Syl_p(G)$.

Начнем, со случая, когда порядок силовской подгруппы равен p^3, т.е. $a = 3$.

Лемма 4.4.1. *Пусть G – $LC(\Theta)$–группа и силовская p-подгруппа P имеет порядок p^3. Тогда $p = 3$, $q = 2$ и $|G| = 54$.*

Доказательство. Так как $|P| = p^3$, то $|N_G(P)| = p^3n$, при $n \in \mathbb{N}$ и $|G| = p^3n(1+kp) \leq 2p^2q^2$, где k – целое неотрицательное, откуда $pn(1+kp) \leq 2q^2$.

При $k \neq 0$: $n(1+kp) < 2q$. Если $n \geq 2$, то $1+kp < q$, что неверно. Значит, $n = 1$.

Пусть $k \geq 1$. $|G| = p^3(1+kp) \leq 2p^2q^2$, причем q делит $1+kp$. Очевидно, что $k = 1$ и q делит $p+1$, причем $q < p$. При этом $q \leq \frac{p+1}{2}$. Значит, $p(1+p) \leq 2\frac{(p+1)^2}{4}$, что неверно, поэтому $k = 0$ и $P \lhd G$. При этом $|G| = p^3qm \leq 2p^2q^2$, так, что $pm \leq 2q$. Так как $p > q$, то $m = 1$ и $p \leq 2q$.

Итак, $|G| = p^3q$ и $P \lhd G$. Если P абелева, то по лемме 1.3.17 степень характера $\chi(1)$ делит q для любого $\chi \in Irr(G)$. Противоречие.

Отсюда P неабелева и $P/\Phi(P)$ – элементарная абелева, $|P/\Phi(P)| = p^2$. Следовательно, $N_G(P)/P \leq Aut(P/\Phi(P)) \leq GL_2(p)$ и q делит $p \pm 1$.

Если q делит $p-1$, то $q \leq \frac{p-1}{2}$, а тогда $p \leq \frac{2(p-1)}{2}$, что невозможно, либо $q = p-1 = 2$, а тогда $p \leq 2q = 4$. Значит, $p = 3, q = 2$ и $|G| = 3^3 \cdot 2 = 54$.

Пусть $q = \frac{p+1}{2}$. Тогда либо $q = 2, p = 3, |G| = 54$, либо $q = \frac{p+1}{2}$ нечетное простое число. В последнем случае $G/\Phi(P)$ – группа Фробениуса порядка $p^2\frac{(p+1)}{2}$.

Так как в этом случае $Z(P) = \Phi(P)$ содержится в центре группы G, то получаем противоречие.

То есть $|P| = p^3$, что возможно лишь при $p = 3, q = 2$ и $|G| = 54 = 3^3 \cdot 2$ (см. таблицу 17 в приложении A). Лемма доказана.

Все случаи при $a = 2$, т.е., когда силовская подгруппа имеет порядок p^2, сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 4.4.2. *Если G – $LC(\Theta)$–группа, то $|G| \not\equiv 0(mod\ p^2)$ или $|G| = 72$, либо $|G| = 54$.*

Доказательство. Случай, когда порядок силовской p-подгруппы равен p^3 рассмотрен в лемме 4.3.1. Пусть силовская p-подгруппа $LC(\Theta)$-группы G имеет порядок p^2 и $\Theta(1) = pq$. Тогда $|G| = p^2qm \le 2p^2q^2$, откуда $m \le 2q < 2p$. В свою очередь силовская q-подгруппа группы G либо имеет порядок $\le q$, либо $q = 2$ и $|G| \le 8p^2$, либо $|G| = p^2q^2$ или $2p^2q^2$.

Возможны подслучаи:

(1) $|G| \le 8p^2$ и $\Theta(1) = 2p$, $q = 2$: Учитывая, что силовская p-подгруппа P группы G абелева, а пересечение любых двух силовских подгрупп нетривиально, имеем $O_p(G) > 1$. Если силовская p-подгруппа группы G нормальна, то степени любого неприводимого характера не делятся на p по следствию Ито (предложение 1.3.3). Но тогда $n(1+kp) \le 8$, где $n = |N_G(P) : P| > 1$ по теореме Бернсайда (предложение 1.2.11). Значит, $1 + kp \le 4$ и $kp \le 3$, откуда $p = 3, k = 1$. В таком случае $|G| = 72$ (см. таблицы 18 и 19 в приложении A).

(2) $|G| = 2p^2q^2$, $(2, pq) = 1$: Если $|G : N_G(P)| \equiv 1(mod\ p)$, то $|G : N_G(P)| = 2q$ и $|N_G(P)| = p^2q$. Так как $1 + 2p > 2q$, то $1 + p = 2q$, т.е., $q = \frac{p+1}{2}$.

С другой стороны, $O_p(G) \ne 1$, ибо любые p-силовские подгруппы абелевы и имеют нетривиальное пересечение. Значит, $O_p(G) \cong C_p$ – циклическая порядка p. Из неабелевости $N_G(P)$ следует, что q делит $p - 1$. Отсюда $q = 2$, а это случай (1).

(3) $|G| = p^2q^2$: Пусть $P \in Syl_p(G), Q \in Syl_q(G)$. Если $N_G(P) = P$, то G – p–нильпотентна и $G = Q \rtimes P$. По лемме 1.3.17 степень характера $\chi(1)|p^2$, что неверно.

Если $N_G(P) = G$, то $G = P \rtimes Q$ и $\chi(1)|q^2$ для любого неприводимого χ, противоречие. Значит, $|N_G(P)| = p^2q$ и $|G : N_G(P)| = q \not\equiv 1(mod\ p)$. Таким образом, случай (3) невозможен.

(4) $|G| = p^2qm$, где $(m, pq) = 1$: Тогда $m \le 2q$. В то же время $|N_G(P)| = np^2$, где q делит $n(1 + kp) = qm$. Если q делит n, то $1 + kp \le m$, что невозможно при $k > 1$. Значит, $k = 1$ и $n = q$. А тогда $m = 1 + p \le 2q$. Как и в случае (3) q делит $p - 1$. Если $q \le \frac{p-1}{2}$, то $2\frac{p-1}{2} \ge 2q > m = 1 + p$ и $p - 1 = q$, так, что $q = 2, p = 3$. Отсюда $|G| = 9 \cdot 2 \cdot 4 = 72$, а это случай (1).

Теперь q делит $1 + kp$ и $(n, q) = 1$. Так как $O_p(G) \cong C_p = \langle x\rangle$, то $|G : C_G(x)|$ делит $|Aut(C_p)| = p - 1$.

По лемме 1.3.22 имеем $\Theta|_{C_G(x)} = e\sum_{i=1}^{s}\varphi_i$, где $\varphi_i \in Irr(C_G(x))$ и поэтому $\Theta(1) = pq = e\varphi_i(1)s$.

Так как $P \le C_G(\langle x\rangle)$, $C_G(\langle x\rangle) \lhd G$ то по аргументу Фраттини $G = C_G(x)N_G(P)$. Поэтому $\frac{|C_G(x)||N_G(P)|}{|C_G(x) \cap N_G(P)|} = |G|$ и $|G : N_G(P)| = 1 + kp = |C_G(x) : C_G(x) \cap N_G(P)|$. Поэтому q делит $|C_G(x) : C_G(x) \cap N_G(P)|$ и не делит $|N_G(P)|$. Но тогда q не делит $|G : C_G(x)|$. По лемме 1.3.22 имеет место разложение $\Theta_H = c\sum_{i=1}^{s}\varphi_i$, где φ_i – неприводимые сопряженные с $\varphi = \varphi_1$ характеры группы H и $c = \langle\Theta_H, \varphi_i\rangle$.

При этом s делит $|G : C_G(x)||p - 1$ и c делит $p - 1$.

Отсюда $pq = cs\varphi(1)$. Так как p не делит cs и q не делит cs, то $pq = \varphi(1)$ и $cs = 1$, т.е. $\varphi|_{C(x)}$ неприводимый характер группы $C_G(x)$. В этом случае, $|\Theta(x)| = pq$ противоречие. Лемма доказана.

Далее будем считать, что $a = 1$, т.е. $|G| = pq^b m$, где m взаимно просто с pq.

Лемма 4.4.3. *Пусть G — простая $LC(\Theta)$-группа порядка $|G| = pq^b m$, где $p > q$, $(m, pq) = 1$. Тогда $b \leq 2$ и $q > 2$.*

Доказательство. Так как $\Theta(1) = pq$ и $|G| = pq^b m \leq 2\Theta(1)^2$, то при $b \geq 3$ получим $m < 2p/(q^{b-2}) < p-1$, когда $q > 2$ или $b \geq 4$. Если же $q = 2$ и $b \leq 3$, то силовская 2-подгруппа группы G имеет порядок не более 8 и потому либо абелева, либо диедральна. По предложению 1.3.31 группа G изоморфна одной из следующих групп: $L_2(q), {}^2G_2(q), J_1, A_7$. Остальные группы из списка предложения 1.3.31 имеют силовскую 2-подгруппу порядка не меньше 16. Используя предложения 1.3.30, 1.3.34, порядки групп ${}^2G_2(q)$ и таблицы характеров групп J_1 и A_7 из [1], получаем противоречие. Поэтому $b \leq 2$ и $q > 2$. Лемма доказана.

Лемма 4.4.4. *Пусть G – $LC(\Theta)$-группа порядка $|G| = pq^b m$, где $p > q, (m, pq) = 1$. Если $|G| < p^3$, то $G \neq G'$.*

Доказательство. Допустим, что $G = G'$. Так как G является $LC(\Theta)$–группой, то $Z(G) = 1$ по лемме 2.2.5. В частности, G не имеет нормальных подгрупп порядка 2. По предложению 1.3.29 группа G изоморфна $L_2(r)$, где $q = 2$, $r = p$ или $r = p-1 = 2^a$, а эта группа не является $LC(\Theta)$-группой. Лемма доказана.

Лемма 4.4.5. *Пусть G — не p-разрешимая $LC(\Theta)$-группа порядка $|G| = pq^b m$, где $p > q, (m, pq) = 1$. Тогда $|G| > p^3$.*

Доказательство. Из леммы 4.4.4 известно, что $G \neq G'$. Предположим, что $H = O_{p'}(G)$ и G не p–разрешимая группа. Пусть M/H – минимальная нормальная подгруппа группы G/H. Тогда M/H не p–разрешимая и совпадает своим коммутантом. Так как силовская p–подгруппа группы G порядка p, то M/H — простая неабелева группа. По предложению 1.3.29 имеем $M/H \simeq L_2(r)$, где либо $r = p$, либо $r = p - 1 = 2^a$. Допустим, что $M/H \simeq L_2(p)$. Тогда $G/M \simeq L_2(p)$ или $PGL_2(p)$. При $p > 3$ и $|H| \geq 3$ порядок G больше p^3. Тем самым, эта возможность исключена. Если $M/H \simeq L_2(p-1)$, то $|M/H| = p(p-1)(p-2) = p^3 - 3p^2 + 2p > 1/2p^3$ при $p \geq 7$ и $|G| > p^3$ для G, не являющейся простой группой. Если $p = 5$, то $|G/M||H| < 125/60$ только при $|H| = 2$, что уже было исключено выше, либо $G \simeq Aut(L_2(5)) \simeq S_5$. Таблица характеров в [1] исключает и эту возможность. Поэтому $|G| > p^3$. Лемма доказана.

Лемма 4.4.6. *Пусть G – не p-разрешимая $LC(\Theta)$-группа порядка $|G| = pq^b m$, где $p > q$, $(m, pq) = 1$. Тогда $b \leq 2$.*

Доказательство. В силу леммы 4.4.5 и условий, наложенных на группу G, имеем:

$$p^3 < |G| = pq^b m \leq 2p^2q^2,$$

откуда $p < 2q^2, q^{b-2} \leq 2p/m$ и $q^{b-4} < 4/m$. При $m = 1$ или 2 и $b \geq 3$ группа G разрешима. Поэтому $m \geq 3$, откуда $b \leq 4$.

При $b = 4$ имеем $m < 4$. Следовательно, $m = 3$. Очевидно, $m < p - 1$ и по предложению 1.3.30 группа G имеет композиционный фактор, изоморфный $L_2(p)$ или $L_2(p-1)$, где $p = 2^a+1$. При этом $q = 2$. Отсюда, учитывая, что $m = 3$, имеем: $p = 5$ или $p = 7$. В первом случае $|G| < 200$, а во втором – $|G| < 392$. Так как центр группы G тривиален, то она изоморфна $PGL_2(s)$, где $s \in \{5, 7\}$. По предложению 1.3.34 получаем противоречие.

Предположим, что $b = 3$. Тогда $q \leq 2p/m$. Если $q \geq 3$, то $m < p-1$. По предложению 1.3.30 у группы имеется композиционный фактор M/N, изоморфный группе $L_2(p)$ или $L_2(p-1)$, где $p-1 = 2^a$ для некоторого натурального числа $a \geq 2$. В обоих случаях $N = O_{p'}(G)$, а G/M изоморфна подгруппе $Out(M/N)$. Допустим, что $M/N \simeq L_2(p)$. Если q делит $p - 1/2$, то и q^3 делит $p - 1/2$. Но тогда $m \geq p + 1$, что неверно. Если q делит $p + 1$, то q^3 делит $(p+1)/2$, откуда $m = p - 1$ что также неверно. Пусть $M/N \simeq L_2(p-1)$, где $p = 2^a + 1$. Так как q по предположению, нечетно, то q^3 делит $p - 2 = 2^a - 1$, откуда $m = 2^a = p - 1$, что приводит к противоречию.

Пусть теперь $b = 3, q = 2$. Тогда силовская 2-подгруппа группы G либо абелева, либо неабелева порядка 8. В силу предложения 1.3.31 группа G имеет композиционный фактор, изоморфный $L_2(r), A_7$, ${}^2G_2(q)$ или J_1. При этом $p < 2q^2 = 8$, а $m \leq p$. Поэтому, учитывая, что $(m, qp) = 1$, имеем либо $p = 5$, $m = 3$, либо $p = 7, m = 3$ или $m = 5$. Так как во всех случаях оказывается, что m – простое число, то $G = M$ — простая неабелева группа, $N = 1$. По предложению 1.3.30 группа G изоморфна $L_2(5)$ или $L_2(7)$. В обоих случаях $|G| < p^3$. По лемме 4.4.5 получили противоречие. Стало быть, $b \leq 2$. Лемма доказана.

Лемма 4.4.7. *Пусть G — не p–разрешимая $LC(\Theta)$–группа порядка $|G| = pq^b m$, где $p > q, (m, pq) = 1$. Тогда либо $b = 1$, либо G – простая группа порядка pq^2m.*

Доказательство. Предположим, что $b = 2$. В этом случае (ввиду лемм 4.4.5 и 4.4.6) имеем:

$$p^3 < |G| = pq^2m \leq 2p^2q^2.$$

Отсюда $2p \geq m, p < 2q^2$. Пусть группа G имеет не p-разрешимый композиционный фактор M/N. Понятно, что $|M/N| = pq^\lambda m_0$, где $\lambda \leq 2, m_0$ делит m. Если $\lambda = 0$, то силовская p–подгруппа группы M/N нормальна, что неверно. Значит,$\lambda \geq 1$.

При $m_0 < p - 1$, по предложению 1.3.30, группа M/N имеет композиционный фактор, изоморфный $L_2(p)$ или, $L_2(p-1), p = 2^a + 1$ и $N = O_{p'}(G)$. В обоих случаях $q = 2$. Так как $q = 2$, то $p < 8$ и G имеет абелеву силовскую 2-подгруппу (порядка 4). Отсюда $p = 5, q = 2, m_0 = 3$. Так что $M/N \simeq L_2(5)$. Следовательно, $|G/M||N| = m/m_0 < 4$. Так как G не имеет нормальных подгрупп порядка 2 и $|G| = pq^2m < 80$, то $G \simeq L_2(5)$, что неверно.

Таким образом, $m_0 \geq p - 1$ и $m/m_0 \leq 2$. Кроме того, $|G/M||N|$ делит $2q^{2-\lambda}$. Если $\lambda = 2$, то $N = 1$, ибо G не имеет нормальных подгрупп порядка 2. Если $m = m_0$, то $|N|$ делит q и $|G/C_G(N)| = 1$ и в этом случае $N = 1$. Если же $|N| = 2q$, то G изоморфна прямому произведению неабелевой группы порядка $2q$ и простой неабелевой группы G_1. Степень любого неприводимого характера группы N делит 2, ибо N – диедральная. Так как $(pq, 2) = 1$, то из леммы 2.2.4 получаем, противоречие. Поэтому группа G_1 имеет неприводимый характер степени pq. Ввиду теоремы 2.1.2 характер Θ^2 должен содержать любой характер диедральной группы порядка $2q$, что, очевидно, неверно.

Следовательно, в любом случае $N = 1$ и M — простая неабелева группа, причем $|G : M|$ делит $2q$.

Предположим, что G не является простой группой. По лемме 2.2.3 характер Θ_M содержит неприводимый характер ϕ, для которого $pq = e\phi(1)$, где e и s делят $2q$ и $\phi(1) < pq$. Так как M — простая неабелева группа, то $\phi(1) > 1$. Поэтому $\phi(1) = p$. Более того, можно считать, что ϕ имеет q сопряженных характеров по лемме 1.3.22. В частности, $|M| > p^2q$. Поэтому $|G/M| = q$. Кроме того, $|M| = pqm$.

Если $y \in C_M(P)$ — элемент порядка, взаимно простого с p, то $|G : C_M(y)|\phi(y)/\phi(1)$ целое алгебраическое число. По предложению 1.3.6 либо $y \in Z(\phi) \leq S(M) = 1$, либо $\phi(y) = 0$. Допустим, что $y \neq 1$ и $\phi(y) = 0$. Тогда скалярное произведение $\langle \phi, 1_{\langle y \rangle} \rangle = |\langle y \rangle|^{-1}\phi(1)$ – целое рациональное число, что исключено. Поэтому $C_M(P) = P$.

По предложению 1.3.28 группа M либо изоморфна $L_2(r)$, где $r = p$ или $r = p - 1 = 2^a$, либо $|M : N_M(P)| = 1 + np$ с $n \geq (p+3)/2$. Если $M \simeq L_2(r)$ для $r = p$, то $|Out(M)| = 2$, откуда $p \leq 8$. По предложению 1.3.34 получаем противоречие. Если $M \simeq L_2(2^a)$, где $a = \log_2(p - 1)$, то $|Out(M)| = a$. В этом случае из $2q^2 > p$ следует, что $4\log_2(p) > p$. Поэтому $p \leq 17$. Так как q — нечетное простое число, то эта возможность исключена.

Таким образом, $|M : N_M(P)| = 1 + np$, где $n \geq (p + 3)/2$. Обозначим

$$|N_M(P) : C_M(P)| = |N_M(P) : P| = e.$$

Так как $|M| = pmq = ep(1 + np)$, то $e(1 + np) = mq \leq 2pq$. Следовательно, $e < 2q/n < 4$. Так как M не является p–нильпотентной, то $e > 1$. Поэтому $e = 2$ или 3.

Элемент $u \in G \setminus M$ порядка q индуцирует автоморфизм группы M, нормализующий подгруппу $N_M(P)$. Если q не делит $(p - 1)/e$, то $C_G(u)$ имеет порядок, делящийся на epq^2. Отсюда $|G : C_G(u)| = mpq^2/epq^2 \leq m/2 \leq p$. По предложению 1.2.10 имеем $|G : C_G(u)| \equiv 1(mod\ p)$, что неверно.

Поэтому q делит $(p - 1)/e$. Отсюда из $e(1 + np) = mq \leq 2pq \leq 2p(p - 1)/e$ получаем: $n \leq 2(p - 1)/e^2 \leq (p - 1)/2$. Так как $n \geq (p + 3)/2$, получили противоречие.

Следовательно, либо $b = 1$, либо G – простая группа порядка pq^2m. Лемма доказана.

Лемма 4.4.8. *Пусть G – не p-разрешимая $LC(\Theta)$-группа порядка $|G| = pq^bm$, где $p > q$, $(m, pq) = 1$. Тогда G – не простая группа.*

Доказательство. По лемме 4.2.1 группа G изоморфна одной из групп в ее заключении. При этом группы $L_2(q)$, $L_3(q)$, $U_3(q)$ не являются простыми $LC(\Theta)$-группами (их таблицы характеров имеются в [1]). Таблицы характеров групп $A_7, M_{11}, Sz(8)$ и J_1 содержатся в Приложении 1 книги [1]. Ни одна из перечисленных групп не является $LC(\Theta)$-группой при любом выборе неприводимого характера Θ. Лемма доказана.

Лемма 4.4.9. *Пусть G – не p-разрешимая $LC(\Theta)$-группа. Тогда $\tilde{G}$, главный не p-разрешимый фактор группы G, изоморфен $L_2(r)$ для натурального числа r, являющегося степенью простого числа s.*

Доказательство. Пусть $\tilde{G}$ – главный не p-разрешимый фактор группы G. В силу лемм 4.4.7 и 4.4.8 порядок G равен pqm, причем $m < 2pq$ и $p < 2q^2$. По лемме 4.2.1 $\tilde{G}$ изоморфна одной из следующих групп: $Sz(8)$, $p = 13$, A_7, $p = 7$, M_{11}, $p = 11$, J_1, $p = 19$, $L_2(r)$, $L_3(r)$, $p = r^2 + r + 1$ или $U_3(r)$, $p = r^2 - r + 1$.

Допустим, что $\tilde{G} \simeq Sz(8)$, $p = 13$. Если $q = 7$, то $\Theta(1) = 7 \cdot 13 = 91$ и $2 \cdot 91^2 < |\tilde{G}|$, что исключает эту возможность.

Пусть $\tilde{G} \simeq A_7$. Тогда $pq = 35$ и $|\tilde{G}| > 2 \cdot 35^2$, что исключает эту возможность.

Пусть $\tilde{G} \simeq M_{11}$, $p = 11$, $q = 5$. Так как $|\tilde{G}| > 2 \cdot 55^2$, то эта возможность исключена.

Пусть $\tilde{G} \simeq J_1$, $p = 19$, $q = 11$. Так как $|\tilde{G}| > 2 \cdot 209^2$, то эта возможность исключена.

Во всех рассмотренных выше примерах легко убедиться, что $pq||\tilde{G}|$.

Допустим, что $\tilde{G} \simeq U_3(r)$. Наибольший простой делитель p числа $|\tilde{G}|$ не превосходит $r^2 - r + 1$. Если q не делит $|\tilde{G}|$, то $|\tilde{G}| = pm'$, где $m' < m < 2p^2$, а $|\tilde{G}| < 2p^3$, что исключено. Поэтому $pq||\tilde{G}|$. Так как наибольший простой делитель порядка группы $\tilde{G}$, меньший p, не превосходит $r + 1$, то $pq < r^3 + 1$. Однако этот случай невозможен.

Допустим, что $\tilde{G} \simeq L_3(r)$. Наибольший простой делитель p числа $|\tilde{G}|$ не превосходит r^2+r+1. Если q не делит $|\tilde{G}|$, то $|\tilde{G}| = pm'$, где $m' < m < 2p^2$, а тогда $|\tilde{G}| < 2p^3$, что исключено. Поэтому $pq||\tilde{G}|$. Так как наибольший простой делитель порядка группы $\tilde{G}$, меньший p, не превосходит $r + 1 < 2(r - 1)$, то $pq < 2(r^3 - 1)$. Однако и этот случай невозможен.

Таким образом, можно считать, что $G \simeq L_2(r)$. Лемма доказана.

Перейдем к завершению **доказательства теоремы 4.1.2**. По лемме 4.4.8 главный не p-разрешимый фактор группы G изоморфен $L_2(r)$, где r – степень простого числа s. В силу лемм 4.4.7 и 4.4.8 порядок G равен pqm, причем $m < 2pq$ и $p < 2q^2$. Наибольший простой делитель порядка $\tilde{G}$ не превосходит $r + 1$.

Предположим, что q не делит $|\tilde{G}|$. Так как $m < 2p^2$, то $|\tilde{G}| = pm'$, где $m'|m < 2p^2 < 2(r + 1)^2$. Порядок группы $\tilde{G}$ равен $\lambda r(r^2 - 1)$, где $\lambda = 1$ для четного r и $\lambda = 1/2$ для нечетного r. Отсюда $m' \geq \lambda r(r - 1)$. Таким образом,

$$\tfrac{m}{m'} \leq \tfrac{2(r+1)^2}{\lambda r(r-1)} \leq \tfrac{4(r^2+2r+1)}{r^2-r} < 7$$

при $r \geq 7$. Поэтому $|G| \leq 7q|\tilde{G}|$. Так как $G/O_{p'}(G)$ изоморфна подгруппе группы $Aut(\tilde{G})$, содержащей $\tilde{G}$, то наибольший простой делитель числа $|Out(\tilde{G})|$ не превосходит $\log_s r$. Однако в этом случае $q \leq \log_s r$. Так как $p < 2q^2$ и $m < 2pq$, то $|G| < 4q^6 \leq 4(\log_s r)^6$, а

$|\tilde{G}| = \lambda r(r^2-1) = pm' < 2(\log_s r)^5$. Очевидно, $g \geq 5$, так что $r = s^t$, где $t \geq 5$. Однако $r = s^t > 2t^2$ для любых допустимых значений $r = s^t$. Поэтому q не делит $|Out(\tilde{G})|$. Ввиду леммы 2.2.4 получаем, что $G/O_{p'}(G) \simeq \tilde{G}$. Так как q не делит $|\tilde{G}|$, то $|O_{p'}(G)| = m/m'q \leq 7q$. Если $q = m/m'$, то $|G/O_{p'}(G)|$ не делится на q и по лемме 1.3.17 группа G не может иметь характера, степень которого делится на q. Если $q > m/m'$, то G имеет характеристическую подгруппу порядка q и снова не может иметь характера степени, делящейся на q. Наконец, если $q < m/m'$, то группа $O_{p'}(G)$ централизуется G. Так как центр G тривиален, то G – прямое произведение группы $\tilde{G}$ и группы порядка $m/m'q$, где $q < m/m' \leq 7$, не имеющей абелевых нормальных подгрупп порядка q. В этом случае $q = 3$, противоречие.

Итак, $pq||\tilde{G}|$. По лемме 2.2.4 группа $G/O_{p'}(G)$ изоморфна $\tilde{G}$ и $G = G'$. Напомним, что $\tilde{G} \simeq L_2(r)$. Если r нечетно, то наибольший простой делитель p порядка $\tilde{G}$ делит либо $(r\pm1)/2$, либо равен r.

Пусть $p = r$. Так как $|\tilde{G}| = pqm_0$, где $m_0|m$, то $m_0 \geq (p-1)$. Поэтому $|O_{p'}(G)| = m/m_0 \leq \frac{p(p+1)}{p-1} < p+3$. Если P – силовская p-подгруппа группы G, то $|O_{p'}(G) : (C_G(P) \cap O_{p'}(G))| \leq 1+p$. Поэтому P имеет на $O_{p'}(G)$ только орбиту длины p и потому $|O_{p'}(G)| = p + |C_G(P) \cap O_{p'}(G)|$. Отсюда $|O_{p'}(G)| = 1+p$. Последнее возможно лишь при $p+1 = 2^a$ и $q \leq (p-1)/2$. Тогда $m_0 \geq p+1$ и $|O_{p'}(G)| < p$. Так как $C_G(O_{p'}(G)) \supseteq P$, то $G = C_G(O_{p'}(G))O_{p'}(G)$. Так как $G = G'$ и центр G тривиален, то получили противоречие.

Пусть теперь p делит $(r+1)/2$. Так как $q < p$, то $q \leq (r-1)/2$. Стало быть, $|\tilde{G}| = pqm_0$, где $m_0 \geq r$. Отсюда

$$\frac{m}{m_0} \leq \frac{r^2-1}{4r} \leq p \leq (r+1)/2$$

Поэтому $O_{p'}(G) \leq C_G(P)$. Отсюда $G = O_{p'}(G)C_G(O_{p'}(G))$. По лемме 2.2.4 имеем $Z(G) = 1$. Так как $G = G'$, то $G = \tilde{G}$ и по предложению 1.3.29 получаем противоречие.

Если $s = 2^a$, то $p \leq r+1$, $q \leq r-1$. Так как $|\tilde{G}| = pqm_0$, где $m_0 \geq r$, то $m/m_0 \leq (r^2-1)/r < r < p$ и $O_{p'}(G)$ централизует группу G, что приводит к противоречию. Теорема 4.1.2 доказана.

4.4.2 Доказательство теоремы 4.1.3.

В теореме 4.1.2 было установлено, что G является p-разрешимой группой и при $|G| \notin \{54, 72\}$ порядок G равен pq^bm, где $(pq,m) = 1$. По предложению 1.2.22 силовская p-подгруппа группы G содержится в $H = O_{p',p}(G)$. Поэтому $G = O_{p',p,p'}(G)$. Очевидно, что $H = K \rtimes P$, где $K = O_{p'}(G)$. Эти обозначения фиксируются до конца доказательства теоремы 4.1.3.

Лемма 4.4.10. *Если $H \neq G$, то $|G : H| = q$ и $\Theta_H = \sum_{i=1}^{q} \phi_i$, где $\phi_i \in Irr(H)$ – сопряженные характеры группы H степени p.*

Доказательство. Пусть $\phi \in Irr(H)$ – неприводимый характер группы H, входящий в разложение Θ_H и пусть $I_G(\phi)$ – его группа инерции. Согласно лемме 1.3.22,

$$\Theta_H = e\sum_{i=1}^{s}\phi_i,$$

где ϕ_i – неприводимые сопряженные с $\phi = \phi_1$ характеры группы H, e – натуральное число, делящее $|I_G(\phi_1) : H|$, а s делит $|G : I_G(\phi)|$. Из леммы 2.2.3 получаем, что Θ_H – приводимый характер, так что $s > 1$. Так как $pq = \Theta(1) = es\phi(1)$ и $|G : H|$ взаимно просто с p, то $e = 1, s = q$ и $\phi(1) = p$.

Из сказанного выше ясно, что индекс H в G делится на q. Предположим, что $|G : H| = aq$ для некоторого натурального числа a. Так как H имеет q сопряженных в G неприводимых характеров степени p, то

$$|H| \geq 1 + \sum_{i=1}^{q}\phi_i(1)^2 = p^2q.$$

С другой стороны, $|H| = |G|/|G : H| \leq 2p^2q^2/(aq) = (2/a)p^2q$. Поэтому $a = 1$ и $|G : H| = q$. Лемма доказана.

Лемма 4.4.11. *Если $H \neq G$, то для любого неприводимого характера $\phi = \phi_i$ из разложения Θ_H существует p неприводимых характеров λ_j, сопряженных с характером $\lambda = \lambda_1$, таких, что $\phi_K = \sum_{j=1}^{p}\lambda_j$. Группа K абелева.*

Доказательство. Пусть λ – неприводимый характер группы K, входящий в разложение характера ϕ_K, где $\phi = \phi_i$ – любой неприводимый характер группы H, определенный в лемме 4.4.10. Согласно лемме 1.3.22,

$$\phi_K = e'\sum_{i=1}^{t}\lambda_i,$$

где λ_i – характеры, сопряженные с λ, e' и t делят $|H : K| = p$. В частности,

$$p = \phi(1) = e't\lambda(1).$$

Если ϕ остается неприводимым при ограничении на K, то это же верно и для любого его сопряженного ϕ_j, а тогда порядок подгруппы K не меньше, чем $qp^2 + 1 \leq |G|/|G : K| \leq 2pq$, что противоречиво. Следовательно, $t = p, e' = 1$ и $\lambda_j(1) = 1$ для всех $j \leq p$. В частности, $\ker\lambda_j$ содержит коммутант группы K. Отсюда $\lambda_j(y) = 1$ для всех λ_j. Но тогда $\phi(y) = p$ для любого характера, сопряженного с ϕ_1. Как результат, $\Theta(y) = pq$. Напомним, что Θ является точным характером из леммы 2.2.2. Поэтому $y = 1$ и $K' = 1$, что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Заметим, что в случае $O^q(G) \neq G$ заключение леммы 4.4.11 остается в силе. Поэтому далее можно считать, что $H = O_{p',p}(G) = G$ и $G' = O_{p'}(G) = K$. Мы предполагаем далее, что

$K = G'$. В силу леммы 1.3.22

$$\Theta_K = v \sum_{i=1}^{u} \psi_i,$$

где ψ_i – характеры, сопряженные с ψ_1, v и u делят $|G : K| = p$. В частности, $pq = \Theta(1) = vu\psi(1)$. Так как u и v делят $|G : K| = p$, то либо $\Theta_K = \Theta$, либо Θ_K – приводимый характер. По лемме 2.2.3 характер Θ_K приводимый. Следовательно, $u = p, v = 1$. Таким образом, характер $\psi = \psi_1$ имеет степень q и имеется p характеров степени q группы K, сопряженных с ψ. Напомним, что группа G имеет порядок $pq^b m$, где $(pq, m) = 1$.

Лемма 4.4.12. *Группа $G = K \rtimes P$ содержит подгруппу QP порядка $q^b p$, где P – силовская p-подгруппа группы G, а Q – силовская q-подгруппа G. Если $b \geq 3$, то $m < p$. В частности, G имеет нормальную $\{p, q\}$-подгруппу порядка, делящегося на p.*

Доказательство. В самом деле, при $b \geq 3$ имеем $pq^b m < 2p^2q^2$, то $m < 2pq^{2-b} \leq p$. Поэтому $m \leq p - 1$. Как сказано выше, группа $G = K \rtimes P$, где $|K| = q^b m$ и $(p,qm) = 1$. Так как P действует с помощью сопряжений на множестве силовских q-подгрупп группы K, а их число не делится на p, то имеется силовская q-подгруппа Q группы K, инвариантная относительно P. Таким образом, в G содержится подгруппа $L = QP$, имеющая индекс m в G. Пусть γ – гомоморфизм группы G в группу правых смежных классов по L. Так как $m < p$, то ядро γ содержится в L и имеет порядок, делящийся на p. Поэтому группа G имеет нормальную подгруппу $M \subseteq L$, порядок которой делится на p. Лемма доказана.

Покажем, что порядок силовской q-подгруппы группы G не превосходит q^2.

Лемма 4.4.13. *$b \leq 2$.*

Доказательство. Допустим, что $b \geq 3$. В силу доказанной леммы 4.4.12 группа G имеет нормальную подгруппу M, содержащуюся в $L = QP$, порядка, делящегося на p. Из теоремы Н.Ито (лемма 1.3.17) следует, что $M \neq P$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $M = Q_1 \rtimes P$, где Q_1 – подгруппа группы Q, на которой P действует нетривиально. Допустим сначала, что $q > 2$. Так как $q < p$, то $|Q_1| = q^a, a \geq 2$, причем $q^a - 1 \geq 2p$. Следовательно, $|G/M| \leq 2p^2q^2/(p(2p + 1)) < q^2$. Поэтому либо $m < q$, либо $b = a$ и $m < q^2$. Допустим, что $|G/M|$ делится на q. Так как $|G/M| < q^2$, то $|G/M| = mq$, где $m < q$. В силу теорем Силова имеем $Q \lhd G$. При этом имеется холлова подгруппа T порядка m, на которой P действует тождественно. Таким образом, $G = Q \rtimes (T \times P)$. Поэтому при $m > 1$ имеем $G' \neq K$. В силу леммы 4.4.11 получаем противоречие.

Предположим, что $q = 2$. Очевидно, в этом случае $a \geq 3$, причем $q^a - 1 \geq p$. Поэтому $|G/M| \leq 2p^2q^2/p(p + 1) = 8p/(p + 1) < 8$ и либо G/M имеет подгруппу индекса $q = 2$, что неверно по предположению, либо $|G : G'|$ не совпадает с p. Последнее также исключено.

Если $|G/M|$ не делится на q, то $M = L = G$, причем $m = 1, a = b$. Тогда существует минимальная ненильпотентная подгруппа S порядка $q^c p$, где $q^c \equiv 1 (mod\ p)$ и $c \leq b$ (см.

доказательство теоремы в [11]). Так как $q^c - 1$ делится на $2p$, то $q^c \geq 2p$ и потому $b \leq c = 1$. Отсюда либо $b = c$ и G – минимальная ненильпотентная группа с абелевыми силовскими подгруппами, либо G имеет нормальную подгруппу индекса q. Применяя лемму 1.3.17, получаем противоречие. Таким образом, случай $b > 2$ невозможен. Лемма доказана.

Лемма 4.4.14. *$|G| = mpq$, где $(m,pq) = 1$ и $m < 2pq$.*

Доказательство. Допустим, что $b = 2$, т.е. силовская q-подгруппа Q группы G имеет порядок q^2. В силу леммы 4.4.12 группа $G = K \rtimes P$, причем G содержит подгруппу $L = Q \rtimes P$, где P порядка p.

Пусть y – элемент группы Q и $h_y = |G : C_G(y)|$. Заметим, что группа $L = QP$ абелева. Действительно, в противном случае p делит порядок группы автоморфизмов Q. Так как последняя имеет порядок, делящий $q^2(q^2-1)(q-1)$ и $p > q$, то p не делит $|Aut(Q)|$. Таким образом, h_y взаимно прост с $\Theta(1)$. Согласно предложению 1.3.6, либо $\Theta(y) = 0$, либо $\Theta(y) = \mu\Theta(1)$ для некоторого числа μ, являющегося корнем q-ой степени из единицы. Так как Θ – точный характер из леммы 2.2.2, то $\ker\Theta = 1$, а так как $Z(G) = 1$, то $\Theta(y) = 0$ для любого $y \in Q^{\#}$. Поэтому

$$\langle \Theta_Q, 1_Q \rangle = 1/|Q| \sum_{y \in Q} \Theta(y) = \frac{pq}{q^2} = p/q$$

– целое число. Противоречие. Поэтому q^2 не делит $|G|$. То есть $|G| = pqm$, где $(pq,m) = 1$. Так как $|G| \leq 2\Theta(1)^2 = 2p^2q^2$, то $m \leq 2pq$. Лемма доказана.

Лемма 4.4.15. *Пусть ψ – неприводимый характер группы K степени q, входящий в разложение Θ_K. Тогда $\psi(y) = 0$ для любого q-элемента группы G. Группа K не является простой неабелевой группой и для $R \lhd K$ характер ψ_R приводим.*

Доказательство. Так как $|K|$ не делится на q^2, то характер ψ степени q содержится в q-блоке группы K дефекта 0 по определению 1.3.12. Поэтому $\psi(y) = 0$ для любого q-сингулярного элемента группы K. В частности, $\psi(y) = 0$ для элемента y порядка q.

Допустим, что K – простая неабелева группа. Так как p делит $|Out(K)|$, то согласно предложению 1.3.27 получаем, что $|K| \geq p^6$. Так как $|K| = mq \leq 2pq^2 < p^4$ в любом из случаев, то K не может быть простой неабелевой группой.

Допустим, что R – наибольшая собственная нормальная подгруппа группы K. По лемме 1.3.22 имеем:

$$\psi_R = e \sum_{s=1}^{d} \lambda_s,$$

где d, e – натуральные числа, делящие $|K : R|$, и λ_s – неприводимые характеры группы R, сопряженные с $\lambda_1 = \lambda$. Отсюда $q = \psi(1) = ed\lambda(1)$. Если ψ_R неприводим для любого ψ, входящего в разложение Θ_K, то подгруппа R имеет p неприводимых характеров степени q. Но тогда ее порядок равен не меньше, чем q^2p, тогда как $|R| \leq |K|/(|K : R|) \leq pq^2$. Противоречие. Значит, $\psi_R = \sum_{s=1}^{p} \lambda_s$, где λ_s – линейные характеры. Лемма доказана.

Закончим **доказательство теоремы 4.1.2**. Из леммы 4.4.15 следует, что пересечение ядер характеров λ_s, входящих в разложение Θ_R, содержит коммутант R и потому тривиально. Поэтому подгруппа R группы G, имеющая индекс pq в G абелева, что и утверждалось. Теорема доказана.

Примеры

1. Пусть $p = 2^a - 1$ и $q = 2^b - 1$ – два различных простых числа Мерсенна. Тогда группа $G = M \times K$, являющаяся прямым произведением групп Фробениуса порядков $p(p+1)$ и $q(q+1)$ соответственно имеет неприводимый характер Θ с $\Theta(1) = pq$.

2. Пусть $p = 5$ и $q = 3$ и G – группа Фробениуса порядка $16 \cdot 15$ (см. таблицу 21 в приложении A). Тогда G является $LC(\Theta)$-группой.

3. Пусть $p = 2^a - 1$ – простое число Мерсенна, $q = 2$. Тогда группа $G = M \times K$, являющаяся прямым произведением групп Фробениуса порядков $(p+1)p$ и 6 является $LC(\Theta)$-группой.

5. Строение $LC(\Theta)$-групп, у которых $\Theta(1) = p^2q$, где $p > q$ и p, q – простые числа

В данной главе G является $LC(\Theta)$-группой с неприводимым характером Θ степени p^2q, где $p > q$ и p, q различные простые числа.

5.1 Формулировка результатов

Теорема 5.1.1. *Пусть G является $LC(\Theta)$-группой. Если $\Theta(1) = p^2q$, где p и q различные простые числа, $p > q$, то G – p-разрешимая группа.*

В доказательстве теоремы 5.1.1 также установлено, что при $|G| \notin \{486, 648\}$ порядок группы $|G|$ равен p^2q^bm, где $(pq, m) = 1$. Следующая теорема дает описание $LC(\Theta)$–групп с $\Theta(1) = p^2q$.

Теорема 5.1.2. *Пусть G является $LC(\Theta)$-группой с $\Theta(1) = p^2q$, где $p > q$ и p, q — простые числа. Тогда G имеет абелеву нормальную подгруппу M индекса p^2q.*

5.2 Вспомогательные результаты

Так как $|G| \leq 2p^4q^2 < 2p^6$, где $p > q$, p и q — различные простые числа и силовская p-подгруппа группы G имеет порядок не меньше p^2, то сначала, используя классификацию конечных простых групп, опишем простые неабелевы группы G с абелевой силовской p–подгруппой P порядка p^2, для которых $|G| < 2|P|^3$.

Заметим, что Е.П. Вдовиным в [2] доказано, что $|A|^3 < |G|$, если G – конечная простая группа, неизоморфная $PSL_2(q)$ и A – ее абелева подгруппа. Используя классификацию конечных простых групп, получен следующий результат.

Лемма 5.2.1. *Пусть G – конечная простая неабелева группа с абелевой силовской p-подгруппой $P \neq 1$ порядка не более p^2. Если $2|P|^3 > |G|$, то G изоморфна группе $L_2(q)$, где q – либо простое число, либо квадрат простого числа.*

Доказательство. Согласно теореме классификации конечных простых неабелевых групп (см. [3] для более подробной информации), все простые неабелевы группы принадлежат одному из следующих семейств:

I. Классические простые группы лиева типа: $L_n(q), n \geq 2$, $U_n(q), n \geq 3$, $S_{2n}(q), n \geq 2$, $P\Omega_{2n+1}(q), n \geq 2$, $P\Omega_{2n}^{\pm}(q), n \geq 4$.

II. Исключительные простые группы лиева типа: $G_2(q)$, $F_4(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, ${}^2G_3(q)$, $({}^2F_4(q))'$, ${}^3D_4(q)$, ${}^2B_2(q)$, q – степень простого числа.

III. Спорадические простые группы.

IV. Знакопеременные группы $A_n, n \geq 5$.

Доказательство леммы 5.2.1 будем проводить шаг за шагом для всех перечисленных групп. Напомним, что силовская p-подгруппа $P \neq 1$ имеет порядок не выше p^2.

I. Классические простые группы лиева типа.

При изучении групп Шевалле полагаем: $GF(q)$ – поле порядка q, r – его характеристика.

(a) Пусть $G \cong L_n(q), n \geq 2$. Легко видеть, что $|G| > q^{n^2-n}$, а наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^n - 1 < q^n$. Так как $2p^6 < p^{7n}$, то $q^{7n} > q^{n^2-n}$. Отсюда $n^2 - n < 7n$ и $n^2 - 8n < 0$, значит, $n < 8$.

При $n = 7$ имеем

$$|G| = 1/dq^{21}(q^7-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^3-1)(q^2-1) > q^{42},$$

где $d = (7, q-1)$. Так как $q^7 - 1 = (q-1)(q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)$, то наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1 < 2q^6$. Если $p^2 | q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$, то $p^2 < q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1 < 2q^6$. Значит, $2(2q^6)^3 = 2^4q^{18} > |G| > q^{42}$, что невозможно.

Если $p^2 \nmid q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$, то $p \mid q^4+q^3+q^2+q+1$, ибо $q^5-1 = (q-1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$. Так как $q^4+q^3+q^2+q+1 < 2q^4$ и q^5-1 взаимно просто со всеми делителями вида $q^i - 1$ при $i \neq 5$ порядка группы, то $p^2 < 2q^4$ и $p^2 \mid q^5 - 1$. Значит, $2p^6 < 2(q^5-1)^3 < 2q^{15} < q^{42}$, что исключает этот случай.

Пусть $n = 6$, тогда $|G| > q^{30}$. Так как $q^5 - 1 = (q-1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$, то наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^4+q^3+q^2+q+1 < 2q^4$. Если $p^2 \mid q^4+q^3+q^2+q+1$, то $p^2 < q^4+q^3+q^2+q+1 < 2q^4$. Значит, $2(2q^4)^3 = 2^4q^{12} > |G| > q^{30}$, что неверно.

Если $p^2 \nmid q^4+q^3+q^2+q+1$, то $p \mid q^2+q+1$, ибо $q^6-1 = (q^3-1)(q^3+1) = (q-1)(q^2+q+1)(q+1)(q^2-q+1)$. Тогда $p < q^2+q+1$, а так как $q^2+q+1 < 2q^2$ в разложении порядка группы имеет вторую степень, то $p^2 < (2q^2)^2$. Значит, $2p^6 < 2(2q^2)^6 = 2^7q^{12} < q^{30}$, что исключает этот случай.

При $n = 5$, наибольший простой делитель порядка группы также не превосходит $q^4+q^3+q^2+q+1 < 2q^4$ и $|G| > q^{20}$. Если $p^2|q^4+q^3+q^2+q+1$, то $p^2 < q^4+q^3+q^2+q+1 < 2q^4$. Значит, $2(2q^4)^3 = 2^4q^{12} > |G| > q^{20}$, что неверно.

Если $p^2 \nmid q^4+q^3+q^2+q+1$, то $p \mid q^2+q+1$, ибо $q^3-1 = (q-1)(q^2+q+1)$. А так как $q^2+q+1 < 2q^2$ взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида q^i-1 при $i \neq 3$, то $p^2 < 2q^2$ и $p^2|q^3-1$. Значит, $2p^6 < 2(q^3-1)^3 < q^{20}$, что исключает и этот случай.

Если $n = 4$, то наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^2+q+1 < 2q^2$ и $|G| > q^{12}$. Если $p^2 \mid q^2+q+1$, то $p^2 < q^2+q+1 < 2q^2$. Значит, $2(2q^2)^3 > |G| > q^{12}$, что неверно. Если p^2 не делит q^2+q+1, то $p \mid q^2+1$. Так как q^2+1 взаимно прост со всеми делителями порядка группы вида q^i-1 при $i \neq 3$, то $p^2|q^2+1$. Значит, $2p^6 < 2(q^2+1)^3 < q^{12}$, что исключает и этот случай.

Если $n = 3$, то $|G| = (1/d)q^3(q^3-1)(q^2-1)$, где $d = (3,q-1)$. Поэтому p^2 делит либо $(q-1)^2$, либо $q+1$, либо q^2+q+1. Непосредственные вычисления показывают, что и этот случай исключен.

Таким образом, если $G \simeq L_n(q)$ удовлетворяет условию леммы 5.2.1, то $n = 2$.

(b) Пусть $G \simeq U_n(q), n \geq 3$. Легко видеть, что $|G| > q^{n^2-n}$, а наибольший простой делитель порядка группы не превосходит q^n. Так как $2p^6 < p^{7n}$, то $q^{7n} > q^{n^2-n}$. Отсюда $n^2-n < 7n$ и $n^2-8n < 0$, поэтому $n < 8$.

Допустим, что $n = 7$. Тогда имеем

$$|G| = 1/dq^{21}(q^7+1)(q^6-1)(q^5+1)(q^4-1)(q^3+1)(q^2-1) > q^{42},$$

где $d = (7, q+1)$. Так как $q^7+1 = (q+1)(q^6-q^5+q^4-q^3+q^2-q+1)$, то наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^6-q^5+q^4-q^3+q^2-q+1 < q^6$. Если $p^2 \mid q^6-q^5+q^4-q^3+q^2-q+1$, то $p^2 < q^6-q^5+q^4-q^3+q^2-q+1 < q^6$. Значит, $2(q^6)^3 > |G| > q^{42}$, что неверно. Если $p^2 \nmid q^6-q^5+q^4-q^3+q^2-q+1$, то $p|q^4-q^3+q^2-q+1$, ибо $q^5+1 = (q+1)(q^4-q^3+q^2-q+1)$. Так как $q^4-q^3+q^2-q+1 < q^4$ взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида $q^i-(-1)^i$, то $p^2 < q^4$ и $p^2|q^5+1$. Значит, $2p^6 < 2(q^5+1)^3 < q^{42}$, что исключает этот случай.

Пусть $n = 6$, тогда $|G| > q^{30}$. Так как $q^5+1 = (q+1)(q^4-q^3+q^2-q+1)$, то наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^4-q^3+q^2-q+1 < q^4$. Если $p^2|q^4-q^3+q^2-q+1$, то $p^2 < q^4-q^3+q^2-q+1 < q^4$. Значит, $2(q^4)^3 = 2q^{12} > |G| > q^{30}$, что неверно. Если $p^2 \nmid q^4-q^3+q^2-q+1$, то $p|q^2+q+1$, ибо $q^3-1 = (q-1)(q^2+q+1)$. Поэтому $p < q^2+q+1$. Так как q^2+q+1 взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида $q^i-(-1)^i$ при $i \neq 3$, то $p^2|(q^2+q+1)$. А значит, $2p^6 < 2(q^2+q+1)^3 < q^{30}$, что исключает и этот случай.

При $n = 5$, наибольший простой делитель порядка группы также не превосходит $q^4-q^3+q^2-q+1 < q^4$. Если $p^2|q^4-q^3+q^2-q+1$, то $p^2 < q^4-q^3+q^2-q+1 < q^4$. Значит, $2(q^4)^3 > |G| > q^{20}$, что невозможно. Если p^2 не делит $q^4-q^3+q^2-q+1$, то $p|q^2+1$. Так как q^2+1

взаимно прост со всеми делителями порядка группы, то $p^2|q^2+1$. Тогда $2p^6 < 2(q^2+1)^3 < q^{20}$, что исключено.

Если $n = 4$, то $|G| > q^{12}$ и наибольший простой делитель порядка группы не превосходит q^2+1. Если $p^2 \mid (q^2+1)$, то $p^2 < q^2+1$. Значит, $2(q^2+1)^3 > |G| > q^{12}$, что неверно. Если p^2 не делит (q^2+1), то $p|q^2-q+1$, ибо $q^3+1 = (q+1)(q^2-q+1)$. А так как $q^2-q+1 < q^2$ взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида $q^i-(-1)^i$, то $p^2 < q^2$ и $p = q$. Потому $2p^6 < q^{12}$, что тоже исключает этот случай.

Если $n = 3$, то $|G| = (1/d)q^3(q^3+1)(q^2-1)$, где $d = (3,q+1)$. Поэтому p^2 делит либо $(q-1)$, либо $(q+1)^2$, либо q^2-q+1. Непосредственные вычисления показывают, что и этот случай исключен.

(c) Пусть $G \simeq S_{2n}(q)$ или $P\Omega_{2n+1}(q), n \geq 2$. Порядок G равен

$$1/dq^{n^2}(q^{2n}-1)\dots(q^2-1),$$

где $d = (2, q-1)$. Если $n \geq 2$, то $|G| > q^{2n^2}$. Наибольший простой делитель порядка G не превосходит q^n+1. Если $p^2|(q^n+1)$, то $2(q^n+1)^3 < q^{3n+2} < q^{2n^2}$ для $n \geq 3$. При $(q,n) = (2,2)$ группа $G \simeq S_4(2)$ не проста и $S_4(2)' \simeq L_2(9)$.

Если $p^2 \nmid (q^n+1)$, то $p|q^{n-1}+1$, значит, $p^2|q^{n-1}+1$. Потому $2p^6 < 2(q^{n-1}+1)^3 < q^{3n-1} < q^{2n^2}$ для $n \geq 3$, что исключает этот случай.

(d) Пусть $G \simeq P\Omega^{\pm}_{2n}(q), n \geq 4$. Легко видеть, что $|G| > q^{2n^2-2n}$, а наибольший простой делитель ее порядка не превосходит q^n+1. Если $p^2|(q^n+1)$, то $2(q^n+1)^3 < q^{3n+2}$ при $n \geq 4$, поэтому $2p^6 < |G|$.

Если $p^2 \nmid (q^n+1)$, то $p|q^{n-1}+1$, значит, $p^2|q^{n-1}+1$. Потому $2p^6 < 2(q^{n-1}+1)^3 < q^{3n-1} < q^{2n^2-2n}$ для $n \geq 4$, что исключает этот случай.

II. Исключительные простые группы лиева типа.

(a) Пусть $G \simeq G_2(q)$. Порядок G равен $q^6(q^6-1)(q^2-1)$, так что наибольший простой делитель порядка группы не превосходит $q^2+q+1 < 2q^2$. Если $p^2|q^2+q+1$, то $p^2 < q^2+q+1 < 2q^2$. Значит, $2(2q^2)^3 = 2^4q^6 > |G|$. Однако $|G| > q^{13}$, так что этот случай исключен.

Если $p^2 \nmid q^2+q+1$, то $p|q^2-q+1$. Так как q^2-q+1 взаимно просто со всеми делителями порядка группы вида $q^i \pm 1$ для $i \neq 3$, то $p^2|q^2-q+1$. Тогда $p^2 < q^2-q+1 < q^2$, потому $2p^6 < 2q^6 < q^{13}$, что исключает этот случай.

(b) Пусть $G \simeq F_4(q)$ порядка $q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$. Наибольший простой делитель порядка G не превосходит q^4+1. Так как $2(q^4+1)^6 < |G|$, то этот случай исключен.

(c) Пусть G – одна из групп $E_6(q), E_7(q), E_8(q)$ или ${}^2E_6(q)$. Порядок любой из этих групп больше q^{72}, а наибольший простой делитель порядка не превосходит q^9. Так что эти группы также исключены.

(d) Пусть $G \simeq {}^2G_2(q)$. Порядок этой группы равен $q^3(q^3+1)(q-1)$. При этом $q = 3^{2n+1}, n \geq 1$, а наибольший простой делитель p порядка группы не превосходит $q+\sqrt{3q}+1 < 2q$. Пусть $q > 3$. Если $p^2|q+\sqrt{3q}+1$, то $p^2 < q+\sqrt{3q}+1 < 2q$. Значит, $2(2q)^3 = 2^4q^3 < |G|$, что невозможно. Если $p^2 \nmid q + \sqrt{3q} + 1$, то $p = q$ – наибольший простой делитель порядка G. Тогда $2q^6 \geq |G|$, так что $q = 3$ и $G \simeq L_2(8).3$ – не простая группа.

(e) Пусть $G \simeq (^2F_4(q))'$. Ее порядок равен $q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1) > 2q^{16}$, где $q = 2^{2n+1}, n \geq 2$, а наибольший простой делитель p порядка группы не превосходит $q^4 - q^2 + 1 < q^4$. Если $p^2 | q^4 - q^2 + 1$, то $p^2 | q^4 - q^2 + 1 < q^4$. Значит, $2(q^4)^3 = 2q^{12} < 2q^{16} < |G|$. Если $p^2 \nmid q^4 - q^2 + 1$, то $p | q^2 + 1$. Значит, $p < (q^2+1)$, а так как q^2+1 в разложении порядка группы имеет вторую степень, то $p^2 < (q^2+1)^2$. Потому $2p^6 < 2(q^2+1)^6 < |G|$, что исключает и этот случай.

(f) Пусть $G \simeq {}^3D_4(q)$ порядка $q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1) > q^{26}$, а наибольший простой делитель p не превосходит $q^4 - q^2 + 1 < q^4$. Если $p^2 | q^4 - q^2 + 1$, то $p^2 < q^4 - q^2 + 1 < q^4$. Значит, $2(q^4)^3 = 2q^{12} < |G|$.

Если $p^2 \nmid q^4 - q^2 + 1$, то $p | q^2 + q + 1$. Значит, $p < (q^2 + q + 1)$, а так как $q^2 + q + 1 < 2q^2$ в разложении порядка группы имеет вторую степень, то $p^2 | q^2 + q + 1$. Поэтому $p^2 < q^2 + q + 1 < 2q^2$, стало быть $2p^6 < 2(2q^2)^3 = 2^4 q^6 < |G|$, что исключает и этот случай.

(g) Пусть $G \simeq {}^2B_2(q) \simeq Sz(q)$ порядка $q^2(q^2+1)(q-1)$, где $q = 2^{2n+1}, n \geq 1$. Наибольший простой делитель p порядка G не превосходит $q + \sqrt{2q} + 1 < 2q$. Если $p^2 | q + \sqrt{2q} + 1$, то $p^2 < q + \sqrt{2q} + 1 < 2q$. Значит, $2(2q)^3 < |G|$. Если $p^2 \nmid q + \sqrt{2q} + 1$, то $p | q - \sqrt{2q} + 1$, откуда $p^2 | q - \sqrt{2q} + 1$ и $p^2 < q - \sqrt{2q} + 1 < q$. Потому $2p^6 < 2q^3 < |G|$, что исключает и этот случай.

III. Спорадические простые группы. Все случаи исключены (см. [20]).

IV. Знакопеременные группы $A_n, n \geq 5$.

Так как $|A_n| = n!/2 \leq 2n^6$, то $n! \leq 4n^6$. С другой стороны, известно, что $n! \geq n^{n/2}$. Поэтому $n^{n/2} \leq 4n^6 < n^7$, отсюда $n/2 < 7$ и $n < 14$. При $n = 5, 6$ появляются группы A_5, A_6 порядков 60, 360 соответственно, с абелевой силовской p-подгруппой P порядков 4, 9 соответственно. Заметим, что $A_5 \simeq L_2(5)$ и $A_6 \simeq L_2(9)$. Все остальные возможности исключены. Лемма доказана.

5.3 Доказательство теорем

5.3.1 Доказательство теоремы 5.1.1.

Допустим, что $P \in Syl_p(G)$. Так как, G – $LC(\Theta)$-группа с $\Theta(1) = p^2q$, где p и q различные простые числа и $p > q$, причем $p^4q^2 < |G| \leq 2p^4q^2$ и $pq||G|$, то $|G| = p^a q^b m$, где $a, b, m \in \mathbb{N}$ и $2 \leq a$, т.е., силовская p-подгруппа группы G имеет порядок не меньше p^2. Заметим, что $|G| \leq 2p^4q^2 < 2p^6$, поскольку $p > q$.

Верхние границы порядка силовской p-подгруппы в $LC(\Theta)$-группе с $\Theta(1) = p^2q$ сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 5.3.1. *Пусть G – $LC(\Theta)$-группа с $\Theta(1) = p^2q$, где p и q различные простые числа и $p > q$. Тогда силовская p-подгруппа P группы G имеет порядок не больше p^5. Если $P \lhd G$, то $|G| = 486$. Если P не нормальна в G и $|G| \neq 648$, то $|P| \leq p^3$.*

Доказательство. Пусть G – $LC(\Theta)$-группа с $\Theta(1) = p^2q$, где $p > q$. Так как $|G| \leq 2p^4q^2$, то $|P| \leq p^6$, иначе q не делит $|G|$. Если $|P| = p^6$, то $2p^4q^2 < 2p^6$ ввиду $q < p$. Значит, $|G| = |P| = p^6$ что неверно, ибо в таком случае q не делит $|G|$. Значит, $|P| \leq p^5$.

Допустим, что $|P| = p^5$. Так как $|G| = p^5q^bm \leq 2p^4q^2$, где $(m, pq) = 1$, то $b \leq 2$. Однако $p > q \geq 2$. Следовательно, можно считать, что $b = 1$. В этом случае $pm \leq 2q$. Если $m = 2$, то $p < q$ вопреки предположению. При $m = 1$ подгруппа $P \lhd G$ и $|G| = p^5q$.

По предложению 1.3.23 и лемме 2.2.3

$$\Theta_P = \sum_{i=1}^{q} \chi_i,$$

где $\chi_i \in Irr(P)$, причем из $\Theta(1) = p^2q$ следует, что $\chi_i(1) = p^2$ для $i = 1, 2, \dots q$. Так как χ_i – неприводимые характеры P, то $Z(P) \subseteq Z(\chi_i)$. Поэтому

$$\sum_{z \in Z(P)} |\chi_i(z)|^2 = |Z(P)|p^4 \leq |P| = p^5.$$

Следовательно, $|Z(P)| = p$ и подгруппа $Q \in Syl_q(G)$ порядка q действует на $Z(P)$ нетривиально. Отсюда $q|p-1$. Существует $\frac{p-1}{q}$ сопряженных характеров группы G степени p^2q, исчезающих на $P - Z(P)$. Группа Q разбивает характеры χ_i степени p^2 на орбиты длины q. Таким образом, у группы G имеется $\frac{p-1}{q}$ характеров степени p^2q. Так как G не может иметь более одного характера степени p^2q, то $p - 1 = q$. Стало быть, $p = 3, q = 2$ и $|G| = 486$ (см. таблицу 25 в приложении A). Вычисления с помощью GAP [35] показывают, что группа с рассматриваемыми свойствами существует. Допустим, что $P \in Syl_p(G)$ имеет порядок p^4. Если $P \lhd G$, то по лемме 1.3.22 имеем

$$\Theta_P = e \sum_{i=1}^{s} \chi_i,$$

где $e, s||G/P|$ и $\chi_i \in Irr(P)$. Так как $|G/P|$ взаимно просто с p и $\Theta(1) = p^2q$, то $\chi_i(1) = p^2$. Это приводит к противоречию, так как сумма степеней неприводимых характеров группы P не может быть больше $|P| = p^4$. Стало быть, P не может быть нормальной. Так как $|G| \leq 2p^4q^2$, то $|G| = p^4q^bm$, где $q^bm \leq 2q^2$ и $(m, pq) = 1$. Отсюда имеются также возможности для G.

1. $b = 2, |G| = p^4q^2$;
2. $b = 2, |G| = 8p^4, q = 2$;
3. $b = 1, |G| = p^4qm$, где $m < 2q$.

Случай, когда $|G| = 2p^4q^2$, при $q > 2$ невозможен, ибо тогда в G имеется подгруппа индекса 2, что противоречит лемме 2.2.4. Допустим, что $|G| = p^4q^2$. Так как P не нормальна в G, то $|G : N_G(P)| = q^2 = 1 + kp$. Отсюда p делит $q^2 - 1$ и $p|q + 1$, что возможно только при $p = 3, q = 2$ и $|G| = 324$, система GAP [35] показывает, что группа порядка 324 не является $LC(\Theta)$-группой.

Предположим, что $|G| = 8p^4$. Тогда G имеет подгруппу P индекса 8 и ввиду того, что P не нормальна в G получаем, что $|G : N_G(P)| = 4$ или 8. В первом случае получаем $p = 3$ и $|G| = 648$ (см. таблицу 27 в приложении A). Использование GAP [35] показывает, что группа с рассматриваемыми свойствами существует. Если $p = 7$, то $N_G(P) = P$ и по предложению 1.2.12 G разрешима. Легко видеть, что $G/O_7(G)$ – группа Фробениуса порядка $56 = 2^3 \cdot 7$. Подгруппа $O_7(G)$ не может быть абелевой ввиду леммы 1.3.17. Поэтому она неабелева. Так как $|O_7(G)| = 7^3$, то имеется циклическая подгруппа T порядка 7, нормальная в G и $|G : C_G(T)|$ делит $|Out(T)| = 6$. Так как G не имеет подгрупп индекса 2 или 3, то $T \leq Z(G)$. Это противоречит лемме 2.2.5.

Рассмотрим теперь случай 3. Порядок G равен p^4mq, где $m < 2q$ и $(m, pq) = 1$. По предложению 1.2.23 получаем, что $P \cap P^x = O_p(G)$ для некоторого $x \in G$. При этом $|P/O_p(G)|^2 < |G/O_p(G)|$. Так как $mq < 2p^2$, то при $P \neq N_G(P)$ получаем, что $|O_p(G)| \geq p^3$, а при $P = N_G(P)$ группа G разрешима. Если $|O_p(G)| = p^2$, то ввиду теоремы Бернсайда (группа $P/O_p(G)$ абелева) получаем, что $G/O_p(G)$ – p–нильпотентна. Из существования подгруппы порядка p^4q в G теперь следует, что $N_G(P) \neq P$. Поэтому можно считать, что $|O_p(G)| \geq p^3$. Так как P не нормальна в G по предыдущему, то $|O_p(G)| = p^3$ и $O_p(G)$ неабелева по лемме 1.3.17. Поэтому $Z(O_p(G)) = T$ имеет порядок p и $T \lhd G$. Следовательно, $C_G(T) \lhd G$ и $G/C_G(T) \leq Aut(T)$ имеет порядок, делящий $p - 1$. По лемме 2.2.4 получаем, что $|G/C_G(T)|$ – степень q. Отсюда $|G/C_G(T)| = q$. В частности, $|C_G(T)| = p^4m$. Применяя предложение 1.3.23, заключаем, что и имеется $\frac{p-1}{q}$ характеров группы G степени p^2q, так, что $p = q + 1 = 3, q = 2$. Отсюда $m \leq 2$. Этот случай уже рассмотрен выше. Лемма 5.3.1 доказана.

Следующая лемма показывает, что когда $\Theta(1) = 3^2 \cdot 2$, то порядок группы G содержится в $\{342, 486, 504, 648\}$.

Лемма 5.3.2. *Пусть G – $LC(\Theta)$-группа с $\Theta(1) = p^2q$, где p и q различные простые числа, $p > q$. Тогда либо $p > 3$, либо $|G| \in \{342, 486, 504, 648\}$.*

Доказательство. Допустим, что $p = 3$. Тогда $q = 2$. Поэтому $|G| \leq 3^4 \cdot 2^3 = 648$, при этом порядок группы G делится на $\Theta(1) = 3^2 \cdot 2 = 18$. Учитывая, что $\frac{|G|}{|\Theta(1)|} = \frac{2^3 \cdot 3^4}{2 \cdot 3^2} \leq 2^2 \cdot 3^2 = 36$ и то, что неразрешимая группа порядка не более $81 \cdot 8 = 648$ имеет неразрешимый композиционный фактор, содержащийся в [20], убеждаемся в том, что таких факторов не должно быть. Отсюда заключаем, что G разрешима и $|G|$ делит одно из чисел: $648 = 2^3 \cdot 3^4$, $342 = 19 \cdot 2 \cdot 3^2$, $486 = 2 \cdot 3^5$ или $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ (см. таблицы 27, 24, 25, 26 в приложении A). Применяя GAP [35], убеждаемся, что каждая из этих возможностей реализуется.

Начиная с этого момента будем считать, что $p > 3$. Покажем, что порядок P может равняться p^3 только при $O_p(G) > 1$.

Лемма 5.3.3. *Если $O_p(G) = 1$, то либо $P = N_G(P)$ и $|P| = p^3$, либо $|G| = p^2q^bm$, где $(pq, m) = 1$.*

Доказательство. Допустим, что $O_p(G) = 1$. Так как $|G|$ делится на $\Theta(1) = p^2q$, то $|G| = p^a q^b m$, где $(pq,m) = 1$ и $a, b, m \in \mathbb{N}$. По леммам 5.3.1 и 5.3.2, имеем $p > 3$, $2 \leq a \leq 3$. В силу предложения 1.2.21, $p^a < q^b m$ и из $2\Theta(1)^2 \geq |G|$, получаем $q^{b-2}m \leq 2p^{4-a}$.

Пусть $a = 3$ и $|G| = p^3q^bm$, где $p^3q^bm \leq 2p^4q^2$. Тогда $q^{b-2}m \leq 2p$. Так как $O_p(G) = 1$, то из предложения 1.2.21 получаем $p^3 < q^bm \leq 2pq^2$. Значит, $p^2 \leq 2q^2$.

Пусть $|N_G(P)| = n|P| = np^3$, где $n > 1$. Так как по предложению 1.2.21 хотя бы для одного $x \in G$ выполнено $P \cap P^x = 1$, то

$$|G| \geq |N_G(P)| + \frac{n^2|P|^2}{d} = np^3 + \frac{n^2p^6}{d},$$

где $d = |N_G(P) \cap N_G(P)^x||n$. Поэтому $p^3q^bm \geq np^3 + np^6$, откуда $q^bm > np^3$. Так как $np^3 < q^bm \leq 2pq^2$, то $np^2 < 2q^2$, где $n > 1$, т.е. $p^2 < q^2$, что невозможно.

Поэтому при $O_p(G) = 1$ имеем $N_G(P) = P$ для $|P| = p^3$ или $|G| = p^2q^bm$, где $(pq, m) = 1$. Лемма доказана.

Следующая лемма показывает, что для не p-разрешимой группы G случай $O_p(G) \neq 1$ невозможен.

Лемма 5.3.4. *Если G не p-разрешима, то $O_p(G) = 1$.*

Доказательство. Допустим, что $O_p(G) > 1$. По лемме 1.3.17 степень любого неприводимого характера группы G делит $|G : O_p(G)|$, если $O_p(G)$ абелева. Так как G не p-разрешима, то P не нормальна в G. Поэтому либо $|O_p(G)| = p$, либо $|O_p(G)| = p^3$. Покажем, что в любом случае G имеет нормальную подгруппу U порядка p. Если $|O_p(G)| = p$ это верно.

По лемме 1.3.17, если $|O_p(G)| = p^3$, то P неабелева и потому $|Z(P)| = p$ и $U = Z(P) \lhd G$. Пусть $H = C_G(U)$. Так как $U \lhd G$, то $H \lhd G$ и $G/H \leq Aut(U)$ и потому изоморфна циклической группе, имеющей порядок, делящий $p - 1$. Так как $Z(G) = 1$, то $G/H \neq 1$ и является циклической группой. По лемме 2.2.4 получаем, что $(p - 1)$ – степень числа q. Применяя теорему Клиффорда (лемма 1.3.22), имеем

$$\Theta_H = e\sum_{i=1}^{s}\chi_i,$$

где χ_i сопряженные неприводимые характеры, e и s делят $|G/H| = q^\lambda$. Отсюда $p^2q = \Theta(1) = es\chi_i(1)$. По предложению 1.3.23 $e = 1$ и $\chi_i(1) = p^2, s = q$. Таким образом, H имеет q неприводимых характеров χ_i степени p^2, откуда $|H| > p^4q$ и $|G| > p^4qq^\lambda$. Поэтому $\lambda = 1$. Так как $|G| = |H|q < 2p^4q^2$, то $|P|q^{b-1}m = |H| < 2p^4q$.

Если $|P| = p^4$, то $q^{b-1}m < 2q$. При этом $|H : P| = mq^{b-1} < 2q$. При $b \geq 2$ получаем, что $m \leq 2$ и H, а потому и G разрешима. Если $b = 1$, то $|H : P| = m < 2q$. Напомним, что $q \mid p - 1$. Так как p нечетно, то $q \leq (p - 1)/2$. Поэтому $|H : P| < p$ и $P \lhd H \lhd G$. В силу характеристичности P имеем $P \lhd G$ и G будет p-разрешимой вопреки предположению. Поэтому случай $|P| = p^4$ невозможен.

Теперь $|P| = p^3$ и $|H : P| = q^{b-1}m \leq 2pq$. При $b = 2$ имеем $|H : P| = qm \leq 2qp$ и потому $m \leq p$. Тогда $P \lhd H$, откуда $P \lhd G$ и G будет p-разрешимой вопреки предположению. Наконец, при $b = 1$ имеем $|H| = p^3m$, где $m \leq 2pq$.

Заметим, что $|O_p(G)| = p$ и $m \leq 2pq \leq p(p-1)$. Поэтому в группе $\bar{H} = H/O_p(G)$, порядок которой меньше $|P|^2$, подгруппа $O_p(\bar{H})$ нетривиальна по предложению 1.2.21. Противоречие. Лемма 5.3.4 доказана.

Лемма 5.3.5. *Если $P = N_G(P)$, то G – p-нильпотентная группа порядка p^2q^bm.*

Доказательство. По предложению 1.2.12 группа G разрешима. Если $|G| = p^2q^bm$, где $(pq, m) = 1$, то G – p-нильпотентна по теореме Бернсайда (предложение 1.2.9).

По леммам 5.3.1 и 5.3.2 $|G| = p^aq^bm$, где $(pq, m) = 1$ и $2 \leq a \leq 3$. Предположим, что $a = 3$, причем $q^{b-2}m < 2p$.

Допустим, что $1 \neq m \leq p$. Если $m \mid |O_{p'}(G)|$, то для любого простого делителя r числа m в группе $O_{p'}(G)P$ существует холлова $\{r, p\}$-подгруппа RP, являющаяся нильпотентной, что противоречит условию. Аналогичным образом, не существует нормальной подгруппы K группы G, порядок которой делится на r, но не делится на $|P|$. Так как G разрешима, то она и r-разрешима. Поэтому $O_{r',r}(G)$ содержит P и по аргументу Фраттини $N_G(P) \neq P$. Противоречие. Стало быть, либо $m = 1$, либо $m > p$ и является простым числом.

Если $m > p$ – простое число, то $q^{b-2} < 2$, откуда $1 \leq b \leq 2$. При $b = 1$ получаем противоречие аналогично предыдущему случаю. Поэтому $b = 2$. Так как $P = N_G(P)$, то при $m \mid |O_{p'}(G)|$ подгруппа M порядка m будет нормальна в $O_{p'}(G)$, а потому и в G. В этом случае $H = C_G(M) \lhd G$ и $|G/H| \mid |Aut(M)| = m - 1$. Так как $m > p$ и $m < 2p$, то p не делит $|G/H|$. В то же время, $H \neq G$, ибо $Z(G) = 1$. Противоречие. Следовательно, m не делит $|O_{p'}(G)|$. Таким образом, либо $O_{p'}(G) = 1$, либо $q^2 = |O_{p'}(G)|$.

Допустим, что $|O_{p'}(G)| = q^2$. Если $Q \in Syl_q(G)$ циклическая, то $G/C_G(Q)$ имеет порядок, делящий $q - 1$ и отличный от единицы. Как и в предыдущем случае, это приводит к противоречию. Итак, $O_{p'}(G) = 1$.

Из предложения 1.2.22 имеем $C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$. Если $|O_p(G)| = p$, то $|G| \mid p(p-1)$, что противоречиво. Если $|O_p(G)| = p^3$, то $P \lhd G$ вопреки условию. Если же $|O_p(G)| = p^2$, то получаем противоречие с леммой 1.3.17.

Итак, можно считать, что $m = 1$ и $|G| = p^3q^b$, где $q^{b-2} \leq 2p$. Из $|P| = |N_G(P)| = p^3$ следует, что случай $|O_p(G)| \neq 1$ ведет к противоречию. Из предложений 1.2.22 и 1.2.21 получаем, что $|O_q(G)| = q^b$ и $p^2 < 2q^2$. В частности, G является p-нильпотентной группой. Отметим, что $Q = O_q(G)$ является элементарной абелевой группой ввиду предложения 1.2.21 (в противном случае некоторый элемент порядка p индуцирует тривиальный автоморфизм на $Q/\Phi(Q)$). По лемме 1.3.17 получаем, что G не имеет неприводимых характеров степени p^2q. Противоречие. Все случаи рассмотрены. Лемма доказана.

Далее будем считать, что $|G| = p^2q^bm$, где m взаимно просто с pq и $b \in \mathbb{N}$.

Лемма 5.3.6. *Пусть G – не p-разрешимая $LC(\Theta)$–группа. Тогда G не проста и любая простая не p-разрешимая секция L группы G изоморфна $L_2(r)$, где r – степень простого числа, причем $r = p, p^2$ или $p-1$.*

Доказательство. Пусть G – простая $LC(\Theta)$–группа. По лемме 5.3.4 $O_p(G) = 1$, а по леммам 5.3.3 и 5.3.5 G порядка $|G| = p^2q^bm$, где $p > q$ и $(m, pq) = 1$. Напомним, что $\Theta(1) = p^2q$. По лемме 5.2.1 группа G изоморфна группе $L_2(r)$. Так как порядок силовской p-подгруппы группы G делит p^2, то $r = p, p^2$ или $p-1$.

Таблицы характеров данных групп имеются в [1]. Ни одна из перечисленных групп не является $LC(\Theta)$-группой при любом выборе неприводимого характера Θ.

Предположим, что G имеет секцию S, изоморфную простой неабелевой группе. Так как порядок S равен p^aq^cm', где $a \leq 2, m' \leq m, c \leq b$ и $|G| < 2|P|^3$, то из леммы 5.2.1 следует, что $S \simeq L_2(r)$, где r – степень простого числа. Лемма доказана.

Перейдем к завершению доказательства теоремы 5.1.1.

Доказательство теоремы 5.1.1. В силу предложения 1.2.21 и условий, наложенных на группу G, имеем
$$p^4q^2 < |G| = p^aq^bm \leq 2p^4q^2,$$
где $a \leq 4$ ввиду леммы 5.3.1. Так как G не является p-разрешимой группой, то из лемм 5.3.4 и 5.3.5 следует, что $a = 2$, откуда $q^{b-2}m \leq 2p^2$ и $q^{b-2}m > p^2$.

Покажем, что в композиционном ряде группы G не может содержаться двух не p-разрешимых композиционных факторов. В самом деле, по лемме 5.3.6 каждый из факторов будет изоморфен группе $L_2(r)$, где $r = p, p^2$ или $p-1$. Допустим, что в G имеется два композиционных фактора, изоморфных $L_2(p)$. Тогда $|G| \geq (1/4)p^2(p^2-1)^2$, тогда как $|G| < 2p^4q^2$. Так как $p > 3$, то $q \leq p-1$. Отсюда
$$\frac{8p^4q^2}{p^2(p^2-1)^2} = \frac{8p^2q^2}{(p^2-1)^2} \leq \frac{2p^2}{(p+1)^2} < 8.$$

Учитывая, что $Z(G) = 1$, а внешняя группа автоморфизмов группы $L_2(p)$ имеет порядок 2 для нечетного p, заключаем, что G имеет подгруппу индекса ≤ 4, изоморфную $L_2(p) \times L_2(p)$.

Так как при $r = p-1$ и $p > 3$ число r является степенью двойки, то имеем $|L_2(p-1)| = p(p-1)(p-2) > |L_2(p)|$. Поэтому случай, когда хотя бы одна из групп $L_2(p)$ заменена на $L_2(p-1)$, также исключен.

Докажем, что существование в композиционном ряде группы G фактора, изоморфного $L_2(p^2)$ также невозможно. Действительно,
$$|L_2(p^2)| = (1/2)p^2(p^4-1) > |L_2(p) \times L_2(p)|.$$

По лемме 5.3.4 подгруппа $O_p(G) = 1$. Пусть $M = O_{p'}(G)$. Если $C_G(M) \subseteq M$, то из предложения 1.2.23 следует, что $|M| \geq |P| + 1 = p^2 + 1$. Так как $|P| = p^2$, получаем:

$$2p^4q^2 \geq |G| \geq |M||L_2(p)|p = (1/2)(p^2+1)p^2(p^2-1).$$

Отметим, что q делит $|L_2(p)|$. Поэтому $q \leq (p+1)/2$ и, стало быть, G совпадает с подгруппой порядка $(1/2)(p^2+1)p^2(p^2-1)$. Причем в этом случае $|M| = p^2+1$. Последнее возможно только в том случае, когда P имеет единственную орбиту на $M \setminus \{1\}$. Тогда MP – группа Фробениуса и P – циклическая группа, что неверно.

Таким образом, $C_G(M) \lhd G$ не является p-разрешимой группой, но порядок G делится на $|M|p|L_2(p)|$. Более того, имеется единственный не p-разрешимый фактор группы $C_G(M)$, изоморфный $L_2(p)$. Поэтому $T \simeq L_2(p)$ или $T \simeq SL_2(p)$ нормальна в G. В G имеется фактор, изоморфный C_p, циклической группе порядка p, причем наибольшая нормальная p-разрешимая подгруппа S группы G имеет p-длину один. Легко видеть, что $G/S \simeq L_2(p)$ группе автоморфизмов $L_2(q)$ порядка $p(p^2-1)$. Таким образом, имеются следующие возможности:

a) $G/S \simeq PGL_2(p)$, $q = 2$ и $|G| \leq 8p^4$;

b) $G/S \simeq L_2(p)$, S/M – расширение C_p с помощью подгруппы порядка $q^\mu \mid (p-1)$;

c) $G/S \simeq L_2(p)$, $|S/M| = p$ и $q \mid (p+1)/2$.

Во всех случаях по предложению 1.2.22 имеем $C_S(M) \subseteq M$ и потому $|M| \geq p+1$. Так как $Z(G) = 1$, то случай, когда подгруппа, изоморфная $SL_2(p)$, нормальна в G, исключен.

a) Если $q = 2$, то $|G| \leq 8p^4$, тогда как $|S||L_2(p)| \geq (p+1)p^2(p^2-1)$. Поэтому $p \leq 7$. Так как в этом случае подгруппа $O_{p'}(G)$ должна иметь порядок не более 8, получаем противоречие. Случай a) невозможен.

b) В этом случае $q \leq (p-1)/2$ и группа $G \simeq S \times L$, где $L \simeq L_2(p)$. Непосредственные вычисления дают оценку $|M| \leq 2p-2$. Поэтому в M имеется не более одной орбиты длины p. В частности, M – элементарная абелева примарная группа. Отсюда степень любого неприводимого характера ψ группы $S = M \rtimes C_p \rtimes C_d$, для d, делящего $p-1$, делит dp. Так как $p^2 > |M|$, то $\psi(1) \leq d$. Согласно [1] (стр.262 – 263), степень любого неприводимого характера группы $L_2(p)$ не превосходит $p+1$. По теореме 3.7.1 в [22] любой неприводимый характер группы G есть произведение неприводимых характеров групп S и L. Стало быть, G не имеет характеров степени p^2q.

c) Группа $G = S \times L$. Так как $|G| \leq 2p^4q^2$, то $|S||L| \leq 2p^4q^2$ и $|S| \leq 4pq^2 + 2q$. Так как L не имеет характеров степени больше, чем $p+1$ (см. [1] (стр.262 – 263)), а степень любого неприводимого характера группы G является произведением степени неприводимого характера группы L и степени неприводимого характера группы S, то должен существовать неприводимый характер S степени pq. Поэтому $|S| > p^2q^2$, откуда $p < 4q$. Это означает, что $q = (p+1)/2$.

Напомним, что $q^{b-2}m < 2p^2$. Так как $p-1$ делит в этом случае m, то $m = t(p-1)$ для некоторого натурального t. При $b = 4$ получим $(p+1)^2 m < 8p^2$. Но тогда $m \leq 7$ и $p \leq 8$. Несложные вычисления исключают эту возможность.

Предположим, что $b = 3$. Тогда $m \leq 4(p-1)$. В этом случае $|M| = q^2m/(p-1) = tq^2$, где $t \leq 4$. Если $t = q = 2$, то $p = 3$, что уже было исключено. Если $t = q = 3$, то $p = 5$. Но тогда $p = 5$ не делит $|Out(M)|$. В остальных случаях группа S имеет абелеву силовскую q-подгруппу. По лемме 1.3.17 S не может иметь неприводимого характера степени pq.

Предположим, что $b = 2$. Тогда $p^2 < m < 2p^2$. При этом $m = t(p-1)$ для некоторого натурального t. Порядок M равен $qm/(p-1)$. Если $t = q$ или $t = 2q$, то группа S не имеет неприводимого характера степени pq. В любом другом случае группа S имеет порядок, меньший p^2q^2 и потому $b \neq 2$.

Теперь $b = 1$ и $|G| = p^2qm$, где $p^2q < m < 2p^2q$, а $q = (p+1)/2$. В этом случае $|S| = pm/(p-1)$. Поскольку степень неприводимого характера должна делить порядок группы, отсюда следует, что S не имеет характера степени pq, а тогда и G не имеет характера степени p^2q. Все возможности исключены. Теорема 5.1.1 доказана.

5.3.2 Доказательство теоремы 5.1.2.

В теореме 5.1.1 было установлено, что G является p-разрешимой группой. По лемме 5.3.1 (при условии, что $|G| \notin \{486, 648\}$) порядок силовской p-подгруппы P группы G не больше p^3. В леммах 5.3.3 и 5.3.5 доказано, что $|P| = p^2$ при $O_p(G) = 1$.

Лемма 5.3.7. *$O_p(G) = 1$ и $|P| = p^2$.*

Доказательство. Допустим, что $U = O_p(G) = 1$. По лемме 5.3.1 подгруппа $P \in Syl_p(G)$ не нормальна в G. Из леммы 1.3.17 следует, что $|U| \neq p^2$. Поэтому $|U| = p$. Следовательно, $H = C_G(P)$ содержит коммутант группы G, и в силу леммы 2.2.4 $|G/H| = q^\lambda \neq 1$ и группа G/H циклическая. По леммам 1.3.22, 2.2.3 и предложению 1.3.23 имеем

$$\Theta_H = \sum_{i=1}^{q} \chi_i,$$

где $\chi_i \in Irr(P)$. Так как G/H имеет взаимно простой с p порядок и $\Theta(1) = p^2q$, то $\chi_i(1) = p^2$. Поэтому H имеет q сопряженных неприводимых характеров степени p^2. Так как $|H| > p^4q$ и $|G/H| = q^\lambda$, то $\lambda = 1$.

Имеется q-подгруппа Q группы G, не лежащая в H. Она действует сопряжениями на множестве неприводимых характеров степени p^2 группы H. Группа Галуа действует на множестве характеров степени p^2q группы G. Общее количество неприводимых характеров степени p^2 группы H равно $p-1$. В орбиту группы Q попадают q таких характеров. Поэтому количество неприводимых характеров степени p^2q у группы G не меньше $(p-1)/q$. Так как имеется ровно один характер, сопряженный с Θ, то $p-1 = q$. Поэтому в данном случае

$p = 3, q = 2$, что исключено в замечании перед леммой 5.3.3. Итак, $O_p(G) = 1$ и $|P| = p^2$. Лемма доказана.

По теореме 5.1.1 группа G является p-разрешимой, а из леммы 5.3.7 получили, что силовская p-подгруппа P группы G абелева порядка p^2. Из предложения 1.2.22 имеем $G = O_{p',p,p'}(G)$, причем $H = O_{p',p}(G) = M \rtimes P$, где $M = O_{p'}(G)$. Эти обозначения зафиксируем до конца доказательства теоремы 5.1.2.

Лемма 5.3.8. *Если $G \neq H$, то $|G : H| = q$ и $\Theta_H = \sum_{i=1}^{q} \chi_i$, где $\chi_i \in Irr(H)$ – сопряженные характеры группы H степени p^2.*

Доказательство. По теореме 5.1.1 $LC(\Theta)$-группа G p-разрешима и $|G| = p^2 q^b m$, где $\Theta(1) = p^2 q$, причем $(pq, m) = 1$. Допустим, что $P \in Syl_p(G)$ и $H = O_{p',p}(G)$. Так как P – абелева группа порядка p^2, то P изоморфна либо циклической группе C_{p^2}, либо элементарной абелевой $C_p \times C_p$, так, что $G/H \leq Out_G(P)$ является p'–группой. Обозначим $f = |G : H|$. По лемме 2.2.4 группа G/H не может иметь нормальных подгрупп простого индекса, отличного от q. Так как p'–группа $Out_G(P)$ изоморфна либо циклической группе порядка, делящего $p - 1$ (случай $P = C_{p^2}$), либо группа порядка, делящего $(p^2 - 1)(p - 1)$ (случай $P \cong C_p \times C_p$), то q делит $p \pm 1$. По лемме 1.3.22 (теория Клиффорда) имеем

$$\Theta_H = e \sum_{i=1}^{s} \chi_i,$$

где χ_i – сопряженные неприводимые характеры группы H, причем $es\chi_1(1) = p^2 q$, где es делит $|G : H|$. В частности, из $(p,es) = 1$ следует, что $es = q$ и $\chi_i(1) = p^2$. В любом случае имеется нормальная подгруппа $H_1 \geq H$ индекса q в G. Так как Θ_{H_1} приводим ввиду леммы 2.2.3, то $\Theta_{H_1} = e \sum_{i=1}^{q} \chi_i$, где $\chi_i(1) = p^2$. В частности, $|G : I_G(\chi_1)| = q$. Поэтому получаем

$$\chi_1^G = \sum_{i=1}^{t} e_i \overline{\phi}_i,$$

где один из характеров, скажем, $\overline{\phi}_1 = \Theta$ и $\sum_{i=1}^{t} e_i^2 = |I_G(\chi_1) : H| = f/g$. Понятно, что $H_1 = I_G(\Theta)$. Так как H_1 имеет q неприводимых характеров степени p^2, то $|H_1| \geq (p^4 q + 1)$. С другой стороны, подгруппа $M = O_{p'}(G)$ не централизуется элементом из $P^{\#}$ ввиду леммы 1.3.17 (теорема Ито). Поэтому $|M| > p^2$ и потому $|H| > p^4$. Следовательно, из $|G| = |G : H| < 2p^4 q^2$ получаем, что $f = |G : H| < 2q^2$. Таким образом, ввиду леммы 2.2.4 имеются следующие возможности:

(a) $|G : H| = q^2$;

(b) $|G : H| = q(q + 1)$, где либо $q + 1$ – степень двойки, либо $q + 1 = 3, q = 2$;

(c) $|G : H| = q$.

Однако в случаях (a) и (b) имеется более одного неприводимого характера степени $p^2 q$, что неверно. Значит, $|G : H| = q$ и лемма доказана.

Лемма 5.3.9. *Если $G \neq H$, то для любого неприводимого характера $\chi = \chi_i$ из разложения Θ_H существует p^2 линейных характеров ψ_j, сопряженных с характером $\psi = \psi_1$, таких, что $\chi_M = \sum_{j=1}^{p^2} \psi_j$. Группа M абелева.*

Доказательство. Пусть ψ – неприводимый характер группы M, входящий в разложение характера χ_M, где $\chi = \chi_i$ – любой неприводимый характер группы H, определенный в лемме 5.3.8. Согласно лемме 1.3.22,

$$\chi_M = e' \sum_{i=1}^{t} \psi_i,$$

где ψ_i – характеры, сопряженные с ψ, e' и t делят $|H : M| = p^2$. В частности,

$$p^2 = \chi(1) = e' t \psi(1).$$

Так как $(|M|, p) = 1$, то $\psi_i(1)$ не делится на p. Поэтому $e't = p^2$ и $\psi_i(1) = 1$. В частности, $ker(\psi_i)$ содержит коммутант группы M. Отсюда $\psi_j(y) = 1$ для любого j и $y \in M$. Но тогда $\chi(y) = p^2$ для любого характера χ, сопряженного с χ_1. Как результат $\Theta(y) = p^2 q$. Так как Θ – точный характер, то $y = 1$, т.е. $M' = 1$ и M абелева группа, что и требовалось доказать.

Лемма 5.3.10. *Пусть $G = H$, $G = M \rtimes P$ и G не содержит нормальных подгрупп индекса q. Тогда $\Theta_M = \sum_{i=1}^{p^2} \alpha_i$, где $\alpha_i \in Irr(M)$ – сопряженные характеры группы M степени q.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in Irr(M)$ неприводимый характер группы M, входящий в разложение Θ_M и пусть $I_G(\alpha)$ – его группа инерции. Согласно лемме 1.3.22

$$\Theta_M = e \sum_{i=1}^{s} \alpha_i,$$

где $\alpha_i \in Irr(M)$, e делит $|I_G(\alpha) : M|$, а s делит $|G : I_G(\alpha)|$. По лемме 2.2.3 Θ_M – приводимый характер и потому $s > 1$. Так как $\Theta(1) = p^2 q = es\alpha(1)$, причем $(\alpha(1), p) = 1$ (порядок M не делится на p), то $es = p^2$ и $\alpha(1) = q$. Так как $s \neq 1$, то $e = 1$. Поэтому $s = p^2$. Лемма доказана.

Лемма 5.3.11. *Если r – простой делитель $|M|$, то M содержит силовскую r-подгруппу R, допустимую относительно P.*

Доказательство. Группа P действует с помощью сопряжения на множестве силовских r–подгрупп группы M. Их число – это индекс нормализатора силовской подгруппы, который взаимно прост с числом $|P|$. Так как каждая нетривиальная P–орбита группы имеет длину, делящуюся на p, то существует силовская r–подгруппа, допустимая относительно P. Лемма доказана.

Лемма 5.3.12. *Группа $G = M \rtimes P$ содержит подгруппы QP и RP порядков $q^b p^2$ и $r^\alpha p^2$ соответственно, причем $r^\alpha | m$, где P – силовская p-подгруппа группы G, Q – силовская q-подгруппа G, а R – силовская r-подгруппа G. В частности, M имеет холловы $\{p, q\}$ и $\{p, r\}$-подгруппы.*

Доказательство. Как сказано выше, $G = M \rtimes P$, где $|M| = q^b m$, $|P| = p^2$ и $(p,qm) = 1$. Так как P действует с помощью сопряжений на множестве силовских q-подгрупп группы M, а их число не делится на p, то имеется силовская q-подгруппа Q группы M, инвариантная относительно P. Таким образом, в G содержится подгруппа $L = QP$, имеющая индекс m в G. По лемме 5.3.11 группа G содержит также подгруппу $Y = RP$ индекса $\frac{q^b m}{r^\alpha}$. Лемма доказана.

Лемма 5.3.13. *Если $G = H$ и P не централизует силовские q-подгруппы из M, то верно одно из утверждений:*

1. *$G = QC_G(P)$, где $|Q| = q^b$, причем $q^b > p^2$.*
2. *$G = RC_G(P)$, где $|R| = r^\alpha$ делит m.*
3. *$G = C_G(a)C_G(u)$, где $P = \langle a \rangle \times \langle u \rangle$ порядка p^2.*

Доказательство. Напомним, что $|G| = p^2 q^b m$ и $(pq, m) = 1$, причем $q^{b-2}m < 2p^2$ и $G = M \rtimes P$.

Допустим, что P нетривиально действует на подгруппе $Q \in Syl_q(G)$. Тогда $|Q| \geq q^3$, ибо порядок группы автоморфизмов группы порядка q^λ для $\lambda < 3$ не делится на p. В частности, $b \geq 3$. Предположим, что имеется также силовская r–подгруппа R группы M ($r \in \pi(m)$), на которой подгруппа P действует нетривиально. В этом случае $|R| \geq p + 1$. Если $|R| \geq p^2$, то $m \geq p^2 + 1$ и $q^{b-2}m \geq q(p^2 + 1)$. Противоречие. То же верно, если имеется по меньшей мере пара силовских подгрупп $R \in Syl_r(M)$, $S \in Syl_s(M)$ для $r, s \in \pi(m)$, на которых подгруппа P действует нетривиально. В таком случае $m \geq p^2 + 1$.

Следовательно, в рассматриваемом случае подгруппа P действует тривиально на всякой силовской s-подгруппе группы M допустимая относительно P при $s \in \pi(m) - \{r\}$.

Таким образом, либо P действует тривиально на всякой P-допустимой подгруппе $R \in Syl_r(M)$ при $r \in \pi(m)$, либо имеется ровно одно простое число $r \in \pi(m)$, для которого $R \in Syl_r(M)$, допустима относительно P и имеет порядок, меньший p^2, но P нетривиально действует на R.

Пусть Q допустимая относительно P силовская q-подгруппа группы M. По сказанному выше $|Q| = q^b$, где $b \geq 3$.

Пусть $L = Q \rtimes P$. Так как по теореме Бернсайда 5.1.4 из [22] элемент порядка p, не централизующий Q, должен действовать нетривиально на $Q/\Phi(Q)$, то $|Q/\Phi(Q)| \geq p + 1$, а потому $|\Phi(Q)| \leq q$.

Если Q — экстраспециальная группа порядка q^b, где p делит $q^{b-1} - 1$, причем $\Phi(Q) = Z(Q) = Q'$ порядка q, то $|Q/\Phi(Q)| = q^{b-1}$. В этом случае $b - 1 = 2s$ четное число и $p \leq q^s + 1 < q^{b-2}$. Однако $q^{b-2}m > 2p^2$ в этом случае (учитывая, что $m > p + 1$). Противоречие.

Значит, Q – абелева группа. Если Q не элементарная абелева и $|\Phi(Q)| = q$, то существует подгруппа порядка q^{b-2}, допустимая относительно P (по теореме Машке). В этом случае $q^{b-2} \geq p+1$, что также ведет к противоречию.

Значит, Q – элементарная абелева q-группа порядка q^b, причем $q^{b-1}-1 \equiv 0(modp)$. В этом случае существует элемент $a \in P^{\#}$ (порядка p), централизующий Q. Так как $|R| < p^2$, то существует элемент $u \in P^{\#}$, централизующий R и $\langle u, a\rangle = P$, ибо $Z(G) = 1$. Таким образом, $G = C_G(a)C_G(u)$. Лемма доказана.

Лемма 5.3.14. *Пусть α – неприводимый характер группы M степени q, входящий в разложение Θ_M. Тогда для $K \lhd M$ характер α_K приводим.*

Доказательство. Из предложения 1.2.25 и леммы 5.3.13 следует, что M не простая группа. Это очевидно, если $\pi(m) = 1$. То же верно при $\pi(m) = 2$. В самом деле, если $G = RC_G(P)$ для некоторой силовской подгруппы R группы M, то по предложению 1.2.25 имеется нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в M (случаи 1 и 2 леммы 5.3.13). Если же ни один неединичный элемент группы P не централизует хотя бы пару силовских подгрупп группы M, скажем R и S, которые P нормализует, причем одна из них является r-силовской из M, а вторая s-силовская, где $r \neq s \in \pi(m)$, то $m > (p+1)(2p+1) > 2p^2$. Отсюда $b = 1$ и $|G| = p^2qm$.

В этом случае P централизует $Q \in Syl_q(M)$. Пусть $|\pi(m)| = 2$, Предположим, что $C_P(R) = \langle a\rangle$. Тогда $|G : C_G(a)|$ – степень числа s. По предложению 1.2.25 заключаем, что подгруппа $\langle a^G\rangle$ разрешимая $\{p,s\}$-подгруппа, так что M не проста. Если $|\pi(m)| \geq 3$, и если в $P^{\#}$ нет элементов, у которых индекс централизатора – степень простого числа, то $m \geq 2(p+1)^3$, так что $mq^{-1} > 2p^2$. Противоречие. Итак, в любом случае M не проста.

Допустим, что K – наибольшая собственная нормальная подгруппа группы M. По лемме 1.3.22 имеем:

$$\alpha_K = e\sum_{s=1}^{d} \lambda_s,$$

где d, e – натуральные числа, делящие $|M : K|$, и λ_s – неприводимые характеры группы K, сопряженные с $\lambda_1 = \lambda$. Отсюда $q = \alpha(1) = ed\lambda(1)$. Если α_K неприводим для любого α, входящего в разложение Θ_M, то подгруппа K имеет p^2 неприводимых характеров степени q. Но тогда ее порядок равен не меньше, чем q^2p^2+1, тогда как $|K| \leq |M|/(|M : K|) \leq p^2q^2+1$. Противоречие. Значит, $\alpha_K = \sum_{s=1}^{q} \lambda_s$, где λ_s – линейные характеры. Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы 5.1.2.

Доказательство теоремы 5.1.2. Из леммы 5.3.14 следует, что пересечение ядер характеров λ_s, входящих в разложение Θ_K, содержит коммутант K и потому тривиально. Поэтому подгруппа K группы G, имеющая индекс p^2q в G абелева, что и утверждалось. Теорема доказана.

Заключение

В качестве заключения стоит добавить, что хотя структура $LC(\Theta)$-групп с ограничениями на $\Theta(1)$ описывается достаточно подробно, но остается ряд вопросов, которые могут представлять интерес.

Вопрос 1. Верно ли, что $LC(\Theta)$–группы разрешимы?

Вопрос 2. Как устроены $LC(\Theta)$-группы с $\Theta(1) = p^m$, $m > 2$ и неабелевой силовской p–подгруппой?

Вопрос 3. Найти все неразрешимые группы, обладающие неприводимым характером Θ, для которого $|G| < 3\Theta(1)^2$.

Список литературы

1. *Белоногов, В.А.* Представления и характеры в теории конечных групп / В.А. Белоногов. – Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990. – 378 с.

2. *Вдовин Е.П.* Максимальные порядки абелевых подгрупп в конечных простых группах / Е.П. Вдовин // Алгебра и логика. - 1999. - Т. 38. - С. 131–160.

3. *Горенстейн, Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.

4. *Зенков, В.И.* О p-блоках дефекта 0 в p-разрешимых группах / В.И. Зенков // Тр. ИММ УрО РАН, Факториал, 1995. – Т. 3. – С. 36–40.

5. *Зенков, В.И.* Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах /В.И. Зенков // Фундамент. и прикл. матем. – 1996. – Т. 2, № 1. – С. 1—92.

6. *Казарин, Л.С.* О степенях неприводимых характеров конечных простых групп / Л.С. Казарин, И.А. Сагиров // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2001. – Т. 7, № 2. – С. 113–123.

7. *Казарин, Л.С.* О p^α-лемме Бернсайда / Л.С. Казарин // Матем. заметки. – 1990. – Т. 4, Выпуск 2. – С. 45–48.

8. *Монахов, В.С.* Инвариантные подгруппы бипримарных групп / В.С. Монахов // Матем. заметки. – 1975. – Т. 18, № 6. – С. 877—886.

9. *Старостин, А.И.* О группах Фробениуса / А.И. Старостин // Украинский математический журнал. – 1971. – Т. 23, № 5. – С. 629—639.

10. *Фейт, У.* Теория представлений конечных групп / У. Фейт. – М.: Наука, 1990. – 465 с.

11. *Шмидт, О.Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем. сб. – 1924. - Т. 31, № 3–4. – С. 366—372.

12. *Amberg, B.* ABA-groups with cyclic subgroup B / B. Amberg, L.S. Kazarin // Тр. ИММ УрО РАН. – 2012. - Т. 18, № 3. – С. 10–22.

13. *Berkovich, Y.G.* Groups with few characters of small degree / Y.G. Berkovich // Israel J. Math. – 1999. - V. 110. – P. 325–332.

14. *Bierbrauer, J.* The uniformly 3-homogeneus subsets in $PGL(2,q)$ / J. Bierbrauer // J.Algebraic Combinatorics. – 1995. – V. 4. – P. 99–102.

15. *Brauer, R.* On simple groups of finite order. I / R. Brauer, H.F. Tuan // Bull. Am. Math. Soc. – 1945. – V. 51. – P. 756–766.

16. *Brodkey, I.S.* A note on finite groups with an abelian Sylow p-subgroups / I.S. Brodkey // Proc. Amer. Math. Soc. – 1963. – V. 14. – P. 132–133.

17. *Camina, A.R.* Implications of conjugacy class size / A.R. Camina, R.D. Camina // J. of group theory. – 1998. – V. 1. – P. 257–269.

18. *Chabot, P.* Groups whose Sylow 2-subgroups have cyclic commutator groups / P. Chabot //J.Algebra. – 1971. – V. 19. – P. 21–30. II J.Algebra. – 1972. – V. 21. – P. 312–320. III J.Algebra. – 1974. – V. 29. – P. 455–458.

19. *Clifford, A.H.* Representations induced in an invariant subgroup / A.H. Clifford // Ann. Math. – 1937. – Series 2, V. 38, № 3. – P. 533–550.

20. *Conway, J.H.* Atlas of finite groups: maximal subgroups and ordinary characters for simple groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 253 p.

21. *Feit, W.* Characters of finite groups / W. Feit. – New York, Amsterdam: Yale University, 1967. – 188 p.

22. *Gorenstein, D.* Finite Group / D. Gorenstein. – N.Y.: Harper and Row, 1968. – 519 p.

23. *Guralnick, R.M.* Self-normalizing Sylow subgroups/ R.M. Guralnick, G. Malle, G. Navarro // Proc. Amer.Math.Soc. – 2003. – V. 132, № 4. – P. 973–979.

24. *Durfee, C.* A bound on the order of a group having a large character degree / C. Durfee, S. Jensen // J. Algebra. – 2011. – V. 338. – P. 197–206.

25. *Herzog, M.* On finite simple groups of order divisible by three primes only / M. Herzog // Journal of Algebra. – 1968. – V. 10. – P. 383–388.

26. *Isaacs, I.M.* A characterization of groups in terms of the degrees of their characters / I.M. Isaacs, D.S. Passman // Pacific J. Math. – 1965. – V. 15, № 3. – P. 877–903.

27. *Isaacs, I.M.* Bounding the order of a group with a large degree character / I.M. Isaacs // J. Algebra/ – 2011. – V. 348, № 1. – P. 264–275.

28. *Isaacs, I.M.* Character theory of finite groups / I.M. Isaacs. – New York, San Francisco, London: Academic press, 1976. – 320 p.

29. *Lewis, M.L.* Bounding group order by large character degrees: A question of Snyder / M.L. Lewis // Journal of Group Theory. – 2014. – V. 17, Issue 6. – P. 1081–1116.

30. *Mann, A.* The intersections of Sylow subgroups in finite groups/A. Mann// Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – V. 53, № 2. – P. 262-264.

31. *Navarro, G.* Characters and blocks of finite groups / G. Navarro. – LMS Lecture Note Series 250: Cambridge Univ. Press, 1998. – 287 p.

32. *Sawabe M.* A Note on Finite Simple Groups with Abelian Sylow p-subgroups / M. Sawabe // Tokyo J. Math. – 2007. – V. 30, № 2. – P. 293–304.

33. *Seitz, G.M.* Finite groups having only one irreducible representation of degree greater than one / G.M. Seitz // Proc. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 19, № 2. – P. 459–461.

34. *Snyder, N.* Groups with a character of large degree / N. Snyder // Proc. Amer.Math.Soc. – 2008. – V. 136. – P. 1893–1903.

35. *The GAP Group.* GAP – Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4.10. [Электронный ресурс] / Aachen, St. Andrews, 2008.

    Режим доступа: http://www.gap-system.org

36. *Walter, J.* The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups / J. Walter // Ann. Math/ – 1969. – V. 8. – P. 405–514.

37. *Zsigmondy, K.* Zur Theorie der Potenzreste / K. Zsigmondy // Monatsh. Math. Phys. – 1892. – V. 3, № 1. – P. 265–284.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в издании, рекомендованном ВАК РФ:

1. *Поисеева, С.С.* Конечные группы с большим неприводимым характером / Л.С. Казарин, С.С. Поисеева // Матем. заметки, Т. 98, Выпуск 2. – 2015. – С.237–246.
2. *Поисеева, С.С.* О конечных группах с большой степенью неприводимого характера / Л.С. Казарин, С.С. Поисеева // Моделирование и анализ информационных систем, Т. 22, №4 – 2015. – С.483-499.
3. *Поисеева, С.С.* Конечные группы с большой степенью неприводимого характера / С.С. Поисеева // Математические заметки СВФУ, Т. 22, №4 – 2015. – С.43-61.
4. *Поисеева, С.С.* О строении конечных групп с большим неприводимым характером степени p^2q / С.С. Поисеева // Математические заметки СВФУ, Т. 23, №3 – 2016. – С.81-90.

Другие публикации:

5. *Поисеева, С.С.* О группах с большим неприводимым характером / Л.С. Казарин, С.С. Поисеева // «Теория групп и ее приложения»: Труды Международной школы-конференции по теории групп, посвященной 70-летию В.В. Кабанова, Нальчик, 11-14 сентября 2014 г. / КБГУ. – Нальчик, 2014. – С.31-32.
6. *Поисеева, С.С.* Конечные группы с большим неприводимым характером / Л.С. Казарин, С.С. Поисеева // Материалы конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», Казань, 2-6 июня 2014 г. / Изд-во КФУ. – Казань, 2014. – С.74-75.
7. *Poiseeva, S.* Finite groups with large irreducible character / L. Kazarin, S. Poiseeva // «Groups and graphs, algorithms and automata» abstracts of the International Conference and PhD Summer School in honor of the 80th Birthday of Professor Vyacheslav A. Belonogov and of the 70th Birthday of Professor Vitaly A. Baransky / UrFU Publishing house. – Yekaterinburg, 2015. – P.56.

8. *Поисеева, С.С.* Группы с большой степенью неприводимого характера / С.С. Поисеева // Шестьдесят седьмая всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием: Сборник материалов конф. Ярославль, 23 апреля 2014 г. Часть 1 [Электронный ресурс] / ЯГТУ. — Ярославль, 2014. – С.380.

9. *Поисеева, С.С.* О конечных группах с большой степенью неприводимого характера / С.С. Поисеева // Шестьдесят восьмая всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием: Сборник материалов конф. Ярославль, 22 апреля 2015 г. [Электронный ресурс] / ЯГТУ. — Ярославль, 2015. – С.814-816.

10. *Поисеева, С.С.* Конечные группы с большим неприводимым характером / С.С. Поисеева // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. - Ярославль, 2015. – Выпуск 15. – С.77-82.

11. *Поисеева, С.С.* О конечных группах с большим неприводимым характером / С.С. Поисеева, Л.С. Казарин // Шестьдесят девятая всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием: Сборник материалов конф. Ярославль, 20 апреля 2016 г. [Электронный ресурс] / ЯГТУ. — Ярославль, 2016. – С.1316-1318.

Приложения

A. Таблицы характеров некоторых $LC(\Theta)$-групп

Над таблицей характеров любой $LC(\Theta)$–группы записаны две строки, где нижняя строка содержит обозначения классов сопряженных элементов (классы, состоящие из элементов порядка n обозначаются через nA, nB, nC и т.д.), верхняя строка содержит порядки централизаторов элементов классов (над g^G в ней записан $|C_G(g)|$).

В самих таблицах приняты обозначения:
$\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, i – корень из -1.

A.1. $LC(\Theta)$-группы с $\Theta(1) = p^m$, где p – простое число, а $m \in \mathbb{N}$

Ниже будут представлены таблицы характеров $LC(\Theta)$-групп, у которых $\Theta(1)$ - степень простого числа p, с абелевой и неабелевой силовской p-подгруппой.

1. $\mathbf{G = S_3}$
$|G| = 6 = 2 \cdot 3$,
$\Theta(1) = 2$.

	$\lvert G \rvert$	2	3
	1A	2A	3A
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Таблица 1

2. $\mathbf{G = Q_8}$ или $\mathbf{D_8}$
$|G| = 8 = 2^3$,
$\Theta(1) = 2$.

	$\lvert G\rvert$ 1A	4 4A	4 4B	8 2A	4 4C
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1	1
χ_3	1	-1	1	1	-1
χ_4	1	1	-1	1	-1
χ_5	2	0	0	-2	0

Таблица 2

3. $\mathbf{G = A_4}$
$|G| = 12 = 2^2 \cdot 3$,
$\Theta(1) = 3$, где $a = \varepsilon_3^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

	$\lvert G\rvert$ 1A	3 3A	4 2A	3 3B
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	a	1	$\overline{a}$
χ_3	1	$\overline{a}$	1	a
χ_4	3	0	-1	0

Таблица 3

4. $\mathbf{G = C_5 \rtimes C_4}$
$|G| = 20 = 2^2 \cdot 5$,
$\Theta(1) = 4 = 2^2$.

	$\lvert G\rvert$ 1A	4 4A	4 2A	5 5A	4 4B
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	1	-i	-1	1	i
χ_4	1	i	-1	1	-i
χ_5	4	0	0	-1	0

Таблица 4

Заметим, что $LC(\Theta)$-группы порядка 2^{2m+1} с $\Theta(1) = 2^m$, могут быть не экстраспециальными.

Например, $LC(\Theta)$-группы порядка 32 обладают неприводимым характером Θ степени 2^2.

Рассмотрим таблицу характеров $LC(\Theta)$-группы порядка 2^5 не являющейся экстраспециальной, ибо у экстраспециальной группы порядка 2^5 всего 16 характеров степени 1 и 1 характер Θ степени 4.

5. $\mathbf{G = (C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_2}$

$|G| = 32 = 2^5$,

$\Theta(1) = 4 = 2^2$.

	$\|G\|$ 1A	8 8A	8 2A	16 2B	16 4A	32 2C	8 8B	8 8C	8 2D	16 4B	8 8D
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1
χ_3	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1
χ_4	1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_5	1	-i	-1	1	-1	1	i	i	1	-1	-i
χ_6	1	i	-1	1	-1	1	-i	-i	1	-1	i
χ_7	1	-i	1	1	-1	1	-i	i	-1	-1	i
χ_8	1	i	1	1	-1	1	i	-i	-1	-1	-i
χ_9	2	0	0	-2	-2	2	0	0	0	2	0
χ_{10}	2	0	0	-2	2	2	0	0	0	-2	0
χ_{11}	4	0	0	0	0	-4	0	0	0	0	0

Таблица 5

6. $\mathbf{G = (C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_7}$

$|G| = 56 = 2^3 \cdot 7$,

$\Theta(1) = 7$,

	$\|G\|$ 1A	7 7A	8 2A	7 7B	7 7C	7 7D	7 7E	7 7F
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	a	1	b	c	$\overline{c}$	$\overline{b}$	$\overline{a}$
χ_3	1	b	1	$\overline{c}$	$\overline{a}$	a	c	$\overline{b}$
χ_4	1	c	1	$\overline{a}$	b	$\overline{b}$	a	$\overline{c}$
χ_5	1	$\overline{c}$	1	a	$\overline{b}$	b	$\overline{a}$	c
χ_6	1	$\overline{b}$	1	c	a	$\overline{a}$	$\overline{c}$	b
χ_7	1	$\overline{a}$	1	$\overline{b}$	$\overline{c}$	c	b	a
χ_8	7	0	-1	0	0	0	0	0

Таблица 6

где $a = \varepsilon_7^6$;

$b = \varepsilon_7^5$;

$c = \varepsilon_7^4$.

Следующие примеры представляют особый интерес, ибо если $LC(\Theta)$-группы имеют порядок 72, то имеются две возможности для степени Θ:

1. $\Theta(1) = 2^3$;
2. $\Theta(1) = 2 \cdot 3$.

Случай при $\Theta(1) = 2 \cdot 3$ рассмотрим позже (случай при $\Theta(1) = p \cdot q$, где p, q – различные простые числа). При $\Theta(1) = 2^3$ из $LC(\Theta)$–групп порядка 72 рассмотрим две группы с таблицами характеров 7 и 8:

Пример, $LC(\Theta)$-группы с неабелевой силовской 2-подгруппой:
7. $\mathbf{G} = (\mathbf{C_3} \times \mathbf{C_3}) \rtimes \mathbf{Q_8}$
$|G| = 72 = 2^3 \cdot 3^2$,
$\Theta(1) = 8 = 2^3$.

	$\lvert G\rvert$	4	4	8	9	4
	1A	4A	4B	2A	3A	4C
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1	1	1
χ_3	1	-1	1	1	1	-1
χ_4	1	1	-1	1	1	-1
χ_5	2	0	0	-2	2	0
χ_6	8	0	0	0	-1	0

Таблица 7

Пример, $LC(\Theta)$-группы с абелевой силовской 2-подгруппой:
8. $\mathbf{G} = (\mathbf{C_3} \times \mathbf{C_3}) \rtimes \mathbf{C_8}$
$|G| = 72 = 2^3 \cdot 3^2$,
$\Theta(1) = 8 = 2^3$,

	$\lvert G\rvert$	8	8	8	9	8	8	8	8
	1A	8A	4A	2A	3A	8B	8C	4B	8D
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1
χ_3	1	a	-1	1	1	-a	a	-1	-a
χ_4	1	-a	-1	1	1	a	-a	-1	a
χ_5	1	b	-a	-1	1	-$\bar{b}$	-b	a	$\bar{b}$
χ_6	1	-$\bar{b}$	a	-1	1	b	$\bar{b}$	-a	b
χ_7	1	$\bar{b}$	a	-1	1	-b	-$\bar{b}$	-a	b
χ_8	1	-b	-a	-1	1	$\bar{b}$	b	a	-$\bar{b}$
χ_9	8	0	0	0	-1	0	0	0	0

Таблица 8

где $a = -\varepsilon_4 = -\sqrt{-1} = -i$;
$b = -\varepsilon_8$.

9. $\mathbf{G = S_3 \times (C_5 \rtimes C_4)}$
$|G| = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$,
$\Theta(1) = 8 = 2^3$,

	$\lvert G\rvert$ 1A	24 4A	40 2A	24 2B	60 3A	30 5A	8 4B	24 4C	12 12A	8 2C	10 10A	12 6A	15 15A	8 4D	12 12B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
χ_3	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1
χ_5	1	a	-1	-1	1	1	$-a$	$-a$	a	1	-1	-1	1	a	$-a$
χ_6	1	$-a$	-1	-1	1	1	a	a	$-a$	1	-1	-1	1	$-a$	a
χ_7	1	a	1	-1	1	1	a	$-a$	a	-1	1	-1	1	$-a$	$-a$
χ_8	1	$-a$	1	-1	1	1	$-a$	a	$-a$	-1	1	-1	1	a	a
χ_9	2	-2	0	2	-1	2	0	-2	1	0	0	-1	-1	0	1
χ_{10}	2	2	0	2	-1	2	0	2	-1	0	0	-1	-1	0	-1
χ_{11}	2	b	0	-2	-1	2	0	$-b$	$-a$	0	0	1	-1	0	a
χ_{12}	2	$-b$	0	-2	-1	2	0	b	a	0	0	1	-1	0	$-a$
χ_{13}	4	0	-4	0	4	-1	0	0	0	0	1	0	-1	0	0
χ_{14}	4	0	4	0	4	-1	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0
χ_{15}	8	0	0	0	-4	-2	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Таблица 9

где $a = -\varepsilon_4 = -\sqrt{-1} = -i$;
$b = -2 \cdot \varepsilon_4 = -2 \cdot \sqrt{-1} = -2i$.

$LC(\Theta)$-группы порядка 128 обладают неприводимым характером Θ степени 2^3. Приведем пример еще одной 2-группы с $\Theta(1) = 2^m$ порядка 2^{2m+1}, при $m = 3$, не являющейся экстраспециальной.

10. $\mathbf{G} = (((\mathbf{C_8} \rtimes \mathbf{C_2}) \rtimes \mathbf{C_2}) \rtimes \mathbf{C_2}) \rtimes \mathbf{C_2}$
$|G| = 128 = 2^7$,
$\Theta(1) = 8 = 2^3$.

	$\lvert G\rvert$ 1A	16 2A	16 2B	16 2C	32 2D	32 2E	64 2F	128 2G	8 4A	8 4B	16 4C	16 4D	16 4E	16 4F	32 4G	8 8A	16 4H
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_3	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
χ_5	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1
χ_6	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1
χ_7	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
χ_8	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
χ_9	2	0	0	-2	-2	2	2	2	0	0	0	0	0	2	-2	0	0
χ_{10}	2	0	0	2	-2	2	2	2	0	0	0	0	0	-2	-2	0	0
χ_{11}	2	0	-2	0	2	-2	2	2	0	0	0	0	2	0	-2	0	0
χ_{12}	2	0	0	0	-2	-2	2	2	0	0	0	-2	0	0	2	0	2
χ_{13}	2	0	0	0	-2	-2	2	2	0	0	0	2	0	0	2	0	-2
χ_{14}	2	0	2	0	2	-2	2	2	0	0	0	0	-2	0	-2	0	0
χ_{15}	4	-2	0	0	0	0	-4	4	0	0	2	0	0	0	0	0	0
χ_{16}	4	2	0	0	0	0	-4	4	0	0	-2	0	0	0	0	0	0
χ_{17}	8	0	0	0	0	0	0	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 10

11. $\mathbf{G = A_4 \times A_4}$
$|G| = 144 = 2^4 \cdot 3^2$,
$\Theta(1) = 9 = 3^2$,

	$\vert G\vert$	36	36	48	48	36	9	12	36	12	16	9	12	9	12	9
	1A	3A	3B	2A	2B	3C	3D	6A	3E	6B	2C	3F	6C	3G	6D	3H
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	a	1	1	1	a	1	$\overline{a}$	a	1	a	1	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{a}$
χ_3	1	1	$\overline{a}$	1	1	1	$\overline{a}$	1	a	$\overline{a}$	1	$\overline{a}$	1	a	a	a
χ_4	1	a	1	1	1	$\overline{a}$	a	a	1	1	1	$\overline{a}$	$\overline{a}$	a	1	$\overline{a}$
χ_5	1	$\overline{a}$	1	1	1	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	1	1	1	a	a	$\overline{a}$	1	a
χ_6	1	a	a	1	1	$\overline{a}$	$\overline{a}$	a	$\overline{a}$	a	1	1	$\overline{a}$	1	$\overline{a}$	a
χ_7	1	$\overline{a}$	$\overline{a}$	1	1	a	a	$\overline{a}$	a	$\overline{a}$	1	1	a	1	a	$\overline{a}$
χ_8	1	a	$\overline{a}$	1	1	$\overline{a}$	1	a	a	$\overline{a}$	1	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	a	1
χ_9	1	$\overline{a}$	a	1	1	a	1	$\overline{a}$	$\overline{a}$	a	1	$\overline{a}$	a	a	$\overline{a}$	1
χ_{10}	3	3	0	-1	3	3	0	-1	0	0	-1	0	-1	0	0	0
χ_{11}	3	0	3	3	-1	0	0	0	3	-1	-1	0	0	0	-1	0
χ_{12}	3	b	0	-1	3	$\overline{b}$	0	-a	0	0	-1	0	-$\overline{a}$	0	0	0
χ_{13}	3	$\overline{b}$	0	-1	3	b	0	-$\overline{a}$	0	0	-1	0	-a	0	0	0
χ_{14}	3	0	b	3	-1	0	0	0	$\overline{b}$	-a	-1	0	0	0	-$\overline{a}$	0
χ_{15}	3	0	$\overline{b}$	3	-1	0	0	0	b	-$\overline{a}$	-1	0	0	0	-a	0
χ_{16}	9	0	0	-3	-3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Таблица 11

где $a = \varepsilon_3^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$;
$b = 3 \cdot \varepsilon_3^2 = \frac{-3-3\cdot\sqrt{-3}}{2}$.

12. $\mathbf{G = C_{17} \rtimes C_{16}}$

$|G| = 272 = 2^4 \cdot 17$,

$\Theta(1) = 16 = 2^4$,

	$\|G\|$ 1A	16 16A	16 8A	16 4A	16 2A	17 17A	16 16B	16 16C	16 16D	16 8B	16 8C	16 4B	16 16E	16 16F	16 16G	16 8D	16 16H
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
χ_3	1	a	-1	1	1	1	$-a$	a	a	-1	-1	1	$-a$	$-a$	a	-1	$-a$
χ_4	1	$-a$	-1	1	1	1	a	$-a$	$-a$	-1	-1	1	a	a	$-a$	-1	a
χ_5	1	b	$-a$	-1	1	1	$-\bar{b}$	$-b$	b	a	$-a$	-1	$\bar{b}$	$-\bar{b}$	$-b$	a	$\bar{b}$
χ_6	1	$-\bar{b}$	a	-1	1	1	b	$\bar{b}$	$-\bar{b}$	$-a$	a	-1	$-b$	b	$\bar{b}$	$-a$	$-b$
χ_7	1	$\bar{b}$	a	-1	1	1	$-b$	$-\bar{b}$	$\bar{b}$	$-a$	a	-1	b	$-b$	$-\bar{b}$	$-a$	b
χ_8	1	$-b$	$-a$	-1	1	1	$\bar{b}$	b	$-b$	a	$-a$	-1	$-\bar{b}$	$\bar{b}$	b	a	$-\bar{b}$
χ_9	1	c	$-b$	$-a$	-1	1	d	$-\bar{d}$	$-c$	$\bar{b}$	b	a	$-\bar{c}$	$-d$	$\bar{d}$	$-\bar{b}$	$\bar{c}$
χ_{10}	1	d	$\bar{b}$	a	-1	1	$-c$	$\bar{c}$	$-d$	$-b$	$-\bar{b}$	$-a$	$-\bar{d}$	c	$-\bar{c}$	b	$\bar{d}$
χ_{11}	1	$-\bar{d}$	b	$-a$	-1	1	$\bar{c}$	$-c$	$\bar{d}$	$-\bar{b}$	$-b$	a	d	$-\bar{c}$	c	$\bar{b}$	$-d$
χ_{12}	1	$-\bar{c}$	$-\bar{b}$	a	-1	1	$-\bar{d}$	d	$\bar{c}$	b	$\bar{b}$	$-a$	c	$\bar{d}$	$-d$	$-b$	$-c$
χ_{13}	1	$\bar{c}$	$-\bar{b}$	a	-1	1	$\bar{d}$	$-d$	$-\bar{c}$	b	$\bar{b}$	$-a$	$-c$	$-\bar{d}$	d	$-b$	c
χ_{14}	1	$\bar{d}$	b	$-a$	-1	1	$-\bar{c}$	c	$-\bar{d}$	$-\bar{b}$	$-b$	a	$-d$	$\bar{c}$	$-c$	$\bar{b}$	d
χ_{15}	1	$-d$	$\bar{b}$	a	-1	1	c	$-\bar{c}$	d	$-b$	$-\bar{b}$	$-a$	$\bar{d}$	$-c$	$\bar{c}$	b	$-\bar{d}$
χ_{16}	1	$-c$	$-b$	$-a$	-1	1	$-d$	$\bar{d}$	c	$\bar{b}$	b	a	$\bar{c}$	d	$-\bar{d}$	$-\bar{b}$	$-\bar{c}$
χ_{17}	16	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 12

где $a = -\varepsilon_4 = -\sqrt{-1} = -i$;

$b = -\varepsilon_8$;

$c = -\varepsilon_{16}$;

$d = -\varepsilon_{16}^3$.

$LC(\Theta)$-группы порядка 400 обладают неприводимым характером Θ степени 2^4. При $\Theta(1) = 2^4$ силовская 2-подгруппа порядка 16 $LC(\Theta)$-группы может быть либо абелевой, либо неабелевой.

Приведем пример $LC(\Theta)$-группы порядка 400 с характером Θ степени 16 с неабелевой силовской 2-подгруппой.

13. $\mathbf{G} = ((\mathbf{C_5} \times \mathbf{C_5}) \rtimes \mathbf{C_8}) \rtimes \mathbf{C_2}$

$|G| = 400 = 2^4 \cdot 5^2$,

$\Theta(1) = 16 = 2^4$,

	$\lvert G\rvert$ 1A	8 4A	8 8A	16 4B	16 2A	50 5A	8 8B	40 2B	8 8C	16 4C	25 5B	8 8D	10 10A
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1
χ_3	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1
χ_5	1	-1	a	-1	1	1	-a	1	-a	-1	1	a	1
χ_6	1	-1	-a	-1	1	1	a	1	a	-1	1	-a	1
χ_7	1	1	a	-1	1	1	a	-1	-a	-1	1	-a	-1
χ_8	1	1	-a	-1	1	1	-a	-1	a	-1	1	a	-1
χ_9	2	0	0	b	-2	2	0	0	0	-b	2	0	0
χ_{10}	2	0	0	-b	-2	2	0	0	0	b	2	0	0
χ_{11}	8	0	0	0	0	3	0	-4	0	0	-2	0	1
χ_{12}	8	0	0	0	0	3	0	4	0	0	-2	0	-1
χ_{13}	16	0	0	0	0	-4	0	0	0	0	1	0	0

Таблица 13

где $a = -\varepsilon_4 = -\sqrt{-1} = -i$;

$b = -2 \cdot \varepsilon_4 = -2 \cdot \sqrt{-1} = -2i$.

$LC(\Theta)$-группы порядка 432 обладают неприводимым характером Θ степени 2^4. Рассмотрим две $LC(\Theta)$-группы порядка 432, не изоморфных группе, описанной В.И. Зенковым [4], причем первая группа с неабелевой силовской 2-подгруппой, а вторая группа с абелевой силовской 2-подгруппой.

14. $\mathbf{G = (C_3 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes Q_8) \rtimes C_2}$

$|G| = 432 = 2^4 \cdot 3^3$,

$\Theta(1) = 16 = 2^4$,

	$\lvert G\rvert$ 1A	12 2A	12 4A	24 4B	48 2B	54 3A	216 3B	8 8A	6 6A	12 12A	12 12B	24 6B	27 3C	8 8B	12 12C
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1
χ_3	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1
χ_4	1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1
χ_5	2	0	0	-2	2	2	2	0	0	0	-2	2	2	0	0
χ_6	2	0	-2	2	2	2	-1	0	0	1	-1	-1	-1	0	1
χ_7	2	0	2	2	2	2	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	-1
χ_8	2	0	0	0	-2	2	2	a	0	0	0	-2	2	-a	0
χ_9	2	0	0	0	-2	2	2	-a	0	0	0	-2	2	a	0
χ_{10}	2	0	0	-2	2	2	-1	0	0	b	1	-1	-1	0	-b
χ_{11}	2	0	0	-2	2	2	-1	0	0	-b	1	-1	-1	0	b
χ_{12}	4	0	0	0	-4	4	-2	0	0	0	0	2	-2	0	0
χ_{13}	8	-2	0	0	0	-1	8	0	1	0	0	0	-1	0	0
χ_{14}	8	2	0	0	0	-1	8	0	-1	0	0	0	-1	0	0
χ_{15}	16	0	0	0	0	-2	-8	0	0	0	0	0	1	0	0

Таблица 14

где $a = -\varepsilon_8 - \varepsilon_8^3$;
$b = -\varepsilon_3 + \varepsilon_3^2$.

15. $\mathbf{G} = ((\mathbf{C_3} \times \mathbf{C_3}) \rtimes \mathbf{C_8}) \times \mathbf{S_3}$

$|G| = 432 = 2^4 \cdot 3^3$,

$\Theta(1) = 16 = 2^4$,

	$\lvert G\rvert$ 1A	144 2A	48 8A	48 4A	48 2B	54 3A	216 3B	16 8B	16 4B	16 2C	18 6A	48 8C	48 8D	24 24A
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
χ_4	1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
χ_5	1	-1	a	-1	1	1	1	$-a$	1	-1	-1	$-a$	a	a
χ_6	1	-1	$-a$	-1	1	1	1	a	1	-1	-1	a	$-a$	$-a$
χ_7	1	-1	b	$-a$	-1	1	1	$-b$	a	1	-1	$-\bar{b}$	$-b$	b
χ_8	1	-1	$-\bar{b}$	a	-1	1	1	$\bar{b}$	$-a$	1	-1	b	$\bar{b}$	$-\bar{b}$
χ_9	1	-1	$\bar{b}$	a	-1	1	1	$-\bar{b}$	$-a$	1	-1	$-b$	$-\bar{b}$	$\bar{b}$
χ_{10}	1	-1	$-b$	$-a$	-1	1	1	b	a	1	-1	$\bar{b}$	b	$-b$
χ_{11}	1	1	a	-1	1	1	1	a	-1	1	1	$-a$	a	a
χ_{12}	1	1	$-a$	-1	1	1	1	$-a$	-1	1	1	a	$-a$	$-a$
χ_{13}	1	1	b	$-a$	-1	1	1	b	$-a$	-1	1	$-\bar{b}$	$-b$	b
χ_{14}	1	1	$-\bar{b}$	a	-1	1	1	$-\bar{b}$	a	-1	1	b	$\bar{b}$	$-\bar{b}$
χ_{15}	1	1	$\bar{b}$	a	-1	1	1	$\bar{b}$	a	-1	1	$-b$	$-\bar{b}$	$\bar{b}$
χ_{16}	1	1	$-b$	$-a$	-1	1	1	$-b$	$-a$	-1	1	$\bar{b}$	b	$-b$
χ_{17}	2	0	-2	2	2	2	-1	0	0	0	0	-2	-2	1
χ_{18}	2	0	2	2	2	2	-1	0	0	0	0	2	2	-1
χ_{19}	2	0	c	-2	2	2	-1	0	0	0	0	$-c$	c	$-a$
χ_{20}	2	0	$-c$	-2	2	2	-1	0	0	0	0	c	$-c$	a
χ_{21}	2	0	d	$-c$	-2	2	-1	0	0	0	0	$-\bar{d}$	$-d$	$-b$
χ_{22}	2	0	$-\bar{d}$	c	-2	2	-1	0	0	0	0	d	$\bar{d}$	$\bar{b}$
χ_{23}	2	0	$\bar{d}$	c	-2	2	-1	0	0	0	0	$-d$	$-\bar{d}$	$-\bar{b}$
χ_{24}	2	0	$-d$	$-c$	-2	2	-1	0	0	0	0	$\bar{d}$	d	b
χ_{25}	8	-8	0	0	0	-1	8	0	0	0	1	0	0	0
χ_{26}	8	8	0	0	0	-1	8	0	0	0	-1	0	0	0
χ_{27}	16	0	0	0	0	-2	-8	0	0	0	0	0	0	0

	48 4C	24 12A	24 6B	27 3C	16 8E	16 8F	16 4D	48 8G	24 24B	24 24C	24 12B	16 8H	24 24D
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1
χ_3	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1
χ_4	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1
χ_5	-1	-1	1	1	a	$-a$	1	$-a$	$-a$	a	-1	a	$-a$
χ_6	-1	-1	1	1	$-a$	a	1	a	a	$-a$	-1	$-a$	a
χ_7	a	$-a$	-1	1	$\bar{b}$	b	$-a$	$\bar{b}$	$-\bar{b}$	$-b$	a	$-\bar{b}$	$\bar{b}$
χ_8	$-a$	a	-1	1	$-b$	$-\bar{b}$	a	$-b$	b	$\bar{b}$	$-a$	b	$-b$
χ_9	$-a$	a	-1	1	b	$\bar{b}$	a	b	$-b$	$-\bar{b}$	$-a$	$-b$	b
χ_{10}	a	$-a$	-1	1	$-\bar{b}$	$-b$	$-a$	$-\bar{b}$	$\bar{b}$	b	a	$\bar{b}$	$-\bar{b}$
χ_{11}	-1	-1	1	1	$-a$	a	-1	$-a$	$-a$	a	-1	$-a$	$-a$
χ_{12}	-1	-1	1	1	a	$-a$	-1	a	a	$-a$	-1	a	a
χ_{13}	a	$-a$	-1	1	$-\bar{b}$	$-b$	a	$\bar{b}$	$-\bar{b}$	$-b$	a	$\bar{b}$	$\bar{b}$
χ_{14}	$-a$	a	-1	1	b	$\bar{b}$	$-a$	$-b$	b	$\bar{b}$	$-a$	$-b$	$-b$
χ_{15}	$-a$	a	-1	1	$-b$	$-\bar{b}$	$-a$	b	$-b$	$-\bar{b}$	$-a$	b	b
χ_{16}	a	$-a$	-1	1	$\bar{b}$	b	a	$-\bar{b}$	$\bar{b}$	b	a	$-\bar{b}$	$-\bar{b}$
χ_{17}	2	-1	-1	-1	0	0	0	-2	1	1	-1	0	1
χ_{18}	2	-1	-1	-1	0	0	0	2	-1	-1	-1	0	-1
χ_{19}	-2	1	-1	-1	0	0	0	$-c$	a	$-a$	1	0	a
χ_{20}	-2	1	-1	-1	0	0	0	c	$-a$	a	1	0	$-a$
χ_{21}	c	a	1	-1	0	0	0	$\bar{d}$	$\bar{b}$	b	$-a$	0	$-\bar{b}$
χ_{22}	$-c$	$-a$	1	-1	0	0	0	$-d$	$-b$	$-\bar{b}$	a	0	b
χ_{23}	$-c$	$-a$	1	-1	0	0	0	d	b	$\bar{b}$	a	0	$-b$
χ_{24}	c	a	1	-1	0	0	0	$-\bar{d}$	$-\bar{b}$	$-b$	$-a$	0	$\bar{b}$
χ_{25}	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{26}	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{27}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 15

где $a = -\varepsilon_4 = -\sqrt{-1} = -i$;

$b = -\varepsilon_8$;

$c = -2 \cdot \varepsilon_4 = -2 \cdot \sqrt{-1} = -2i$;

$d = -2 \cdot \varepsilon_8$.

A.2. $LC(\Theta)$-группы с $\Theta(1) = pq$, где p и q различные простые числа

Ниже будут представлены таблицы характеров $LC(\Theta)$-групп, у которых $\Theta(1)$ - произведение двух простых чисел p и q.

1. $\mathbf{G = (C_7 \rtimes C_3) \rtimes C_2 = C_7 \rtimes C_6}$
$|G| = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$,
$\Theta(1) = 6 = 2 \cdot 3$,

	$\|G\|$ 1A	6 2A	6 3A	7 7A	6 6A	6 3B	6 6B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	-1	a	1	-a	$\overline{a}$	-$\overline{a}$
χ_4	1	-1	$\overline{a}$	1	-$\overline{a}$	a	-a
χ_5	1	1	a	1	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$
χ_6	1	1	$\overline{a}$	1	$\overline{a}$	a	a
χ_7	6	0	0	-1	0	0	0

Таблица 16

где $a = \varepsilon_3^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

2. $\mathbf{G = ((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2}$
$|G| = 54 = 2 \cdot 3^3$,
$\Theta(1) = 6 = 2 \cdot 3$,

	$\|G\|$ 1A	6 2A	18 3A	9 3B	27 3C	6 6A	18 3D	9 3E	6 6B	9 3F
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	1
χ_3	1	-1	a	1	1	-a	$\overline{a}$	a	-$\overline{a}$	$\overline{a}$
χ_4	1	-1	$\overline{a}$	1	1	-$\overline{a}$	a	$\overline{a}$	-a	a
χ_5	1	1	a	1	1	a	$\overline{a}$	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$
χ_6	1	1	$\overline{a}$	1	1	$\overline{a}$	a	$\overline{a}$	a	a
χ_7	2	0	2	-1	2	0	2	-1	0	-1
χ_8	2	0	b	-1	2	0	$\overline{b}$	-$\overline{a}$	0	-a
χ_9	2	0	$\overline{b}$	-1	2	0	b	-a	0	-$\overline{a}$
χ_{10}	6	0	0	0	-3	0	0	0	0	0

Таблица 17

где $a = \varepsilon_3^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$;
$b = 2 \cdot \varepsilon_3 = -1 + \sqrt{-3}$.

Напомним, что если $LC(\Theta)$-группы имеют порядок 72, то имеются две возможности для степени Θ: $\Theta(1) = 2^3$; $\Theta(1) = 2 \cdot 3$. Случай при $\Theta(1) = 2^3$ рассмотрен выше (случай при $\Theta(1) = p^m$, где p – простое число).

Среди $LC(\Theta)$–групп порядка 72 с характером Θ степени $2 \cdot 3 = 6$ имеются группы с таблицами характеров 18 и 19.

3. $\mathbf{G} = ((\mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2}) \rtimes \mathbf{C_9}) \rtimes \mathbf{C_2}$

$|G| = 72 = 2^3 \cdot 3^2$,

$\Theta(1) = 2 \cdot 3$,

	$\vert G\vert$	4	9	36	24	4	9	12	9
	1A	2A	9A	3A	2B	4A	9B	6A	9C
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	2	0	-1	2	-1
χ_4	2	0	a	-1	2	0	c	-1	b
χ_5	2	0	b	-1	2	0	a	-1	c
χ_6	2	0	c	-1	2	0	b	-1	a
χ_7	3	-1	0	3	-1	1	0	-1	0
χ_8	3	1	0	3	-1	-1	0	-1	0
χ_9	6	0	0	-3	-2	0	0	1	0

Таблица 18

где $a = \varepsilon_9^4 + \varepsilon_9^5$;
$b = \varepsilon_9^2 + \varepsilon_9^7$;
$c = -\varepsilon_9^2 - \varepsilon_9^4 - \varepsilon_9^5 - \varepsilon_9^7$.

4. $\mathbf{G} = \mathbf{A_4} \times \mathbf{S_3}$

$|G| = 72 = 2^3 \cdot 3^2$,

$\Theta(1) = 6 = 2 \cdot 3$,

	$\vert G\vert$	24	18	24	36	6	8	18	9	12	6	9
	1A	2A	3A	2B	3B	6A	2C	3C	3D	6B	6C	3E
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1
χ_3	1	-1	a	1	1	-a	-1	$\overline{a}$	a	1	-$\overline{a}$	$\overline{a}$
χ_4	1	-1	$\overline{a}$	1	1	-$\overline{a}$	-1	a	$\overline{a}$	1	-a	a
χ_5	1	1	a	1	1	a	1	$\overline{a}$	a	1	$\overline{a}$	$\overline{a}$
χ_6	1	1	$\overline{a}$	1	1	$\overline{a}$	1	a	$\overline{a}$	1	a	a
χ_7	2	0	2	2	-1	0	0	2	-1	-1	0	-1
χ_8	2	0	b	2	-1	0	0	$\overline{b}$	-a	-1	0	-$\overline{a}$
χ_9	2	0	$\overline{b}$	2	-1	0	0	b	-$\overline{a}$	-1	0	-a
χ_{10}	3	-3	0	-1	3	0	1	0	0	-1	0	0
χ_{11}	3	3	0	-1	3	0	-1	0	0	-1	0	0
χ_{12}	6	0	0	-2	-3	0	0	0	0	1	0	0

Таблица 19

где $a = \varepsilon_3^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$;
$b = 2 \cdot \varepsilon_3^2 = -1 - \sqrt{-3}$.

5. $\mathbf{G} = (\mathbf{C_{11}} \rtimes \mathbf{C_5}) \rtimes \mathbf{C_2}$
$|G| = 110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$,
$\Theta(1) = 10 = 2 \cdot 5$,

	$\lvert G\rvert$	10	10	11	10	10	10	10	10	10	10
	1A	2A	5A	11A	10A	5B	10B	5C	10C	5D	10D
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_3	1	-1	a	1	-a	b	-b	$\overline{b}$	-$\overline{b}$	$\overline{a}$	-$\overline{a}$
χ_4	1	-1	b	1	-b	$\overline{a}$	-$\overline{a}$	a	-a	$\overline{b}$	-$\overline{b}$
χ_5	1	-1	$\overline{b}$	1	-$\overline{b}$	a	-a	$\overline{a}$	-$\overline{a}$	b	-b
χ_6	1	-1	$\overline{a}$	1	-$\overline{a}$	$\overline{b}$	-$\overline{b}$	b	-b	a	-a
χ_7	1	1	a	1	a	b	b	$\overline{b}$	$\overline{b}$	$\overline{a}$	$\overline{a}$
χ_8	1	1	b	1	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	a	a	$\overline{b}$	$\overline{b}$
χ_9	1	1	$\overline{b}$	1	$\overline{b}$	a	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	b	b
χ_{10}	1	1	$\overline{a}$	1	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	b	b	a	a
χ_{11}	10	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 20

где $a = \varepsilon_5^4$;
$b = \varepsilon_5^3$.

Если $LC(\Theta)$-группы имеют порядок 240, то имеются две возможности для степени Θ:

1. $\Theta(1) = 3 \cdot 5 = 15$;
2. $\Theta(1) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Случай при $\Theta(1) = 2^2 \cdot 3$ рассмотрим позже (случай при $\Theta(1) = p^2 \cdot q$, где p, q – различные простые числа).

6. $\mathbf{G} = ((\mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2}) \rtimes \mathbf{C_5}) \rtimes \mathbf{C_3}$

$|G| = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$,

$\Theta(1) = 15 = 3 \cdot 5$,

	$\lvert G\rvert$ 1A	15 3A	15 5A	16 2A	15 3B	15 15A	15 5B	15 15B	15 15C	15 5C	15 15D	15 15E	15 5D	15 15F	15 15G	15 15H
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	b	1	1	b	c	b	c	$\overline{c}$	c	$\overline{c}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$
χ_3	1	1	c	1	1	c	$\overline{b}$	c	$\overline{b}$	b	$\overline{b}$	b	$\overline{c}$	b	$\overline{c}$	$\overline{c}$
χ_4	1	1	$\overline{c}$	1	1	$\overline{c}$	b	$\overline{c}$	b	$\overline{b}$	b	$\overline{b}$	c	$\overline{b}$	c	c
χ_5	1	1	$\overline{b}$	1	1	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	c	$\overline{c}$	c	b	c	b	b
χ_6	1	a	1	1	$\overline{a}$	a	1	$\overline{a}$	a	1	$\overline{a}$	a	1	$\overline{a}$	a	$\overline{a}$
χ_7	1	$\overline{a}$	1	1	a	$\overline{a}$	1	a	$\overline{a}$	1	a	$\overline{a}$	1	a	$\overline{a}$	a
χ_8	1	a	b	1	$\overline{a}$	d	c	$\overline{g}$	e	$\overline{c}$	$\overline{f}$	f	$\overline{b}$	$\overline{e}$	g	$\overline{d}$
χ_9	1	a	c	1	$\overline{a}$	e	$\overline{b}$	$\overline{f}$	g	b	$\overline{d}$	d	$\overline{c}$	$\overline{g}$	f	$\overline{e}$
χ_{10}	1	a	$\overline{c}$	1	$\overline{a}$	f	b	$\overline{e}$	d	$\overline{b}$	$\overline{g}$	g	c	$\overline{d}$	e	$\overline{f}$
χ_{11}	1	a	$\overline{b}$	1	$\overline{a}$	g	$\overline{c}$	$\overline{d}$	f	c	$\overline{e}$	e	b	$\overline{f}$	d	$\overline{g}$
χ_{12}	1	$\overline{a}$	b	1	a	$\overline{g}$	c	d	$\overline{f}$	$\overline{c}$	e	$\overline{e}$	$\overline{b}$	f	$\overline{d}$	g
χ_{13}	1	$\overline{a}$	c	1	a	$\overline{f}$	$\overline{b}$	e	$\overline{d}$	b	g	$\overline{g}$	$\overline{c}$	d	$\overline{e}$	f
χ_{14}	1	$\overline{a}$	$\overline{c}$	1	a	$\overline{e}$	b	f	$\overline{g}$	$\overline{b}$	d	$\overline{d}$	c	g	$\overline{f}$	e
χ_{15}	1	$\overline{a}$	$\overline{b}$	1	a	$\overline{d}$	$\overline{c}$	g	$\overline{e}$	c	f	$\overline{f}$	b	e	$\overline{g}$	d
χ_{16}	15	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 21

где $a = \varepsilon_3^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; $b = \varepsilon_5^4$;

$c = \varepsilon_5^3$; $d = \varepsilon_{15}^7$;

$e = \varepsilon_{15}^4$; $f = \varepsilon_{15}$; $g = \varepsilon_{15}^{13}$.

7. $\mathbf{G} = ((\mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2}) \rtimes \mathbf{C_7}) \times \mathbf{S_3}$

$|G| = 336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7,$

$\Theta(1) = 14 = 2 \cdot 7,$

	$\lvert G\rvert$	112	42	48	168	14	16	42	21	24	14	42	21	14	42	21	14	42	21	14	42	21	14	21
	1A	2A	7A	2B	3A	14A	2C	7B	21A	6A	14B	7C	21B	14C	7D	21C	14D	7E	21D	14E	7F	21E	14F	21F
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1
χ_3	1	-1	a	1	1	$-a$	-1	b	a	1	$-b$	c	b	$-c$	$\bar{c}$	c	$-\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$-\bar{b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$-\bar{a}$	$\bar{a}$
χ_4	1	-1	b	1	1	$-b$	-1	$\bar{c}$	b	1	$-\bar{c}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$-\bar{a}$	a	$\bar{a}$	$-a$	c	a	$-c$	$\bar{b}$	c	$-\bar{b}$	$\bar{b}$
χ_5	1	-1	c	1	1	$-c$	-1	$\bar{a}$	c	1	$-\bar{a}$	b	$\bar{a}$	$-b$	$\bar{b}$	b	$-\bar{b}$	a	$\bar{b}$	$-a$	$\bar{c}$	a	$-\bar{c}$	$\bar{c}$
χ_6	1	-1	$\bar{c}$	1	1	$-\bar{c}$	-1	a	$\bar{c}$	1	$-a$	$\bar{b}$	a	$-\bar{b}$	b	$\bar{b}$	$-b$	$\bar{a}$	b	$-\bar{a}$	c	$\bar{a}$	$-c$	c
χ_7	1	-1	$\bar{b}$	1	1	$-\bar{b}$	-1	c	$\bar{b}$	1	$-c$	a	c	$-a$	$\bar{a}$	a	$-\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{a}$	$-\bar{c}$	b	$\bar{c}$	$-b$	b
χ_8	1	-1	$\bar{a}$	1	1	$-\bar{a}$	-1	$\bar{b}$	$\bar{a}$	1	$-\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$-\bar{c}$	c	$\bar{c}$	$-c$	b	c	$-b$	a	b	$-a$	a
χ_9	1	1	a	1	1	a	1	b	a	1	b	c	b	c	$\bar{c}$	c	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$
χ_{10}	1	1	b	1	1	b	1	$\bar{c}$	b	1	$\bar{c}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{a}$	a	$\bar{a}$	a	c	a	c	$\bar{b}$	c	$\bar{b}$	$\bar{b}$
χ_{11}	1	1	c	1	1	c	1	$\bar{a}$	c	1	$\bar{a}$	b	$\bar{a}$	b	$\bar{b}$	b	$\bar{b}$	a	$\bar{b}$	a	$\bar{c}$	a	$\bar{c}$	$\bar{c}$
χ_{12}	1	1	$\bar{c}$	1	1	$\bar{c}$	1	a	$\bar{c}$	1	a	$\bar{b}$	a	$\bar{b}$	b	$\bar{b}$	b	$\bar{a}$	b	$\bar{a}$	c	$\bar{a}$	c	c
χ_{13}	1	1	$\bar{b}$	1	1	$\bar{b}$	1	c	$\bar{b}$	1	c	a	c	a	$\bar{a}$	a	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	b	$\bar{c}$	b	b
χ_{14}	1	1	$\bar{a}$	1	1	$\bar{a}$	1	$\bar{b}$	$\bar{a}$	1	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	c	$\bar{c}$	c	b	c	b	a	b	a	a
χ_{15}	2	0	2	2	-1	0	0	2	-1	-1	0	2	-1	0	2	-1	0	2	-1	0	2	-1	0	-1
χ_{16}	2	0	d	2	-1	0	0	e	$-a$	-1	0	f	$-b$	0	$\bar{f}$	$-c$	0	$\bar{e}$	$-\bar{c}$	0	$\bar{d}$	$-\bar{b}$	0	$-\bar{a}$
χ_{17}	2	0	e	2	-1	0	0	$\bar{f}$	$-b$	-1	0	$\bar{d}$	$-\bar{c}$	0	d	$-\bar{a}$	0	f	$-a$	0	$\bar{e}$	$-c$	0	$-\bar{b}$
χ_{18}	2	0	f	2	-1	0	0	$\bar{d}$	$-c$	-1	0	e	$-\bar{a}$	0	$\bar{e}$	$-b$	0	d	$-\bar{b}$	0	$\bar{f}$	$-a$	0	$-\bar{c}$
χ_{19}	2	0	$\bar{f}$	2	-1	0	0	d	$-\bar{c}$	-1	0	$-\bar{e}$	$-a$	0	e	$-\bar{b}$	0	$\bar{d}$	$-b$	0	f	$-\bar{a}$	0	$-c$
χ_{20}	2	0	$\bar{e}$	2	-1	0	0	f	$-\bar{b}$	-1	0	d	$-c$	0	$\bar{d}$	$-a$	0	$\bar{f}$	$-\bar{a}$	0	e	$-\bar{c}$	0	$-b$
χ_{21}	2	0	$\bar{d}$	2	-1	0	0	$\bar{e}$	$-\bar{a}$	-1	0	$\bar{f}$	$-\bar{b}$	0	f	$-\bar{c}$	0	e	$-c$	0	d	$-b$	0	$-a$
χ_{22}	7	-7	0	-1	7	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{23}	7	7	0	-1	7	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{24}	14	0	0	-2	-7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 22

где $a = \varepsilon_7^6$;
$b = \varepsilon_7^5$;
$c = \varepsilon_7^4$;
$d = 2 \cdot \varepsilon_7^6$;
$e = 2 \cdot \varepsilon_7^5$;
$f = 2 \cdot \varepsilon_7^4$.

8. $\mathbf{G} = (\mathbf{C_{23}} \rtimes \mathbf{C_{11}}) \rtimes \mathbf{C_2} = C_{23} \rtimes C_{22}$
$|G| = 506 = 2 \cdot 11 \cdot 23$,
$\Theta(1) = 22 = 2 \cdot 11$,

	$\lvert G\rvert$ 1A	23 23A	22 11A	22 11B	22 11C	22 11D	22 11E	22 11F	22 11G	22 11H	22 11I	22 11J	22 2A	22 22A	22 22B	22 22C	22 22D	22 22E	22 22F	22 22G	22 22H	22 22I	22 22J
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	-1	$-a$	$-b$	$-d$	$-\bar{c}$	$-e$	$-\bar{a}$	$-\bar{b}$	$-\bar{d}$	$-c$	$-\bar{e}$
χ_4	1	1	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	-1	$-b$	$-d$	$-\bar{c}$	$-e$	$-\bar{a}$	$-\bar{b}$	$-\bar{d}$	$-c$	$-\bar{e}$	$-a$
χ_5	1	1	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	-1	$-c$	$-\bar{e}$	$-a$	$-b$	$-d$	$-\bar{c}$	$-e$	$-\bar{a}$	$-\bar{b}$	$-\bar{d}$
χ_6	1	1	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	-1	$-d$	$-\bar{c}$	$-e$	$-\bar{a}$	$-\bar{b}$	$-\bar{d}$	$-c$	$-\bar{e}$	$-a$	$-b$
χ_7	1	1	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	-1	$-e$	$-\bar{a}$	$-\bar{b}$	$-\bar{d}$	$-c$	$-\bar{e}$	$-a$	$-b$	$-d$	$-\bar{c}$
χ_8	1	1	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	-1	$-\bar{e}$	$-a$	$-b$	$-d$	$-\bar{c}$	$-e$	$-\bar{a}$	$-\bar{b}$	$-\bar{d}$	$-c$
χ_9	1	1	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	-1	$-\bar{d}$	$-c$	$-\bar{e}$	$-a$	$-b$	$-d$	$-\bar{c}$	$-e$	$-\bar{a}$	$-\bar{b}$
χ_{10}	1	1	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d	-1	$-\bar{c}$	$-e$	$-\bar{a}$	$-\bar{b}$	$-\bar{d}$	$-c$	$-\bar{e}$	$-a$	$-b$	$-d$
χ_{11}	1	1	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	-1	$-\bar{b}$	$-\bar{d}$	$-c$	$-\bar{e}$	$-a$	$-b$	$-d$	$-\bar{c}$	$-e$	$-\bar{a}$
χ_{12}	1	1	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e	-1	$-\bar{a}$	$-\bar{b}$	$-\bar{d}$	$-c$	$-\bar{e}$	$-a$	$-b$	$-d$	$-\bar{c}$	$-e$
χ_{13}	1	1	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	1	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$
χ_{14}	1	1	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	1	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a
χ_{15}	1	1	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	1	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$
χ_{16}	1	1	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	1	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b
χ_{17}	1	1	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	1	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$
χ_{18}	1	1	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	1	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c
χ_{19}	1	1	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	1	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$
χ_{20}	1	1	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d	1	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d
χ_{21}	1	1	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$	1	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e	$\bar{a}$
χ_{22}	1	1	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e	1	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{d}$	c	$\bar{e}$	a	b	d	$\bar{c}$	e
χ_{23}	22	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 23

где $a = \varepsilon_{11}^{10}$;
$b = \varepsilon_{11}^{9}$;
$c = \varepsilon_{11}^{8}$;
$d = \varepsilon_{11}^{7}$;
$e = \varepsilon_{11}^{6}$.

A.3. $LC(\Theta)$-группы с $\Theta(1) = p^2q$, где p и q различные простые числа

Сначала рассмотрим примеры $LC(\Theta)$–групп с $\Theta(1) = p^2q$, где $p > q$.

1. $\mathbf{G = (C_{19} \rtimes C_9) \rtimes C_2 = C_{19} \rtimes C_{18}}$
$|G| = 342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$,
$\Theta(1) = 18 = 2 \cdot 3^2$,

	$\lvert G\rvert$ 1A	18 2A	18 9A	18 3A	19 19A	18 18A	18 6A	18 9B	18 9C	18 3B	18 18B	18 18C	18 6B	18 9D	18 9E	18 18D	18 18E	18 9F	18 18F
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
χ_3	1	-1	a	1	1	-a	-1	$\overline{a}$	a	1	-$\overline{a}$	-a	-1	$\overline{a}$	a	-$\overline{a}$	-a	$\overline{a}$	-$\overline{a}$
χ_4	1	-1	$\overline{a}$	1	1	-$\overline{a}$	-1	a	$\overline{a}$	1	-a	-$\overline{a}$	-1	a	$\overline{a}$	-a	-$\overline{a}$	a	-a
χ_5	1	-1	b	a	1	-b	-a	c	d	$\overline{a}$	-c	-d	-$\overline{a}$	$\overline{d}$	$\overline{c}$	-$\overline{d}$	-$\overline{c}$	$\overline{b}$	-$\overline{b}$
χ_6	1	-1	$\overline{b}$	$\overline{a}$	1	-$\overline{b}$	-$\overline{a}$	$\overline{c}$	$\overline{d}$	a	-$\overline{c}$	-$\overline{d}$	-a	d	c	-d	-c	b	-b
χ_7	1	-1	c	$\overline{a}$	1	-c	-$\overline{a}$	d	$\overline{b}$	a	-d	-$\overline{b}$	-a	b	$\overline{d}$	-b	-$\overline{d}$	$\overline{c}$	-$\overline{c}$
χ_8	1	-1	d	a	1	-d	-a	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{a}$	-$\overline{b}$	-$\overline{c}$	-$\overline{a}$	c	b	-c	-b	$\overline{d}$	-$\overline{d}$
χ_9	1	-1	$\overline{d}$	$\overline{a}$	1	-$\overline{d}$	-$\overline{a}$	b	c	a	-b	-c	-a	$\overline{c}$	$\overline{b}$	-$\overline{c}$	-$\overline{b}$	d	-d
χ_{10}	1	-1	$\overline{c}$	a	1	-$\overline{c}$	-a	$\overline{d}$	b	$\overline{a}$	-$\overline{d}$	-b	-$\overline{a}$	$\overline{b}$	d	-$\overline{b}$	-d	c	-c
χ_{11}	1	1	a	1	1	a	1	$\overline{a}$	a	1	$\overline{a}$	a	1	$\overline{a}$	a	$\overline{a}$	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$
χ_{12}	1	1	$\overline{a}$	1	1	$\overline{a}$	1	a	$\overline{a}$	1	a	$\overline{a}$	1	a	$\overline{a}$	a	$\overline{a}$	a	a
χ_{13}	1	1	b	a	1	b	a	c	d	$\overline{a}$	c	d	$\overline{a}$	$\overline{d}$	$\overline{c}$	$\overline{d}$	$\overline{c}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$
χ_{14}	1	1	$\overline{b}$	$\overline{a}$	1	$\overline{b}$	$\overline{a}$	$\overline{c}$	$\overline{d}$	a	$\overline{c}$	$\overline{d}$	a	d	c	d	c	b	b
χ_{15}	1	1	c	$\overline{a}$	1	c	$\overline{a}$	d	$\overline{b}$	a	d	$\overline{b}$	a	b	$\overline{d}$	b	$\overline{d}$	$\overline{c}$	$\overline{c}$
χ_{16}	1	1	d	a	1	d	a	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{a}$	c	b	c	b	$\overline{d}$	$\overline{d}$
χ_{17}	1	1	$\overline{d}$	$\overline{a}$	1	$\overline{d}$	$\overline{a}$	b	c	a	b	c	a	$\overline{c}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{b}$	d	d
χ_{18}	1	1	$\overline{c}$	a	1	$\overline{c}$	a	$\overline{d}$	b	$\overline{a}$	$\overline{d}$	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	d	$\overline{b}$	d	c	c
χ_{19}	18	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 24

где $a = \varepsilon_3^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$;
$b = -\varepsilon_9^2 - \varepsilon_9^5$;
$c = \varepsilon_9^7$;
$d = \varepsilon_9^5$.

$LC(\Theta)$-группы порядка 486 обладают неприводимым характером Θ степени $3^2 \cdot 2$.

2. $\mathbf{G} = (\mathbf{C_{27}} \rtimes \mathbf{C_9}) \rtimes \mathbf{C_2}$

$|G| = 486 = 2 \cdot 3^5$,

$\Theta(1) = 18 = 2 \cdot 3^2$,

	$\|G\|$ 1A	18 2A	54 9A	162 3A	27 27A	81 9B	243 3B	18 18A	18 6A	54 9C	54 9D	27 27B	162 3C	27 27C	81 9E	18 18B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1
χ_3	1	-1	a	1	1	1	1	$-a$	-1	$\overline{a}$	a	a	1	1	1	$-\overline{a}$
χ_4	1	-1	$\overline{a}$	1	1	1	1	$-\overline{a}$	-1	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	1	1	1	$-a$
χ_5	1	-1	b	a	1	1	1	$-b$	$-a$	c	d	b	$\overline{a}$	a	a	$-c$
χ_6	1	-1	$\overline{b}$	$\overline{a}$	1	1	1	$-\overline{b}$	$-\overline{a}$	$\overline{c}$	$\overline{d}$	$\overline{b}$	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$-\overline{c}$
χ_7	1	-1	c	$\overline{a}$	1	1	1	$-c$	$-\overline{a}$	d	$\overline{b}$	c	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$-d$
χ_8	1	-1	d	a	1	1	1	$-d$	$-a$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	d	$\overline{a}$	a	a	$-\overline{b}$
χ_9	1	-1	$\overline{d}$	$\overline{a}$	1	1	1	$-\overline{d}$	$-\overline{a}$	b	c	$\overline{d}$	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$-b$
χ_{10}	1	-1	$\overline{c}$	a	1	1	1	$-\overline{c}$	$-a$	$\overline{d}$	b	$\overline{c}$	$\overline{a}$	a	a	$-\overline{d}$
χ_{11}	1	1	a	1	1	1	1	a	1	$\overline{a}$	a	a	1	1	1	$\overline{a}$
χ_{12}	1	1	$\overline{a}$	1	1	1	1	$\overline{a}$	1	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	1	1	1	a
χ_{13}	1	1	b	a	1	1	1	b	a	c	d	b	$\overline{a}$	a	a	c
χ_{14}	1	1	$\overline{b}$	$\overline{a}$	1	1	1	$\overline{b}$	$\overline{a}$	$\overline{c}$	$\overline{d}$	$\overline{b}$	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{c}$
χ_{15}	1	1	c	$\overline{a}$	1	1	1	c	$\overline{a}$	d	$\overline{b}$	c	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	d
χ_{16}	1	1	d	a	1	1	1	d	a	$\overline{b}$	$\overline{c}$	d	$\overline{a}$	a	a	$\overline{b}$
χ_{17}	1	1	$\overline{d}$	$\overline{a}$	1	1	1	$\overline{d}$	$\overline{a}$	b	c	$\overline{d}$	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	b
χ_{18}	1	1	$\overline{c}$	a	1	1	1	$\overline{c}$	a	$\overline{d}$	b	$\overline{c}$	$\overline{a}$	a	a	$\overline{d}$
χ_{19}	2	0	2	2	-1	2	2	0	0	2	2	-1	2	-1	2	0
χ_{20}	2	0	e	2	-1	2	2	0	0	$\overline{e}$	e	$-a$	2	-1	2	0
χ_{21}	2	0	$\overline{e}$	2	-1	2	2	0	0	e	$\overline{e}$	$-\overline{a}$	2	-1	2	0
χ_{22}	2	0	f	e	-1	2	2	0	0	$\overline{h}$	g	$-\overline{c}$	$\overline{e}$	$-a$	e	0
χ_{23}	2	0	g	e	-1	2	2	0	0	$\overline{f}$	h	$-b$	$\overline{e}$	$-a$	e	0
χ_{24}	2	0	h	e	-1	2	2	0	0	$\overline{g}$	f	$-d$	$\overline{e}$	$-a$	e	0
χ_{25}	2	0	$\overline{g}$	$\overline{e}$	-1	2	2	0	0	f	$\overline{h}$	$-\overline{b}$	e	$-\overline{a}$	$\overline{e}$	0
χ_{26}	2	0	$\overline{f}$	$\overline{e}$	-1	2	2	0	0	h	$\overline{g}$	$-c$	e	$-\overline{a}$	$\overline{e}$	0
χ_{27}	2	0	$\overline{h}$	$\overline{e}$	-1	2	2	0	0	g	$\overline{f}$	$-\overline{d}$	e	$-\overline{a}$	$\overline{e}$	0
χ_{28}	6	0	0	6	0	-3	6	0	0	0	0	0	6	0	-3	0
χ_{29}	6	0	0	k	0	-3	6	0	0	0	0	0	$\overline{k}$	0	j	0
χ_{30}	6	0	0	$\overline{k}$	0	-3	6	0	0	0	0	0	k	0	$\overline{j}$	0
χ_{31}	18	0	0	0	0	0	-9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	18 18C	18 6B	54 9F	27 27D	54 9G	27 27E	27 27F	81 9H	18 18D	18 18E	54 9I	27 27G	27 27H	18 18F	27 27I
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1
χ_3	$-a$	-1	$\overline{a}$	$\overline{a}$	a	a	1	1	$-\overline{a}$	$-a$	$\overline{a}$	$\overline{a}$	a	$-\overline{a}$	$\overline{a}$
χ_4	$-\overline{a}$	-1	a	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	1	1	$-a$	$-\overline{a}$	a	a	$\overline{a}$	$-a$	a
χ_5	$-d$	$-\overline{a}$	$\overline{d}$	c	$\overline{c}$	d	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$-\overline{d}$	$-\overline{c}$	$\overline{b}$	$\overline{d}$	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	$\overline{b}$
χ_6	$-\overline{d}$	$-a$	d	$\overline{c}$	c	$\overline{d}$	a	a	$-d$	$-c$	b	d	c	$-b$	b
χ_7	$-\overline{b}$	$-a$	b	d	$\overline{d}$	$\overline{b}$	a	a	$-b$	$-\overline{d}$	$\overline{c}$	b	$\overline{d}$	$-\overline{c}$	$\overline{c}$
χ_8	$-\overline{c}$	$-\overline{a}$	c	$\overline{b}$	b	$\overline{c}$	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$-c$	$-b$	$\overline{d}$	c	b	$-\overline{d}$	$\overline{d}$
χ_9	$-c$	$-a$	$\overline{c}$	b	$\overline{b}$	c	a	a	$-\overline{c}$	$-\overline{b}$	d	$\overline{c}$	$\overline{b}$	$-d$	d
χ_{10}	$-b$	$-\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{d}$	d	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-d$	c	$\overline{b}$	d	$-c$	c
χ_{11}	a	1	$\overline{a}$	$\overline{a}$	a	a	1	1	$\overline{a}$	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$
χ_{12}	$\overline{a}$	1	a	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	1	1	a	$\overline{a}$	a	a	$\overline{a}$	a	a
χ_{13}	d	$\overline{a}$	$\overline{d}$	c	$\overline{c}$	d	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{d}$	$\overline{c}$	$\overline{b}$	$\overline{d}$	$\overline{c}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$
χ_{14}	$\overline{d}$	a	d	$\overline{c}$	c	$\overline{d}$	a	a	d	c	b	d	c	b	b
χ_{15}	$\overline{b}$	a	b	d	$\overline{d}$	$\overline{b}$	a	a	b	$\overline{d}$	$\overline{c}$	b	$\overline{d}$	$\overline{c}$	$\overline{c}$
χ_{16}	$\overline{c}$	$\overline{a}$	c	$\overline{b}$	b	$\overline{c}$	$\overline{a}$	$\overline{a}$	c	b	$\overline{d}$	c	b	$\overline{d}$	$\overline{d}$
χ_{17}	c	a	$\overline{c}$	b	$\overline{b}$	c	a	a	$\overline{c}$	$\overline{b}$	d	$\overline{c}$	$\overline{b}$	d	d
χ_{18}	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{d}$	d	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	d	c	$\overline{b}$	d	c	c
χ_{19}	0	0	2	-1	2	-1	-1	2	0	0	2	-1	-1	0	-1
χ_{20}	0	0	$\overline{e}$	$-\overline{a}$	e	$-a$	-1	2	0	0	$\overline{e}$	$-\overline{a}$	$-a$	0	$-\overline{a}$
χ_{21}	0	0	e	$-a$	$\overline{e}$	$-\overline{a}$	-1	2	0	0	e	$-a$	$-\overline{a}$	0	$-a$
χ_{22}	0	0	$\overline{g}$	$-\overline{d}$	h	$-b$	$-\overline{a}$	$\overline{e}$	0	0	$\overline{f}$	$-\overline{b}$	$-d$	0	$-c$
χ_{23}	0	0	$\overline{h}$	$-c$	f	$-d$	$-\overline{a}$	$\overline{e}$	0	0	$\overline{g}$	$-\overline{d}$	$-\overline{c}$	0	$-\overline{b}$
χ_{24}	0	0	$\overline{f}$	$-\overline{b}$	g	$-\overline{c}$	$-\overline{a}$	$\overline{e}$	0	0	$\overline{h}$	$-c$	$-b$	0	$-\overline{d}$
χ_{25}	0	0	h	$-\overline{c}$	$\overline{f}$	$-\overline{d}$	$-a$	e	0	0	g	$-d$	$-c$	0	$-b$
χ_{26}	0	0	g	$-d$	$\overline{h}$	$-\overline{b}$	$-a$	e	0	0	f	$-b$	$-\overline{d}$	0	$-\overline{c}$
χ_{27}	0	0	f	$-b$	$\overline{g}$	$-c$	$-a$	e	0	0	h	$-\overline{c}$	$-\overline{b}$	0	$-d$
χ_{28}	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	0
χ_{29}	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{j}$	0	0	0	0	0	0	0
χ_{30}	0	0	0	0	0	0	0	j	0	0	0	0	0	0	0
χ_{31}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 25

где $a = \varepsilon_3^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$;

$b = -\varepsilon_9^2 - \varepsilon_9^5$;

$c = \varepsilon_9^7$;

$d = \varepsilon_9^5$;

$e = 2 \cdot \varepsilon_3^2 = -1 - \sqrt{-3}$;

$f = 2 \cdot \varepsilon_9^2$;

$g = -2 \cdot \varepsilon_9^2 - 2 \cdot \varepsilon_9^5$;

$h = 2 \cdot \varepsilon_9^5$;

$k = 6 \cdot \varepsilon_3^2 = -3 - 3 \cdot \sqrt{-3}$;

$j = -3 \cdot \varepsilon_3^2 = \frac{3+3\cdot\sqrt{-3}}{2}$.

$LC(\Theta)$-группы порядка 504 обладают неприводимым характером Θ степени $3^2 \cdot 2$.

3. $\mathbf{G} = ((\mathbf{C_7} \rtimes \mathbf{C_3}) \times \mathbf{A_4}) \rtimes \mathbf{C_2}$

$|G| = 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$,

$\Theta(1) = 18 = 2 \cdot 3^2$,

	$\|G\|$	168	84	28	63	21	21	72	24	9	72	24	9	12	12	12	12	12	12
	1A	2A	7A	14A	3A	21A	21B	3B	6A	3C	3D	6B	3E	2B	4A	6C	12A	6D	12B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	1	1	1	1	1	b	b	b	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	-1	-1	-b	-b	-$\bar{b}$	-$\bar{b}$
χ_4	1	1	1	1	1	1	1	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	b	b	b	-1	-1	-$\bar{b}$	-$\bar{b}$	-b	-b
χ_5	1	1	1	1	1	1	1	b	b	b	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	1	1	b	b	$\bar{b}$	$\bar{b}$
χ_6	1	1	1	1	1	1	1	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	b	b	b	1	1	$\bar{b}$	$\bar{b}$	b	b
χ_7	2	2	2	2	-1	-1	-1	2	2	-1	2	2	-1	0	0	0	0	0	0
χ_8	2	2	2	2	-1	-1	-1	c	c	-b	$\bar{c}$	$\bar{c}$	-$\bar{b}$	0	0	0	0	0	0
χ_9	2	2	2	2	-1	-1	-1	$\bar{c}$	$\bar{c}$	-$\bar{b}$	c	c	-b	0	0	0	0	0	0
χ_{10}	3	-1	3	-1	0	0	0	3	-1	0	3	-1	0	-1	1	-1	1	-1	1
χ_{11}	3	-1	3	-1	0	0	0	3	-1	0	3	-1	0	1	-1	1	-1	1	-1
χ_{12}	3	-1	3	-1	0	0	0	d	-b	0	$\bar{d}$	-$\bar{b}$	0	-1	1	-b	b	-$\bar{b}$	$\bar{b}$
χ_{13}	3	-1	3	-1	0	0	0	$\bar{d}$	-$\bar{b}$	0	d	-b	0	-1	1	-$\bar{b}$	$\bar{b}$	-b	b
χ_{14}	3	-1	3	-1	0	0	0	d	-b	0	$\bar{d}$	-$\bar{b}$	0	1	-1	b	-b	$\bar{b}$	-$\bar{b}$
χ_{15}	3	-1	3	-1	0	0	0	$\bar{d}$	-$\bar{b}$	0	d	-b	0	1	-1	$\bar{b}$	-$\bar{b}$	b	-b
χ_{16}	6	6	-1	-1	6	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{17}	6	6	-1	-1	-3	a	*a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{18}	6	6	-1	-1	-3	*a	a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{19}	18	-6	-3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 26

где $a = \varepsilon_{21}^2 + \varepsilon_{21}^8 + \varepsilon_{21}^{10} + \varepsilon_{21}^{11} + \varepsilon_{21}^{13} + \varepsilon_{21}^{19} = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$;

$b = \varepsilon_3^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$;

$c = 2 \cdot \varepsilon_3^2 = -1 - \sqrt{-3}$;

$d = 3 \cdot \varepsilon_3^2 = \frac{-3-3\cdot\sqrt{-3}}{2}$.

4. $\mathbf{G = ((C_2 \times C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_3)) \rtimes C_3) \rtimes C_2}$

$|G| = 648 = 2^3 \cdot 3^4$,

$\Theta(1) = 18 = 2 \cdot 3^2$,

	$\lvert G\rvert$ 1A	216 2A	324 3A	108 6A	108 3B	36 6B	27 9A	27 9B	27 9C	72 3C	36 6C	72 6D	9 3D	72 3E	36 6E	72 6F	9 3F	12 2B	12 4A	12 6G	12 12A	12 6H	12 12B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	d	d	d	d	$\bar d$	$\bar d$	$\bar d$	$\bar d$	-1	-1	$-d$	$-d$	$-\bar d$	$-\bar d$
χ_4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\bar d$	$\bar d$	$\bar d$	$\bar d$	d	d	d	d	-1	-1	$-\bar d$	$-\bar d$	$-d$	$-d$
χ_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	d	d	d	d	$\bar d$	$\bar d$	$\bar d$	$\bar d$	1	1	d	d	$\bar d$	$\bar d$
χ_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\bar d$	$\bar d$	$\bar d$	$\bar d$	d	d	d	d	1	1	$\bar d$	$\bar d$	d	d
χ_7	2	2	2	2	2	2	-1	-1	-1	2	2	2	-1	2	2	2	-1	0	0	0	0	0	0
χ_8	2	2	2	2	2	2	-1	-1	-1	e	e	e	$-d$	$\bar e$	$\bar e$	$\bar e$	$-\bar d$	0	0	0	0	0	0
χ_9	2	2	2	2	2	2	-1	-1	-1	$\bar e$	$\bar e$	$\bar e$	$-\bar d$	e	e	e	$-d$	0	0	0	0	0	0
χ_{10}	3	-1	3	-1	3	-1	0	0	0	3	-1	-1	0	3	-1	-1	0	-1	1	-1	1	-1	1
χ_{11}	3	-1	3	-1	3	-1	0	0	0	3	-1	-1	0	3	-1	-1	0	1	-1	1	-1	1	-1
χ_{12}	3	-1	3	-1	3	-1	0	0	0	f	$-d$	$-d$	0	$\bar f$	$-\bar d$	$-\bar d$	0	-1	1	$-d$	d	$-\bar d$	$\bar d$
χ_{13}	3	-1	3	-1	3	-1	0	0	0	$\bar f$	$-\bar d$	$-\bar d$	0	f	$-d$	$-d$	0	-1	1	$-\bar d$	$\bar d$	$-d$	d
χ_{14}	3	-1	3	-1	3	-1	0	0	0	f	$-d$	$-d$	0	$\bar f$	$-\bar d$	$-\bar d$	0	1	-1	d	$-d$	$\bar d$	$-\bar d$
χ_{15}	3	-1	3	-1	3	-1	0	0	0	$\bar f$	$-\bar d$	$-\bar d$	0	f	$-d$	$-d$	0	1	-1	$\bar d$	$-\bar d$	d	$-d$
χ_{16}	6	6	6	6	-3	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{17}	6	-2	6	-2	-3	1	0	0	0	0	-2	4	0	0	-2	4	0	0	0	0	0	0	0
χ_{18}	6	-2	6	-2	-3	1	0	0	0	0	$-e$	g	0	0	$-\bar e$	$\bar g$	0	0	0	0	0	0	0
χ_{19}	6	-2	6	-2	-3	1	0	0	0	0	$-\bar e$	$\bar g$	0	0	$-e$	g	0	0	0	0	0	0	0
χ_{20}	6	6	-3	-3	0	0	a	c	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{21}	6	6	-3	-3	0	0	b	a	c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{22}	6	6	-3	-3	0	0	c	b	a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{23}	18	-6	-9	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 27

где $a = 2 \cdot \varepsilon_9^2 + \varepsilon_9^4 + \varepsilon_9^5 + 2 \cdot \varepsilon_9^7$;

$b = -\varepsilon_9^2 - 2 \cdot \varepsilon_9^4 - 2 \cdot \varepsilon_9^5 - \varepsilon_9^7$;

$c = -\varepsilon_9^2 + \varepsilon_9^4 + \varepsilon_9^5 - \varepsilon_9^7$;

$d = \varepsilon_3^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$;

$e = 2 \cdot \varepsilon_3^2 = -1 - \sqrt{-3}$;

$f = 3 \cdot \varepsilon_3^2 = \frac{-3-3\cdot\sqrt{-3}}{2}$;

$g = 4 \cdot \varepsilon_3^2 = -2 - 2 \cdot \sqrt{-3}$.

Например, если H – $LC(\Theta)$-группа порядка 54 и A_4 - группа порядка 12, то $G = H \times A_4$ – $LC(\Theta)$-группа порядка 648, не изоморфная приведенной здесь группе, ибо $|G/G'| = 18$, тогда как у группы с данной таблицей (см. таблицу характеров 27) индекс коммутанта 6.

Рассмотрим примеры $LC(\Theta)$–групп с $\Theta(1) = p^2q$, где $p < q$.

Напомним, что если $LC(\Theta)$-группы имеют поряок 240, то имеются две возможности для степени Θ:

1. $\Theta(1) = 3 \cdot 5 = 15$;
2. $\Theta(1) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Случай при $\Theta(1) = 3 \cdot 5$ рассмотрен выше (случай при $\Theta(1) = pq$, где p, q – простые числа). При $\Theta(1) = 2^2 \cdot 3$ одна из $LC(\Theta)$–групп порядка 240 имеет таблицу характеров 28:

5. $\mathbf{G = (C_5 \times A_4) \rtimes C_4}$

$|G| = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$,

$\Theta(1) = 12 = 2^2 \cdot 3$,

	$\lvert G\rvert$ 1A	8 4A	48 2A	30 3A	60 5A	80 2B	8 4B	8 4C	6 6A	16 2C	15 15A	20 10A	8 4D	15 15B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1
χ_3	1	a	-1	1	1	1	-a	a	-1	-1	1	1	-a	1
χ_4	1	-a	-1	1	1	1	a	-a	-1	-1	1	1	a	1
χ_5	2	0	-2	-1	2	2	0	0	1	-2	-1	2	0	-1
χ_6	2	0	2	-1	2	2	0	0	-1	2	-1	2	0	-1
χ_7	3	-1	3	0	3	-1	-1	1	0	-1	0	-1	1	0
χ_8	3	1	3	0	3	-1	1	-1	0	-1	0	-1	-1	0
χ_9	3	a	-3	0	3	-1	-a	-a	0	1	0	-1	a	0
χ_{10}	3	-a	-3	0	3	-1	a	a	0	1	0	-1	-a	0
χ_{11}	4	0	0	4	-1	4	0	0	0	0	-1	-1	0	-1
χ_{12}	4	0	0	-2	-1	4	0	0	0	0	b	-1	0	$\overline{b}$
χ_{13}	4	0	0	-2	-1	4	0	0	0	0	$\overline{b}$	-1	0	b
χ_{14}	12	0	0	0	-3	-4	0	0	0	0	0	1	0	0

Таблица 28

где $a = -\varepsilon_4 = -\sqrt{-1} = -i$;
$b = \varepsilon_{15}^7 + \varepsilon_{15}^{11} + \varepsilon_{15}^{13} + \varepsilon_{15}^{14}$.

6. $\mathbf{G = S_3 \times ((C_{11} \rtimes C_5) \rtimes C_2)}$

$|G| = 660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11,$

$\Theta(1) = 20 = 2^2 \cdot 5,$

	$\lvert G\rvert$	66	330	33	60	30	60	30	60	30	60	30	220	22	20	20	20	20	60	30	60	30	60	30	60	30	60	30	20	20	20	20	20
	1A	11A	3A	33A	5A	15A	5B	15B	5C	15C	5D	15D	2A	22A	10A	10B	10C	10D	2B	6A	10E	30A	107F	30B	10G	30C	10H	30D	2C	10I	10J	10K	10L
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
χ_3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
χ_4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
χ_5	1	1	1	1	a	a	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	-1	-1	$-a$	$-b$	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	-1	-1	$-a$	$-a$	$-b$	$-b$	$-\overline{a}$	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-\overline{b}$	1	a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$
χ_6	1	1	1	1	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	-1	-1	$-b$	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-a$	-1	-1	$-b$	$-b$	$-\overline{a}$	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-\overline{b}$	$-a$	$-a$	1	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	a
χ_7	1	1	1	1	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	-1	-1	$-\overline{b}$	$-a$	$-b$	$-\overline{a}$	-1	-1	$-\overline{b}$	$-\overline{b}$	$-a$	$-a$	$-b$	$-b$	$-\overline{a}$	$-\overline{a}$	1	$\overline{b}$	a	b	$\overline{a}$
χ_8	1	1	1	1	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	b	b	-1	-1	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-a$	$-b$	-1	-1	$-\overline{a}$	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-\overline{b}$	$-a$	$-a$	$-b$	$-b$	1	$\overline{a}$	$\overline{b}$	a	b
χ_9	1	1	1	1	a	a	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	-1	-1	$-a$	$-b$	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	1	1	a	a	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	-1	$-a$	$-b$	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$
χ_{10}	1	1	1	1	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	-1	-1	$-b$	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-a$	1	1	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	-1	$-b$	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-a$
χ_{11}	1	1	1	1	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	-1	-1	$-\overline{b}$	$-a$	$-b$	$-\overline{a}$	1	1	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	-1	$-\overline{b}$	$-a$	$-b$	$-\overline{a}$
χ_{12}	1	1	1	1	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	b	b	-1	-1	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-a$	$-b$	1	1	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	b	b	-1	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-a$	$-b$
χ_{13}	1	1	1	1	a	a	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	1	1	a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	-1	-1	$-a$	$-a$	$-b$	$-b$	$-\overline{a}$	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-\overline{b}$	-1	$-a$	$-b$	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$
χ_{14}	1	1	1	1	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	1	1	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	a	-1	-1	$-b$	$-b$	$-\overline{a}$	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-\overline{b}$	$-a$	$-a$	-1	$-b$	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-a$
χ_{15}	1	1	1	1	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	1	1	$\overline{b}$	a	b	$\overline{a}$	-1	-1	$-\overline{b}$	$-\overline{b}$	$-a$	$-a$	$-b$	$-b$	$-\overline{a}$	$-\overline{a}$	-1	$-\overline{b}$	$-a$	$-b$	$-\overline{a}$
χ_{16}	1	1	1	1	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	b	b	1	1	$\overline{a}$	$\overline{b}$	a	b	-1	-1	$-\overline{a}$	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-\overline{b}$	$-a$	$-a$	$-b$	$-b$	-1	$-\overline{a}$	$-\overline{b}$	$-a$	$-b$
χ_{17}	1	1	1	1	a	a	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	1	1	a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	1	1	a	a	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	1	a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$
χ_{18}	1	1	1	1	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	1	1	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	a	1	1	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	1	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	a
χ_{19}	1	1	1	1	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	1	1	$\overline{b}$	a	b	$\overline{a}$	1	1	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	b	b	$\overline{a}$	$\overline{a}$	1	$\overline{b}$	a	b	$\overline{a}$
χ_{20}	1	1	1	1	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	b	b	1	1	$\overline{a}$	$\overline{b}$	a	b	1	1	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b}$	a	a	b	b	1	$\overline{a}$	$\overline{b}$	a	b
χ_{21}	2	2	-1	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0	-2	1	-2	1	-2	1	-2	1	-2	1	0	0	0	0	0
χ_{22}	2	2	-1	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	0	0	0	0	0
χ_{23}	2	2	-1	-1	c	$-b$	d	$-\overline{a}$	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	$\overline{d}$	$-a$	0	0	0	0	0	0	-2	1	$-c$	b	$-d$	$\overline{a}$	$-\overline{c}$	$\overline{b}$	$-\overline{d}$	a	0	0	0	0	0
χ_{24}	2	2	-1	-1	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	$\overline{d}$	$-a$	c	$-b$	d	$-\overline{a}$	0	0	0	0	0	0	-2	1	$-\overline{c}$	$\overline{b}$	$-\overline{d}$	a	$-c$	b	$-d$	$\overline{a}$	0	0	0	0	0
χ_{25}	2	2	-1	-1	d	$-\overline{a}$	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	$\overline{d}$	$-a$	c	$-b$	0	0	0	0	0	0	-2	1	$-d$	$\overline{a}$	$-\overline{c}$	$\overline{b}$	$-\overline{d}$	a	$-c$	b	0	0	0	0	0
χ_{26}	2	2	-1	-1	$\overline{d}$	$-a$	c	$-b$	d	$-\overline{a}$	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	0	0	0	0	0	0	-2	1	$-\overline{d}$	a	$-c$	b	$-d$	$\overline{a}$	$-\overline{c}$	$\overline{b}$	0	0	0	0	0
χ_{27}	2	2	-1	-1	c	$-b$	d	$-\overline{a}$	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	$\overline{d}$	$-a$	0	0	0	0	0	0	2	-1	c	$-b$	d	$-\overline{a}$	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	$\overline{d}$	$-a$	0	0	0	0	0
χ_{28}	2	2	-1	-1	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	$\overline{d}$	$-a$	c	$-b$	d	$-\overline{a}$	0	0	0	0	0	0	2	-1	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	$\overline{d}$	$-a$	c	$-b$	d	$-\overline{a}$	0	0	0	0	0
χ_{29}	2	2	-1	-1	d	$-\overline{a}$	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	$\overline{d}$	$-a$	c	$-b$	0	0	0	0	0	0	2	-1	d	$-\overline{a}$	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	$\overline{d}$	$-a$	c	$-b$	0	0	0	0	0
χ_{30}	2	2	-1	-1	$\overline{d}$	$-a$	c	$-b$	d	$-\overline{a}$	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	0	0	0	0	0	0	2	-1	$\overline{d}$	$-a$	c	$-b$	d	$-\overline{a}$	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	0	0	0	0	0
χ_{31}	10	-1	10	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{32}	10	-1	10	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{33}	20	-2	-10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 29

где $a = \varepsilon_5^4$;
$b = \varepsilon_5^3$;
$c = 2 \cdot \varepsilon_5^3$;
$d = 2 \cdot \varepsilon_5$.

7. $\mathbf{G = (C_{29} \times C_7) \rtimes C_4 = C_{29} \rtimes C_{28}}$

$|G| = 812 = 2^2 \cdot 7 \cdot 29$,

$\Theta(1) = 28 = 2^2 \cdot 7$,

	$\lvert G\rvert$	29	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28
	1A	29A	2A	7A	14A	7B	14B	7C	14C	7D	14D	7E	14E	7F	14F	4A	4B	28A	28B	28C	28D	28E	28F	28G	28H	28I	28J	28K	28L
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	d	$-d$	d	$-d$	d	$-d$	d	$-d$	d	$-d$	d	$-d$	d	$-d$
χ_4	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	$-d$	d	$-d$	d	$-d$	d	$-d$	d	$-d$	d	$-d$	d	$-d$	d
χ_5	1	1	-1	a	$-a$	c	$-c$	b	$-b$	$\bar a$	$-\bar a$	$\bar c$	$-\bar c$	$\bar b$	$-\bar b$	d	$-d$	e	$-e$	g	$-g$	f	$-f$	$-\bar e$	$\bar e$	$-\bar g$	$\bar g$	$-\bar f$	$\bar f$
χ_6	1	1	-1	a	$-a$	c	$-c$	b	$-b$	$\bar a$	$-\bar a$	$\bar c$	$-\bar c$	$\bar b$	$-\bar b$	$-d$	d	$-e$	e	$-g$	g	$-f$	f	$\bar e$	$-\bar e$	$\bar g$	$-\bar g$	$\bar f$	$-\bar f$
χ_7	1	1	-1	b	$-b$	$\bar a$	$-\bar a$	$\bar c$	$-\bar c$	$\bar b$	$-\bar b$	a	$-a$	c	$-c$	d	$-d$	f	$-f$	$-\bar e$	$\bar e$	$-\bar g$	$\bar g$	$-\bar f$	$\bar f$	e	$-e$	g	$-g$
χ_8	1	1	-1	b	$-b$	$\bar a$	$-\bar a$	$\bar c$	$-\bar c$	$\bar b$	$-\bar b$	a	$-a$	c	$-c$	$-d$	d	$-f$	f	$\bar e$	$-\bar e$	$\bar g$	$-\bar g$	$\bar f$	$-\bar f$	$-e$	e	$-g$	g
χ_9	1	1	-1	c	$-c$	b	$-b$	$\bar a$	$-\bar a$	$\bar c$	$-\bar c$	$\bar b$	$-\bar b$	a	$-a$	d	$-d$	g	$-g$	f	$-f$	$-\bar e$	$\bar e$	$-\bar g$	$\bar g$	$-\bar f$	$\bar f$	$\bar e$	$-\bar e$
χ_{10}	1	1	-1	c	$-c$	b	$-b$	$\bar a$	$-\bar a$	$\bar c$	$-\bar c$	$\bar b$	$-\bar b$	a	$-a$	$-d$	d	$-g$	g	$-f$	f	$\bar e$	$-\bar e$	$\bar g$	$-\bar g$	$\bar f$	$-\bar f$	$-\bar e$	$\bar e$
χ_{11}	1	1	-1	$\bar c$	$-\bar c$	$\bar b$	$-\bar b$	a	$-a$	c	$-c$	b	$-b$	$\bar a$	$-\bar a$	d	$-d$	$-\bar g$	$\bar g$	$-\bar f$	$\bar f$	e	$-e$	g	$-g$	f	$-f$	$-\bar e$	$\bar e$
χ_{12}	1	1	-1	$\bar c$	$-\bar c$	$\bar b$	$-\bar b$	a	$-a$	c	$-c$	b	$-b$	$\bar a$	$-\bar a$	$-d$	d	$\bar g$	$-\bar g$	$\bar f$	$-\bar f$	$-e$	e	$-g$	g	$-f$	f	$\bar e$	$-\bar e$
χ_{13}	1	1	-1	$\bar b$	$-\bar b$	a	$-a$	c	$-c$	b	$-b$	$\bar a$	$-\bar a$	$\bar c$	$-\bar c$	d	$-d$	$-\bar f$	$\bar f$	e	$-e$	g	$-g$	f	$-f$	$-\bar e$	$\bar e$	$-\bar g$	$\bar g$
χ_{14}	1	1	-1	$\bar b$	$-\bar b$	a	$-a$	c	$-c$	b	$-b$	$\bar a$	$-\bar a$	$\bar c$	$-\bar c$	$-d$	d	$\bar f$	$-\bar f$	$-e$	e	$-g$	g	$-f$	f	$\bar e$	$-\bar e$	$\bar g$	$-\bar g$
χ_{15}	1	1	-1	$\bar a$	$-\bar a$	$\bar c$	$-\bar c$	$\bar b$	$-\bar b$	a	$-a$	c	$-c$	b	$-b$	d	$-d$	$-\bar e$	$\bar e$	$-\bar g$	$\bar g$	$-\bar f$	$\bar f$	e	$-e$	g	$-g$	f	$-f$
χ_{16}	1	1	-1	$\bar a$	$-\bar a$	$\bar c$	$-\bar c$	$\bar b$	$-\bar b$	a	$-a$	c	$-c$	b	$-b$	$-d$	d	$\bar e$	$-\bar e$	$\bar g$	$-\bar g$	$\bar f$	$-\bar f$	$-e$	e	$-g$	g	$-f$	f
χ_{17}	1	1	1	a	a	c	c	b	b	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$	-1	-1	$-a$	$-a$	$-c$	$-c$	$-b$	$-b$	$-\bar a$	$-\bar a$	$-\bar c$	$-\bar c$	$-\bar b$	$-\bar b$
χ_{18}	1	1	1	b	b	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$	a	a	c	c	-1	-1	$-b$	$-b$	$-\bar a$	$-\bar a$	$-\bar c$	$-\bar c$	$-\bar b$	$-\bar b$	$-a$	$-a$	$-c$	$-c$
χ_{19}	1	1	1	c	c	b	b	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$	a	a	-1	-1	$-c$	$-c$	$-b$	$-b$	$-\bar a$	$-\bar a$	$-\bar c$	$-\bar c$	$-\bar b$	$-\bar b$	$-a$	$-a$
χ_{20}	1	1	1	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$	a	a	c	c	b	b	$\bar a$	$\bar a$	-1	-1	$-\bar c$	$-\bar c$	$-\bar b$	$-\bar b$	$-a$	$-a$	$-c$	$-c$	$-b$	$-b$	$-\bar a$	$-\bar a$
χ_{21}	1	1	1	$\bar b$	$\bar b$	a	a	c	c	b	b	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$	-1	-1	$-\bar b$	$-\bar b$	$-a$	$-a$	$-c$	$-c$	$-b$	$-b$	$-\bar a$	$-\bar a$	$-\bar c$	$-\bar c$
χ_{22}	1	1	1	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$	a	a	c	c	b	b	-1	-1	$-\bar a$	$-\bar a$	$-\bar c$	$-\bar c$	$-\bar b$	$-\bar b$	$-a$	$-a$	$-c$	$-c$	$-b$	$-b$
χ_{23}	1	1	1	a	a	c	c	b	b	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$	1	1	a	a	c	c	b	b	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$
χ_{24}	1	1	1	b	b	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$	a	a	c	c	1	1	b	b	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$	a	a	c	c
χ_{25}	1	1	1	c	c	b	b	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$	a	a	1	1	c	c	b	b	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$	a	a
χ_{26}	1	1	1	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$	a	a	c	c	b	b	$\bar a$	$\bar a$	1	1	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$	a	a	c	c	b	b	$\bar a$	$\bar a$
χ_{27}	1	1	1	$\bar b$	$\bar b$	a	a	c	c	b	b	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$	1	1	$\bar b$	$\bar b$	a	a	c	c	b	b	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$
χ_{28}	1	1	1	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$	a	a	c	c	b	b	1	1	$\bar a$	$\bar a$	$\bar c$	$\bar c$	$\bar b$	$\bar b$	a	a	c	c	b	b
χ_{29}	28	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 30

где $a = \varepsilon_7^6$; $b = \varepsilon_7^5$;

$c = \varepsilon_7^4$; $d = -\varepsilon_4 = -\sqrt{-1} = -i$;

$e = -\varepsilon_{28}^3$; $f = -\varepsilon_{28}^{27}$; $g = -\varepsilon_{28}^{23}$.

8. $\mathbf{G} = ((\mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2}) \rtimes \mathbf{C_7}) \times (\mathbf{C_5} \rtimes \mathbf{C_4})$

$|G| = 1120 = 2^5 \cdot 5 \cdot 7,$

$\Theta(1) = 28 = 2^2 \cdot 7,$

	$\vert G\vert$	280	160	40	224	32	140	35	28	140	35	28	140	35
	1A	5A	2A	10A	2B	2C	7A	35A	14A	7B	35B	14B	7C	35C
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_3	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1
χ_4	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1
χ_5	1	1	1	1	-1	-1	a	a	$-a$	c	c	$-c$	b	b
χ_6	1	1	1	1	-1	-1	a	a	$-a$	c	c	$-c$	b	b
χ_7	1	1	1	1	-1	-1	b	b	$-b$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$-\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$
χ_8	1	1	1	1	-1	-1	b	b	$-b$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$-\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$
χ_9	1	1	1	1	-1	-1	c	c	$-c$	b	b	$-b$	$\bar{a}$	$\bar{a}$
χ_{10}	1	1	1	1	-1	-1	c	c	$-c$	b	b	$-b$	$\bar{a}$	$\bar{a}$
χ_{11}	1	1	1	1	-1	-1	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$-\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$-\bar{b}$	a	a
χ_{12}	1	1	1	1	-1	-1	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$-\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$-\bar{b}$	a	a
χ_{13}	1	1	1	1	-1	-1	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$-\bar{b}$	a	a	$-a$	c	c
χ_{14}	1	1	1	1	-1	-1	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$-\bar{b}$	a	a	$-a$	c	c
χ_{15}	1	1	1	1	-1	-1	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$-\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$-\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$
χ_{16}	1	1	1	1	-1	-1	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$-\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$-\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$
χ_{17}	1	1	1	1	1	1	a	a	a	c	c	c	b	b
χ_{18}	1	1	1	1	1	1	b	b	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$
χ_{19}	1	1	1	1	1	1	c	c	c	b	b	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$
χ_{20}	1	1	1	1	1	1	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	a	a
χ_{21}	1	1	1	1	1	1	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	a	a	a	c	c
χ_{22}	1	1	1	1	1	1	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$
χ_{23}	1	1	1	1	1	1	a	a	a	c	c	c	b	b
χ_{24}	1	1	1	1	1	1	b	b	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$
χ_{25}	1	1	1	1	1	1	c	c	c	b	b	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$
χ_{26}	1	1	1	1	1	1	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	a	a
χ_{27}	1	1	1	1	1	1	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	a	a	a	c	c
χ_{28}	1	1	1	1	1	1	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$
χ_{29}	4	-1	4	-1	0	0	4	-1	0	4	-1	0	4	-1
χ_{30}	4	-1	4	-1	0	0	d	$-a$	0	f	$-c$	0	e	$-b$
χ_{31}	4	-1	4	-1	0	0	e	$-b$	0	$\bar{d}$	$-\bar{a}$	0	$\bar{f}$	$-\bar{c}$
χ_{32}	4	-1	4	-1	0	0	f	$-c$	0	e	$-b$	0	$\bar{d}$	$-\bar{a}$
χ_{33}	4	-1	4	-1	0	0	$\bar{f}$	$-\bar{c}$	0	$\bar{e}$	$-\bar{b}$	0	d	$-a$
χ_{34}	4	-1	4	-1	0	0	$\bar{e}$	$-\bar{b}$	0	d	$-a$	0	f	$-c$
χ_{35}	4	-1	4	-1	0	0	$\bar{d}$	$-\bar{a}$	0	$\bar{f}$	$-\bar{c}$	0	$\bar{e}$	$-\bar{b}$
χ_{36}	7	7	-1	-1	7	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{37}	7	7	-1	-1	7	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{38}	7	7	-1	-1	-7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{39}	7	7	-1	-1	-7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{40}	28	7	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	28	140	35	28	140	35	28	140	35	28	224	32	224	32
	14C	7D	35D	14D	7E	35E	14E	7F	35F	14F	4A	4B	4C	4D
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	g	g	$-g$	$-g$
χ_4	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	$-g$	$-g$	g	g
χ_5	$-b$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$-\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$-\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$-\bar{b}$	g	g	$-g$	$-g$
χ_6	$-b$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$-\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$-\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$-\bar{b}$	$-g$	$-g$	g	g
χ_7	$-\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$-\bar{b}$	a	a	$-a$	c	c	$-c$	g	g	$-g$	$-g$
χ_8	$-\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$-\bar{b}$	a	a	$-a$	c	c	$-c$	$-g$	$-g$	g	g
χ_9	$-\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$-\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$-\bar{b}$	a	a	$-a$	g	g	$-g$	$-g$
χ_{10}	$-\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$-\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$-\bar{b}$	a	a	$-a$	$-g$	$-g$	g	g
χ_{11}	$-a$	c	c	$-c$	b	b	$-b$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$-\bar{a}$	g	g	$-g$	$-g$
χ_{12}	$-a$	c	c	$-c$	b	b	$-b$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$-\bar{a}$	$-g$	$-g$	g	g
χ_{13}	$-c$	b	b	$-b$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$-\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$-\bar{c}$	g	g	$-g$	$-g$
χ_{14}	$-c$	b	b	$-b$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$-\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$-\bar{c}$	$-g$	$-g$	g	g
χ_{15}	$-\bar{b}$	a	a	$-a$	c	c	$-c$	b	b	$-b$	g	g	$-g$	$-g$
χ_{16}	$-\bar{b}$	a	a	$-a$	c	c	$-c$	b	b	$-b$	$-g$	$-g$	g	g
χ_{17}	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	-1	-1	-1	-1
χ_{18}	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	a	a	a	c	c	c	-1	-1	-1	-1
χ_{19}	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	a	a	a	-1	-1	-1	-1
χ_{20}	a	c	c	c	b	b	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	-1	-1	-1	-1
χ_{21}	c	b	b	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	-1	-1	-1	-1
χ_{22}	$\bar{b}$	a	a	a	c	c	c	b	b	b	-1	-1	-1	-1
χ_{23}	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	1	1	1	1
χ_{24}	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	a	a	a	c	c	c	1	1	1	1
χ_{25}	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	a	a	a	1	1	1	1
χ_{26}	a	c	c	c	b	b	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	1	1	1	1
χ_{27}	c	b	b	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	1	1	1	1
χ_{28}	$\bar{b}$	a	a	a	c	c	c	b	b	b	1	1	1	1
χ_{29}	0	4	-1	0	4	-1	0	4	-1	0	0	0	0	0
χ_{30}	0	$\bar{d}$	$-\bar{a}$	0	$\bar{f}$	$-\bar{c}$	0	$\bar{e}$	$-\bar{b}$	0	0	0	0	0
χ_{31}	0	$\bar{e}$	$-\bar{b}$	0	d	$-a$	0	f	$-c$	0	0	0	0	0
χ_{32}	0	$\bar{f}$	$-\bar{c}$	0	$\bar{e}$	$-\bar{b}$	0	d	$-a$	0	0	0	0	0
χ_{33}	0	f	$-c$	0	e	$-b$	0	$\bar{d}$	$-\bar{a}$	0	0	0	0	0
χ_{34}	0	e	$-b$	0	$\bar{d}$	$-\bar{a}$	0	$\bar{f}$	$-\bar{c}$	0	0	0	0	0
χ_{35}	0	d	$-a$	0	f	$-c$	0	e	$-b$	0	0	0	0	0
χ_{36}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7	1	-7	1
χ_{37}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	-1	7	-1
χ_{38}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	h	$-g$	$-h$	g
χ_{39}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-h$	g	h	g
χ_{40}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28
	28A	28B	28C	28D	28E	28F	28G	28H	28I	28J	28K	28L
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
χ_3	g	$-g$	g	$-g$	g	$-g$	g	$-g$	g	$-g$	g	$-g$
χ_4	$-g$	g	$-g$	g	$-g$	g	$-g$	g	$-g$	g	$-g$	g
χ_5	i	$-i$	k	$-k$	j	$-j$	$-\bar{i}$	$\bar{i}$	$-\bar{k}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$	$\bar{j}$
χ_6	$-i$	i	$-k$	k	$-j$	j	$\bar{i}$	$-\bar{i}$	$\bar{k}$	$-\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{j}$
χ_7	j	$-j$	$-\bar{i}$	$\bar{i}$	$-\bar{k}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$	$\bar{j}$	i	$-i$	k	$-k$
χ_8	$-j$	j	$\bar{i}$	$-\bar{i}$	$\bar{k}$	$-\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{j}$	$-i$	i	$-k$	k
χ_9	k	$-k$	j	$-j$	$-\bar{i}$	$\bar{i}$	$-\bar{k}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$	$\bar{j}$	i	$-i$
χ_{10}	$-k$	k	$-j$	j	$\bar{i}$	$-\bar{i}$	$\bar{k}$	$-\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{j}$	$-i$	i
χ_{11}	$-\bar{k}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$	$\bar{j}$	i	$-i$	k	$-k$	j	$-j$	$-\bar{i}$	$\bar{i}$
χ_{12}	$\bar{k}$	$-\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{j}$	$-i$	i	$-k$	k	$-j$	j	$\bar{i}$	$-\bar{i}$
χ_{13}	$-\bar{j}$	$\bar{j}$	i	$-i$	k	$-k$	j	$-j$	$-\bar{i}$	$\bar{i}$	$-\bar{k}$	$\bar{k}$
χ_{14}	$\bar{j}$	$-\bar{j}$	$-i$	i	$-k$	k	$-j$	j	$\bar{i}$	$-\bar{i}$	$\bar{k}$	$-\bar{k}$
χ_{15}	$-\bar{i}$	$\bar{i}$	$-\bar{k}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$	$\bar{j}$	i	$-i$	k	$-k$	j	$-j$
χ_{16}	$\bar{i}$	$-\bar{i}$	$\bar{k}$	$-\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{j}$	$-i$	i	$-k$	k	$-j$	j
χ_{17}	$-a$	$-a$	$-c$	$-c$	$-b$	$-b$	$-\bar{a}$	$-\bar{a}$	$-\bar{c}$	$-\bar{c}$	$-\bar{b}$	$-\bar{b}$
χ_{18}	$-b$	$-b$	$-\bar{a}$	$-\bar{a}$	$-\bar{c}$	$-\bar{c}$	$-\bar{b}$	$-\bar{b}$	$-a$	$-a$	$-c$	$-c$
χ_{19}	$-c$	$-c$	$-b$	$-b$	$-\bar{a}$	$-\bar{a}$	$-\bar{c}$	$-\bar{c}$	$-\bar{b}$	$-\bar{b}$	$-a$	$-a$
χ_{20}	$-\bar{c}$	$-\bar{c}$	$-\bar{b}$	$-\bar{b}$	$-a$	$-a$	$-c$	$-c$	$-b$	$-b$	$-\bar{a}$	$-\bar{a}$
χ_{21}	$-\bar{b}$	$-\bar{b}$	$-a$	$-a$	$-c$	$-c$	$-b$	$-b$	$-\bar{a}$	$-\bar{a}$	$-\bar{c}$	$-\bar{c}$
χ_{22}	$-\bar{a}$	$-\bar{a}$	$-\bar{c}$	$-\bar{c}$	$-\bar{b}$	$-\bar{b}$	$-a$	$-a$	$-c$	$-c$	$-b$	$-b$
χ_{23}	a	a	c	c	b	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$
χ_{24}	b	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	a	a	c	c
χ_{25}	c	c	b	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	a	a
χ_{26}	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	a	a	c	c	b	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$
χ_{27}	$\bar{b}$	$\bar{b}$	a	a	c	c	b	b	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$
χ_{28}	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	a	a	c	c	b	b
χ_{29}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{30}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{31}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{32}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{33}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{34}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{35}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{36}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{37}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{38}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{39}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{40}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 31

где $a = \varepsilon_7^6; b = \varepsilon_7^5;$

$c = \varepsilon_7^4; d = 4 \cdot \varepsilon_7^6;$

$e = 4 \cdot \varepsilon_7^5; f = 4 \cdot \varepsilon_7^4;$

$g = -\varepsilon_4 = -\sqrt{-1} = -i; h = -7 \cdot \varepsilon_4 = -7\sqrt{-1} = -7i;$

$i = -\varepsilon_{28}^3; j = -\varepsilon_{28}^{27};$

$i = -\varepsilon_{28}^{23}.$

В. Простые неабелевы группы, для которых выполняется $c\chi(1)^2 > |G|$, где $c \in \{3,4,5,6\}$

В [20] представлены основные сведения о 93 конечных простых группах и даны таблицы характеров 90 конечных простых групп (у трех групп $(L_3(11), O_8^-(3), E_6(2))$ таблицы характеров не указаны). Из 90 конечных простых групп, представленных в [20] с таблицами характеров, всего 31 групп обладающих таким неприводимым комплексным характером χ степени $\chi(1)$, для которой верно неравенство $c\chi(1)^2 \geq |G|$, при $c < 6$. Из 31 групп: 10 – спорадических простых групп $(M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, Th, J_1, J_2, J_3, HS)$, 7 – знакопеременных $(A_n, 5 \leq n \leq 11)$, 11 – классических простых групп лиева типа $(L_2(11), L_2(13), L_3(2), L_3(3), L_3(4), L_4(3), U_3(3), U_4(2), U_4(3), U_6(2), S_6(2))$, и 3 – исключительных простых групп лиева типа $(Sz(8), {}^2F_4(2)', O_8^+(2))$.

При $c = 3$**:**

1. $G = A_5 \cong L_2(4) \cong L_2(5), |G| = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \chi(1) = 5;$
2. $G = L_3(2) \cong L_2(7), |G| = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7, \chi(1) = 8 = 2^3;$
3. $G = A_7, |G| = 2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7, \chi(1) = 35 = 5 \cdot 7;$
4. $G = M_{11}, |G| = 7920 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11, \chi(1) = 55 = 5 \cdot 11;$
5. $G = M_{22}, |G| = 443520 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11, \chi(1) = 385 = 5 \cdot 7 \cdot 11;$
6. $G = M_{23}, |G| = 10200960 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23, \chi(1) = 2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23;$
7. $G = M_{24}, |G| = 244823040 = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23, \chi(1) = 10395 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11;$
8. $G = Th = F_{3|3}, |G| = 90745943887872000 = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31, \chi(1) = 190373976 = 2^3 \cdot 3^{10} \cdot 13 \cdot 31.$

   При $c = 4$**:**

9. $G = A_6 \cong L_2(9) \cong S_4(2)', |G| = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, \chi(1) = 10 = 2 \cdot 5;$
10. $G = L_3(3), |G| = 5616 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13, \chi(1) = 39 = 3 \cdot 13;$
11. $G = U_4(2) \cong S_4(3), |G| = 25920 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5, \chi(1) = 81 = 3^4;$
12. $G = Sz(8), |G| = 29120 = 2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13, \chi(1) = 91 = 7 \cdot 13;$
13. $G = M_{12}, |G| = 95040 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11, \chi(1) = 176 = 2^4 \cdot 11;$
14. $G = A_9, |G| = 181440 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7, \chi(1) = 216 = 2^3 \cdot 3^3;$
15. $G = A_{11}, |G| = 19958400 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11, \chi(1) = 2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$

    При $c = 5$**:**

16. $G = L_2(11), |G| = 660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11, \chi(1) = 12 = 2^2 \cdot 3;$
17. $G = A_8 \cong L_4(2), |G| = 20160 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7, \chi(1) = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7;$
18. $G = L_3(4), |G| = 20160 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7, \chi(1) = 64 = 2^6;$

19. $G = J_1, |G| = 175560 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19, \chi(1) = 209 = 11 \cdot 19;$

20. $G = U_4(3), |G| = 3265920 = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7, \chi(1) = 896 = 2^7 \cdot 7;$

21. $G = R(2)' \cong^2 F_4(2)', |G| = 17971200 = 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13, \chi(1) = 2048 = 2^{11};$

22. $G = HS, |G| = 44352000 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11, \chi(1) = 3200 = 2^7 \cdot 5^2;$

23. $G = O_8^+(2), |G| = 174182400 = 2^{12} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7, \chi(1) = 6075 = 3^5 \cdot 5^2.$

При $c = 6$**:**

24. $G = L_2(13), |G| = 1092 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13, \chi(1) = 14 = 2 \cdot 7;$

25. $G = U_3(3) \cong G_2(2)', |G| = 6048 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7, \chi(1) = 32 = 2^5;$

26. $G = J_2 = HJ = F_{5-}, |G| = 604800 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7, \chi(1) = 336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7;$

27. $G = S_6(2), |G| = 1451520 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7, \chi(1) = 512 = 2^9;$

28. $G = A_{10}, |G| = 1814400 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7, \chi(1) = 567 = 3^4 \cdot 7;$

29. $G = L_4(3), |G| = 6065280 = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 13, \chi(1) = 1040 = 2^4 \cdot 5 \cdot 13;$

30. $G = J_3, |G| = 50232960 = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19, \chi(1) = 3078 = 2 \cdot 3^4 \cdot 19;$

31. $G = U_6(2), |G| = 9196830720 = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11, \chi(1) = 40095 = 3^6 \cdot 5 \cdot 11.$