МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Пейчева Анастасия Сергеевна

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ СМЕШАННЫМИ ЗАДАЧАМИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
Шлапунов А.А.

Красноярск – 2018

Содержание

Введение

Хорошо известно, что интегро-дифференциальные эрмитовы формы тесно связаны с обобщенными постановками краевых задач для дифференциальных уравнений и систем, а также с теоремами существования и единственности для таких задач (см., например, [1], [2], [8], [20], [21], [28], [52], и другие).

Однако, при изучении краевых задач важны не только теоремы существования и единственности, но и формулы для нахождения их точных и приближенных решений. Классический подход к изучению эллиптических уравнений в гильбертовых пространствах позволяет находить решение краевых задач в (весовых) пространствах соболевского типа в различных областях (гладкие области, липшицевы области, области с коническими и реберными особенностями и тд.), см., например [2], [20], [36], [39], [40], [45], [50], [68] и многие другие. Не так давно данный подход был адаптирован к изучению широкого класса некоэрцитивных (субэллиптических) смешанных краевых задач, см. [30], [63].

Фактически, мы рассматриваем краевые задачи как операторные уравнения в подходящих пространствах Гильберта. Конечно, всегда можно воспользоваться методом Фаэдо-Галеркина, но дополнительная информация о полной системе функций, с помощью которой строятся решения краевых задач может существенно упростить вычисления. В случае уравнений с самосопряженными операторами обычно применяются спектральные теоремы; например, теорема Гильберта-Шмидта (см. [9] или в [14, стр. 246]), гарантирующая полноту ортогональной системы собственных векторов самосопряженного компактного оператора, а значит, и возможность построения точных и приближенных решений операторных уравнений. Поэтому одной из целей будет нахождение соответствующих собственных значений и построение собственных функций краевых задач.

В случае уравнений с несамосопряженными операторами все еще можно использовать концепцию корневых элементов линейного оператора, но для этого опять требуется доказать полноту системы корневых функций. Это замечание справедливо и в том случае, если для нахождения решений операторных уравнений используются численные методы. В таком случае спектральная теория будет полезным инструментом для решения краевых задач для дифференциальных операторов с частными производными (см., например, [9], [12], [44]).

Классическим примером применения спектральной теории для решения систем линейных алгебраических уравнений является теорема о приведении матрицы самосопряженного преобразования конечномерного пространства к диагональному виду (см., например, [9] или [17]). Для несамосопряженных преобразований конечномерного пространства плодотворным оказалось понятие корневого вектора преобразования. Использование корневых векторов при решении систем алгебраических уравнений требует доказательства полноты линейной оболочки этих векторов, что эквивалентно возможности приведения матрицы системы к нормальной жордановой форме.

По-видимому, впервые разложение по корневым векторам несамосопряженных операторов в пространствах Гильберта обосновал Келдыш [12]. Им была доказана полнота системы корневых векторов слабых возмущений компактных самосопряженных операторов, а соответствующие результаты использованы при изучении задачи Дирихле для слабо возмущенного оператора Лапласа. Применительно к общей теории краевых задач, результаты такого типа хорошо известны для коэрцитивных (эллиптических) задач в областях с гладкими границами (см. [36], [40]). Относительно спектральной теории эллиптических краевых задач в липшицевых областях мы отсылаем к обзору [2]. Корневые функции общих эллиптических задач в весовых пространствах Соболева для областей с коническими точками и ребрами изучались в [45], [50], [68]; при этом использование весовых пространств позволяет выбирать решения с предписанным асимптотическим поведением вблизи особых точек границы.

Субэллиптические (некоэрцитивные) краевые задачи для эллиптических систем уравнений были обнаружены в середине XX-го столетия (см. [37], [51]). Обычно в таких краевых задачах регулярность решений вблизи границы области существенно хуже, чем внутренняя регулярность. Наиболее известной из них является D-задача Неймана-Спенсера для эллиптических дифференциальных комплексов (см. [29, §16], [49]). В теории упругости задачи такого рода можно найти в [41], [42]. Рассматривая некоэрцитивные задачи, мы, по существу, расширяем класс граничных условий, для которых полнота корневых функций все еще справедлива. Это может привести к потере регулярности решений задачи вблизи границы, но оправдывается самим характером задач (см. [31], [57], [63]).

В качестве применения теории некоэрцитивных краевых смешанных задач отметим задачу Коши для эллиптических линейных дифференциальных уравнений. Это известная проблема, находящая свое применение в физике, электродинамике, механике жидкости и газа и т.д. (см. [5], [43], [69] или в других источниках). На самом деле она является типичным примером некорректной задачи (см., например, [18], [19], [69]).

Наиболее эффективным методом для изучения задачи Коши оказался метод регуляризации (см., например, [70]). Книги [5] и [69] дают достаточно полное описание условий разрешимости задач Коши в разных ситуациях, а также пути ее регуляризации. Эффективные итерационные методы регуляризации для такого рода задач были найдены достаточно давно, см., например, в [13].

Недавно был разработан новый подход, ср. [62], [65], [66]. Он основан на простом наблюдении, что нахождение решений задач Коши для эллиптических уравнений сводится к нахождению (возможно, некоэрцитивных) смешанных краевых задач для эллиптических уравнений с параметром, что и приводит нас к понятию задач типа Зарембы.

Текущий прогресс в теории некоэрцитивных задач типа Зарембы (см. [56], [57], [63]) позволяет нам упростить метод [62] и получить новый критерий разрешимости задачи, а также построить ее точные и приближенные решения. Таким образом, будут получены условия разрешимости для задачи Коши и эффективный метод построения ее решения в виде формул карлемановского типа.

Цель диссертационной работы: найти подходящие функциональные пространства для решения некоэрцитивных смешанных задач, описать условия их разрешимости, фредгольмовости, и отыскать условия, гарантирующие полноту соответствующих систем корневых функций, а также научиться строить точные и приближенные решения таких краевых задач.

Основные результаты работы:

1. Доказаны теоремы вложения для (весовых) пространств соболевского типа, порожденных некоэрцитивными (и коэрцитивными) эрмитовыми формами, в шкалу пространств Соболева-Слободецкого. Как следствие, описаны условия разрешимости и фредгольмовости для широкого класса соответствующих этим формам смешанных задач, а также доказаны теоремы о полноте их корневых функций.

2. В весовых пространствах соболевского типа получены условия разрешимости и фредгольмовости для трех задач Штурма-Лиувилля (двух коэрцитивных и одной некоэрцитивной) для возмущенного оператора Ламе в $\mathbb{R}^n$ с граничными условиями робеновского типа, а также доказаны теоремы о полноте соответствующих систем корневых функций.

3. Указан способ нахождения собственных значений некоэрцитивной задачи типа Зарембы для оператора Лапласа в единичном круге на комплексной плоскости и построения ее собственных функций.

4. Получены условия разрешимости некорректной задачи Коши для матричного эллиптического дифференциального оператора первого порядка A, а также найдены формулы точных и приближенных решений для данной задачи.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми.

Методы исследования. В работе использованы методы функционального анализа, комплексного анализа, а также метод интегральных представлений.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты носят теоретический характер и могут быть применены в теории смешанных краевых задач, теории дифференциальных и псевдодифференциальных операторов в частных производных, в гидродинамике, механике, а также при решении задач математической физики.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы прошли апробацию на следующих семинарах и научных конференциях:

1. 52-ой Международная научная студенческая конференция, (Новосибирск, 11-18 апреля 2014 г.)

2. Международная школа-конференция по многомерному комплексному анализу и дифференциальным уравнениям (Красноярск, 20-23 октября 2014 г.)

3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых „Молодежь и наука: проспект Свободный", (Красноярск, 2014-2018гг.)

4. Международная конференция „VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике", (Ростов-на-Дону, 11-16 сентября 2016 г.)

5. Красноярский городской семинар по комплексному анализу и алгебраической геометрии (Сибирский федеральный университет, 2014-2018).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы были опубликованы в 4-х статьях ([78], [79], [80], [81]) и 5 тезисах ([73], [74], [75], [76], [77]). Все работы опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций. Результаты статей [78], [79] получены автором самостоятельно, статья [81] опубликована в соавторстве с А.А.Шлапуновым, а [80] в соавторстве А. Лаптевым и научным руководителем. Вклад авторов в совместные работы равнозначен и неделим.

Положения, выносимые на защиту.

1. Теоремы вложения в шкалу (в том числе, весовых) пространств Соболева-Слободецкого для пространств соболевского типа, порожденных (весовыми) коэрцитивными и некоэрцитивными эрмитовыми формами.

2. Описание условий однозначной разрешимости и фредгольмовости в весовых пространствах соболевского типа трех задач Штурма-Лиувилля для возмущенного эллиптического оператора Ламе с граничными условиями робеновского типа и некоэрцитивной задачи Зарембы в единичном круге.

3. Описание спектральных свойств операторов, соответствующих смешанным задачам для возмущенного эллиптического оператора Ламе, а также критерии полноты корневых функций в весовых пространствах Соболева.

4. Условия разрешимости, а также формулы для точных и приближенных решений некорректной задачи Коши для матричного эллиптического дифференциального оператора первого порядка A.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 81 наименование, а список работ автора по теме диссертации – 9. Общий объем диссертации: 130 страниц.

Первая глава диссертационной работы посвящена изложению элементов теории некоэрцитивных задач в пространствах Соболева. Более точно, **параграф 1.1** посвящен обзору литературы и полученных к настоящему моменту результатов в теории функциональных пространств и операторов. В этом параграфе мы вводим все основные обозначения диссертации. Как обычно, для пространства Банаха $\mathcal{X}$ обозначим через $[\mathcal{X}]^k$ декартово произведение k копий $\mathfrak{B}$. Это банахово пространство с нормой $\|u\|_{[\mathcal{X}]^k} = \Big(\sum_{j=1}^k \|u_k\|^2_{\mathcal{X}} \Big)^{1/2}$, $u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathcal{X}]^k$.

В **параграфе 1.2** описаны вложения функциональных пространств, ассоциированных с одним классом эрмитовых форм, в шкалу пространств Соболева-Слободецкого. В этом параграфе мы рассматриваем однородный дифференциальный линейный матричный оператор первого порядка

$$A(x, \partial) = \sum_{j=1}^n A_j(x) \partial^j,$$

где $A_j(x)$ суть некоторые функциональные матрицы размерности $l \times k$ на открытом множестве X из $\mathbb{R}^n$, содержащем замыкание области D.

Мы будем предполагать, что для этого оператора выполняется следующее свойство единственности в малом на X:

$$\begin{gathered}\text{если } Au = 0 \text{ в области } U \subset X \text{ и } u \equiv 0 \text{ на открытом подмножестве } V \subset U, \\ \text{то } u \equiv 0 \text{ в области } U. \end{gathered} \tag{0.1}$$

Рассмотрим эрмитову форму

$$(u, v)_+ = (Au, Av)_{[L^2(D)]^l} + (a_{0,0}u, v)_{[L^2(D)]^k} + (b_{0,0}u, v)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^k},$$

где S – некоторое подмножество границы ∂D области D, $a_{0,0}(x)$ – эрмитова неотрицательная функциональная $(k \times k)$-матрица в D, для компонент которой справедливо, что $a_{0,0}^{(p,q)} \in L^\infty(D)$, а $(k \times k)$-матрица $b_{0,0}$ есть эрмитова неотрицательная $(k \times k)$-матрица, а ее элементы представляют собой измеримые, ограниченные функции на $\partial D \setminus S$. Безусловно, данная форма не всегда является скалярным произведением; здесь, как обычно, через $L^p(D)$, $1 \leq p \leq +\infty$, обозначаются пространства Лебега в области D. Поэтому в диссертации указываются простые достаточные условия, при которых эрмитова форма будет таковой.

Обозначим через $C^1(\overline{D}, \overline{S})$ пространство непрерывно дифференцируемых функций в замыкании области D равных нулю в некоторой относительной окрестности множества S в $\overline{D}$, а через $H^+(D)$ – пополнение $[C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$ относительно нормы $\| \cdot \|_+$, индуцированной скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_+$ (в тех случаях, когда форма таковым является). Нам необходимо связать это пространство с уже известной шкалой пространств Соболева-Слободецкого $H^s(D)$, $s \geq 0$. С этой целью обозначим через $H^s(D, S)$ пополнение $[C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$ в $H^s(D)$.

Далее, через A^* будем обозначать формально сопряженный дифференциальный оператор для A. Если оператор A эллиптичен на X, то дифференциальный оператор второго порядка A^*A сильно эллиптичен на X. Следовательно, форма $(\cdot, \cdot)_+$ связана со смешанной задачей для оператора A^*A.

Мы предполагаем, что веденное пространство $H^+(D)$ будет непрерывно вложено в пространство $[L^2(D)]^k$, что не является слишком ограничительным условием.

Определение 1.2.1. *Эрмитову форму $(\cdot,\cdot)_+$ будем называть коэрцитивной на некотором функциональном, гильбертовом пространстве $\mathcal{Y}$, если найдутся такие положительные постоянные c_1 и c_2, что*

$$c_1\|u\|_{\mathcal{Y}} \le \|u\|_+ \le c_2\|u\|_{\mathcal{Y}} \text{ для всех } u \in \mathcal{Y}.$$

Таким образом, если эрмитова форма $(\cdot,\cdot)_+$ коэрцитивна на $[H^1(D,S)]^k$, то, в частности, пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $[H^1(D,S)]^k$.

Обозначим через ι оператор непрерывного вложения

$$\iota : H^+(D) \to [L^2(D)]^k. \tag{0.2}$$

Отметим, что из определения нормы $\|\cdot\|_+$ следует непрерывное вложение пространства $H^+(D)$ в пространство $[L^2(D)]^k$, если существует постоянная $c > 0$, что выполнено $a_{0,0} \ge cI$ в $\overline{D}$. Через $H^-(D)$ мы будем обозначать пополнение $[H^1(D,S)]^k$ по норме

$$\|u\|_- = \sup_{\substack{v\in H^+(D)\\ v\neq 0}} \frac{|(v,u)_{[L^2(D)]^k}|}{\|v\|_+}.$$

Ясно, что пространство $[L^2(D)]^k$ непрерывно вложено в $H^-(D)$; соответствующее вложение обозначим также через ι'.

Основным результатом данной главы является теорема вложения в шкалу пространств Соболева-Слободецкого для пространства $H^+(D)$.

Теорема 1.2.1. (см. [79]) *Предположим, что коэффициенты оператора A являются бесконечно гладкими в замыкании некоторой окрестности X и найдется постоянная $c > 0$ такая, что выполнено*

$$\|b_{0,0}\|_{[L^2(\partial D\setminus S)]^k} \ge c_1\, \|u\|_{[L^2(\partial D\setminus S)]^k} \text{ для всех } u \in [H^1(\partial D,S)]^k.$$

Тогда пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство $[H^{1/2-\epsilon}(D)]^k$ с произвольным $\epsilon > 0$, если:

1. *Либо существует такая постоянная $c_1 > 0$, что $a_{0,0} \ge cI$ в $\overline{D}$;*

2. *Либо для всех $u \in [C_0^\infty(X)]^k$ справедливо неравенство*

   $$(Au,Au)_{[L^2(X)]^l} \ge m\, \|u\|^2_{[L^2(X)]^k}$$

   с постоянной $m > 0$, независящей от функции u.

Более того, если $\partial D \in C^2$, то в этом случае пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство $[H^{1/2}(D)]^k$.

Для различных классов скалярных операторов с комплекснозначными коэффициентами подобные теоремы были получены в [57], [63].

Теорема 1.2.1 дает возможность в **параграфе 1.3** доказать фредгольмовость одного класса смешанных задач для дифференциальных матричных операторов второго порядка и описать их спектральные свойства. Именно, рассматривается следующая смешанная задача: по заданному $f \in H^-(D)$ найти $u \in H^+(D)$ такую, что

$$(Au, Av)_{[L^2(D)]^l} + \big(b_1^{-1}(\partial_t + b_0)u, v\big)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^k} + \Big(a_1 Au + a_0 u, v\Big)_{[L^2(D)]^k} = \langle f, v\rangle$$

для всех $v \in H^+(D)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает спаривание между элементами $H^-(D)$ и $H^+(D)$, а a_j, b_j суть некоторые известные функциональные матрицы, а t - некоторое касательное векторное поле к ∂D. В данной главе даны условия разрешимости этой смешанной задачи и указаны условия полноты ее корневых функций в ситуации, когда выполнены условия теоремы 1.2.1, см. также [57], [63]. Данные результаты опубликованы в [79]. Для случая коэрцитивных операторов результаты **главы 1** достаточно хорошо известны, см. [36], [1], [2] и многие другие работы.

Основная задача **параграфа 1.4** состоит в регуляризации некорректной задачи Коши для матричного эллиптического дифференциального оператора первого порядка A и нахождения формулы ее решения. Более точно, рассмотрен оператор $A = \sum_{j=1}^n A_j(x)\partial_j + A_0(x)$, где $A_j(x)$ – это $(k \times k)$-матрицы, чьи компоненты суть комплекснозначные $C^\infty(X)$-функции.

Далее, рассмотрим некорректную задачу Коши для оператора A в области D с граничными значениями на множестве S: *по заданному распределению f на D, найти распределение u, удовлетворяющее, в подходящем смысле*,

$$\begin{cases} Au &= f \quad \text{в} \quad D, \\ u &= 0 \quad \text{на} \quad S. \end{cases} \tag{0.3}$$

Как хорошо известно, эта задача некорректна во всех стандартных функциональных пространствах. Несмотря на это, она часто встречается в приложениях, см., например, монографию [69] и библиографию к ней.

Для того, чтобы проконтролировать поведение решения задачи (0.3), естественно ввести следующие функциональные пространства. Для $\varepsilon \geq 0$ рассмотрим эрмитову форму $\varepsilon \geq 0$:

$$(u, v)_{+,\varepsilon} = \varepsilon\,(u, v)_{[L^2(\partial D)]^k} + (Au, Av)_{[L^2(D)]^k}$$

на пространстве $[C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$. Как следует из Теоремы 1.2.1, соответствующее пополнение $H^+(D)$ пространства $[C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$ непрерывно вложено в пространство $[H^{1/2-\epsilon}(D)]^k$ с произвольным $\epsilon > 0$. Легко увидеть, что если искать ее решение в пространстве $H^+(D)$, то ее можно интерпретировать как исследование ограниченного линейного оператора

$$A : H^+(D; S) \to [L^2(D)]^k. \tag{0.4}$$

Нетрудно понять, что если $f \in [L^2(D)]^k$, то функция $u \in H^+(D)$ будет решением задачи (0.3) тогда и только тогда, когда для всех $v \in H^+(D)$ верно, что

$$(Au, Av)_{[L^2(D)]^k} = (f, Av)_{[L^2(D)]^k}. \tag{0.5}$$

Одной из важных целей **параграфа 1.4** является получение условия разрешимости задачи (0.3) с помощью подходящего возмущения задачи (0.5).

Задача 1.4.1. *Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1]$. По заданной функции $f \in [L^2(D)]^k$, найти элемент $u_\varepsilon \in H^+(D)$ такой, что для любого $v \in H^+(D)$ будет выполнено*

$$(Au_\varepsilon, Av)_{[L^2(D)]^k} + \varepsilon\,(u_\varepsilon, v)_{[L^2(\partial D \setminus \overline{S})]^k)} = (f, Av)_{[L^2(D)]^k}. \tag{0.6}$$

Принципиальная разница между задачами (0.3) и 1.4.1 в том, что последняя корректна в пространстве $H^+(D)$.

Как следует из результатов параграфа 1.3, для любого $\varepsilon > 0$ и $f \in [L^2(D)]^k$ существует единственное решение $u_\varepsilon(f) \in H^+(D)$ задачи 1.4.1. Более того, для него выполнено неравенство

$$\|u_\varepsilon(f)\|_{+,\varepsilon} \le \|f\|_{[L^2(D)]^k}.$$

Опишем условия разрешимости задачи (0.3) с помощью поведения семейства $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$.

Теорема 1.4.1. (см. [78]) *Семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ ограниченно тогда и только тогда, когда существует такая функция $u \in H^+(D)$, что выполнено* (0.5). *Более того, $\lim_{\varepsilon\to+0} \|Au_\varepsilon(f) - f\|_{[L^2(D)]^k} = 0$, и последовательность $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится слабо в $H^+(D)$ при $\varepsilon \to +0$ к решению $u \in H^+(D)$ задачи* (0.3). *Более того, $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится к u в $[H^s(D)]^k$ для всех $s < 1/2$ также и в пространстве $[H^1_{\mathrm{loc}}(D \cup S)]^k$.*

Наконец, пользуясь теоремой 1.4.1, мы строим формулы Карлемана для решения задачи Коши (0.3).

Подобные результаты для системы Коши-Римана были получены в [25]. Для общих эллиптических систем см. [62] в несколько других пространствах, где получаются более слабые результаты о сходимости регуляризуюшей последовательности.

Во **второй главе** рассмотрены три краевые задачи Штурма-Лиувилля (две из которых будут коэрцитивными, а одна некоэрцитивная) для оператора Ламе с граничными условиями робэновского типа в весовых пространствах в ограниченной липшицевой области D. В **параграфе 2.1** сформулированы сами задачи и доказаны теоремы вложения для пространств, ассоциированных с весовыми эрмитовыми формами, в шкалу весовых пространств Соболева-Слободецкого, а также рассмотрен вопрос фредгольмовости таких задач. Более точно, обозначим через $\mathcal{L}_0$ оператор типа Ламе в $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{L}_0(x, \partial) = -\mu(x) I_n \Delta_n - (\lambda(x) + \mu(x)) \nabla_n \mathrm{div}_n,$$

где I_n – единичная матрица, размерности $(n \times n)$, Δ_n – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$,∇_n есть оператор градиента в $\mathbb{R}^n$, div_n – оператор дивергенции в $\mathbb{R}^n$, а μ, λ – вещественные функции из пространства Лебега $L^\infty(D)$ такие, что $\mu \geq \kappa$, $(2\mu + \lambda) \geq \kappa$ для некоторой постоянной $\kappa > 0$. При $n = 3$ и $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 0$ этот оператор играет важную роль при описании смещений упругого тела под нагрузкой. Также это может служить одной из линеаризаций стационарной версии уравнений Навье-Стокса для сжимаемой жидкости при заданном (известном) давлении.

Хорошо известно, что если функции μ, λ принадлежат пространству Липшица $C^{0,1}(\overline{D})$, то при описанных выше условиях оператор Ламе является сильно эллиптическим. Более того, существует такой формально самосопряженный «неотрицательный» оператор $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}(x, \partial) = \mathfrak{D}^*\mathfrak{D}$, который отличается от оператора $\mathcal{L}_0(x, \partial)$ слагаемыми младшего порядка; здесь $\mathfrak{D} = \sum_{j=1}^n \mathfrak{D}_j \partial_j$ – дифференциальный $(k \times n)$-матричный оператор первого порядка, а $\mathfrak{D}^*$ – формально сопряженный к нему. В главе 2 были рассмотрены три возможных факторизации $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}(x, \partial)$. Для того, чтобы ввести третью из них, обозначим через $M_1 \otimes M_2$ произведение Кронекера матриц M_1 и M_2, rot_n понимается как $\left(\frac{(n^2-n)}{2} \times n\right)$-матричный оператор, строки которого имеют вид $(-1)^{i+j}\left(\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$, $1 \leq i < j \leq n$, где $\vec{e}_i$ – единичный вектор в $\mathbb{R}^n$ с i-той компонентой, равной единице, представляющий завихренности (или стандартный оператор rot для $n = 2, n = 3$), и за $\mathbb{D}_n$ мы обозначим $\left(\frac{(n^2+n)}{2} \times n\right)$-матричный оператор, строки которого имеют вид $\sqrt{2}\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, и $\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} + \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ при $1 \leq i < j \leq n$, представляющий деформацию (напряжение). Итак, примерами оператора $\mathfrak{D}$ являются:

$$\mathfrak{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\ \mathbb{D}_n \\ \sqrt{\lambda}\mathrm{div}_n \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\ I_n \otimes \nabla_n \\ \sqrt{\mu + \lambda}\ \mathrm{div}_n, \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D}^{(3)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\ \mathrm{rot}_n \\ \sqrt{2\mu + \lambda}\mathrm{div}_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, стоит отметить, что размерности матричных операторов $\mathfrak{D}^{(j)}$, $j = \overline{1,3}$, и ограничения на μ,λ будут следующими: $k_1 = (n^2 + n)/2 + 1$ и $\lambda \geq 0$, $(\mu + \lambda) \geq 0$ для первого оператора; $k_2 = n^2 + 1$ и $\lambda \geq 0$, $(2\mu + \lambda) \geq \kappa > 0$ для второго оператора; $k_3 = (n^2 - n)/2 + 1$ и $\lambda \geq 0$, $(2\mu + \lambda) \geq \kappa > 0$ для третьего оператора. Ранги символов любого из операторов $\mathfrak{D}^{(j)}$ максимальны, а сами операторы $\mathfrak{D}^{(j)}$ являются (переопределенными) эллиптическими.

Зафиксируем связное подмножество S на ∂D, открытое в относительной топологии на границе и имеющее кусочно-гладкую границу на гиперповерхности ∂D. Также зафиксируем подмножество Y из ∂S и весовую функцию ρ, связанную с ними. Кроме того, мы будем предполагать, что функции $\mu, \lambda \in C^{0,1}(D) \cap L^\infty(D)$, $\rho \nabla_n \mu \in [L^\infty(D)]^n$, $\rho \nabla_n \lambda \in [L^\infty(D)]^n$.

Рассмотрим $(n \times n)$-матричный линейный дифференциальный оператор $\mathfrak{A}$ в области D, ассоциированный с $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}(x, \partial) = \mathfrak{D}^*\mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ – один из операторов $\mathfrak{D}^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$:

$$\mathfrak{A}u = \mathfrak{D}^*\mathfrak{D}u + a_1\ I_n \otimes \nabla_n + a_0(x)u, \tag{0.7}$$

здесь a_0 и a_1 суть функциональные $(n \times n)$- и $(n \times n^2)$- матрицы соответственно, а для их компонент $a_j^{(p,q)}$ справедливо, что $\rho^2 a_0^{(p,q)} \in L^\infty(D)$, $\rho a_1^{(p,q)} \in L^\infty(D)$.

Пусть $\nu_{\mathfrak{D},\partial D} = \sum_{j=1}^n \mathfrak{D}_j^* \nu_j \mathfrak{D}$ – конормальная производная, определенная относительно оператора $\mathfrak{D}$, где $\nu = (\nu_1, \dots \nu_n)$ – векторное поле, состоящее из единичных внешних нормалей по отношению к ∂D (определенное для почти всех точек $x \in \partial D$). Очевидно, что два оператора типа $\nu_{\mathfrak{D},\partial D}$, рассмотренные выше, различаются на матрицу, элементы которой суть касательные производные к границе.

Теперь введем в рассмотрение граничный оператор

$$\mathfrak{B} = b_1(x)\nu_{\mathfrak{D},\partial D} + b_0(x) + \partial_\tau,$$

где ∂_τ – это $(n \times n)$-матрица, состоящая из касательных производных к ∂D. О $(n \times n)$-матрицах $b_0(x)$ и $b_1(x)$ будем предполагать, что их компоненты локально ограниченные, измеримые функции на $\partial D \setminus Y$. Мы позволим матрице $b_1(x)$ вырождаться (и даже исчезать) на открытом связном подмножестве S поверхности ∂D, имеющем кусочно-гладкую границу ∂S; в этом случае предполагается, что матрица $b_0(x)$ не вырождена на S, а компоненты касательной составляющей ∂_τ равны нулю на S. Также, в случае если $S \neq \emptyset$, будем требовать, чтобы $b_1(x)|_S = 0$, $\partial_\tau|_S = 0$, а $b_0(x)$ не вырождалась на S.

Обычно для задания краевых условий первого порядка к оператору типа Ламе используется граничный тензор напряжений σ_T с компонентами

$$\sigma_T^{i,j} = \mu\, \delta_{i,j} \sum_{k=1}^n \nu_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \mu\, \nu_j \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda\, \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j},\ 1 \leq i,j \leq n. \tag{0.8}$$

Граничный тензор напряжений σ_T с компонентами (0.8) связан с конормальными производными, определенными относительно операторов $\mathfrak{D}^{(j)}$, следующим образом:

$$\sigma_T = \nu_{\mathfrak{D}^{(1)},\partial D} = \nu_{\mathfrak{D}^{(2)},\partial D} + \mu(x)\partial_{\tau_0} = \nu_{\mathfrak{D}^{(3)},\partial D} + 2\mu(x)\partial_{\tau_0}$$

с касательной составляющей

$$\partial_{\tau_0} = \left((\nu(x)\mathrm{div_n})^{\mathrm{T}} - \nu(\mathrm{x})\mathrm{div_n}\right).$$

Таким образом, будем искать решение следующей смешанной задачи: *по данной обобщенной n-векторной функции f в D, найти n-векторное распределение u в D удовлетворяющее в подходящем смысле*

$$\begin{cases} \mathfrak{A}u &= f \quad \text{в} \quad D, \\ \mathfrak{B}u &= 0 \quad \text{на} \quad \partial D. \end{cases} \tag{0.9}$$

При $S = \partial D$ мы получаем классическую задачу Дирихле для сильно эллиптических операторов. Наличие коэрцитивной оценки для такой задачи следует из неравенства Гординга для сильно эллиптических операторов. Известно, что для произвольного (вообще говоря, переопределенного) эллиптического $(l \times k)$-матричного оператора A порядка p оператор $\mathfrak{A} = A^* A$ порядка $2p$ сильно эллиптичен. Если для любой функции $u \in C_0^\infty(D)$ из того, что $Au = 0$ следует, что $u = 0$, то существует такая постоянная $c > 0$, что

$$\|u\|^2_{[H^p(D)]^k} \leq c \|Au\|^2_{[L^2(D)]^l}.$$

Однако, эти стандартные рассуждения приводят к теореме существования и коэрцитивности для задачи только в случае $S = \partial D$. Нас в первую очередь будет интересовать случай $S \neq \partial D$.

Во второй главе мы покажем, что при $S \neq \partial D$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(1)}$ или $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(2)}$ смешанная задача (0.9) коэрцитивна в весовых пространствах Соболева, но при $S \neq \partial D$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(3)}$ она некоэрцитивна в них.

Так как при изучении спектральных свойств задачи мы будем использовать метод возмущения компактных самосопряженных операторов, то расщепим коэффициенты

$$a_0 = a_{0,0} + \delta a_0, \; b_0 = b_{0,0} + \delta b_0,$$

где $a_{0,0}(x)$ – эрмитова неотрицательная функциональная $(n \times n)$-матрица в D, для компонент которой справедливо, что $\rho^2 a_{0,0}^{(p,q)} \in L^\infty(D)$, а $(n \times n)$-матрица $b_{0,0}$ выбрана так, что $(n \times n)$-матрица $b_1^{-1} b_{0,0}$ (при условии существования обратной матрицы к b_1) была бы эрмитовой неотрицательной и ее элементы представляли бы собой локально измеримые, ограниченные функции на $\partial D \setminus S$.

Пусть $s \in \mathbb{Z}_+$. Выберем какое-нибудь замкнутое множество $Y \subset \overline{D}$, расположенное на ∂D. Мы предположим, что $\rho \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \setminus Y)$, т.е. она есть C^1-гладкая функция в $\overline{D} \setminus Y$ такая, что $0 \leq \rho(x) \leq 1$, $x \in \overline{D}$, $\frac{\partial \rho}{\partial x_j} \in L^\infty(D)$, $1 \leq j \leq n$ и $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in Y$. Теперь, для $\gamma \in \mathbb{R}$ обозначим через $H^{0,\gamma}(D)$ и $H^{1,\gamma}(D)$ пополнения множеств $C^0(\overline{D}, Y)$ и $C^1(\overline{D}, Y)$, соответственно, относительно норм, индуцированных скалярными произведениями

$$(u, v)_{H^{s,\gamma}(D)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \left(\rho^{|\alpha| - \gamma - s} \partial^\alpha u, \rho^{|\alpha| - \gamma - s} \partial^\alpha v \right)_{L^2(D)}, \; s = 0, 1.$$

Эти пространства естественно называть весовыми пространствами Лебега и Соболева, соответственно.

Кроме того, для $0 < s < 1$ введем весовые пространства Соболева-Слободецкого как пополнение множества $C^1(\overline{D}, Y)$ по норме, индуцированной скалярным произведением

$$(u, v)_{H^{s,\gamma}(D)} = (u, v)_{H^{0,\gamma+s}(D)} + (\rho^{-\gamma} u, \rho^{-\gamma} v)_{H^s(D)}.$$

Случай, когда $\rho \equiv 1$ соответствует обычным пространствам Соболева и Соболева-Слободецкого.

Если множество Y расположено на $(n-2)$-мерной поверхности на ∂D, то через $H^{0,\gamma}(\partial D)$ обозначим весовое пространство Лебега, т.е. пополнение пространства $C^0(\partial D, Y)$ по следующей норме:

$$\|u\|_{H^{0,\gamma}(\partial D)} = \|\rho^{-\gamma} u\|_{L^2(\partial D)}.$$

Также при $0 < s < 1$ будем обозначать через $H^{s,\gamma}(\partial D)$ весовое пространство Соболева-Слободецкого на ∂D, т.е. пополнение $C^{0,1}(\partial D, Y)$ по соответствующей норме, порожденной следующим скалярным произведением

$$(u,v)_{H^{s,\gamma}(\partial D)} = (u,v)_{H^{0,\gamma+s}(\partial D)} + (\rho^{-\gamma} u, \rho^{-\gamma} v)_{H^s(\partial D)};$$

здесь $H^s(\partial D)$ – это обычное пространство Соболева-Слободецкого на ∂D, а $C^{0,1}(\partial D, Y)$ – это подмножество липшицевых функций $C^{0,1}(\partial D)$, исчезающих в окрестности Y в относительной топологии на ∂D.

На пространстве $[C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ рассмотрим следующую эрмитову форму:

$$(u,v)_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}} = \left(\mathfrak{D}^{(j)} u, \mathfrak{D}^{(j)} v\right)_{[H^{0,\gamma}(D)]^{k_j}} + (a_{0,0} u, v)_{[H^{0,\gamma}(D)]^n} + (b_1^{-1} b_{0,0} u, v)_{[H^{0,\gamma}(\partial D \setminus S)]^n}.$$

Легко понять, что форма $(\cdot,\cdot)_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(2)}}$ сильно коэрцитивна на весовом пространстве $[H^{1,\gamma}(D, S \cup Y)]^n$ для всех $\gamma \in \mathbb{R}$, т.е.

$$\|\mathfrak{D}^{(2)} u\|^2_{[H^{0,\gamma}(D)]^{k_2}} \geq c \|\nabla_n u_j\|^2_{H^{0,\gamma}(D)} \text{ для всех } u \in [H^{1,\gamma}(D, S \cup Y)]^n$$

с некоторой постоянной c, независящей от u. Формы, соответствующие операторам $\mathfrak{D}^{(1)}$ и $\mathfrak{D}^{(3)}$, не являются сильно коэрцитивными в общем случае. Например, при $\rho = 1$ для оператора $\mathfrak{D}^{(1)}$ равенство $\mathfrak{D}^{(1)} u = 0$ выполняется для некоторого непостоянного вектора $u = x_i \vec{e}_j - x_j \vec{e}_i$, $i \neq j$, а для оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$ выполняется аналогичное равенство $\mathfrak{D}^{(3)} \nabla_n h = 0$ в D для всех гармонических функций h в D. Однако, форма, соответствующая оператору $\mathfrak{D}^{(1)}$, будет также коэрцитивна при разумных допущениях на $[H^{1,\gamma}(D, S \cup Y)]^n$ для всех $\gamma \in \mathbb{R}$, т.е.

$$\|u\|^2_{[H^{0,\gamma}(D)]^n} + \|\mathfrak{D}^{(1)} u\|^2_{[H^{0,\gamma}(D)]^{k_1}} \geq c \|u\|^2_{[H^{1,\gamma}(D)]^n} \text{ для всех } u \in [H^{1,\gamma}(D, S \cup Y)]^n$$

(при $\rho = 1$ это известное неравенство Корна).

Обозначим через $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D)$ пополнение $[C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ относительно нормы $\|\cdot\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}}$, индуцированной скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}}$ (в тех случаях, когда форма таковым является, см. лемму 2.1.2 ниже). Для операторов $\mathfrak{D}^{(1)}$ и $\mathfrak{D}^{(2)}$ утверждения о вложении в шкалу весовых пространств Соболева-Слободецкого вполне ожидаемы и получаются достаточно просто (см. лемму 2.1.3).

Следующее утверждение описывает условия, при которых справедливы непрерывные вложения $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ в шкалу пространств Соболева-Слободецкого.

Обозначим через $h^s(D)$ пространство решений уравнения $\mathcal{L}_0 u = 0$ в области D, принадлежащих пространству Соболева $[H^s(D)]^n$; поскольку оператор $\mathcal{L}_0$ эллиптичен, то $h^s(D) \subset [C^\infty(D)]^n$, если $\mu, \lambda \in C^\infty(\overline{D})$.

Основными результатами **главы 2** является следующие четыре теоремы.

Теорема 2.1.1. (см. [81]) *Пусть коэффициенты μ, λ лежат в классе $C^\infty(X)$ в некоторой окрестности X компакта $\overline{D}$ в $\mathbb{R}^n$, а $\rho \equiv 1$. Тогда:*

1) пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ непрерывно вложено в $[L^2(D)]^n$, если выполнено

$$\rho^2 a_{0,0} \geq q I_n \text{ в } \overline{D} \setminus Y; \tag{0.10}$$

2) пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ непрерывно вложено в $[H^{1/2-\varepsilon}(D)]^n$ для любого $\varepsilon > 0$, если

$$b_1^{-1} b_{0,0} \geq c_1 I_n \text{ на } \partial D \setminus S \text{ с некоторой постоянной } c_1 > 0. \tag{0.11}$$

Более того, если $\partial D \in C^2$, то из (0.11) следует, что пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ непрерывно вложено в пространство $[H^{1/2}(D)]^n$.

Для скалярных сильно эллиптических операторов с комплекснозначными коэффициентами подобная теорема была получена в [30].

Из теоремы 2.1.1 нетрудно извлечь следующее утверждение.

Следствие 2.1.1. (см. [81]) *Пусть μ, $\lambda \in C^\infty(X)$ и выполнены (0.10), (0.11). Тогда пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ непрерывно вложено в $[H^{1/2-\varepsilon,\gamma}(D)]^n$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Если $n = 2$ и $\mu = 1 = -\lambda$, то оператор $\mathfrak{D}^{(3)}$ можно отождествить с оператором Коши-Римана в $\mathbb{C}$. Это означает, что, вообще говоря, в условиях теоремы 2.1.1, при $S = \emptyset$ и $\partial D \in C^2$ непрерывное вложение $H^{+}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D) \to [H^{1/2}(D)]^n$ является не улучшаемым по шкале пространств Соболева-Слободецкого (см. [57, примеры 1, 2] в случае, когда область D – единичный шар).

Перейдем к рассмотрению обобщенной постановки задачи Штурма-Лиувилля для операторов типа Ламе. С этой целью, предположим, что $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ непрерывно вложено в $H^{0,\gamma}(D)$ и обозначим через пространство $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ пополнение $[H^1(D,S)]^n$ по соответствующей норме

$$\|u\|_{-,\gamma,\mathfrak{D}} = \sup_{\substack{v \in [H^1(D,S)]^n \\ v \neq 0}} \frac{|(v,u)_{[H^{0,\gamma}(D)]^n}|}{\|v\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}}}.$$

Как известно (см., например, [58]), пространство $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ топологически изоморфно сопряженному $(H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D))^*$. Соответствующее спаривание, определяющее изоморфизм, обозначим через $\langle v, u \rangle_\gamma$.

Предположим теперь, что

$$\left| \left(b_1^{-1}(\delta b_0 + \partial_\tau)u, v\right)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^n} + \left(a_1\, I_n \otimes \nabla_n u + \delta a_0\, u, v\right)_{[L^2(D)]^n} \right| \leq c\, \|u\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}} \|v\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}} \tag{0.12}$$

для всех $u, v \in [H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D, S \cup Y)]^n$, где c – некоторая положительная постоянная, независящая от u и v. При выполнении условия (0.12), для каждого фиксированного элемента

$u \in H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ эрмитова форма

$$Q(u,v) = (\mathfrak{D}u, \mathfrak{D}v)_{[H^{0,\gamma}(D)]^k} + \big(b_1^{-1} b_0 u, v\big)_{[H^{0,\gamma}(\partial D\setminus S)]^n} +$$

$$+\Big(a_1\ I_n \otimes \nabla_n u - 2\gamma\rho^{-1}(\mathfrak{D}\rho)^*\mathfrak{D}u + a_0 u, v\Big)_{[H^{0,\gamma}(D)]^k}$$

определяет непрерывный линейный функционал f на пространстве $H^{+,\gamma}(D)$ с помощью равенства

$$f(v) := \overline{Q(u,v)} \text{ для всех } v \in H^{+,\gamma}(D).$$

Тогда найдется единственный элемент $H^{-,\gamma}(D)$, который мы обозначим через Lu, такой, что $f(v) = \langle v, Lu\rangle_\gamma$ для всех $v \in H^{+,\gamma}(D)$. Таким образом, мы определили линейный оператор

$$L : H^{+,\gamma}(D) \to H^{-,\gamma}(D).$$

Как следует из (0.12) оператор L ограничен. Ограниченный линейный оператор L_0, определенный этим же способом с помощью эрмитовой формы $(\cdot,\cdot)_{+,\gamma}$:

$$(v,u)_{+,\gamma,\mathfrak{D}} = \langle v, L_0 u\rangle_\gamma, \quad L_0 : H^{+,\gamma}(D) \to H^{-,\gamma}(D), \tag{0.13}$$

для всех $u, v \in H^{+,\gamma}(D)$, соответствует случаю $a_1 = \rho^{-1}\mathfrak{D}^*\rho$, $a_0 = a_{0,0}$ и $b_0 = b_{0,0}$.

Теперь мы можем сформулировать задачу (0.9) в обобщенной постановке в весовых пространствах: *по заданному элементу $f \in H^{-,\gamma}(D)$, найти такой $u \in H^{+,\gamma}(D)$, что*

$$\overline{Q(u,v)} = \langle v, f\rangle_\gamma \text{ для всех } v \in H^{+,\gamma}(D). \tag{0.14}$$

Исследуем задачу (0.14) стандартными методами функционального анализа, аналогично коэрцитивному случаю. В коэрцитивном случае (соответствующий операторам $\mathfrak{D}^{(1)}$, $\mathfrak{D}^{(2)}$) мы можем расширить класс возмущений. С этой целью зафиксируем некоторую полную систему $\{t_j\}$ среди касательных векторов (с ограниченными интегрируемыми компонентами). Это могут быть, например, вектора

$$\vec{e}_j\nu_i - \vec{e}_i\nu_j, \quad i > j.$$

Тогда $\partial_\tau = \sum_{i>l} d_{i,l}(x)\partial_{t_{i,l}}$ с некоторыми $(n\times n)$-матрицами $d_{i,l}(x)$.

Произведем следующее расщепление

$$\delta b_0 = \delta b_0^{(s)} + \delta b_0^{(c)},\ \ \delta a_0 = \delta a_0^{(s)} + \delta a_0^{(c)},\ \ a_1\nabla_n \otimes I_n = 2\gamma\rho^{-1}(\mathfrak{D}\rho)^*\mathfrak{D} + (a_1^{(s)} + a_1^{(c)})\nabla_n \otimes I_n,$$

так, чтобы $\delta b_0^{(c)}$, $\delta a_0^{(c)}$ и $a_1^{(c)}$ индуцировали компактные возмущения оператора $L_{\mathfrak{D}}$, а слагаемые $\delta b_0^{(s)}$, $\delta a_0^{(s)}$ и $a_1^{(s)}$ – достаточно маленькие.

Теорема 2.1.2. (см. [81]) *Пусть $j = 1$ или $j = 2$. Допустим $d_{i,l} \in [C^{0,1}(\partial D\setminus S)]^n$, $i > l$. Кроме того, пусть выполнено неравенство (0.10) или $\rho \equiv 1$. Если существует $\varepsilon > 0$*

такое, что $\rho^{2-\varepsilon}\delta a_0^{(c)} \in [L^\infty(D)]^n$, $\rho^{1-\varepsilon} a_1^{(c)} \in [L^\infty(D)]^n$, $\rho^{1-\varepsilon}\delta b_0^{(c)} \in [L^\infty(\partial D \setminus S)]^n$, *и*

$$|(b_1^{-1}(\delta b_0^{(s)} + \partial_\tau)u, v)_{[L^2(\partial D\setminus S)]^n} + (a_1^{(s)}\ I_n \otimes \nabla_n u + \delta a_0^{(s)}\, u, v)_{[L^2(D)]^n}| \leq M\, \|u\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}} \|v\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}}$$

для всех $u, v \in [H^1(D, S \cup Y)]^n$ *с некоторой постоянной* $0 < M < 1$, *независящей от* u *и* v, *то задача (0.9) фредгольмова.*

Для оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$, порождающего некоэрцитивную эрмитову форму, мы произведем расщепление немного по-другому:

$$\tilde{a}_1 = 2\gamma\rho^{-1}(\mathfrak{D}^{(3)}\rho)^* + \tilde{a}_1^{(s)} + \tilde{a}_1^{(c)}.$$

Теорема 2.1.3. (см. [81]) *Пусть* $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(3)}$, *справедливо (0.11),* λ, μ *бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности* $\overline{D}$, $\tau = 0$, $\delta b_0^{(c)} = 0$. *Кроме того, пусть выполнено неравенство (0.10) или* $\rho \equiv 1$. *Если существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что реализуются вложения* $\rho^{2-\varepsilon}\delta a_0^{(c)} \in [L^\infty(D)]^n$, $\rho^{1-\varepsilon} a_1^{(c)} \in [L^\infty(D)]^n$, *и*

$$|(b_1^{-1}\delta b_0^{(s)} u, v)_{[L^2(\partial D\setminus S)]^n} + (\tilde{a}_1^{(s)}\mathfrak{D}^{(3)} u + \delta a_0^{(s)}\, u, v)_{[L^2(D)]^n}| \leq \tilde{M} \|u\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(3)}} \|v\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(3)}}$$

для всех $u, v \in [H^1(D, S \cup Y)]^n$ *с некоторой постоянной* $0 < \tilde{M} < 1$, *независящей от* u *и* v, *то задача (0.14) фредгольмова.*

В **параграфе 2.2** обсуждаются спектральные свойства для трех краевых задачи Штурма-Лиувилля для оператора Ламе с граничными условиями робеновского типа в ограниченной липшицевой области D. С этой целью рассмотрим на пространстве $H_{\mathfrak{D}}^{-,\gamma}(D)$ полуторалинейную форму

$$(u, v)_{-,\gamma,\mathfrak{D}} := \langle L_0^{-1} u, v\rangle_\gamma \text{ для } u, v \in H_{\mathfrak{D}}^{-,\gamma}(D),$$

для которой $\sqrt{(u, u)_{-,\gamma,\mathfrak{D}}} = \|u\|_{-,\gamma,\mathfrak{D}}$ для всех $u \in H^{-,\gamma}(D)$. Отныне мы наделяем пространство $H_{\mathfrak{D}}^{-,\gamma}(D)$ скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{-,\gamma,\mathfrak{D}}$.

Всюду далее $\iota_\gamma : H_{\mathfrak{D}}^{+,\gamma}(D) \to H^{0,\gamma}(D)$ есть оператор естественного вложения, тогда $\iota'_\gamma : H^{0,\gamma}(D) \to H_{\mathfrak{D}}^{-,\gamma}(D)$

Теорема 2.2.1. (см. [81]) *Если* $H_{\mathfrak{D}}^{+,\gamma}(D)$ *непрерывно вложено в* $H^{0,\gamma}(D)$, *то обратный оператор* L_0^{-1} *к оператору (0.13) индуцирует положительные самосопряженные операторы*

$$\iota'_\gamma \iota_\gamma\, L_0^{-1} : H_{\mathfrak{D}}^{-,\gamma}(D) \to H_{\mathfrak{D}}^{-,\gamma}(D),\ \iota_\gamma\, L_0^{-1}\, \iota'_\gamma : H^{0,\gamma}(D) \to H^{0,\gamma}(D),$$

$$L_0^{-1}\, \iota'_\gamma \iota_\gamma : H_{\mathfrak{D}}^{+,\gamma}(D) \to H_{\mathfrak{D}}^{+,\gamma}(D),$$

которые имеют одинаковые системы собственных векторов и собственных значений. Более того, если $H_{\mathfrak{D}}^{+,\gamma}(D)$ *непрерывно вложено в* $[H^{s,\gamma}(D)]^n$ *при* $0 < s \leq 1$, *то эти операторы компактны, порядки их конечны и равны* $2s$, *а собственные век-*

тора образуют ортогональные базисы в пространствах $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$, $H^{0,\gamma}(D)$ и $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$. Нетрудно показать, что оператор $L : H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ индуцирует замкнутый плотно определенный линейный оператор T, действующий на пространстве $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$, т.е. $T : H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ с областью определения $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$. При этом оператору L_0 соответствует симметрический оператор $T_0 : H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$, имеющий те же собственные вектора, что и оператор $\iota'_\gamma \iota_\gamma L_0^{-1} : H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$. Как известно, несамосопряженные операторы в бесконечномерных пространствах могут вовсе не иметь собственных векторов для построения базиса. Поэтому важное значение в построении решений краевых задач имеет понятие корневого вектора (см., например, [9]).

Следствие 2.2.1. (см. [81]) *В условиях теоремы 2.1.2, если $M < \sin \pi/n$, то система корневых функций замкнутого оператора T полна в пространствах $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D)$, $H^{0,\gamma}(D)$ и $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D), j = 1, 2$. Более того, для любого $\delta > 0$ все собственные значения оператора T (кроме их конечного числа) принадлежат углу $|\arg \lambda| < \delta + \arcsin M$ в $\mathbb{C}$.*

Следствие 2.2.2. (см. [81]) *В условиях теоремы 2.1.3, если $\tilde{M} < \sin \pi/2n$, то система корневых функций замкнутого оператора T полна в пространствах $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$, $H^{0,\gamma}(D)$ и $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ и, для любого $\delta > 0$ все собственные значения оператора T (кроме их конечного числа) принадлежат углу $|\arg \lambda| < \delta + \arcsin \tilde{M}$ в $\mathbb{C}$.*

Для операторов $\mathfrak{D}^{(1)}$ и $\mathfrak{D}^{(2)}$ все вышеперечисленные результаты в стандартных пространствах Соболева следуют из общей спектральной теории эллиптических краевых задач, см. [36], [1], [2] и многие другие работы. Для оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$ такого типа результаты в стандартных пространствах Соболева вытекают из теорем §1.3. Для весовых пространств нам такие теоремы применительно к операторам $\mathfrak{D}^{(j)}$ неизвестны.

Наконец, в завершающем **параграфе 2.3** приводится несколько содержательных примеров.

В **3 главе** будем рассматривать краевую задачу с граничными условиями типа Заремба для оператора Лапласа в единичном круге на комплексной плоскости. В этой главе получен критерий, которому должно удовлетворять комплексное число, чтобы быть собственным значением для этой задачи. С этой целью мы воспользуемся теоремой Эренпрайса-Мальгранжа-Паламодова об экспоненциальном представлении решений уравнений с постоянными коэффициентами. Итак, **параграф 3.1** посвящен постановке краевой задачи типа Заремба для единичного круга. Более точно, пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость с координатами $z = x_1 + \sqrt{-1}x_2, \bar{z} = x_1 - \sqrt{-1}x_2$. Пусть, далее, $\mathcal{D}$ – это единичный диск в $\mathbb{C}$. Будем рассматривать комплекснозначные функции, определенные в диске $\mathcal{D}$ и в его замыкании $\overline{\mathcal{D}}$. Пусть S будет (относительно) открытым, связным подмножеством границы диска $\partial\mathcal{D}$ и пусть a_0, b_0, b_1, b_2 – суть неотрицательные числа со следующим условием условием: $b_1 + b_2 = 2$.

Рассмотрим следующую (вообще говоря, некоэрцитивную) задачу типа Заремба для оператора Лапласа с граничными условиями смешанного типа на диске $\mathcal{D}$.

Задача 3.1.1. *По заданному распределению f, определенному на диске $\mathcal{D}$, найти рас-*

пределение u, определенное в диске $\mathcal{D}$ такое, что

$$\begin{cases} -\Delta u + a_0 u &= f \quad \textit{в} \quad \mathcal{D}, \\ u &= 0 \quad \textit{на} \quad S, \\ Bu &= 0 \quad \textit{на} \quad \partial\mathcal{D} \setminus S, \end{cases}$$

где граничный оператор B определяется следующим образом

$$Bu = b_0 u + b_1 z \partial + b_2 \overline{z} \overline{\partial}.$$

Безусловно, случай $S = \partial\mathcal{D}$ соответствует задаче Дирихле для оператора Лапласа в $\mathcal{D}$. Более подробно, пусть $\bar{\partial}$ – это оператор Коши-Римана, т.е.

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\Big).$$

При решении данной задачи мы, как и ранее, будем использовать функционал $\|u\|_+$, который в этой главе будем рассматривать на пространстве $H^1(\mathcal{D})$:

$$\|u\|_+ = \Big(a_0\|u\|^2_{L^2(\mathcal{D})} + 2b_1\|\partial u\|^2_{L^2(\mathcal{D})} + 2b_2\|\overline{\partial} u\|^2_{L^2(\mathcal{D})} + b_0\|u\|^2_{L^2(\partial\mathcal{D}\setminus S)}\Big)^{1/2}.$$

Если функционал определяет норму на $H^1(\mathcal{D}, S)$, то через $H^+(\mathcal{D})$ обозначим пополнение $H^1(\mathcal{D}, S)$ по данной норме. Тогда $H^+(\mathcal{D})$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_+ = a_0(u, v)_{L^2(\mathcal{D})} + 2\, b_1(\partial u, \partial v)_{L^2(\mathcal{D})} + 2\, b_2(\overline{\partial} u, \overline{\partial} v)_{L^2(\mathcal{D})} + b_0(u, v)_{L^2(\partial\mathcal{D}\setminus S)}.$$

По определению, элементы пространства $H^+(\mathcal{D})$ имеют хорошо определенный след на границе $\partial\mathcal{D}$, принадлежащий пространству $L^2(\partial\mathcal{D})$; в частности, по эллиптической регулярности, функции из пространства $H^+(\mathcal{D})$ принадлежат также пространству $H^1_{loc}(\mathcal{D} \cup S)$ и равны нулю на S.

Предположим, что $H^+(\mathcal{D})$ непрерывно вложено в $L^2(\mathcal{D})$. Тогда, как и ранее, обозначим через $H^-(\mathcal{D})$ двойственное пространство к $H^+(\mathcal{D})$ и через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – спаривание, индуцированное скалярным произведением в $L^2(\mathcal{D})$.

Далее переформулируем задачу типа Зарембы для оператора Лапласа с граничными условиями смешанного типа в $\mathcal{D}$.

Задача 3.1.2. *По заданному распределению $f \in H^-(\mathcal{D})$, найти такую функцию $u \in H^+(\mathcal{D})$, что*

$$(u, v)_+ = \langle f, v \rangle \ \textit{для всех} \ v \in H^+(\mathcal{D}).$$

Тогда по теореме Рисса об общем виде непрерывных линейных функционалов в гильбертовых пространствах существует единственное решение $u \in H^+(\mathcal{D})$ задачи 3.1.2 для каждой $f \in H^-(\mathcal{D})$, "ортогональной" к нулевому пространству задачи в отношении спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$. По теореме единственности для задачи Коши для эллиптических систем нулевое пространство равно нулю, если S открыто и не пусто.

В **параграфе 3.2** для поиска собственных значений задачи 3.1.2 применяется метод Фурье.

Так как оператор Гельмгольца $(-\Delta + a_0 - \lambda)$ – эллиптический, то собственные функции задачи 3.1.2, если они существуют, принадлежат пространству $C^\infty(\mathcal{D}\cup S)$. Более того, в соответствии с теоремой Петровского, они будут также вещественно-аналитическими в диске $\mathcal{D}$. Результаты С. Б. Моррея и Л. Ниренберга [53] показывают, что решения поставленной задачи также аналитически продолжаются в окрестность компакта $K \subset S$. Однако, точки множества $\partial S \subset \partial\mathcal{D}$ могут быть особыми для собственных функций задачи 3.1.2.

Также в данном параграфе из задачи 3.1.2 вытекает обобщенная постановка: найти такой элемент $u \in H^+(\mathcal{D})$, что для всех элементов $v \in H^1(\mathcal{D}, S)$ верно следующее

$$2b_1(\partial u, \partial v)_{L^2(\mathcal{D})} + 2b_2(\overline{\partial} u, \overline{\partial} v)_{L^2(\mathcal{D})} + b_0(u,v)_{L^2(\partial\mathcal{D}\setminus S)} = (\lambda - a_0)(u,v)_{L^2(\mathcal{D})}. \tag{0.15}$$

В завершении параграфа рассмотрены два важных примера, объясняющие, почему собственные функции задачи 3.1.2, соответствующие собственному значению λ, в единичном круге естественно искать в полярных координатах в виде

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\sqrt{-1}p_k\varphi} \mathcal{J}_{p_k}(r\sqrt{\lambda - a_0}) \tag{0.16}$$

с некоторыми числами $p_k \in \mathbb{Z}$ и $c_k \in \mathbb{C}$, где $\mathcal{J}_p$ суть функции Бесселя.

В **параграфе 3.3** мы формализуем формулу (0.16). Более точно, рассмотрим (линейное) пространство формальных рядов

$$\mathfrak{C}(\partial\mathcal{D}) = \left\{ d = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \frac{d_q \zeta^q \, d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta},\ |\zeta| = 1 \right\},$$

где $\{d_q\}$ выбирается таким образом, чтобы следующий функционал был конечен

$$\|d\|_- = \sup_{\substack{v\in C(\partial\mathcal{D})\\ v\neq 0}} \frac{\left|\sum_{q\in\mathbb{Z}}(v,\zeta^q)_{L^2(\partial\mathcal{D})} d_q\right|}{\|v\|_{C(\partial\mathcal{D})}}.$$

Теорема 3.3.1. (см. [80]) *Любая собственная функция задачи 3.1.2 в диске $\mathcal{D}$ представима в следующем виде*

$$u(z) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} (z/|z|)^q \, \mathcal{J}_q(|z|\sqrt{\lambda})\, d_q$$

с коэффициентами $\{d_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющими $\|d\|_- < \infty$. Более того, если $S \neq \partial\mathcal{D}$ и $S \neq \emptyset$, то число ненулевых коэффициентов d_q в сумме будет бесконечным.

Пусть теперь

$$\varrho_{p,q} = \alpha_p^{(1)} \beta_{p,q}^{(2)} - \alpha_p^{(2)} \beta_{p,q}^{(1)},$$

$$\alpha_p^{(1)}(\lambda) = \pi(-1)^p \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}), \quad \alpha_p^{(2)}(\lambda) = \pi(-1)^p \Big(2(b_0 - pb_2)\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\, \mathcal{J}_{2p-1}(\sqrt{\lambda}) \Big),$$

$$\beta_{p,q}^{(1)}(\lambda) = \frac{2(-1)^q\, \mathcal{J}_{2q-1}(\sqrt{\lambda})}{2p+1-2q} = \frac{\beta_{q,q}^{(1)}(\lambda)}{2p+1-2q},$$

$$\beta_{p,q}^{(2)}(\lambda) = \Big(b_2 \mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda}) - b_1 \mathcal{J}_{2q-2}(\sqrt{\lambda}) \Big) \frac{(-1)^q}{2p+1-2q} = \frac{\beta_{q,q}^{(2)}(\lambda)}{2p+1-2q}.$$

Главным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.3.2. (см. [80]) *Пусть $S \neq \emptyset$. Число $\lambda > 0$ будет собственным значением задачи 3.1.2 при $a_0 = 0$ тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор D с коэффициентами $\{d_q\}$ с конечной нормой $\|d\|_-$, такой, что его ненулевая нечетная часть*

$$D_{\text{odd}}^T = (d_{-1},\ d_1\ d_{-3},\ \ldots d_{2p-1},\ d_{-2p-1},\ \ldots),\ p \in \mathbb{N},$$

удовлетворяет

$$\tilde{A}_{\text{odd}} D_{\text{odd}}(\lambda) = 0,$$

где

$$\tilde{A}_{\text{odd}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \varrho_{0,0}(\lambda) & \varrho_{0,1}(\lambda) & \varrho_{0,-1}(\lambda) & \ldots & \varrho_{0,p}(\lambda) & \varrho_{0,-p}(\lambda) & \ldots \\ \varrho_{1,0}(\lambda) & \varrho_{1,1}(\lambda) & \varrho_{1,-1}(\lambda) & \ldots & \varrho_{1,p}(\lambda) & \varrho_{1,-p}(\lambda) & \ldots \\ \varrho_{-1,0}(\lambda) & \varrho_{-1,1}(\lambda) & \varrho_{-1,-1}(\lambda) & \ldots & \varrho_{-1,p}(\lambda) & \varrho_{-1,-p}(\lambda) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varrho_{p,0}(\lambda) & \varrho_{p,1}(\lambda) & \varrho_{p,-1}(\lambda) & \ldots & \varrho_{p,p}(\lambda) & \varrho_{p,-p}(\lambda) & \ldots \\ \varrho_{-p,0}(\lambda) & \varrho_{-p,1}(\lambda) & \varrho_{-p,-1}(\lambda) & \ldots & \varrho_{-p,p}(\lambda) & \varrho_{-p,-p}(\lambda) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Кроме того, соответствующая мера $d\mu \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$ не имеет конечное число ненулевых коэффициентов d_q.

С другой стороны, теорема Зигеля об общих нулях функций Бесселя задает некоторые ограничения на одновременное обращения в нуль детерминант $\varrho_{p,q}(\lambda)$.

Указаны и некоторые усиления теоремы 3.3.2.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А.А.Шлапунову за постановку и обсуждение задач и за неоценимую поддержку на всем протяжении подготовки диссертации.

Глава 1

Эрмитовы формы и спектральные свойства смешанных задач

В данном разделе диссертации приведены основные обозначения базовые понятия и известные утверждения, важные для доказательства основных результатов в последующих параграфах (см, например, [10], [17], [33]).

1.1 Функциональные пространства и операторы

Пусть $\mathbb{R}^n$ обозначает n-мерное евклидово пространство с координатами $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Далее, под $\mathbb{C}^n$ будем понимать n-мерное комплексное пространство с координатами $z = (z_1, \ldots, z_n)$, где $z_i = x_i + \sqrt{-1}x_{n+i}$; как обычно, положим $\bar{z}_j = x_j - \sqrt{-1}x_{j+n}$.

Для случая $n = 1$ пространство $\mathbb{C}$ будем рассматривать как комплексную плоскость с координатой z.

Как обычно, областью в $\mathbb{R}^n$ будем называть открытое связное множество. При решении краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных важную роль могут играть свойства границы области.

Напомним, что функция f на некотором множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ называется липшицевой функцией, если существует некоторая постоянная $c > 0$ такая, что для любых $x, y \in M$ выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$.

Определение 1.1.1. *Поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$ называется липшицевой, если она локально представима в виде графика липшицевой функции (отображения). Более точно, для всякой точки $p \in S$ найдется окрестность U для p в $\mathbb{R}^n$ такая, что, возможно после вращения, пересечение $S \bigcap U$ задается как $S \bigcap U = \{(x', x_n) \in U : x_n = f(x')\}$, где под $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ понимается некоторая липшицева функция. В частности, почти для всех точек S существует касательная гиперплоскость.*

Определение 1.1.2. *Липшицевой областью называется область, граница у которой является липшицевой поверхностью и для всякой точки $p \in S$ найдется окрестность U для p в $\mathbb{R}^n$ такая, что, возможно после вращения, $D \bigcap U = \{(x', x_n) \in U : x_n > f(x')\}$, где $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ – некоторая липшицева функция.*

Если область D ограничена, то ее граница есть компакт. Выбрав конечное число шаров $\{U_\nu\}$, покрывающих ∂D, постоянная Липшица для липшицевой области есть наименьшее L, из постоянных Липшица для каждого из шаров U_ν. Для любой липшицевой области на самом деле существует глобальная липшицева определяющая функция g, т.е. функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяющая $g < 0$ в D, $g > 0$ вне $\bar{D}$, и $c_1 < |g'| < c_2$ почти всюду на ∂D, где c_1, c_2 – положительные постоянные (здесь g' обозначает градиент g). Геометрическая интерпретация этого описания состоит в том, что D и $\mathbb{R}^n \setminus D$ в точности расположены локально по одну сторону от ∂D. Так как липшицева функция дифференцируема почти всюду, а ее производная ограничена, граница ∂D почти всюду обладает касательной плоскостью и нормальным вектором.

Пусть всюду далее в работе (если не оговорено иначе) D – ограниченная область с липшицевой границей ∂D.

Перейдем к введению пространств, которые используется в этой работе. Мы будем рассматривать комплекснозначные функции, определенные в области D и на ее замыкании $\overline{D}$.

Через $C(M)$ будем обозначать пространство всех заданных на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ непрерывных функций. Пространство всех липшицевых функций на множестве M обозначим через $C^{0,1}(M)$.

Пусть $s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда через $C^s(D)$ обозначим пространство s раз непрерывно дифференцируемых функций в области D. Далее, $C^\infty(D)$ обозначает пространство определенных в области D функций, имеющих производные всех порядков, причем непрерывные. Через $C_0^\infty(D)$ обозначим пространство гладких функций с компактным носителем в D. При этом под $C^s(\overline{D})$, $C^s(\partial D)$ будем понимать обычные пространства функций гладкости s, соответственно, на замыкании области $\overline{D}$ и на ее границе ∂D (естественно, последнее возможно только если поверхность ∂D является достаточно гладкой). Наконец, пусть $M \subset \overline{D}$, тогда через $C^s(\overline{D}, \overline{M})$ обозначим множество s раз непрерывно дифференцируемых функций в $\overline{D}$, каждая из которых исчезает в некоторой (относительной) окрестности множества $\overline{M}$ в $\overline{D}$.

Далее, обозначим через $L^p(D)$ – стандартное пространство Лебега, т.е. пространство измеримых функций в области D, таких, что их p-я степень интегрируема по Лебегу, $1 \leq p < \infty$. Хорошо известно, что это пространство Банаха с нормой

$$\|f\|_{L^p(D)} = \left(\int\limits_D |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Как обычно, пространство Лебега $L^\infty(D)$ – это множество всех измеримых функций на D, которые существенно ограниченны в D. Это банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{L^\infty(D)} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \{c \geq 0 : |f| \leq c \text{ почти всюду}\}.$$

Через $H^k(D)$, $k \in \mathbb{N}$, будем обозначать пространство Соболева (см., например, [28]), т.е. пространство, состоящее из функций из пространства Лебега $L^2(D)$, имеющих обобщенные производные до порядка k включительно, которые принадлежат $L^2(D)$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением.

$$(u,v)_{H^k(D)} = \sum_{\alpha\le k} \int\limits_D \partial^\alpha u \partial^\alpha \overline{v}\, dx,$$

где $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}x_1 \ldots \partial^{\alpha_n}x_n}$ есть производная, соответствующая мультииндексу $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$. Далее, для некоторого множества $M \subset \overline{D}$ через $H^s(D,M)$ мы обозначаем замыкание $C^s(\overline{D},\overline{M})$ в пространстве $H^s(D)$. В частности, $H^s(D,\partial D) = H^s_0(D)$ есть замыкание пространства $C^\infty_0(D)$ в $H^s(D)$.

Для неотрицательных нецелых s обозначим через $H^s(D)$ пространства Соболева-Слободецкого, см., например, [52]. Более точно, в случае $0 < s < 1$ пространство $H^s(D)$ состоит из функций $f \in L^2(D)$ таких, что функционал

$$\|f\|_{H^s(D)} = \left(\|f\|^2_{L^2(D)} + \int_D \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \right)^{1/2}$$

(фактически, определяющий норму этого пространства) конечен.

Для нецелого $s > 1$ положим $s = [s] + \sigma$, где $[s]$ – целая часть s. Тогда $H^s(D)$ состоит из элементов $H^{[s]}(D)$ таких, что $\partial^\alpha f \in H^\sigma(D)$ для всех мульти-индексов α, удовлетворяющих $|\alpha| = [s]$. Это пространство Банаха с нормой

$$\|f\|_{H^s(D)} = \left(\|f\|^2_{H^{[s]}(D)} + \sum_{|\alpha|=[s]} \|\partial^\alpha f\|^2_{H^\sigma(D)} \right)^{1/2}$$

и даже пространство Гильберта с очевидным скалярным произведением.

Пространства Соболева (-Слободецкого) $H^s(\mathbb{R}^n)$ можно эквивалентным образом определить с помощью преобразования Фурье. Как известно, для любой функции $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ определено преобразование Фурье

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\omega}\, dx,$$

причем $\hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда пространство Соболева (-Слободецкого) $H^s(\mathbb{R}^n)$ можно определить как множество

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1+|\omega|^2)^{s/2} \hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$$

с нормой $\|(1+|\omega|^2)^{s/2}\hat{f}(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

При изучении краевых задач, очень часто используют подходящие двойственности, которые ведут к понятию пространств Соболева-Слободецкого с отрицательной гладкостью. Наиболее известным утверждением, описывающим двойственность для полных евклидовых пространств (в частности, для пространств Гильберта), является теорема

Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала (см., например, в [10, стр. 132-133]).

Для введения пространств с отрицательной гладкостью мы воспользуемся следующей стандартной конструкцией. Пусть H^+ и H^0 – комплексные пространства Гильберта со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_+$ и $(\cdot,\cdot)_0$ соответственно. Предположим, что H^+ непрерывно вложено в H^0 и обозначим через $J_0 : H^+ \to H^0$ соответствующее вложение. Кроме того, предположим, что H^+ всюду плотно H^0. Тогда пусть H^- будет пополнение H^+ относительно нормы

$$\|u\|_- = \sup_{\substack{v\in H^+\\ v\neq 0}} \frac{|(v,u)_0|}{\|v\|_+}.$$

Если $u \in H^-$, то по определению пространства H^- существует последовательность функций $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ в пространстве H^+ такая, что $\|u_\nu - u\|_- \to 0$. Таким образом, для любого элемента $v \in H^+$ последовательность комплексных чисел $\{a_\nu = (v, u_\nu)_{H^0}\}$ является фундаментальной, поскольку последовательность $\{u_\nu\}$ фундаментальна в H^- и, более того,

$$|a_\nu - a_\mu| = |(v, u_\nu - u_\mu)_{H^0}| \le \|v\|_+ \|u_\nu - u_\mu\|_+.$$

Таким образом, существует предел

$$\langle v, u\rangle = \lim_{\nu\to\infty} (v, u_\nu)_{H^0(D)}. \tag{1.1}$$

Легко видеть, что этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{u_\nu\} \in H^+$ для элемента H^-.

Как известно, (см., например, [30, Лемма 2.3], [58, §3]) пространство $H^-(D)$ можно отождествить с пространством, двойственным к $H^+(D)$ относительно спаривания (1.1). Пространство $H^0(D)$ непрерывно вложено в $H^-(D)$; соответствующее вложение далее будем обозначать через ι' (см., например, [30, Лемма 2.2]). Более того, если вложение $J_0 : H^+ \to H^0$ компактно, то пространство H^0 компактно вложено в H^-.

В частности, естественно возникают два типа пространств Соболева-Слободецкого с отрицательной гладкостью. Первое пространство соответствуют случаю, когда $H^0 = L^2(D)$, $H^+ = H^s_0(D)$, $s > 0$; в этом случае пространство H^- будет обозначено через $\tilde H^{-s}(D)$. Второе пространство соответствует случаю, когда $H^0 = L^2(D)$, $H^+ = H^s(D)$, $s > 0$; в этом случае пространство H^- будет обозначено через $H^{-s}(D)$. По построению, существует непрерывное вложение $H^{-s}(D) \hookrightarrow \tilde H^{-s}(D)$, $s > 0$. В частности, пространства $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ и $\tilde H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ совпадают.

Весовые пространства обычно вводят при изучении граничных задач в областях с негладкой границей, чтобы искать решения с предписанным ростом (убыванием) вблизи особых точек границы. Кроме того, они естественным образом возникают при изучении смешанных краевых задач, так как вес удобно использовать для контроля поведения решений около множеств, где граничные условия меняют свой характер. По этой причине выберем какое-нибудь замкнутое множество Y, лежащее на ∂D. Чтобы контролировать рост функций около Y введем весовые пространства, ассоциированные с Y. Мы предположим, что $\rho \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \setminus Y)$, т.е. она есть C^1-гладкая функция в $\overline{D} \setminus Y$ такая, что $0 \le \rho(x) \le 1$, $x \in \overline{D}$, $\frac{\partial \rho}{\partial x_j} \in L^\infty(D)$, $1 \le j \le n$ и $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in Y$. В частности, при $Y = \emptyset$ и $\rho \equiv 1$ мы получаем обычные пространства Соболева-Слободецкого. Если $Y \neq \emptyset$, то в типичной ситуации для областей с кусочно-гладкой границей функция $\rho(x)$ зачастую вблизи особого множества $Y \subset \partial D$ представляет собой расстояние от точки x до Y, т.е., иными словами, множество Y можно определить следующим образом: $Y = \{x \in \overline{D} : \rho(x) = 0\}$.

Теперь для $\gamma \in \mathbb{R}$ через $H^{0,\gamma}(D)$ и $H^{1,\gamma}(D)$ будем обозначать весовые пространства Соболева, т.е. пополнения множеств $C^0(\overline{D}, Y)$ и $C^1(\overline{D}, Y)$ относительно норм, индуцированных скалярными произведениями

$$(u, v)_{H^{s,\gamma}(D)} = \sum_{|\alpha| \le s} \left(\rho^{|\alpha|-\gamma-s} \partial^\alpha u, \rho^{|\alpha|-\gamma-s} \partial^\alpha v \right)_{L^2(D)}, \ s = 0, 1,$$

соответственно (см. [31, Ч. 1] для общего случая, или [38, §1.7] для локализованной ситуации, когда вес дается в локальных координатах вблизи особенности).

Кроме того, для $0 < s < 1$ введем весовые пространства Соболева-Слободецкого как пополнение множества $C^1(\overline{D}, Y)$ по норме, индуцированной скалярным произведением

$$(u, v)_{H^{s,\gamma}(D)} = (u, v)_{H^{0,\gamma+s}(D)} + (\rho^{-\gamma} u, \rho^{-\gamma} v)_{H^s(D)}.$$

Похожие весовые пространства дробной гладкости были рассмотрены в [15] в локализованной ситуации для исследования параболических уравнений.

Аналогично стандартным пространствам Соболева-Слободецкого, весовое пространство $H^{-s,\gamma}(D)$, $0 < s \le 1$, будем трактовать как пространство H^- в случае, когда $H^0 = H^{0,\gamma}(D)$, $H^+ = H^{s,\gamma}(D)$. В частности, в случае, когда $Y = \emptyset$ и $\rho \equiv 1$ они соответствуют обычным пространствам Соболева-Слободецкого с отрицательной гладкостью.

Если Y расположен на $(n-2)$-мерной поверхности на ∂D, то через $H^{0,\gamma}(\partial D)$ обозначим весовое пространство Лебега, т.е. пополнение пространства $C^0(\partial D, Y)$ по следующей норме:

$$\|u\|_{H^{0,\gamma}(\partial D)} = \|\rho^{-\gamma} u\|_{L^2(\partial D)}.$$

Также при $0 < s < 1$ будем обозначать через $H^{s,\gamma}(\partial D)$ весовое пространство Соболева-Слободецкого на ∂D, иными словами – пополнение $C^{0,1}(\partial D, Y)$ по соответствующей норме, порожденной следующим скалярным произведением

$$(u, v)_{H^{s,\gamma}(\partial D)} = (u, v)_{H^{0,\gamma+s}(\partial D)} + (\rho^{-\gamma} u, \rho^{-\gamma} v)_{H^s(\partial D)}$$

при этом, здесь $H^s(\partial D)$ это обычное пространство Соболева-Слободецкого на ∂D, а $C^{0,1}(\partial D, Y)$ это множество $C^{0,1}(\partial D)$-функций, исчезающих в окрестности Y.

Для весовых пространств Соболева-Слободецкого справедливо следующее утверждение, аналогичное теоремам вложения для стандартных пространств Соболева.

Лемма 1.1.1. *Для каждого фиксированного $\gamma \in \mathbb{R}$ весовое пространство Соболева-Слободецкого $H^{s,\gamma}(D)$ компактно вложено в $H^{s',\gamma}(D)$, если $-1 \leq s' < s \leq 1$. Кроме того, при $1/2 < s \leq 1$ оператор следа*

$$tr : H^{s,\gamma}(D) \to H^{s-1/2,\gamma}(\partial D)$$

корректно определен и ограничен.

Доказательство проводится стандартным способом с помощью теоремы Реллиха-Кондрашова и теоремы о следах для пространств Соболева (см. [31, Ч. 2], [38, §1.7]).

Далее, для некоторого множества $M \subset \overline{D}$ через $H^{s,\gamma}(D, M)$ мы обозначаем замыкание $C^s(\overline{D}, \overline{M} \cup Y)$ в пространстве $H^{s,\gamma}(D)$.

Однако, чтобы весовые пространства Соболева вели себя вполне аналогично обычным пространствам Соболева, необходимо наложить одно естественное условие на весовую функцию ρ, которые оказывает влияние на геометрические свойства области D, см. [30, §6]. Именно, мы предполагаем, что существует окрестность U множества Y в $\overline{D}$ и гладкие функции $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ в U такие, что

$$|d\rho_1(x) \wedge \ldots \wedge d\rho_{n-1}(x) \wedge d\rho(x)| \geq c \tag{1.2}$$

для всех $x \in U \setminus Y$, где постоянная $c > 0$ не зависит от x. Дифференциальная форма (1.2) имеет вид $(\det J(x))dx$, где $J(x)$ есть матрица Якоби функциональной системы $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, \rho$. Поэтому условие (1.2) означает, что модуль якобиана $\det J$ отделен от нуля в $U \setminus Y$. Итак, ρ может быть включена в систему координат в U как новая сингулярная координата. По своей природе аналитическое условие (1.2) соответствует (возможной) сингулярности Y в ∂D, аналогичной трансверсальному пересечению (как конические точки или ребра, но не как точки возврата). Отметим однако, что поверхность ∂D может быть и гладкой, а особенность Y – искусственной.

Следующее замечание пригодится нам при изучении векторных решений краевых задач для линейных матричных дифференциальных операторов. Для пространства $\mathcal{X}$ обозначим через $\mathcal{X}^n$ декартово произведение n копий пространства $\mathcal{X}$. Если $\mathfrak{B}$ нормированное пространство, то мы снабдим $\mathcal{X}^n$ нормой

$$\|u\|_{\mathcal{X}^n} = \Big(\sum_{j=1}^{n} \|u_j\|^2_{\mathcal{X}} \Big)^{1/2}.$$

Таким образом, $\mathcal{X}^n$ евклидово пространство, если таковым является $\mathfrak{B}$. Кроме того, если $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – это банаховы пространства, то обозначим через $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ пространство линейных, непрерывных операторов, действующих из $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Y}$.

Далее, зафиксируем открытое (в индуцированной топологии) связное множество S с кусочно-гладкой границей ∂S на гиперповерхности ∂D.

Перейдем к описанию операторов, используемых в диссертации.

Пусть A – линейный матричный дифференциальный оператор порядка p на открытом множестве X в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$A(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\le p} A_\alpha(x)\partial^\alpha,$$

где $A_\alpha(x)$ суть некоторые функциональные $l\times k$-матрицы с бесконечно дифференцируемыми компонентами на X. Полным символом оператора A будем называть выражение

$$\sigma(A)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le p} A_\alpha(x)(i\,\xi)^\alpha,$$

где i есть мнимая единица, а $\xi\in\mathbb{C}^n$. Главный символ $\sigma_p(A)(x,\xi)$ оператора A отвечает за производные старшего порядка:

$$\sigma_p(A)(x,\xi) = i^p \sum_{|\alpha|=p} A_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Определение 1.1.3. *Оператор A называется эллиптическим на X, если $l=k$, а его главный символ есть невырожденная матрица для всех $x\in X$ и всех ненулевых векторов $\xi\in\mathbb{R}^n$. Оператор A называется переопределенным эллиптическим на X, если $l>k$, а ранг его главного символа максимален (т.е. равен k) для всех $x\in X$ и всех ненулевых векторов $\xi\in\mathbb{R}^n$. Оператор A называется сильно эллиптическим на X, если он эллиптичен, порядок его четен и*

$$\Re[w^*\sigma_p(A)(x,\xi)w] \ge 0$$

для всех троек $(x,\xi,w)\in X\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^k$, где $\Re[b]$ обозначает действительную часть комплексного числа b.

Определение 1.1.4. *Пусть X, Y - банаховы пространства. Ограниченный, линейный оператор T называют нетеровым, если его ядро* $\ker T := T^{-1}(0)$ *и коядро* $\operatorname{coker} T := Y/\mathrm{Im}Y$ *конечномерны. Целое число* $\operatorname{Ind} T := \dim\ker T - \dim\operatorname{coker} T$ *называется индексом оператора T.*

Определение 1.1.5. *Нетеров оператор нулевого индекса называют фредгольмовым.*

В диссертации мы будем рассматривать различные краевые задачи для эллиптических операторов, отождествляя их с операторными уравнениями в подходящих пространствах Банаха и Гильберта. В частности, спектральная теория таких задач фактически есть спектральная теория соответствующих операторов.

1.2 Теоремы вложения для функциональных пространств, ассоциированных с эрмитовыми формами

Следующим важным шагом будет доказательство теоремы вложения в шкалу пространств Соболева-Слободецкого для функциональных пространств, ассоциированных с одним классом эрмитовых форм (см. [79]). Для этого мы рассмотрим эрмитовы (коэрцитивные и нет) формы, построенные с помощью матричных дифференциальных операторов первого порядка с инъективным главным символом.

В этом параграфе будем работать с однородным дифференциальным $(l \times k)$-матричным оператором

$$A(x,\partial) = \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\partial_j.$$

первого порядка с инъективным символом в области $X \subset \mathbb{R}^n$, где $A_j(x)$ – $(l \times k)$-матрицы, компоненты которых суть комплекснозначные функции класса C^∞ на X, и

$$\operatorname{rang}\left(\sum_{j=1}^{n} A_j(x)\zeta_j\right) = k \text{ для всех } x \in X, \zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

От оператора A часто будем требовать выполнения свойства единственности в малом на X:

$$\begin{gathered}\textit{если } Au = 0 \textit{ в области } U \subset X \textit{ и } u \equiv 0 \textit{ на открытом подмножестве } V \subset U, \\ \textit{тогда } u \equiv 0 \textit{ в области } U.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Хорошо известно, что оно выполнено если, например, оператор A эллиптичный.

Пусть $D \Subset X$. На пространстве $[C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$ рассмотрим следующую эрмитову форму:

$$(u,v)_+ = (Au, Av)_{[L^2(D)]^l} + (a_{0,0}u, v)_{[L^2(D)]^k} + (b_{0,0}u, v)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^k},$$

где $a_{0,0}(x)$ – эрмитова неотрицательная функциональная $(k \times k)$-матрица в D, для компонент которой справедливо, что $a_{0,0}^{(p,q)} \in L^\infty(D)$, а $(k \times k)$-матрица $b_{0,0}$ есть эрмитова неотрицательная $(k \times k)$-матрица, элементы которой представляют собой измеримые, ограниченные функции на $\partial D \setminus S$. Обозначим через $H^+(D)$ пополнение пространства $[C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$ относительно нормы $\|\cdot\|_+$, индуцированной скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_+$ (в тех случаях, когда форма таковым является).

Пусть $A_j^*(x)$ – это сопряженная матрица для матрицы $A_j(x)$ и

$$A^* = -\sum_{j=1}^{n} \partial_j(A_j^*(x)\cdot)$$

будет формально сопряженным для A.

Если оператор A эллиптичен на X, то дифференциальный оператор второго порядка

$$A^*A = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (A_i^* A_j \partial_j)$$

сильно эллиптичен в X. Следовательно, форма $(\cdot,\cdot)_+$ связана со смешанной задачей для оператора A^*A.

Лемма 1.2.1. *Пусть выполнено условие единственности* (1.3)*. Эрмитова форма* $(\cdot,\cdot)_+$ *определяет скалярное произведение на пространстве* $[C^1(\overline{D},\overline{S})]^k$ *при выполнении одного из следующих условий:*

1) $a_{0,0} \geq c_0 I_k$ *в* $\overline{U}$ *с некоторой постоянной* $c_0 > 0$ *на непустом открытом множестве* $U \subset D$*;*

2) относительно открытое множество $S \subset \partial D$ *не пусто;*

3) $b_{0,0} \geq c_1 I_k$ *в* $\overline{V}$ *с некоторой постоянной* $c_1 > 0$ *на непустом относительно открытом множестве* $V \subset \partial D \setminus S$.

Кроме того, в этих случаях справедливо следующее:

а) пространство $[H^1(D,S)]^k$ *непрерывно вложено в* $H^+(D)$*, если компоненты матрицы* $b_{0,0}$ *принадлежат* $[L^\infty(\partial D \setminus S)]^k$*;*

б) вложение $H^+(D) \to [L^2(D)]^k$ *непрерывно; более того, в этом случае элементы из* $H^+(D)$ *принадлежат* $[H^1_{\mathrm{loc}}(D \cup S)]^k$ *и обращаются в нуль на* S.

Доказательство. Что касается утверждения о скалярном произведении, то нам нужно только проверить, что из равенства $(u,u)_+ = 0$ для $u \in [C^1(\overline{D},\overline{S})]^k$ следует $u = 0$ в D.

Из 1) и $a_{0,0}u = 0$ следует, что $u = 0$ на некотором множестве V. Тогда, из условия единственности в малом (1.3) для оператора A и равенства $Au = 0$ следует, что $u \equiv 0$.

Из условий 2) или 3) вытекает, что любой вектор u, лежащий в $[C^1(\overline{D},\overline{S})]^k$ и удовлетворяющий $(u,u)_+ = 0$, обращается в нуль на открытом непустом подмножестве $\Gamma \subset S \subset \partial D$. Поскольку u также удовлетворяет $Au = 0$ в D, то из теоремы единственности для задачи Коши для систем с инъективным символов

$$\begin{cases} Au &= 0 \quad \text{на} \quad D, \\ u &= 0 \quad \text{в} \quad \Gamma \subset S. \end{cases}$$

следует, что $u \equiv 0$ в D (см., например, [69, Предложение 4.3.3]).

Это и доказывает, что эрмитова форма $(\cdot,\cdot)_+$ определяет скалярное произведение. Далее, если элементы матрицы $b_{0,0}$ принадлежат пространству $L^\infty(\partial D \setminus S)$, то, по теореме о следах для пространств Соболева-Слободецкого (см., например, [27]), получаем, что для всех элементов $u \in [C^1(\overline{D},\overline{S})]^k$ выполнено следующее:

$$|(b_{0,0}u,u)_{[L^2(\partial D\setminus S)]^k}| \leq c\|u\|^2_{[L^2(\partial D\setminus S)]^k} \leq \tilde{c}\|u\|^2_{[H^1(D)]^k},$$

где положительные постоянная c не зависит от u. С другой стороны, так как компоненты матриц $a_{0,0}$ и A_i ($1 \leq i \leq n$) принадлежат пространству $L^\infty(D)$, то получаем, что для всех $u \in [C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$ выполнено

$$|(a_{0.0}u, u)_{[L^2(D)]^k}| \leq c_0 \|u\|^2_{[L^2(D)]^k} \leq c_0 \|u\|^2_{[H^1(D)]^k},$$

$$|(A_i A_j \partial_j u, \partial_i u)_{[L^2(D)]^k}| \leq c_{i,j} \|\nabla u\|^2_{[L^2(D)]^k} \leq c_{i,j} \|u\|^2_{[H^1(D)]^k},$$

где положительные постоянные c_0, $c_{i,j}$ не зависят от u. Т.е. пространство $[H^1(D,S)]^k$ непрерывно вложено в $H^+(D)$.

Если

$$a_{0,0} \geq cI \text{ в } \overline{D}, \tag{1.4}$$

справедливо, то для всех элементов $u \in [C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$ получаем, что

$$\|u\|^2_+ \geq (a_{0,0}u, u)_{[L^2(D)]^k} \geq c\|u\|^2_{[L^2(D)]^k},$$

т.е. $H^+(D)$ непрерывно вложено в $[L^2(D)]^k$.

Поскольку оператор A имеет инъективный главный символ, то решения $Au = 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями в D. Кроме того, в силу условия единственности в малом (1.3), оператор A инъективен на $[C_0^\infty(D)]^k$. Тогда, применяя усиленное неравенство Гординга для оператора A (см., например, [54, доказательство леммы 4.2]), получаем

$$\|u\|_{[H^1(D)]^k} \leq c\,\|Au\|_{[L^2(D)]^k} \text{ для всех } u \in [H^1_0(D)]^k, \tag{1.5}$$

с положительной постоянной c, независящей от u. Возьмем область $G \subset D$, такую, что $\overline{G} \subset D \cup S$ и зафиксируем функцию $\phi \in C^1(\overline{D})$, обращающуюся в нуль вне компактного множества $\overline{G}$, и при этом $\phi(x) = 1$ для всех $x \in \overline{G}$. Тогда $\phi u \in [C^1(\overline{D}, \partial D)]^k$ для любых элементов $u \in [C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$ и, в соответствии с (1.5), получаем:

$$\|u\|^2_{[H^1(G)]^k} \leq \|\phi u\|^2_{[H^1(D)]^k} \leq c\|A(\phi u)\|^2_{[L^2(D)]^l} \tag{1.6}$$

для всех $u \in [C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$, с постоянной c, не зависящей от u.

Наконец из того, что (1.4) выполнено, получим

$$\|A(\phi u)\|^2_{[L^2(D)]^l} \leq 2\|\phi A u\|^2_{[L^2(D)]^l} + 2\|(A\phi)u\|^2_{[L^2(D)]^l} \leq c\|u\|^2_+ \tag{1.7}$$

для всех $u \in [C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$, где постоянная c не зависит от u. В частности, неравенства (1.6), (1.7) означают, что любая последовательность $\{u_\nu\} \subset [C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$ сходится в пространстве $H^+(D)$, а также сходится в пространстве $[H^1(G)]^k$. Это доказывает утверждение b). $\square$

Как мы видели при доказательстве леммы 1.2.1, при $S = \partial D$ пространство $H^+(D)$

непрерывно вложено в пространство $[H^1(D,S)]^k$ (ср. [10]). Поэтому нас в первую очередь будет интересовать случай $S \neq \partial D$.

Полагаем, что вновь введенное пространство $H^+(D)$ будет непрерывно вложено в пространство $[L^2(D)]^k$, т.е.

$$\|u\|_{[L^2(D)]^k} \le c\,\|u\|_+$$

для всех $u \in [H^1(D,S)]^k$, где постоянная c не зависит от u. Из леммы 1.2.1 следует, что это условие не является слишком ограничительным.

Определение 1.2.1. *Эрмитову форму $(\cdot,\cdot)_+$ будем называть коэрцитивной на некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{Y}$, если найдутся такие положительные постоянные c_1 c_2, что*

$$c_1\|u\|_{\mathcal{Y}} \le \|u\|_+ \le c_2\|u\|_{\mathcal{Y}} \text{ для всех } u \in \mathcal{Y}.$$

Таким образом, если эрмитова форма $(\cdot,\cdot)_+$ коэрцитивна на $[H^1(D,S)]^k$, то, в частности, пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $[H^1(D,S)]^k$.

Обозначим через ι оператор непрерывного вложения

$$\iota : H^+(D) \to [L^2(D)]^k. \tag{1.8}$$

Установим для данного раздела, что $H^+ = H^+(D)$, $H^0 = H^0(D) = [L^2(D)]^k$. Тогда под $H^- = H^-(D)$ мы будем понимать пополнение $[H^1(D,S)]^k$ по норме

$$\|u\|_- = \sup_{\substack{v\in H^+(D)\\ v\neq 0}} \frac{|(v,u)_{[L^2(D)]^k}|}{\|v\|_+}.$$

Как и выше, пространство $[L^2(D)]^k$ непрерывно вложено в $H^-(D)$; соответствующее вложение обозначим также через ι' (см., например, [30, Лемма 2.2]:

$$\iota' : [L^2(D)]^k \to H^-(D). \tag{1.9}$$

1.2.1 Теоремы о вложении для коэрцитивных форм

Для коэрцитивного случая следующие два утверждения, вероятно, хорошо известны (ср. [1], [2]).

Лемма 1.2.2. *Предположим, что выполнена оценка*

$$\overline{w}^*\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_i^* A_j(x)\,\zeta_i\zeta_j\right) w \ge \tilde{c}\,|w|^2|\zeta|^2$$

для всех $(x,w) \in \overline{D}\times(\mathbb{C}^n\setminus\{0\})$, $\zeta \in \overline{D}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, где $\tilde{c}$ – положительная постоянная, независящая от (x,w) и ζ. Тогда вложения

$$H^+(D) \to [H^1(D,S)]^k, \quad [H^{-1}(D)]^k \to H^-(D)$$

непрерывны, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) существует постоянная $c > 0$, что выполнено (1.4);

2) $\partial D \setminus S$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку в относительной топологии ∂D, выполнено (1.3) и

$$\|b_{0,0}\|_{[L^2(\partial D\setminus S)]^k} \geq c_1 \|u\|_{[L^2(\partial D\setminus S)]^k} \text{ для всех } u \in [H^1(\partial D, S)]^k; \tag{1.10}$$

3) S содержит непустое открытое (в относительно топологии ∂D) множество и выполнено (1.3).

Доказательство. Доказательство проводится стандартным способом, используя теорему о следах в пространстве Соболева и теорему Рейлиха (см. более подробно доказательство в [79, Лемма 2.2]) □

В частности, в условиях теоремы 1.2.2 эрмитова форма $(\cdot,\cdot)_+$ коэрцитивна, а вложение (1.8) компактно.

Лемма 1.2.3. *В предположении, что $S = \partial D$, следующие вложения непрерывны:*

$$H^+(D) \to [H^1(D, \partial D)]^k, \quad ([H^1(D, \partial D)]^k)' \to H^-(D).$$

В частности, эрмитова форма $(\cdot,\cdot)_+$ коэрцитивна, а вложение (1.8) компактно.

Доказательство. Доказательство хорошо известно (см., например, [8]). □

1.2.2 Одна теорема вложения для некоэрцитивных форм

Докажем теперь теорему вложения для пространства $H^+(D)$ при более слабых ограничениях на эрмитову форму, чем в леммах 1.2.2, 1.2.3.

Отметим, что из определения нормы $\|\cdot\|_+$ следует непрерывное вложение пространства $H^+(D)$ в пространство $[L^2(D)]^k$, если существует постоянная $c > 0$, что выполнено (1.4).

Теорема 1.2.1. *Предположим, что коэффициенты оператора A являются бесконечно гладкими в замыкании некоторой окрестности X и найдется постоянная $c > 0$ такая, что выполнено (1.10). Тогда пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство $[H^{1/2-\epsilon}(D)]^k$ с произвольным $\epsilon > 0$, если*

1. *либо существует такая постоянная $c_1 > 0$, что выполнено (1.4);*

2. *либо для всех $u \in [C_0^\infty(X)]^k$ справедливо неравенство*

$$(Au, Au)_{[L^2(X)]^l} \geq m \|u\|^2_{[L^2(X)]^k} \tag{1.11}$$

с постоянной $m > 0$, независящей от функции u.

Более того, если $\partial D \in C^2$, то в этом случае пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство $[H^{1/2}(D)]^k$.

Доказательство. Пусть $\partial X \in C^\infty$. Это предположение не слишком ограничительно, поскольку мы всегда можем найти окрестность компакта $\overline{D}$ с гладкой границей. Отметим, что для большинства из поставленных целей будет достаточно, чтобы ∂X была липшицевой поверхностью. Более того, уменьшая в случае необходимости X, мы можем предположить, что коэффициенты матрицы A_i непрерывны в $\overline{X}$.

Отметим, что оператор A^*A сильно эллиптичен на X. Поэтому при выполнении условия единственности в малом (1.3) из классического неравенства Гординга следует однозначная разрешимость задачи Дирихле для A^*A, а значит и существование функции Грина G для нее (см., например, [20], [58], [61, Теорема 2.26] или [65, Теорема 3.3]). В более общем случае из классического неравенства Гординга будет следовать существование параметрикса Ходжа G для A^*A в X (см., например, [20] или [58]). Для удобства, будем использовать формулировку этого утверждения из [61, Теорема 2.26] или [65, Теорема 3.3] для матричных эллиптических операторов на многообразиях с краем. Более точно, как и выше, определим пространство $[\tilde{H}^{-1}(X)]^k$ как двойственное пространство к $[H^1(X, \partial X)]^k$ относительно $[L^2(X)]^k$-спаривания. Ясно, что пространство $[H^{-1}(X)]^k$ непрерывно вложено в пространство $[\tilde{H}^{-1}(X)]^k$. Как обычно, в силу плотности пространства $[C^1(X, \partial X)]^k$ в пространстве $[H^1(X, \partial X)]^k$, оператор A^*A продолжается до непрерывного отображения из $[H^1(X, \partial X)]^k$ в $[\tilde{H}^{-1}(X)]^k$ с помощью эрмитовой формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} (A_i \partial_i u, A_j \partial_j v)_{[L^2(X)]^l} = (Au, Av)_{[L^2(X)]^l}, \quad u, v \in [H^1(X, \partial X)]^k. \tag{1.12}$$

В частности, форма (1.12) индуцирует обобщенную формулировку задачи Дирихле для оператора A^*A в X.

Пусть $\mathcal{H}(X) \subset [H^1(X, \partial X)]^k \cap [C^\infty(X)]^k$ обозначает нулевое пространство задачи Дирихле на X. В силу априорных оценок для эллиптических операторов, размерность $\mathcal{H}(X)$ конечна. Как следует из (1.12),

$$\mathcal{H}(X) = \{u \in [H^1(X, \partial X)]^k : Au = 0 \text{ в } X\}. \tag{1.13}$$

Если выполнено условие (1.3), то пространство $\mathcal{H}(X)$ будет тривиальным. В частности, это так если A_i – это аналитические функции. Однако, вообще говоря, пространство $\mathcal{H}(X)$ не всегда тривиально (см., например, [55]). В любом случае, существуют ограниченные линейные операторы

$$G : [\tilde{H}^{-1}(X)]^k \to [H^1(X, \partial X)]^k, \quad \mathcal{H} : [\tilde{H}^{-1}(X)]^k \to \mathcal{H}(X),$$

удовлетворяющие

$$GA^*A = I - \mathcal{H}, \quad A^*AG = I - \mathcal{H} \tag{1.14}$$

на $[H^1(X,\partial X)]^k$ и $[\tilde{H}^{-1}(X)]^k$ соответственно (см., например, [61, Теорема 2.26] или [65, Теорема 3.3]). На самом деле $\mathcal{H}$ есть $L^2(X)$- ортогональный проектор на $\mathcal{H}(X)$. Более того, $\mathcal{H}$ непрерывно отображает $[H^s(X)]^k$ на в $[C^\infty(\overline{X})]^k$ для всех $s \geq -1$.

Применяя теорему о следах для пространств Соболева (см., например, [28]), введем так называемый оператор Пуассона $P : [H^{1/2}(\partial X)]^k \to [H^1(X)]^k$, удовлетворяющий

$$P \circ t_1 + GA^* - \mathcal{H} = I,$$

где t_1 обозначает оператор следа $[H^1(X)]^k \to [H^{1/2}(\partial X)]^k$ (ср. с [61, Следствие 2.31] или [65, Лемма 4.3]). В частности, образ оператора P является $[L^2(X)]^k$-ортогональным к $\mathcal{H}(X)$. Если граница множества X является липшицевой поверхностью, то операторы Грина и Пуассона обладают адекватными свойствами регулярности. Более точно,

$$G : [\tilde{H}^{s-1}(X)]^k \to [H^{s+1}(X)]^k,\ \partial_j G : [\tilde{H}^{s-1}(X)]^k \to [H^s(X)]^k,$$
$$P : [H^{s+1/2}(\partial X)]^k \to [H^{s+1}(X)]^k$$

для всех $0 \leq s < 1/2$ (см., например, [2, § 12]). В частности, если ∂X является C^2-гладкой поверхностью, то следующие отображения непрерывны:

$$G : [L^2(X)]^k \to [H^2(X)]^k, \quad P : [H^{3/2}(\partial X)]^k \to [H^2(X)]^k.$$

Обозначим через $\nu_{A,\partial X}$ так называемую конормальную производную к ∂X относительно оператора A

$$\nu_{A,\partial X} = -\sum_{i=1}^{n} A_i^*(x)\nu_i(x)A \tag{1.15}$$

где $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ – единичная внешняя нормаль к ∂X в точке $x \in \partial X$. Если X – область с липшицевой границей, то нормаль $\nu(x)$ существует почти всюду на ∂X.

Лемма 1.2.4. *Пусть X – область с липшицевой границей. Если $\partial X \in C^2$, то оператор P непрерывно отображает $[L^2(\partial X)]^k$ в $[H^{1/2}(X)]^k$.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения подобно доказательству соответствующего утверждения для весовых пространств Соболева в [30, Лемма 7.7].

Более точно, в данном случае можно использовать известную теорему регулярности для задачи Дирихле в X. Выберем для $u \in [H^{-1/2}(\partial X)]^k$ последовательность $\{u_\nu\}$ в $[H^{1/2}(\partial X)]^k$, сходящуюся к u в $[H^{-1/2}(\partial X)]^k$. Интегрируя по частям, имеем

$$\|Pu_\nu\|_{[L^2(X)]^k} = \sup_{\substack{v \in [L^2(X)]^k \\ v \neq 0}} \frac{|(v, Pu_\nu)_{[L^2(X)]^k}|}{\|v\|_{[L^2(X)]^k}} =$$

$$= \sup_{\substack{v \in [L^2(X)]^k \\ v \neq 0}} \frac{|(A^*AGv + \mathcal{H}v, Pu_\nu)_{[L^2(X)]^k}|}{\|v\|_{[L^2(X)]^k}} = \sup_{\substack{v \in [L^2(X)]^k \\ v \neq 0}} \frac{|(A^*AGv, Pu_\nu)_{[L^2(X)]^k}|}{\|v\|_{[L^2(X)]^k}} \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{v\in[L^2(X)]^k\\ v\neq 0}} \frac{|(\nu_{A,\partial X}Gv, u_\nu)_{[L^2(\partial X)]^k}|}{\|v\|_{[L^2(X)]^k}} \leq \sup_{\substack{v\in[L^2(X)]^k\\ v\neq 0}} \frac{\|\nu_{A,\partial X}Gv\|_{[H^{\frac{1}{2}}(\partial X)]^k}\|u_\nu\|_{[H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)]^k}}{\|v\|_{[L^2(X)]^k}} \leq$$

$$\leq c\,\|u_\nu\|_{[H^{-\frac{1}{2}}(\partial X)]^k}$$

для всех ν, где постоянная c не зависит от ν. Поэтому последовательность $\{Pu_\nu\}$ сходится в $[L^2(X)]^k$, а интеграл Пуассона P индуцирует непрерывный линейный оператор $[H^{-1/2}(\partial X)]^k \to [L^2(X)]^k$. Теперь воспользуемся известными интерполяционными аргументами (см. [33], [52]). По интерполяции, интеграл Пуассона P есть ограниченный линейный оператор

$$P_\theta : [[H^{-1/2}(\partial X)]^k, [H^{1/2}(\partial X)]^k]_\theta \to [[L^2(X)]^k, [H^1(X)]^k]_\theta$$

для всех $0 < \theta < 1$, где $[H_0, H_1]_\theta$ обозначает интерполяционное пространство для пары $H_1 \hookrightarrow H_0$ пространств Гильберта (см., например, [33]). Как известно,

$$[[L^2(X)]^k, [H^1(X)]^k]_\theta = [H^\theta(X)]^k, \quad [[H^{-1/2}(\partial X)]^k, [H^{1/2}(\partial X)]^k]_\theta = [H^{1/2-\theta}(\partial X)]^k$$

(см., например [52, Ч. I, Теоремы 9.6 и 12.5]). Следовательно, выбрав $\theta = 1/2$, заключаем, что P ограниченный линейный оператор $[L^2(\partial X)]^k \to [H^{1/2}(X)]^k$, что и требовалось доказать. $\square$

Продолжим доказательство основной теоремы. Обозначим через e^+ оператор продолжения нулем из D на X, а через r^+ – сужение из X на область D. Очевидно, e^+ – ограниченный линейный оператор из $[L^2(D)]^k$ в $[L^2(X)]^k$, а r^+ – ограниченный линейный оператор из $[H^s(X)]^k$ в $[H^s(D)]^k$, для всех $s \in \mathbb{R}$.

Ясно, что $\mathcal{H} \equiv 0$ если справедливо (1.11) в D, т.е. в данном случае ортопроектор $\mathcal{H}$ будет тривиальным.

Если (1.11) не справедливо, то, согласно условию теоремы, $a_{0,0} \geq c_1 I$ в D с некоторой постоянной $c_1 > 0$, а значит, $H^+(D)$ непрерывно вложено в $[L^2(D)]^k$. Поэтому норма $\|\cdot\|_+$ не слабее, чем норма $\|\cdot\|_p$ на $[H^1(D,S)]^k$, заданная через L_2-проектор $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}(X)$:

$$\|u\|_p = \Big(\|Au\|^2_{[L_2(D)]^k} + \|u\|^2_{[L^2(\partial D)]^k} + \|\mathcal{H}e^+u\|^2_{[L^2(X)]^k}\Big)^{1/2}.$$

Поскольку коэффициенты матрицы $A_i(x)$ непрерывны вплоть до границы области D, из формулы Грина следует, что

$$\int_{\partial D} -\sum_{i=1}^n A_i^*(x)\nu_i(x)Au\overline{v}\,ds = \int_D \sum_{i,j=1}^n \big(A_i^*A_j\partial_j u\overline{\partial_i v} + \partial_i(A_i^*A_j\partial_j u)\overline{v}\big)\,dx \tag{1.16}$$

для всех $u \in [H^2(D)]^k$ и $v \in [H^1(D)]^k$.

Обозначим через

$$G_D : [\tilde{H}^{-1}(D)]^k \to [H^1(D, \partial D)]^k, \quad \mathcal{H}_D : [\tilde{H}^{-1}(D)]^k \to \mathcal{H}(D)$$

оператор Грина и проектор на нулевое пространство задачи Дирихле для A^*A в D, соответственно. Свойства G_D и $\mathcal{H}_D$ аналогичны свойствам операторов G и $\mathcal{H}$, рассмотренных выше для области X. Это позволяет нам ввести оператор Пуассона P_D.

Отметим, что $e^+h \in \mathcal{H}(X)$ для каждого $h \in \mathcal{H}(D)$, т.е. образ пространства $\mathcal{H}(D)$ при отображении e^+ можно рассматривать как замкнутое подпространство в $\mathcal{H}(X)$. В самом деле, по определению, $\mathcal{H}(D) \subset [H^1_0(D)]^k$, а значит, $e^+h \in [L^2(X)]^k$ для каждого $h \in \mathcal{H}(D)$. С другой стороны, поскольку коэффициенты эллиптического оператора A^*A являются гладкими, то $\mathcal{H}(D) \subset [C^\infty(D)]^k$. Так как $h \in [H^1_0(D)]^k$, то существует последовательность $\{g_\nu\} \subset [C^\infty(D)]^k$, аппроксимирующая h в норме пространства $[H^1(D)]^k$. Поэтому воспользовавшись равенством (1.13) для пространства $\mathcal{H}(D)$ вместо $\mathcal{H}(X)$, мы видим, что

$$(e^+h, A^*\varphi)_{[L^2(X)]^k} = \lim_{\nu\to\infty} (g_\nu, A^*\varphi)_{[L^2(D)]^k} = (Ah, \varphi)_{[L^2(D)]^k} = 0$$

для всех $\varphi \in [C^\infty(X)]^l$. Следовательно, $A(e^+h) = 0$ в смысле распределений в X и поэтому $A^*Ae^+h = 0$ в смысле распределений в X. В частности, $e^+h \in [C^\infty(X)]^k$ для каждого $h \in \mathcal{H}(D)$, поскольку A^*A эллиптичен, а его коэффициенты являются гладкими в X. Снова применяя (1.13), мы заключаем, что $e^+h \in \mathcal{H}(X)$. Теперь мы замечаем, что оба пространства $\mathcal{H}(X)$ и $\mathcal{H}(D)$ конечномерны. Следовательно, мы можем рассматривать их как пространства Банаха с нормами $\|\cdot\|_{[L^2(X)]^k}$ и $\|\cdot\|_{[L^2(D)]^k}$ соответственно. В частности, это означает, что $\|e^+h\|_{[L^2(X)]^k} = \|h\|_{[L^2(D)]^k}$, т.е. образ $\mathcal{H}(D)$ при отображении e^+ можно рассматривать как замкнутое подпространство в $\mathcal{H}(X)$, что и требовалось показать.

Выберем $[L^2(D)]^k$-ортонормированный базис $\{e_r\}$ в $\mathcal{H}(D)$. Тогда существует $[L^2(X)]^k$-ортонормированная система $\{f_l\}$ в $\mathcal{H}(X)$, такая, что $\{e^+(e_r)\} \cup \{f_l\}$ есть $[L^2(X)]^k$-ортонормированный базис в $\mathcal{H}(X)$. По построению, мы получаем

$$\mathcal{H}e^+u = \sum_r (u, e_r)_{[L^2(D)]^k} e^+(e_r) + \sum_l (e^+u, f_l)_{[L^2(X)]^k} f_l = e^+(\mathcal{H}_D u) + \sum_l (e^+u, f_l)_{[L^2(X)]^k} f_l,$$

откуда

$$\|\mathcal{H}e^+u\|^2_{[L^2(X)]^k} = \|\mathcal{H}_D u\|^2_{[L^2(D)]^k} + \sum_l |(e^+u, f_l)_{[L^2(X)]^k}|^2 \tag{1.17}$$

для всех $u \in [L^2(D)]^k$.

Комбинируя формулы (1.14), (1.16) и (1.17), с помощью простых вычислений получаем, что

$$\|u\|_p^2 \;\geq\; \sum_{i,j=1}^n (A_i^* A_j \partial_j G_D A^* A u, \partial_i G_D A^* A u)_{[L^2(\partial D)]^k} + $$
$$+ \;\sum_{i,j=1}^n (A_i^* A_j \partial_j P_D u, \partial_i P_D u)_{[L^2(D)]^k} + \|P_D u\|^2_{[L^2(\partial D)]^k} + \|\mathcal{H}_D u\|^2_{[L^2(D)]^k} \tag{1.18}$$

при $u \in [H^1(D,S)]^k$. Так как $\mathcal{H}_D$ есть проектор на конечномерное подпространство $\mathcal{H}(D)$, то

$$\|\mathcal{H}_D u\|_{[H^1(D)]^k} \leq c\,\|\mathcal{H}_D u\|_{[L^2(D)]^k} \tag{1.19}$$

для всех $u \in [H^1(D,S)]^k$, с постоянной c, независящей от u. С другой стороны, из неравенства Гординга следует, что для всех $u \in [H^1(D,S)]^k$

$$\|G_D A^* A u\|^2_{[H^1(D)]^k} \leq c \sum_{i,j=1}^n (A_i^* A_j \partial_j G_D A^* A u, \partial_i G_D A^* A u)_{[L^2(D)]^k}. \tag{1.20}$$

Применяя (1.14), (1.18), (1.19) и (1.20) мы видим, что любая последовательность $\{u_\nu\} \subset [H^1(D,S)]^k$, сходящаяся к функции u в пространстве $H^+(D,S)$, может быть представлена как

$$u_\nu = \mathcal{H}_D u_\nu + G_D A^* A u_\nu + P_D u_\nu, \tag{1.21}$$

где последовательности $\{\mathcal{H}_D u_\nu\}$ и $\{G_D A^* A u_\nu\}$ сходятся, соответственно, к элементам u_H и u_G в пространстве $[H^1(D,\partial D)]^k \subset [H^1(D,S)]^k$. Значит, последовательность $\{P_D u_\nu\}$ сходится к некоторому элементу u_P в $H^+(D,S)$, и

$$u = u_H + u_G + u_P = \mathcal{H}_D u + G_D A^* A u + P_D u, \tag{1.22}$$

где $P_D u$ – интеграл Пуассона от “следа” $u|_{\partial D} \in [L^2(\partial D)]^k$ для $u \in H^+(D,S)$. Итак, теорема вложения полностью определяется поведением элемента $u_P = P_D u$ на границе.

Если элемент $A^* A u \in [L^2(X)]^k$ и $u = 0$ на ∂X, то u принадлежит на самом деле $[H^2(X)]^k$. Следовательно, из априорных оценок, следует, что операторы G и $\mathcal{H}$ порождают ограниченные операторы

$$r^+ G e^+ : [L^2(D)]^k \to [H^2(D)]^k, \;\; r^+ \mathcal{H} e^+ : [L^2(D)]^k \to [H^2(D)]^k,$$

где операторы r^+ и e^+ определены выше.

Пусть $s \geq 0$. Ясно, что любой элемент $u \in [H^{-s}(D)]^k$ продолжается до элемента $U \in [H^{-s}(X)]^k$ с помощью равенства

$$\langle U, v\rangle_X = \langle u, v\rangle_D$$

для всех $v \in [H^s(X)]^k$. Так как U исчезает в $X \setminus \overline{D}$, то естественно обозначить его через e^+u. Линейный оператор $e^+ : [H^{-s}(D)]^k \to [H^{-s}(X)]^k$, определенный таким образом, ограничен при $s \geq 0$.

Носитель распределения e^+u сосредоточен в замыкании $\overline{D}$. Поэтому из свойства непрерывности псевдодифференциальных операторов на компактных замкнутых многообразиях следует, что операторы r^+Ge^+ и $r^+\mathcal{H}e^+$ продолжаются до линейных, ограниченных операторов

$$r^+Ge^+ : [H^{-1/2}(D)]^k \to [H^{3/2}(D)]^k, \quad r^+\mathcal{H}e^+ : [H^{-1/2}(D)]^k \to [H^2(D)]^k.$$

Поэтому операторы

$$\partial_j \left(r^+Ge^+\right) : [H^{\epsilon-1/2}(D)]^k \to [H^{1/2+\epsilon}(D)]^k, \quad \nu_{A,\partial X} \left(r^+Ge^+\right) : [H^{\epsilon-1/2}(D)]^k \to [H^{\epsilon}(\partial D)]^k \tag{1.23}$$

также ограничены благодаря теореме о следах для пространств Соболева в липшицевых областях. Отметим, что при $\epsilon = 0$ утверждение становится неверным, поскольку элементы пространства $[H^{1/2}(D)]^k$ могут не иметь следов на $\partial D \subset X$.

Из (1.16) и свойств непрерывности (1.23) для всех $u \in [H^1(D,S)]^k$ и $v \in [L^2(D)]^k$ вытекает

$$\begin{array}{rcl} (v,u)_{[L^2(D)]^k} & = & (\mathcal{H}(e^+v) + A^*AG(e^+v), u)_{[L^2(D)]^k} = (\mathcal{H}(e^+v), u)_{[L^2(D)]^k} \\ & & +(\nu_{A,\partial X}(r^+Ge^+)v, u)_{[L^2(\partial D)]^k} + \sum_{i,j=1}^n \int_D A_i^* A_j \partial_j G(e^+v)\overline{\partial_i u}\, dx \end{array} \tag{1.24}$$

Мы утверждаем, что норма $\|\cdot\|_p$ не слабее, чем норма $\|\cdot\|_{H^{[1/2-\epsilon}(D)]^k}$ на $[H^1(D,S)]^k$. В самом деле,

$$\begin{array}{c} \|u\|_{[H^{1/2-\epsilon}(D)]^k} = \sup_{\substack{v\in[H^{\epsilon-1/2}(D)]^k \\ v\neq 0}} \frac{|(v,u)_{[L^2(D)]^k}|}{\|v\|_{[H^{\epsilon-1/2}(D)]^k}} = \\ = \sup_{\substack{v\in[H^{\epsilon-1/2}(D)]^k \\ v\neq 0}} \frac{\lim\limits_{\nu\to\infty} |(v_\nu,u)_{[L^2(D)]^k}|}{\|v\|_{[H^{\epsilon-1/2}(D)]^k}} \end{array} \tag{1.25}$$

для всех $u \in [H^1(D,S)]^k$, где $\{v_\nu\}$ – какая-нибудь последовательность гладких функций в $\overline{D}$, аппроксимирующая v в пространстве $[H^{\epsilon-1/2}(D)]^k$. Из формулы (1.24) для u и $v = v_\nu$ выражение в правой части (1.25) равно

$$\left|(\mathcal{H}(e^+v), u)_{[L^2(D)]^k} + \sum_{i,j=1}^n \int_D A_i^* A_j \partial_j G(e^+v)\overline{\partial_i u}\, dx + (\nu_{A,\partial X}(r^+Ge^+)v, u)_{[L^2(\partial D)]^k}\right|.$$

Так как $\mathcal{H}$ – ортогональный проектор в $[L^2(X)]^k$, то

$$\begin{array}{c} |(\mathcal{H}(e^+v), u)_{[L^2(D)]^k} = |(\mathcal{H}(e^+v), e^+u)_{[L^2(X)]^k}| = |(\mathcal{H}(e^+v), \mathcal{H}(e^+u))_{[L^2(X)]^k}| \leq \\ \leq c\,\|v\|_{H^{\epsilon-1/2}(D)}\,\|\mathcal{H}(e^+u)\|_{[L^2(X)]^k}, \end{array}$$

для всех $u \in [H^1(D,S)]^k$ и $v \in [H^{\epsilon-1/2}(D)]^k$ и

$$\begin{aligned} |(\nu_{A,\partial X}(r^+Ge^+)v,u)_{[L^2(\partial D)]^k}| \le \|\nu_{A,\partial X}(r^+Ge^+)v\|_{[H^\epsilon(D)]^k}\|u\|_{[H^{-\epsilon}(\partial D)]^k} \le \\ \le c\,\|v\|_{[H^{\epsilon-1/2}(D)]^k}\,\|u\|_{[H^{-\epsilon}(\partial D)]^k}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

где последнее неравенство следует из (1.23). Здесь c означает постоянную, независящую от u и v, и, возможно, принимающую в разных частях формулы различные значения.

Из обобщенного неравенства Коши следует, что

$$\Big|\sum_{i,j=1}^n A_i^*A_j(x)\overline{z}_i z_j\Big|^2 \le \Big(\sum_{i,j=1}^n A_i^*A_j(x)\overline{z}_i z_j\Big)\Big(\sum_{i,j=1}^n A_i^*A_j(x)\overline{\zeta}_i\zeta_j\Big) \tag{1.27}$$

для всех $z,\zeta \in \mathbb{C}^n$. Применение неравенства (1.27) дает

$$\Big|\sum_{i,j=1}^n \int_D A_i^*A_j\partial_jG(e^+v)\overline{\partial_i u}\,dx\Big| \le c\,\Big(\sum_{i,j=1}^n \int_D A_i^*A_j\partial_j u\overline{\partial_i u}\,dx\Big)^{1/2}\|v\|_{[H^{\epsilon-1/2}(D)]^k} \tag{1.28}$$

с постоянной c, независящей от u и v.

С учетом неравенств (1.25), (1.26) и (1.28) мы получаем, что найдутся положительные постоянные c и C такие, что

$$c\,\|u\|_{[H^{1/2-\epsilon}(D)]^k} \le \|u\|_p \le C\,\|u\|_+$$

для всех $u \in [H^1(D,S)]^k$. В частности, это доказывает непрерывное вложение пространств $H^+(D) \to [H^{1/2-\epsilon}(D)]^k$, как и требовалось.

Наконец, пусть $\partial D \in C^2$. Так как последовательность $\{u_\nu\}$ из (1.21) сходится в пространстве $H^+(\partial D)$, а норма этого пространства не слабее, чем вспомогательная норма $\|\cdot\|_p$, то она сходится также и в пространстве $[L^2(\partial D)]^k$. Из леммы 1.2.4 следует, что последовательность $\{P_D u_\nu\}$ сходится к некоторому элементу u_P в $[H^{1/2}(D)]^k$. Поэтому в данном случае из (1.22) следует непрерывное вложение $H^+(D) \to [H^{1/2}(D)]^k$. □

Для случая, когда оператор A^*A является скалярным и имеет комплексные коэффициенты данная теорема доказана в [30, Теорема 7.4]. Уместно отметить, что для скалярных дифференциальных операторов с вещественными коэффициентами соответствующие эрмитовы формы будут коэрцитивны. В главе 2 рассмотрен один частный случай, соответствующий факторизации A^*A системы Ламе линейной теории упругости, см. также [81, Теорема 3.6]. В качестве оператора A может выступать система Коши-Римана в $\mathbb{C}$, см., например, [57, теорема 1]. Это означает, что, вообще говоря, в условиях теоремы 1.2.1, при $S = \emptyset$ и $\partial D \in C^2$ непрерывное вложение $H^+(D) \to [H^{1/2}(D)]^k$ является неулучшаемым по шкале пространств Соболева, см. [57, Примеры 1, 2] в случае, когда D есть единичный шар.

1.3 Спектральные свойства смешанных задач

Данный раздел диссертации посвящен некоэрцитивным аналогам краевой задачи Штурма–Лиувилля в ограниченной области D на пространстве $\mathbb{R}^n$ как для скалярных, так и для матричных операторов. Более точно, предполагается, что дифференциальное уравнение задается эллиптическим оператором второго порядка в дивергентной форме в D, а граничные условия имеют робеновский тип. Мы допускаем, что в граничный оператор может входить наклонная производная, касательная к границе на некотором ее подмножестве, а коэффициенты граничного оператора могут иметь разрывы первого рода. Применяя метод слабых возмущений компактных, самосопряженных операторов и метод лучей минимального роста в этом параграфе мы доказываем полноту корневых функций, связанных с поставленной краевой задачей в различных типах пространств Лебега и Соболева (см., например, [30]).

1.3.1 Слабые возмущения компактных, самосопряженных операторов

Пусть H – сепарабельное (комплексное) гильбертово пространство и пусть $\mathcal{A} : H \to H$ – линейный оператор. Напомним, что число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется собственным значением оператора $\mathcal{A}$ если существует ненулевой элемент $u \in H$, такой, что $(\mathcal{A} - \lambda I)u = 0$, где I тождественный оператор в H. Элемент u называется собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, соответствующий собственному значению λ. При добавлении нулевого элемента все собственные векторы, соответствующие собственному значению λ, формируют векторное подпространство $E(\lambda)$ в H. Оно называется собственным пространством оператора $\mathcal{A}$, соответствующим λ, и размерность $E(\lambda)$ называется (геометрической) кратностью λ.

Известная спектральная теорема Гильберта-Шмидта утверждает, что система собственных векторов компактного самосопряженного оператора полна в пространстве H.

Теорема 1.3.1. *Пусть оператор $\mathcal{A} : H \to H$ компактен и самосопряжен. Тогда:*

1. *все собственные значения $\mathcal{A}$ вещественные;*
2. *каждое ненулевое собственное значение имеет конечную кратность;*
3. *система всех собственных значений счетна (с учетом кратности) и имеет единственную точку накопления $\lambda = 0$.*

Кроме того, в H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Как известно, несамосопряженные операторы в бесконечномерных пространствах могут вовсе не иметь собственных векторов для построения базиса. При этом каждое ненулевое, собственное значение компактного оператора (если оно существует) имеет конечную кратность (см., например, [44]). Как хорошо известно из линейной алгебры, важную роль в спектральной теории играют корневые векторы оператора (см. теорию жордановой нормальной формы линейного оператора на конечномерном векторном пространстве).

Определение 1.3.1. *Ненулевой вектор u из области определения $D(\mathcal{A})$ линейного оператора $\mathcal{A}$ на линейном пространстве H называется корневым вектором (или, обобщенным собственным вектором) для $\mathcal{A}$, если найдутся номер $N \in \mathbb{N}$ и число λ, удовлетворяющие $(\mathcal{A} - \lambda I)^N u = 0$, где $I : H \to H$ – тождественный оператор в H.* При добавлении нулевого элемента, множество всех корневых векторов, соответствующих собственному значению λ, формирует векторное подпространство в H, размерность которого называется (алгебраической) кратностью λ.

Если линейная оболочка множества всех корневых векторов плотна в H, то говорят, что система корневых векторов оператора $\mathcal{A}$ полна в H. Таким образом, естественно возникает вопрос об описании условий на компактный оператор $\mathcal{A}$, при которых система его корневых элементов полна. Как хорошо известно, если размерность пространства H конечна, то полнота будет эквивалентна возможности привести матрицу $\mathcal{A}$ к нормальной, жордановой форме над рассматриваемым полем (см., например, [7, § 88]).

Чтобы сформулировать один из пионерских результатов о полноте корневых функций операторов в гильбертовых пространствах введем так называемые классы Шаттена. Пусть $\mathcal{A} : H \to H$ – компактен. Тогда оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ – компактен, самосопряжен и неотрицателен. Поэтому $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ обладает единственным, неотрицательным, самосопряженным, компактным, квадратным корнем $(\mathcal{A}^*\mathcal{A})^{1/2}$, который часто обозначают как $|\mathcal{A}|$, см., например, [33]. По теореме 1.3.1 у оператора $|\mathcal{A}|$ существует счетная система неотрицательных, собственных значений $s_\nu(\mathcal{A})$, которые называются s-числами оператора $\mathcal{A}$. Очевидно, что если $\mathcal{A}$ – самосопряженный, тогда $s_\nu = |\lambda_\nu|$, где $\{\lambda_\nu\}$ – это система собственных значений $\mathcal{A}$.

Определение 1.3.2. *Говорят, что оператор $\mathcal{A}$ принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}_p$, с $0 < p < \infty$, если*

$$\sum_\nu |s_\nu(\mathcal{A})|^p < \infty.$$

Точную нижнюю грань таких чисел p называется порядком оператора $\mathcal{A} \in \mathfrak{S}_p$.

После трудов М.В. Келдыша, компактные операторы из класса Шаттена $\mathfrak{S}_p$ стали называть операторами конечного порядка.

Заметим, что класс Шаттена $\mathfrak{S}_2$ есть множество всех операторов Гильберта-Шмидта, а класс Шаттена $\mathfrak{S}_1$ является идеалом всех операторов следа. Следующая лемма будет очень полезна в дальнейшем; она взята из [44] (см. также [9, Глава 2, § 2]).

Лемма 1.3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ – это компактный оператор класса $\mathfrak{S}_p$, с $0 < p < \infty$, в гильбертовом пространстве H, а B будет ограничен в H. Тогда композиции операторов $B\mathcal{A}$, $\mathcal{A}B$ принадлежат классу Шаттена $\mathfrak{S}_p$.*

Следующий результат обычно именуют теоремой о слабых возмущениях компактных самосопряженных операторов. Келдыш получил эту теорему в [12] (см. также более подробную версию в [11]). В диссертации формулировка данной теоремы приведена в редакции [9, Глава 5, § 8].

Теорема 1.3.2. *Пусть $\mathcal{A}_0$ компактный, самосопряженный оператор конечного порядка в H. Если $\delta\mathcal{A}$ – компактный оператор, и оператор $\mathcal{A}_0(I+\delta\mathcal{A})$ –инъективен, то система корневых векторов $\mathcal{A}_0(I+\delta\mathcal{A})$ полна в H и для любого $\varepsilon > 0$ все собственные значения $\mathcal{A}_0(I+\delta\mathcal{A})$ (за исключением конечного числа) принадлежат углу $|\arg\lambda| < \varepsilon$ и $|\arg\lambda - \pi| < \varepsilon$. Более того,*

1) Если у $\mathcal{A}_0$ есть только конечное число отрицательных собственных значений, то у оператора $\mathcal{A}_0(I+\delta\mathcal{A})$ будет не более, чем конечное число собственных значений, принадлежащих углу $|\arg\lambda - \pi| < \varepsilon$.

2) Если у $\mathcal{A}_0$ есть только конечное число положительных собственных значений, то у оператора $\mathcal{A}_0(I+\delta\mathcal{A})$ будет не более, чем конечное число собственных значений, принадлежащих углу $|\arg\lambda| < \varepsilon$.

Легко увидеть, что оба оператора: $\mathcal{A}_0(I+\delta\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}_0$ на самом деле инъективны в условиях теоремы 1.3.2.

1.3.2 Задача Штурма-Лиувилля

Рассмотрим дифференциальный $(k \times k)$-матричный оператор второго порядка A в дивергентной форме:

$$\mathfrak{A}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (A_i^*(x) A_j(x) \partial_j u) + a_1 \sum_{j=1}^{n} A_j(x) \partial_j u + a_0(x) u.$$

Здесь $(l \times k)$- матрицы $A_j(x)$ выбраны таким образом, что символ матричного оператора $(\sum_{j=1}^{n} A_j(x)\partial_j)$ инъективен в некоторой окрестности $X \subset \mathbb{R}^n$ компакта $\overline{D}$, а для функциональных $(k \times k)$- и $(k \times l)$- матриц a_0, a_1 соответственно, справедливо, что их компоненты $a_0^{(p,q)}, a_1^{(p,q)} \in L^\infty(D)$. Для удобства обозначим через $a_{i,j}$ матрицу $A_i^* A_j$ размерности $(k \times k)$, компоненты которой принадлежат классу $L^\infty(D)$.

Введем также граничный оператор первого порядка

$$\mathfrak{B} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{b_j}(x) \partial_j + b_0(x),$$

где $\tilde{b_j}(x)$, $b_0(x)$ суть $(k \times k)$-функциональные матрицы, компоненты которых локально ограниченные, измеримые функции на ∂D. Будем позволять матрицам $\tilde{b_j}(x)$ одновременно исчезать на открытом связном подмножестве S границы ∂D с кусочно-гладкой границей ∂S, в случае, когда матрица $b_0(x)$ не вырождается на S. Это довольно общий вид граничного оператора, характерного рассматриваем задачам.

Рассмотрим следующую краевую задачу с граничным условием робэновского типа на поверхности ∂D: *по заданному (векторному) распределению f в D, найти (векторное) распределение u в D такое, что*

$$\begin{cases} \mathfrak{A}u = f & \text{в} \quad D, \\ \mathfrak{B}u = 0 & \text{на} \quad \partial D. \end{cases} \tag{1.29}$$

Для получения более обозримых результатов, необходимо наложить некоторые ограничения на операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Предположим, что матрицы $a_{i,j}(x)$ эрмитовы и оператор $\mathfrak{A}$ сильно эллиптичный. В предположении, что компоненты матриц $a_{i,j}(x)$ будут непрерывны вплоть до границы D, рассмотрим комплексные матрицы

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(x)\nu_i,$$

на ∂D, где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней нормали к границе ∂D. Из эллиптичности оператора A следует существование комплексной $(k \times k)-$матрицы b_1 на границе, такой, что

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{b_j}\nu_j - b_1 c_j \nu_j \right)(x) = 0.$$

для почти всех $x \in \partial D$. Тогда если граница области D является липшицевой, то

$$\mathfrak{B} = b_1 \nu_{A,\partial D} + \partial_t + b_0, \tag{1.30}$$

где компоненты матрицы b_1 принадлежат пространству $L^\infty(\partial D)$, $\nu_{A,\partial D}$ есть конормальная производная к ∂D относительно оператора $\mathfrak{A}$ (см. (1.15)), а

$$\partial_t = \sum_{j=1}^{n} t_j \partial_j,$$

где компоненты матриц t_j принадлежат пространству $L^\infty(\partial D)$, а для почти всех $x \in \partial D$ выполнено тождество

$$\sum_{j=1}^{n} t_j(x)\nu_j(x) = 0. \tag{1.31}$$

В том случае, когда $\mathfrak{A}$ есть скалярный оператор (т.е. $k = 1$), тождество (1.31) означает, что $t = (t_1, \ldots t_n)$ есть вектор, касательный к ∂D, т.е. ∂_t – производная по касательному направлению к ∂D. В общем случае компоненты матричного оператора ∂_t суть производные по касательным направлениям к ∂D.

Будем также предполагать, что b_1 и t исчезают на S. Что касается поведения матрицы b_1 на $\partial D \setminus S$, то будем требовать, чтобы она не вырождалась почти для всех $x \in \partial D \setminus S$. Тогда существует обратная матрица к $b_1(x)$, относительно которой мы предполагаем $b_1^{-1}(x) \in [L^1(\partial D \setminus S)]^{k \times k}$.

Так как на S граничный оператор $\mathfrak{B}$ сводится к оператору $\mathfrak{B} = b_0$, и, более того, матрица $|b_0(x)| \neq 0$ для $x \in S$, т.е. она не вырождается на S, то все элементы $u \in [H^1(D)]^k$ будут принадлежат пространству $[H^1(D,S)]^k$, если для них справедливо равенство $\mathfrak{B}u = 0$ на ∂D.

Заметим, что в скалярном случае условия Шапиро-Лопатинского для тройки операторов $(\mathfrak{A}, b_{0|S}, \mathfrak{B}_{|\partial D \setminus S})$ могут нарушаться только если коэффициенты компонент матриц $a_{i,j}(x)$ не являются вещественными (см. [52], [34], и многие другие).

Так как в работе далее мы используем метод возмущения компактных самосопряженных операторов, то мы произведем расщепление коэффициентов a_0 и b_0 следующим образом:

$$a_0 = a_{0,0} + \delta a_0, \quad b_0 = b_{0,0} + \delta b_0,$$

где $a_{0,0}(x)$ – эрмитова, неотрицательная, функциональная $(k \times k)$-матрица в области D, для компонент которой справедливо, что $a_{0,0}^{(p,q)} \in L^\infty(D)$, а $(k \times k)$-матрица $b_{0,0}$ выбрана так, что $(k \times k)$-матрица $b_1^{-1} b_{0,0}$ – эрмитова и неотрицательна, более того, ее элементы должны быть локально измеримые ограниченные функции на $\partial D \setminus S$. Допустимый класс возмущений для δa_0, δb_0 будет описан в теоремах 1.3.5 и 2.1.2) ниже.

Если функционал

$$\|u\|_+ = \Big(\int_D \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \overline{\partial_i u} \partial_j u \, dx + \|\sqrt{a_{0,0}} u\|^2_{[L^2(D)]^k} + \|\sqrt{b_{0,0} b_1^{-1}} u\|^2_{[L^2(\partial D \setminus S)]^k} \Big)^{1/2}$$

определяет норму на $[H^1(D,S)]^k$, то через $H^+(D)$ будем обозначать пополнение пространства $[H^1(D,S)]^k$ по данной норме. Тогда через $H^+(D)$ обозначим гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_+ = \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \partial_j u \overline{\partial_i v} \, dx + (a_{0,0} u, v)_{[L^2(D)]^k} + (b_{0,0} b_1^{-1} u, v)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^k}.$$

Предположим теперь, что пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство Лебега $[L^2(D)]^k$, т.е.,

$$\|u\|_{[L^2(D)]^k} \leq c \, \|u\|_+ \tag{1.32}$$

для любого элемента $u \in H^+(D)$, где постоянная c не зависит от u. Далее в работе мы покажем, что это условие не привносит особые ограничения. Отметим, что если гладкость коэффициентов элементов матриц $a_{i,j}$ сохраняется вплоть до множества S, то элементы пространства $H^+(D)$ фактически принадлежат $[H^1_{\mathrm{loc}}(D \cup S)]^k$, поскольку задача Дирихле для сильно эллиптических операторов удовлетворяет условиям Шапиро-

Лопатинского.

Вложение (1.8) поможет определить двойственное пространство $H^-(D)$ к $H^+(D)$ через спаривание в $[L^2(D)]^k$ через конструкцию, указанную в параграфе 1.1 (полагая, в таком случае, что $H^0 = [L^2(D)]^k$).

Лемма 1.3.2. *Пространство $[L^2(D)]^k$ непрерывно вложено в $H^-(D)$. Если вложение (1.8) компактно, то пространство $[L^2(D)]^k$ компактно вложено в $H^-(D)$.*

Доказательство. Доказательство хорошо известно, см., например, в [63, Лемма 2.2]. □

Так как пространство $[C^\infty_{\mathrm{comp}}(D)]^k$ плотно в $[L^2(D)]^k$ и норма $\|\cdot\|_{[L^2(D)]^k}$ мажорирует $\|\cdot\|_{H^-(D)}$, то получаем, что пространство $[C^\infty_{\mathrm{comp}}(D)]^k$ также плотно в $H^-(D)$.

Отметим, что из гильбертовости пространства $H^+(D)$ следует его рефлексивность. Отсюда следует, что $(H^-(D))' = H^+(D)$, т.е. пространства $H^+(D)$ и $H^-(D)$ двойственны друг для друга по отношению к (1.33). Это понятие весьма важно в теории операторных уравнений, ибо хорошо известно, что при решении операторных уравнений в нормированных пространствах важную роль играют понятия сопряженного пространства и сопряженного оператора. По этой причине каждое удачное описание сопряженных пространств может дать существенное преимущество при решении (интегральных, дифференциальных, функциональных и т.д.) уравнений. Методика исследования операторных уравнений в пространствах Гильберта применима к широкому классу краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, имеющих большое значение в современном естествознании.

Лемма 1.3.3. *Банахово пространство $H^-(D)$ топологически изоморфно двойственному пространству $H^+(D)'$ и изоморфизм определяется полуторалинейной формой*

$$(v, u) = \lim_{\nu\to\infty} (v, u_\nu)_{[L^2(D)]^k} \tag{1.33}$$

для $u \in H^-(D)$ и $v \in H^+(D)$, где $\{u_\nu\}$ любая последовательность в $[H^1(D, S)]^k$, сходящаяся к u.

Доказательство. Доказательство этой леммы проводится стандартными аргументами, см., например, [58], [Лемма 2.3][63] (для случая скалярных операторов). □

Таким образом, для любого фиксированного элемента $u \in H^-(D)$, спаривание (1.33) определяет непрерывный, линейный функционал f_u на $H^+(D)$ и для каждой $f \in H^+(D)'$, существует единственный элемент $u \in H^-(D)$ такой, что $f(v) = f_u(v)$ для всех $v \in H^+(D)$. Таким образом, сопряженное линейное отображение $u \mapsto f_u$ является изометрией.

Далее, из формулы Стоксы вытекает, что для любых элементов $u \in [H^2(D)]^k$ и $v \in [H^1(D)]^k$ справедливо тождество:

$$\int_{\partial D} \overline{v} \nu_{A,\partial D} u \, ds = \int_D \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{i,j} \overline{\partial_i v} \partial_j u + \overline{v} \partial_i a_{i,j} \partial_j u \right) dx.$$

Следовательно, интегрируя по частям, получаем

$$(\mathfrak{A} u, v)_{[L^2(D)]^k} = \int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \overline{\partial_i v} \partial_j u \, dx + \left(b_1^{-1} (\partial_t + b_0) u, v \right)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^k} + \Big(a_1 \sum_{j=1}^{n} A_j \partial_j u + a_0 u, v \Big)_{[L^2(D)]^k}$$

для всех $u \in [H^2(D)]^k$ и $v \in [H^1(D)]^k$, удовлетворяющих граничному условию (1.29). Предположим, что

$$\left| \left(b_1^{-1} (\partial_t + \delta b_0) u, v \right)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^k} + \Big(a_1 \sum_{j=1}^{n} A_j \partial_j u + \delta a_0 \, u, v \Big)_{[L^2(D)]^k} \right| \le c \, \|u\|_+ \|v\|_+ \qquad (1.34)$$

для всех $u, v \in [H^1(D, S)]^k$, где c – положительная постоянная, независящая от элементов u и v. Тогда, для любого фиксированного $u \in H^+(D)$, полуторалинейная форма

$$Q(u, v) = \int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \overline{\partial_i v} \partial_j u \, dx + \left(b_1^{-1} (\partial_t + b_0) u, v \right)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^k} + \Big(a_1 \sum_{j=1}^{n} A_j \partial_j u + a_0 u, v \Big)_{[L^2(D)]^k}$$

определяет непрерывный линейный функционал f на $H^+(D)$; именно, $f(v) := \overline{Q(u, v)}$ для каждого $v \in H^+(D)$. Из леммы 1.3.3 следует существование единственного элемента $Lu \in H^-(D)$ такого, что $f(v) = (v, Lu)$ для всех $v \in H^+(D)$. Таким образом, был определен линейный оператор $L : H^+(D) \to H^-(D)$. Из (1.34) следует, что оператор L ограничен.

Ограниченный линейный оператор $L_0 : H^+(D) \to H^-(D)$, определенный формулой

$$(v, u)_+ = (v, L_0 u) \qquad (1.35)$$

для любых $u, v \in H^+(D)$, соответствует случаю $a_1 = 0$, $a_0 = a_{0,0}$ и $t \equiv 0$, $b_0 = b_{0,0}$.

Итак, мы получаем обобщенную формулировку задачи (1.29): *по заданному распределению $f \in H^-(D)$, найти $k-$векторное распределение $u \in H^+(D)$ такое, что*

$$\overline{Q(u, v)} = (v, f) \qquad (1.36)$$

для любого $v \in H^+(D)$.

Следует отметить, что для определения оператора L и для обобщенной постановки задачи (1.29) не обязательно требовать непрерывность коэффициентов у матриц $a_{i,j}$ вплоть до границы D. Теперь можно решить задачу (1.36) с помощью стандартных методов функционального анализа (см., например, [20, Глава 3, §§ 4-6] для коэрцитивного случая).

Предположим, что функция $f \in [L^2(D)]^k$. Если u есть решение задачи (1.36), то равенство $\mathfrak{A}u = f$ выполняется для элементов пространства $[C^\infty_{\mathrm{comp}}(D)]^k \subset H^+(D)$ в смысле распределений. Так как $\mathfrak{A}$ эллиптичный, то $u \in [H^2_{\mathrm{loc}}(D)]^k$ и равенство $\mathfrak{A}u = f$ фактически выполняется почти всюду в D. Если дополнительно $u \in [H^2(D)]^k$, то

$$\big((\nu_{A,\partial D} + b_1^{-1}(\partial_t + b_0))u, v\big)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^k} = 0$$

для любого $v \in H^+(D)$. Так как любая гладкая функция v в $\overline{D}$, носитель которой не пересекается с S, принадлежит $H^+(D)$, то $(b_1\nu_{A,\partial D} + \partial_t + b_0)u = 0$ на $\partial D \setminus S$. Следовательно, $\mathfrak{B}u = 0$ на ∂D, для $u = 0$ и $b_1 = 0$ на S.

Лемма 1.3.4. *Пусть выполнена оценка (1.32). Тогда оператор $L_0 : H^+(D) \to H^-(D)$ непрерывно обратим. Более того, нормы оператора L_0 и его обратного L_0^{-1} равны* 1.

Доказательство. В условиях леммы, (1.36) будет просто слабой постановкой задачи (1.29) с $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ замененным на

$$A_0 = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{i,j}\partial_j) + a_{0,0}, \quad B_0 = b_1\nu_{A,\partial D} + b_{0,0}$$

соответственно. Соответствующий ограниченный оператор, определенный в (1.35), в гильбертовых пространствах будет просто $L_0 : H^+(D) \to H^-(D)$. Его норма равна 1, ибо из леммы 1.3.3 при $u \in H^+(D)$ следует, что

$$\|L_0 u\|_{H^-(D)} = \sup_{\substack{v \in H^+(D) \\ v \neq 0}} \frac{|(v, L_0 u)|}{\|v\|_+} = \sup_{\substack{v \in H^+(D) \\ v \neq 0}} \frac{|(v, u)_+|}{\|v\|_+} = \|u\|_+. \tag{1.37}$$

Существование и единственность решения задачи (1.36) следует немедленно из теоремы Рисса об общем виде непрерывных, линейных функционалов в гильбертовом пространстве. Из (1.37) получаем, что оператор L_0 на самом деле является изометрией пространства $H^-(D)$ на пространство $H^+(D)$, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим полуторалинейную форму $(u, v)_{H^-(D)} := (L_0^{-1}u, v)$ на пространстве $H^-(D)$ для элементов $u, v \in H^-(D)$. Ясно, что

$$(L_0^{-1}u, v) = (L_0^{-1}u, L_0 L_0^{-1}v) = (L_0^{-1}u, L_0^{-1}v)_+ \tag{1.38}$$

для всех $u, v \in H^-(D)$, где последнее равенство обусловлено (1.35). Сочетание (1.37) и (1.38) дает $\sqrt{(u, u)_{H^-(D)}} = \|u\|_{H^-(D)}$ для любого элемента $u \in H^-(D)$, т.е. $(u, v)_{H^-(D)}$ есть скалярное произведение на $H^-(D)$. С этого момента мы наделяем пространство $H^-(D)$ скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{H^-(D)}$.

Лемма 1.3.5. *Пусть выполнены оценки (1.32) и (1.34). Если, помимо этого, постоянная c из (1.34) удовлетворяет условию: $c < 1$, то для каждой $f \in H^-(D)$ существует единственное решение $u \in H^+(D)$ задачи (1.36), т.е. $L : H^+(D) \to H^-(D)$ непрерывно обратим.*

Доказательство. В предположении справедливости оценки (1.34) при $c < 1$ мы можем утверждать, что оператор $L : H^+(D) \to H^-(D)$, соответствующий задаче (1.36), будет отличаться от L_0 на некий ограниченный оператор $\delta L : H^+(D) \to H^-(D)$, норма которого не превышает $c < 1$. Так как L_0 обратим и у обратного оператора L_0^{-1} норма равна 1, то очевидно, что L также обратим. □

Так как $[C^\infty_{\text{comp}}(D)]^k \hookrightarrow H^+(D) \hookrightarrow [L^2(D)]^k$, то элементы пространства $H^-(D)$ суть распределения в области D и любое решение задачи (1.29) удовлетворяет уравнению $\mathfrak{A}u = f$ в области D в смысле распределений. Хотя граничные условия интерпретируются в слабом смысле, они все равно согласуются с обычными сужениями функций на ∂D, если решение будет достаточно гладким вплоть до ∂D.

Следующие две леммы описывают ограниченные и компактные возмущения оператора L_0 для оператора $\mathfrak{A}$ из (1.35).

Лемма 1.3.6. *Пусть $H^+(D)$ непрерывно вложено в $[H^s(D)]^k$, где $0 < s \le 1$. Если $a_1 \in [L^\infty(D)]^k$, $\delta a_0 \in [L^\infty(D)]^k$, то соответствующие им слагаемые в формуле (1.36) индуцируют непрерывные, компактные операторы, действующие из $H^+(D)$ в $H^-(D)$.*

Доказательство. Докажем непрерывность указанных в лемме операторов. Для этого введем следующие обозначения: через C_1 мы обозначим оператор, индуцированный слагаемым $\left(a_1 \sum_{j=1}^n A_j \partial_j u, v\right)_{[L^2(D)]^k}$, а через C_0 мы обозначим оператор, индуцированный слагаемым $(\delta a_0 u, v)_{[L^2(D)]^k}$. Покажем, что они линейны и ограничены нормой элемента u в пространстве $H^+(D)$.

Линейность очевидным образом следует из линейности скалярного произведения и линейности производных. Ограниченность вытекает из определения норм в пространствах $H^+(D)$ и $H^-(D)$. Более подробно, из неравенство Коши-Буняковского и с учетом того, что $a_1 \in [L^\infty(D)]^k$, $\delta a_0 \in [L^\infty(D)]^k$, а также того, что норма в пространстве H^+ не слабее нормы $[L^2(D)]^k$, для оператора C_1 получаем:

$$\|C_1 u\|_{H^-(D)} = \sup_{\substack{v \in H^+(D) \\ v \neq 0}} \frac{|\left(a_1 \sum_{j=1}^n A_j \partial_j u, v\right)_{[L^2(D)]^k}|}{\|v\|_+} \le$$

$$\le \sup_{\substack{v \in H^+(D) \\ v \neq 0}} \frac{\|a_1 \sum_{j=1}^n A_j \partial_j u\|_{[L^2(D)]^k} \|v\|_{[L^2(D)]^k}}{\|v\|_+} \le \sup_{\substack{v \in H^+(D) \\ v \neq 0}} \frac{\|a_1 \sum_{j=1}^n A_j \partial_j u\|_{L^2(D)]^k} \|v\|_+}{\|v\|_+} \le$$

$$\le \sup_{\substack{v \in H^+(D) \\ v \neq 0}} \|a_1 \sum_{j=1}^n A_j \partial_j u\|_{H^0} = \|a_1 \sum_{j=1}^n A_j \partial_j u\|_{[L^2(D)]^k} \le \|a_1\|_{[L^\infty(D)]^k} \| \sum_{j=1}^n A_j \partial_j u\|_{H^0} \le const \|u\|_+.$$

Более того, для оператора C_0 в этих же условиях справедливо, что

$$\|C_0 u\|_{H^-(D)} = \sup_{\substack{v\in H^+(D)\\ v\neq 0}} \frac{|\,(\delta a_0 u, v)_{[L^\infty(D)]^k}\,|}{\|v\|_+} \leq \sup_{\substack{v\in H^+(D)\\ v\neq 0}} \frac{\|\delta a_0 u\|_{[L^\infty(D)]^k}\|v\|_{[L^\infty(D)]^k}}{\|v\|_+} \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{v\in H^+(D)\\ v\neq 0}} \frac{\|\delta a_0 u\|_{[L^2(D)]^k}\|v\|_+}{\|v\|_+} \leq \sup_{\substack{v\in H^+(D)\\ v\neq 0}} \|\delta a_0 u\|_{[L^2(D)]^k} =$$

$$= \|\delta a_0 u\|_{H^0} \leq \|\delta a_0\|_{[L^\infty(D)]^k}\|u\|_{H^0} \leq const\|u\|_+.$$

Итак, C_0, C_1 - ограниченные, линейные операторы, а значит они и непрерывны.

Для дальнейшего доказательства леммы рассмотрим вопрос о компактности операторов. Для этого нужно практически дословно повторить аргументы из [31, Леммы 13.5 и 14.5], относящиеся к соответствующей задаче для скалярных операторов. □

Лемма 1.3.7. *Пусть выполнено неравенство (1.10) и $b_1^{-1}\delta b_0 \in L^\infty(\partial D\setminus S)$. Если справедливо (1.4), то соответствующее матрице $b_1^{-1}\delta b_0$ слагаемое в задаче (1.36) индуцирует непрерывный оператор, действующий из $H^+(D)$ в $H^-(D)$.*

Доказательство. Следует из неравенств для k-векторов u, v:

$$|v^* b_1^{-1}\delta b_0 u| = |\left(\sqrt{b_1^{-1}b_{0,0}}v\right)^* \left(\left(\sqrt{b_1^{-1}b_{0,0}}\right)^{-1}\right)^* \left(\sqrt{b_1^{-1}b_{0,0}}\right)^{-1}\sqrt{b_1^{-1}b_{0,0}}u| \leq$$

$$\leq const\left(v^* b_1^{-1}b_{0,0}v\right)\left(u^* b_1^{-1}b_{0,0}u\right).$$

□

Как показывают [57, Примеры 1,2], граничное слагаемое δb_0 не может индуцировать компактное и непрерывное возмущение оператора L в случае некоэрцитивной эрмитовой формы $(\cdot,\cdot)_+$.

1.3.3 Полнота корневых функций для слабых возмущений

Перейдем к вопросу о полноте корневых функций. Начнем с самосопряженного оператора L_0, ассоциированного с задачей (1.36), см. (1.35). Всюду далее в этой главе будем писать ι' для непрерывного вложения $[L^2(D)]^k$ в $H^-(D)$ (как в лемме 1.3.2).

Лемма 1.3.8. *Если выполнена оценка (1.32), а вложение* (1.8) *компактно, то обратный оператор L_0^{-1}индуцирует компактные, положительные, самосопряженные операторы*

$$Q_1 = \iota'\iota\, L_0^{-1} : H^-(D)\to H^-(D), \quad Q_2 = \iota\, L_0^{-1}\,\iota' : [L^2(D)]^k \to [L^2(D)]^k,$$

$$Q_3 = L_0^{-1}\,\iota'\iota : H^+(D)\to H^+(D),$$

имеющие одинаковые системы собственных значений и собственных векторов. Более того, все собственные значения положительны и существуют ортонормированные базисы в $H^+(D)$, $[L^2(D)]^k$ и $H^-(D)$, состоящие из собственных векторов.

Доказательство. Если (1.10) справедливо, то из теоремы 1.2.1 следует, что вложение ι компактно. Так как ι компактно, а ι', L_0^{-1} ограничены, то операторы Q_1, Q_2, Q_3 компактны. Напомним, что пространство $H^-(D)$ наделяется скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{H^-(D)}$. Тогда, согласно (1.38), для любых $u,v \in H^-(D)$ верно, что

$$(Q_1 u, v)_{H^-(D)} = \overline{(v, \iota'\iota\, L_0^{-1} u)_{H^-(D)}} = \overline{(L_0^{-1} v, \iota'\iota\, L_0^{-1} u)} = (\iota L_0^{-1} u, \iota L_0^{-1} v)_{[L^2(D)]^k},$$

$$(u, Q_1 v)_{H^-(D)} = \overline{(Q_1 v, u)_{H^-(D)}} = (\iota L_0^{-1} u, \iota L_0^{-1} v)_{[L^2(D)]^k}.$$

Таким образом, оператор Q_1 самосопряжен.

Далее, применяя (1.35), получаем

$$(Q_2 u, v)_{[L^2(D)]^k} = (\iota(L_0^{-1}(\iota' u)), v)_{[L^2(D)]^k} = (L_0^{-1}(\iota' u), \iota' v) = (L_0^{-1}(\iota' u), L_0^{-1}(\iota' v))_+,$$

$$(u, Q_2 v)_{[L^2(D)]^k} = \overline{(Q_2 v, u)_{[L^2(D)]^k}} = (L_0^{-1}(\iota' u), L_0^{-1}(\iota' v))_+$$

для всех элементов $u,v \in [L^2(D)]^k$. Таким образом оператор Q_2 самосопряжен.

Применяя (1.35) еще раз получим

$$(Q_3 u, v)_+ = (L_0^{-1}(\iota'\iota\, u), v)_+ = (\iota'\iota\, u, v) = (\iota u, \iota v)_{[L^2(D)]^k}$$

$$(u, Q_3 v)_+ = \overline{(Q_3 v, u)_+} = (\iota u, \iota v)_{[L^2(D)]^k},$$

для любых $u,v \in H^+(D)$, что и доказывает самосопряженность оператора Q_3.

Наконец, так как операторы L_0^{-1}, ι, ι' инъективны, то инъективными будут и операторы Q_1, Q_2, Q_3. Следовательно, все их собственные вектора $\{u_\nu\}$ принадлежат пространству $H^+(D)$, ибо $L_0^{-1} u_\nu$ лежит в $H^+(D)$. Из инъективности операторов ι и ι' следует совпадение систем собственных значений и собственных векторов операторов Q_1, Q_2 и Q_3. Последняя часть леммы следует из теоремы 1.3.1. □

Определение 1.3.3. *Компактный самосопряженный оператор $\mathcal{C}$ называется оператором конечного порядка, если найдется такое число $0 < p < \infty$, что ряд $\sum_\nu |\lambda_\nu|^p$ сходится, где $\{\lambda_\nu\}$ есть система собственных значений оператора $\mathcal{C}$ (здесь суммирование осуществляется с учетом кратности, см., например, [9]) .*

Теорема 1.3.3. *Если пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство $[H^s(D)]^k$ при $0 < s \le 1$, то порядки операторов Q_1, Q_2, Q_3 конечны и равны $2s$, а собственные векторы образуют ортогональные базисы в $H^+(D)$, $H^-(D)$, $[L^2(D)]^k$.*

Доказательство. Утверждение о порядках очевидным образом следует из результатов [36] (см. также [63, Теорема 3.2]), так как в этой ситуации оператор $\iota'\iota\, L_0^{-1}$ на самом деле отображает пространство $[H^{-s}(D)]^k \subset H^-(D)$ в $H^+(D) \subset [H^s(D)]^k$. □

Следующей целью будет изучение полноты корневых функций слабых возмущений операторов Q_j. Для этого мы воспользуемся теоремой 1.3.2.

Теорема 1.3.4. *Если порядок оператора* $Q_1 : H^-(D) \to H^-(D)$ *конечен, то для любого обратимого оператора типа* $L_0 + \delta L : H^+(D) \to H^-(D)$ *с компактный оператором* $\delta L : H^+(D) \to H^-(D)$, *система корневых функций компактного оператора*

$$P_1 = \iota' \iota \, (L_0 + \delta L)^{-1} : H^-(D) \to H^-(D)$$

полна в пространствах $H^-(D)$, $[L^2(D)]^k$ *и* $H^+(D)$.

Доказательство. По предположению теоремы существует ограниченный обратный $(L_0 + \delta L)^{-1} : H^-(D) \to H^+(D)$. Так как $(I - L_0(L_0 + \delta L)^{-1}) = \delta L \, (L_0 + \delta L)^{-1}$, то

$$L_0^{-1} - (L_0 + \delta L)^{-1} = L_0^{-1} \left(\delta L \, (L_0 + \delta L)^{-1} \right), \ \ Q_1 - P_1 = Q_1 \left(\delta L \, (L_0 + \delta L)^{-1} \right). \tag{1.39}$$

Из компактности δL и ограниченности $(L_0 + \delta L)^{-1}$ следует компактность оператора

$$\delta L \, (L_0 + \delta L)^{-1} : H^-(D) \to H^-(D).$$

Поэтому P_1 есть инъективное, слабое возмущение компактного самосопряженного оператора Q_1. Если, в дополнение, порядок оператора Q_1 конечен, то, по теореме 1.3.2, счетная система $\{u_\nu\}$ корневых векторов, ассоциированных с оператором P_1, полна в гильбертовом пространстве $H^-(D)$.

Зафиксируем корневой вектор u_ν оператора P_1, соответствующий собственному значению λ_ν. Отметим, что $\lambda_\nu \neq 0$, ибо оператор $(L_0 + \delta L)^{-1}$ инъективен. По определению корневого вектора существует натуральное такое число m, что $(P_1 - \lambda_\nu I)^m u_\nu = 0$. Применение биномиальной формулы дает

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \lambda_\nu^{m-j} P_1^j u_\nu = 0.$$

В частности, так как $\lambda_\nu \neq 0$, то

$$u_\nu = \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} \lambda_\nu^{-j} (\iota' \iota \, (L_0 + \delta L)^{-1})^j u_\nu.$$

Следовательно, $u_\nu \in H^+(D)$, так как область значений оператора $(L_0 + \delta L)^{-1}$ лежит в пространстве $H^+(D)$.

Таким образом, $\{u_\nu\} \subset H^+(D)$. Докажем теперь плотность линейной оболочки $\mathcal{L}(\{u_\nu\})$ системы $\{u_\nu\}$ в пространстве $H^+(D)$ (ср. [2, Предложение 6.1] и [4, стр. 12]). Для этого зафиксируем $u \in H^+(D)$. Так как $L_0 + \delta L$ отображает $H^+(D)$ непрерывно на $H^-(D)$, то $(L_0 + \delta L)u \in H^-(D)$. Следовательно, существует последовательность $\{f_k\} \subset \mathcal{L}(\{u_\nu\})$ сходящаяся к элементу $(L_0 + \delta L)u$ в $H^-(D)$. С другой стороны, обратный оператор $(L_0+\delta L)^{-1}$ отображает $H^-(D)$ непрерывно в $H^+(D)$, а последовательность

$$(L_0+\delta L)^{-1} f_k = (L_0+\delta L)^{-1} \iota' \iota\, f_k$$

сходится к элементу u в пространстве $H^+(D)$. Если элемент $u_{\nu_0} \in \mathcal{L}(\{u_\nu\})$ соответствует собственному значению λ_0 кратности m_0, то вектор $v_{\nu_0} = P_1 u_{\nu_0}$ удовлетворяет

$$(P_1-\lambda_0 I)^{m_0} v_{\nu_0} = (P_1-\lambda_0 I)^{m_0+1} u_{\nu_0} + \lambda_0 (P_1-\lambda_0 I)^{m_0} u_{\nu_0} = 0.$$

Таким образом, оператор P_1 отображает $\mathcal{L}(\{u_\nu\})$ в себя. Поэтому последовательность $\{\iota'\iota\,(L_0+\delta L)^{-1} f_k\}$ по-прежнему принадлежит $\mathcal{L}(\{u_\nu\})$ и мы может представить $\{(L_0 + \delta L)^{-1} f_k\}$ как последовательность линейных комбинаций корневых функций оператора P_1, сходящуюся к u. Таким образом, эти рассуждения показывают, что подсистема $(L_0+\delta L)^{-1}\,\mathcal{L}(\{u_\nu\}) \subset \mathcal{L}(\{u_\nu\})$ плотна в $H^+(D)$.

Наконец, так как $[C^\infty_{\mathrm{comp}}(D)]^k \subset H^+(D)$ и $[C^\infty_{\mathrm{comp}}(D)]^k$ плотно в лебеговом пространстве $[L^2(D)]^k$, то пространство $H^+(D)$ плотно в $[L^2(D)]^k$. Это доказывает полноту системы корневых функций в $[L^2(D)]^k$. □

Аналогичные утверждения справедливы и для слабых возмущений операторов Q_2 и Q_3.

Если оператор вида $L_0+\delta L : H^+(D) \to H^-(D)$, где δL – компактный оператор, не инъективен, то теорема 1.3.4 не применима. Однако из непрерывной обратимости оператора L_0 следует фредгольмовость оператора $L = L_0 + \delta L$. В частности, существует постоянная c, такая, что для всех $u \in H^+(D)$

$$\|u\|_+ \le c\left(\|Lu\|_{H^-(D)} + \|u\|_{H^-(D)}\right). \tag{1.40}$$

Произведем следующее расщепление:

$$\delta b_0 = \delta b_0^{(s)} + \delta b_0^{(c)}, \quad \delta a_0 = \delta a_0^{(s)} + \delta a_0^{(c)}, \quad a_1 = a_1^{(s)} + a_1^{(c)}$$

так, чтобы слагаемые $\delta b_0^{(c)}$, $\delta a_0^{(c)}$ и $a_1^{(c)} A$ индуцировали компактные возмущения оператора L, а слагаемые $\delta b_0^{(s)}$, $\delta a_0^{(s)}$ и $a_1^{(s)} A$ были достаточно малыми.

Следующее утверждение доказывается с использованием стандартных методов функционального анализа, см., например, [52], [63].

Теорема 1.3.5. *Пусть справедливо (1.10), а* $\delta b_0^{(c)} = 0$. *Кроме того, пусть выполнено неравенство (1.4). Если* $\delta a_0^{(c)} \in [L^\infty(D)]^k$, $a_1^{(c)} \in [L^\infty(D)]^k$, *и*

$$|(b_1^{-1}\delta b_0^{(s)} u, v)_{[L^2(\partial D\setminus S)]^k} + (a_1^{(s)} \sum_j A_j \partial_j u + \delta a_0^{(s)}\, u, v)_{[L^2(D)]^k}| \le \tilde{M} \|u\|_+ \|v\|_+ \tag{1.41}$$

для всех $u, v \in [H^1(D,S)]^k$ *с некоторой постоянной* $0 < \tilde{M} < 1$, *независящей от* u, v, *то задача (1.36) фредгольмова.*

Доказательство. Если $a_1 = 0$ и $\delta a_0 = 0$, то в этих условиях оценка (1.34) выполняется при $0 < c < 1$, что следует непосредственно из (1.41). Тогда оператор $L_1 : H^+(D) \to H^-(D)$, соответствующий задаче (1.36), отличается от L_0 на ограниченный оператор $\delta L_1 : H^+(D) \to H^-(D)$, норма которого не превышает $0 < c < 1$. Оператор L_0 обратим согласно лемме 1.3.4, а его обратный оператор L_0^{-1} имеет норму, равную единице. Аналогичные рассуждения показывают, что L_1 тоже обратим.

С другой стороны, так как $\delta a_0^{(c)} \in [L^\infty(D)]^k$, $a_1^{(c)} \in [L^\infty(D)]^k$, то формула

$$\delta a_0^{(c)} + a_1^{(c)} \sum_j A_j \partial_j$$

индуцирует ограниченный линейный оператор $\delta L_2 : H^+(D) \to H^0$. Тогда по теореме 1.2.1 и лемме 1.3.6 оператор $\delta L_2 : H^+(D) \to H^-(D)$ будет компактен. Таким образом, оператор $L_2 : H^+(D) \to H^-(D)$ для соответствующей задачи (1.36) будет отличаться от обратимого оператора L_1 на компактный оператор $\delta L_2 : H^+(D) \to H^-(D)$, или, иными словами, L_2 – это фредгольмов оператор. □

Распространим теорему 1.3.4 на фредгольмовы операторы. С этой целью обозначим через T неограниченный линейный оператор $H^-(D) \to H^-(D)$ с областью определения $D_T = H^+(D)$, который отображает элемент $u \in D_T$ в Lu. Из неравенства (1.40) оператор T, очевидно, замкнут. Он плотно определен, так как $H^1(D, S) \subset H^+(D)$ плотно в $H^-(D)$. Хорошо известно, что нулевое пространство T конечномерно, а его область значений замкнута в пространстве $H^-(D)$. При этом, говоря о собственных и корневых функциях u оператора T, мы всегда предполагаем, что $u \in D_T$ и $(T - \lambda I)^j u \in D_T$ для всех $j = 1, \dots, m-1$.

Пусть оператор $T_0 : H^-(D) \to H^-(D)$ соответствует самосопряженному оператору L_0. Замкнутый оператор T_0, очевидно, непрерывно обратим, а обратный оператор совпадает с $\iota' \iota\, L_0^{-1} = Q_1$.

Лемма 1.3.9. *Спектр оператора T_0 состоит из точек $\mu_\nu = \lambda_\nu^{-1}$ в $\mathbb{R}_{>0}$, где λ_ν суть собственные значения оператора Q_1.*

Доказательство. Напомним, что все λ_ν положительные в силу леммы 1.3.8, и, таким образом, $\mu_\nu > 0$. Если $\lambda \neq 0$, то

$$(T_0 - \lambda I)u = (I - \lambda\, \iota' \iota\, L_0^{-1})\, T_0 u = -\lambda \Big(Q_1 - \frac{1}{\lambda} I \Big)\, T_0 u$$

для всех $u \in H^+(D)$, что и доказывает лемму. □

Если спектр оператора T не совпадает со всей комплексной плоскостью, то есть, если резольвента $\mathcal{R}(\lambda; T) = (T - \lambda I)^{-1}$ существует для некоторых $\lambda = \lambda_0$, то из резольвентного уравнения следует (так как $\mathcal{R}(\lambda_0; T)$ – компактен), что $\mathcal{R}(\lambda; T)$ существует для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ кроме дискретной последовательности точек $\{\lambda_\nu\}$, которая состоит из собственных значений оператора T (см. [11, стр. 17]). Однако, в общем случае нельзя исключать ситуации, когда спектр T является всей комплексной плоскостью.

Теорема 1.3.6. *Пусть $\delta L : H^+(D) \to H^-(D)$ – компактный оператор, а порядок оператора $Q_1 : H^-(D) \to H^-(D)$ конечен. Тогда спектр замкнутого оператора $T : H^-(D) \to H^-(D)$, соответствующий оператору $L = L_0 + \delta L$, не совпадает с $\mathbb{C}$, а система корневых векторов T полна в пространствах $H^-(D)$, $[L^2(D)]^k$ и $H^+(D)$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$, все собственные значения оператора T (кроме конечного числа) принадлежат углу $|\arg \lambda| < \varepsilon$.*

Доказательство. Во-первых, отметим, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ на пространстве $H^+(\mathcal{D})$ справедливо тождество

$$T - \lambda I = L - \lambda\, \iota' \iota. \tag{1.42}$$

Докажем, что существует натуральное число $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\lambda_0 = -N$ есть резольвентная точка оператора T. Из формулы (1.42) и леммы 1.3.9 следует, что для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$T + kI = (I + \delta L(L_0 + k\, \iota' \iota)^{-1})(T_0 + kI). \tag{1.43}$$

Далее покажем, что оператор $I + \delta L(L_0 + k\, \iota' \iota)^{-1}$ инъективен для некоторых натуральных $k \in \mathbb{N}$. Действительно, аргументируя от противного, получим требуемый результат. Более точно, предположим, что для любого натурального $k \in \mathbb{N}$ существует такая функция $f_k \in H^-(D)$, что $\|f_k\|_{H^-(D)} = 1$ и

$$(I + \delta L(L_0 + k\, \iota' \iota)^{-1}) f_k = 0. \tag{1.44}$$

При заданных $u \in H^+(D)$ и $k \in \mathbb{N}$, простые вычисления показывают, что

$$\|(L_0 + k\, \iota' \iota) u\|^2_{H^-(D)} = \|u + k\, L_0^{-1} u\|^2_+ = \|u\|^2_+ + 2k\, \|u\|^2_{L^2(D)} + k^2\, \|L_0^{-1} u\|^2_+ = \|u\|^2_+.$$

Поэтому последовательность $u_k := (L_0 + k\, \iota' \iota)^{-1} f_k$ ограничена в пространстве $H^+(D)$. По принципу слабой компактности для гильбертовых пространств существует подпоследовательность $\{f_{k_j}\}$ такая, что последовательности $\{f_{k_j}\}$ и $\{u_{k_j}\}$ сходятся слабо в пространствах $H^-(D)$ и $H^+(D)$ к пределам f и u, соответственно. Так как оператор δL компактен, то последовательность $\{\delta L u_{k_j}\}$ сходится к $\delta L u$ в пространстве $H^-(D)$, и, таким образом, $\{f_{k_j}\}$ сходится к f в силу (1.44). Более того, $\|f\|_{H^-(D)} = 1$. В частности, последовательность $\{\delta L(L_0 + k_j\, \iota' \iota)^{-1} f_{k_j}\}$ сходится к $-f$, откуда

$$f = -\delta L\, u. \tag{1.45}$$

Далее, переходя к слабому пределу в равенстве $f_{k_j} = (L_0 + k_j\, \iota' \circ \iota) u_{k_j}$, получаем, что

$$f = L_0 u - \lim_{k_j \to \infty} k_j\, \iota' \iota\, u_{k_j},$$

ибо непрерывный оператор $L_0 : H^+(D) \to H^-(D)$ отображает слабо сходящиеся последовательности в слабо сходящиеся последовательности. Так как оператор $\iota'\iota$ компактен, то последовательность $\{\iota'\iota\, u_{k_j}\}$ сходится к $\iota'\iota\, u$ в пространстве $H^-(D)$ и $\iota'\iota\, u \neq 0$ в силу (1.45) и инъективности $\iota'\iota$. Следовательно, $\lim_{k_j\to\infty} \|k_j\, \iota'\iota\, u_{k_j}\|_- = +\infty$. Итак, получили противоречие, ибо доказали, что не существует слабый предел для последовательности

$$\lim_{k_j\to\infty} k_j\, \iota'\iota\, u_{k_j} = L_0 u - f.$$

Более того, в итоге доказано даже больше: оператор $I + \delta L(L_0 + k\, \iota'\iota)^{-1}$ инъективен для всех, кроме конечного числа натуральных чисел k. Так как это оператор Фредгольма индекса нуль, то он непрерывно обратим для тех k, для которых он инъективен. Объединение результатов (1.43) и леммы 1.3.9 дает существование оператора $(T - \lambda_0 I)^{-1}$ для некоторого $\lambda_0 = -N$, где $N \in \mathbb{N}$.

Оператор $L : H^+(D) \to H^-(D)$ фредгольмов поскольку δ_L компактен, а $L_0 : H^+(D) \to H^-(D)$ непрерывно обратим. Так как вложение ι компактно, то оператор $(L - \lambda_0\, \iota'\iota) : H^+(D) \to H^-(D)$ также фредгольмов. Поскольку λ_0 точка резольвенты оператора T и $(T - \lambda_0 I)^{-1} = (L - \lambda_0\, \iota'\iota)^{-1}$ на пространстве $H^-(D)$, то оператор $(L - \lambda_0\, \iota'\iota)^{-1}$ отображает $H^-(D)$ непрерывно в $H^+(D)$. Подобно (1.39) мы имеем:

$$L_0^{-1} - (L - \lambda_0\, \iota'\iota)^{-1} = L_0^{-1}\left((\delta L - \lambda_0\, \iota'\iota)(L - \lambda_0\, \iota'\iota)^{-1}\right).$$

В силу компактности оператора $(\delta L - \lambda_0\, \iota'\iota)$, оператор в правой части этого неравенства также компактен. Тогда по теореме 1.3.4 корневые вектора $\{u_\nu\}$ оператора $\iota'\iota(L - \lambda_0\, \iota'\iota)^{-1}$ полны в пространствах $H^+(D)$, $[L^2(D)]^k$ и $H^-(D)$. Обозначим систему корневых векторов этого оператора через $\{u_\nu\}$. Поскольку для каждого собственного числа λ_ν найдется некоторое m такое, что

$$\Big(\iota'\iota(L - \lambda_0\, \iota'\iota)^{-1} - \lambda_\nu I\Big)^m u_\nu.$$

Раскрывая это произведение с помощью биномиальной формулы как в доказательстве теоремы 1.3.4, заключаем, что $u_\nu \in H^+(D)$. Поэтому, в силу инъективности оператора $\iota'\iota$, мы заключаем, что $\{u_\nu\}$ есть на самом деле система корневых векторов оператора $(L - \lambda_0\, \iota'\iota)^{-1}$.

Из (1.42) получаем совпадение систем корневых функций для $(L - \lambda_0\, \iota'\iota)^{-1}$ и $T - \lambda_0 I$.

Наконец, так как у операторов $(T - \lambda_0 I)$, T одинаковые корневые вектора, то линейная оболочка $\mathcal{L}(\{u_\nu\})$ плотна в пространствах $H^+(D)$, $L^2(D)$ и $H^-(D)$. □

Равенство $(T - \lambda I)u = 0$ для всех функций $u \in H^+(D)$ можно эквивалентно переформулировать, если учесть, что u является решением в слабом смысле краевой задачи

$$\begin{cases} Au = \lambda u & \text{в } D, \\ Bu = 0 & \text{на } \partial D, \end{cases} \tag{1.46}$$

где пара (A, B) соответствует возмущению $L_0+\delta L$. Для $n = 1$ в скалярном случае такие задачи известны как граничные задачи Штурма-Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (см., например, [48, Глава XI, § 4]). Таким образом, мы можем по-прежнему относятся к (1.46) как к задаче Штурма-Лиувилля в многомерном случае.

Далее в работе мы будет опираться на следующий результат (см., например, [36]).

Теорема 1.3.7. *Пусть $s \in \mathbb{R}$ и $A : [H^s(D)]^k \to [H^s(D)]^k$ есть компактный оператор. Если существует $\delta_s > 0$ такая, что оператор A отображает пространство $[H^s(D)]^k$ непрерывно в $[H^{s+\delta_s}(D)]^k$, то он относится к классу Шаттена $\mathfrak{S}_{n/\delta_s+\varepsilon}$ для всех $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Для случая $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ см. [36]. Для случая $s \in \mathbb{R}$ и пространства Соболева на компактном замкнутом многообразии D см. [3, Предложение 5.4.1]. Для остальных случаев смотри [63]. $\square$

Очевидно, что данное утверждение не теряет своей актуальности и остается верным, если мы заменим $H^s(D)$ на $[H^s(D)]^k$, а $H^{s+\delta_s}(D)$ на $[H^{s+\delta_s}(D)]^k$.

Следствие 1.3.1. *Если для некоторого $s > 0$ справедливо непрерывное вложение*

$$\iota_s : H^+(D) \hookrightarrow [H^s(D)]^k, \tag{1.47}$$

то любой компактный оператор $R : H^-(D) \to H^-(D)$, который отображает пространство $H^-(D)$ непрерывно на $H^+(D)$, принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}_{n/2s+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$. В частности, порядок этого оператора конечен.

Доказательство. Сначала заметим, что $[C^\infty_{\mathrm{comp}}(D)]^k$ плотно в $[L^2(D)]^k$ и норма $\|\cdot\|_{[L^2(D)]^k}$ мажорирует норму $\|\cdot\|_{[H^{-s}(D)]^k}$. Следовательно, $[C^\infty_{\mathrm{comp}}(D)]^k$ также плотно в $[H^{-s}(D)]^k$, т.е., каждый класс эквивалентности $[H^{-s}(D)]^k$ содержит последовательность Коши, состоящую из гладких функций с компактным носителем в D. Таким образом, оператор ι_s индуцирует оператор ограниченного вложения $\iota'_s : [H^{-s}(D)]^k \to [H^-(D)]^k$ с помощью композиции соответствующих операторов. Последний, на самом деле, является транспонированным оператором для ι_s.

Пусть R_0 будет сужением оператора R на $H^+(D)$. Именно, рассмотрим ограниченное отображение $H^-(D)$ в $H^+(D)$. Тогда оператор $\iota_s R_0 \iota'_s$ отображает пространство $[H^{-s}(D)]^k$ непрерывно в $[H^s(D)]^k$.

Будем подразумевать под $i : [H^s(D)]^k \hookrightarrow [L^2(D)]^k$ оператор естественного вложения, а под $i' : [L^2(D)]^k \hookrightarrow [H^{-s}(D)]^k$ – соответствующее отображение, индуцированное двойственностью. Из теоремы 1.3.7 следует, что оператор $(i' i\, \iota_s R_0 \iota'_s) : [H^{-s}(D)]^k \to [H^{-s}(D)]^k$ принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}_{n/2s+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$. По предположению следствия, вложение $\iota : H^+(D) \hookrightarrow [L^2(D)]^k$ факторизуется через i, т.е., $\iota = i \circ \iota_s$ откуда вытекает, что $\iota' = \iota'_s i'$. Следовательно, $R = \iota' \iota\, R_0 = \iota'_s\, i'\, i\, \iota_s\, R_0$.

Пусть теперь λ – ненулевое, собственное значение R и u корневой вектор оператора R, соответствующий λ, т.е., $(R-\lambda I)^m u = 0$ для натурального числа m. Тогда из биномиальной формулы следует, что u принадлежит образу оператора ι'_s, т.е., $u = \iota'_s u_0$ для некоторого $u_0 \in [H^{-s}(D)]^k$. Следовательно,

$$(R-\lambda I)^m u = (R-\lambda I)^m \iota'_s u_0 = \iota'_s\,(i'\,i\,\iota_s\,R_0\iota'_s - \lambda I)^m u_0 = 0.$$

Так как оператор ι' инъективен, то каждое собственное значение оператора R на самом деле является собственным значением $(i'\,i\,\iota_s\,R_0\iota'_s)$, причем одной и той же кратности. Поэтому R также лежит в $\mathfrak{S}_{n/2s+\varepsilon}$ для любой $\varepsilon > 0$. $\square$

Следствие 1.3.2. *Предположим, что справедливо непрерывное вложение (1.47) с некоторым $s > 0$. Тогда операторы Q_1, Q_2 и Q_3 принадлежат классу Шаттена $\mathfrak{S}_{n/2s+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$ (и поэтому они имеют конечный порядок).*

Доказательство. Так как операторы $Q_1 = \iota'\iota\,L_0^{-1}$ и L_0^{-1} отображают пространство $H^+(D)$ непрерывно в $H^-(D)$, то из следствия 1.3.1 вытекает, что оператор Q_1 принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}_{n/2s+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$. С другой стороны, по лемме 1.3.8 операторы Q_1, Q_2 и Q_3 имеют одинаковые собственные значения. Следовательно, все эти операторы принадлежат классу Шаттена $\mathfrak{S}_{n/2s+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Логичным продолжением этой темы будет вопрос об изучении полноты корневых функций «малых» возмущений компактных самосопряженных операторов взамен слабых. Для этого мы применим так называемый метод лучей минимального роста резольвенты, который приводит к более общим результатам, чем теорема 1.3.2. Кажется, что эта идея впервые была реализована в работе [36].

1.3.4 Лучи минимального роста

Как известно, несамосопряженные операторы в бесконечномерных пространствах могут вовсе не иметь собственных векторов. Поэтому важное значение в построении решений краевых задач имеет понятие корневого вектора и полнота их системы. Вопрос о полноте корневых векторов несамосопряженных операторов, ассоциированных с краевыми задачами для эллиптических уравнений достаточно хорошо исследован в функциональном анализе (см. [2], [4], [9], [12] и многие другие). С этими вопросами тесно связан метод минимальных лучей роста, описанный в работах [9, стр. 302, Теорема 6.1] и [44].

Пусть, как и прежде, $L : H^+(D) \to H^-(D)$ – ограниченный линейный оператор из раздела 1.3.2. Мы по-прежнему считаем, что оценки (1.8) и (1.34) выполнены, а оператор L фредгольмов. В дальнейшем достаточно будет рассмотреть те задачами Штурма-Лиувилля, для которых спектр соответствующего неограниченного замкнутого оператора $T : H^-(D) \to H^-(D)$ дискретен (ср. с [36]). Обозначим через $\mathcal{R}(\lambda; T)$ резольвенту оператора T.

Определение 1.3.4. *Луч* $\arg\lambda = \vartheta$ *в комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ *называется лучем минимального роста резольвенты* $\mathcal{R}(\lambda; T) : H^-(D) \to H^-(D)$, *если резольвента существует для всех* λ *с достаточно большим модулем на этом луче, и, более того, для всех таких* λ *для некоторой постоянной* $c > 0$ *выполняется следующая оценка*

$$\|\mathcal{R}(\lambda; T)\|_{\mathcal{L}(H^-(D))} \leq c\,|\lambda|^{-1}. \tag{1.48}$$

Теорема 1.3.8. *Пусть пространство* $H^+(D)$ *непрерывно вложено в* $[H^s(D)]^k$ *для некоторой* $s > 0$. *Предположим, что существуют лучи минимального роста резольвенты* $\arg\lambda = \vartheta_j$, *где* $j = 1, \ldots, J$, *в комплексной плоскости, причем углы между любыми двумя соседними лучами меньше, чем* $2\pi s/n$. *Тогда спектр оператора* T *дискретен, а корневые вектора формируют полную систему в пространствах* $H^-(D)$, $[L^2(D)]^k$ *и* $H^+(D)$.

Доказательство. Ключевым инструментом в доказательстве теоремы является следующая лемма, взятая из [44].

Лемма 1.3.10. *Предположим, что* R *- компактный линейный оператор класса Шаттена* $\mathfrak{S}_p$ *в гильбертовом пространстве* H, *где* $0 < p < \infty$. *Тогда существует последовательность* ρ_j, *для которой* $\rho_j \to 0$, *такая, что для* $|\lambda| = \rho_j$

$$\|\mathcal{R}(\lambda; R)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \text{const}\ \exp(c\,|\lambda|^{-p}).$$

Мы не будем приводить доказательство данной теоремы, так как оно аналогично доказательствам [36, Теорема 3.2] и [63, Теорема 4.2] (для случая скалярного оператора).

□

Данная теорема поднимает вопрос об условиях, при которых соседние лучи минимального роста будут достаточно близки. Следующая лемма описывает ограничения на $\arg\lambda = \vartheta$ для того, чтобы он стал лучом минимального роста для резольвенты T в $\mathbb{C}$.

Лемма 1.3.11. *Каждый луч* $\arg\lambda = \vartheta$ *при* $\vartheta \neq 0$ *– это луч минимального роста для* $\mathcal{R}(\lambda; T_0)$, *и*

$$\|(T_0 - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^-(D))} \leq \begin{cases} (|\lambda|\,|\sin(\arg\lambda)|)^{-1}, & \text{если} \quad |\arg\lambda| \in (0, \pi/2), \\ |\lambda|^{-1}, & \text{если} \quad |\arg\lambda| \in [\pi/2, \pi]. \end{cases} \tag{1.49}$$

Более того, оператор $L_0 - \lambda\,\iota'\iota : H^+(D) \to H^-(D)$ *непрерывно обратим и*

$$\|(L_0 - \lambda\,\iota'\iota)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^-(D), H^+(D))} \leq \begin{cases} |\sin(\arg\lambda)|, & \text{если} \quad |\arg\lambda| \in (0, \pi/2), \\ 1, & \text{если} \quad |\arg\lambda| \in [\pi/2, \pi]. \end{cases} \tag{1.50}$$

Доказательство. По лемме 1.3.9 резольвента $(T_0 - \lambda I)^{-1} : H^-(D) \to H^-(D)$ существует для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, достаточно удаленных от положительной, вещественной оси. Так как оператор $Q_3 = L_0^{-1}\,\iota'\iota$ самосопряжен, то оператор T_0 симметричен, т.е.

$$(T_0 u, g)_{H^-(D)} = (L_0 u, g)_{H^-(D)} = (u, Q_3^{-1} g)_+ = (Q_3^{-1} u, g)_+ = (u, L_0 g)_{H^-(D)} = (u, T_0 g)_{H^-(D)}$$

для всех $u, v \in H^+(D)$. Если $|\arg(\lambda)| \in (0, \pi/2)$, то для $|\lambda| = \rho_j$

$$\|(T_0 - \lambda I)u\|^2_{H^-(D)} = \|(T_0 - \Re\lambda\, I)u\|^2_{H^-(D)} + |\Im\lambda|^2\, \|u\|^2_{H^-(D)} \geq |\lambda|^2 |\sin(\arg\lambda)|^2\, \|u\|^2_{H^-(D)},$$

что и доказывает первую оценку (1.49). Если $|\arg\lambda| \in [\pi/2, \pi]$, то $\Re\lambda \leq 0$, откуда

$$\|(T_0 - \lambda I)u\|^2_{H^-(D)} \geq |\lambda|^2\, \|u\|^2_{H^-(D)}$$

и, таким образом, вторая оценка (1.49) сохраняется.

Теперь из (1.42) следует, что оператор $(L_0 - \lambda\,\iota'\iota)$ инъективен для точки $\lambda \in \mathbb{C}$, достаточно удаленной от положительной вещественной оси. Так как этот оператор фредгольмов, а его индекс равен нулю, то он непрерывно обратим. Наконец, т.к. оператор $Q_3 = L_0^{-1}\,\iota'\iota$ положителен, то если $|\arg\lambda| \in (0, \pi/2)$

$$\|(L_0 - \lambda\,\iota'\iota)u\|_{H^-(D)} = \|(I - \lambda L_0^{-1}\,\iota'\iota)u\|_+ = |\lambda|\, |\Im\lambda^{-1}|\, \|u\|_+ = |\sin(\arg\lambda)|\, \|u\|_+,$$

т.е. вторая оценка (1.50) выполнена. Аналогично получается и первая оценка (1.49). $\square$

Теорема 1.3.9. *Пусть пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $[H^s(D)]^k$ для некоторого $s > 0$ и оценка (1.34) выполнена для некоторой неотрицательной постоянной $c < |\sin(\pi s/n)|$. Тогда все собственные значения замкнутого оператора $T : H^-(D) \to H^-(D)$ принадлежат углу $|\arg\lambda| \leq \arcsin c$, а каждый луч $\arg\lambda = \vartheta$ при $|\vartheta| > \arcsin c$ будет лучом минимального роста для $\mathcal{R}(\lambda; T)$ и система корневых функций полна в пространствах $H^-(D)$, $[L^2(D)]^k$ и $H^+(D)$.*

Доказательство. Во-первых, по лемме 1.3.5 оператор $L : H^+(D) \to H^-(D)$ обратим. Действительно, $L = L_0 + \delta L$, где $\delta L : H^+(D) \to H^-(D)$ – ограниченный оператор с нормой $\|\delta L\|_{\mathcal{L}(H^+(D), H^-(D))} < 1 = \|L_0^{-1}\|^{-1}$. В частности, по этой лемме и формуле (1.42), спектр соответствующего оператора T не совпадает со всей комплексной плоскостью.

Зафиксируем $\vartheta \neq 0$ и пусть $m_\vartheta = |\sin\vartheta|$, если $|\vartheta| \in (0, \pi/2)$, и $m_\vartheta = 1$, если $|\vartheta| \in [\pi/2, \pi]$. Итак, если $m_\vartheta > c$, то

$$\|\delta L\|_{\mathcal{L}(H^+(D), H^-(D))} \leq c < m_\vartheta \leq \|(L_0 - \lambda\,\iota'\iota)^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(H^+(D), H^-(D))}.$$

Отсюда следует, что оператор $(L - \lambda\,\iota'\iota) : H^+(D) \to H^-(D)$ непрерывно обратим и

$$\|(L - \lambda\,\iota'\iota)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^-(D), H^+(D))} \leq (m_\vartheta - c)^{-1}. \tag{1.51}$$

Для получения оценки (1.48) необходимо показать, что существует такая постоянная

$C > 0$ для всех элементов $u \in H^+(D)$ для которой выполнено

$$C\,|\lambda|^{-1}\,\|(T-\lambda I)u\|_{H^-(D)} \geq \|u\|_{H^-(D)}.$$

Если $\arg\lambda = \vartheta$, при $m_\vartheta > c$, то, пользуясь (1.42), получаем, что

$$\|(T-\lambda I)u\|_{H^-(D)} = \|(L-\lambda\,\iota'\iota)u\|_{H^-(D)} = (m_\vartheta - c)\,\|u\|_+ = (m_\vartheta) - c)\,\|u\|_{H^-(D)}$$

для всех $u \in H^+(D)$. Поэтому, взяв любую точку λ на луче $\arg\lambda = \vartheta$, удовлетворяющую $m_\vartheta > c$, получим, что

1) область значения оператора $(T-\lambda I) : H^-(D) \to H^-(D)$ есть замкнутое подпространство пространства $H^-(D)$.

2) нулевое пространство оператора $(T-\lambda I) : H^-(D) \to H^-(D)$ тривиально.

Согласно (1.42), область значения оператора $(T-\lambda I)$ совпадает с областью значения $(L-\lambda\,\iota'\iota)$, т.е. со всем пространством $H^-(D)$. Следовательно, резольвента $(T-\lambda I)^{-1}$ существует для всех λ, достаточно удаленных от угла $|\arg\lambda| \leq \arcsin c$ в комплексной плоскости. Пользуясь (1.42) и леммой 1.3.11, получаем, что

$$T-\lambda I = L_0 + \delta L - \lambda\,\iota'\iota = (I + \delta L(L_0 - \lambda\,\iota'\iota)^{-1})(T_0 - \lambda I) \tag{1.52}$$

на пространстве $H^+(D)$ и

$$\|(I+\delta L(L_0-\lambda\,\iota'\iota)^{-1})u\|_{H^-(D)} = \|u\|_{H^-(D)} - \|\delta L\|_{\mathcal{L}(H^+(D),(H^-(D)))}\,\|(L_0-\lambda\,\iota'\iota)^{-1}u\|_{H^+(D)} =$$

$$= (1 - c/m_\vartheta)\,\|u\|_{H^-(D)}.$$

Поэтому оператор $(I+\delta L(L_0-\lambda\,\iota'\iota)^{-1})$ непрерывно обратим, так как он есть оператор Фредгольма с нулевым индексом и имеет тривиальное нулевое пространство. Более того,

$$\|(I+\delta L(L_0-\lambda\,\iota'\iota)^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^-(D))} \leq (1-c/m_\vartheta)^{-1}.$$

Теперь (1.52) означает, что

$$\begin{aligned}
&\|(T-\lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^-(D))} \leq \\
&\leq \ \|(I+\delta L(L_0-\lambda\,\iota'\iota)^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^-(D))}\|(T_0-\lambda\,I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^-(D))} \leq \qquad (1.53)\\
&\leq \ (1-c/m_\vartheta)^{-1} m_\vartheta^{-1}|\lambda|^{-1} \qquad (1.54)
\end{aligned}$$

для всех λ, удовлетворяющих $\arg\lambda = \vartheta$ при $m_\vartheta > c$.

Таким образом, все лучи вне угла $|\arg\lambda| \leq \arcsin c$ будут лучами минимального роста. По условию теоремы углы между парами соседних лучей $\arg\lambda = \vartheta$, меньше, чем $2\pi s/n$, и поэтому полнота корневых функций следует из теоремы 1.3.8. □

По сравнению с [4], наш вклад состоит в использовании некоэрцитивных краевых задач.

Теорема 1.3.10. *Пусть пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $[H^s(D)]^k$ для некоторого $s > 0$, а оператор $\delta L : H^+(D) \to H^-(D)$ будет ограниченный, линейный и с нормой меньше, чем $|\sin(\pi s/n)|$. Также предположим, что оператор $\mathcal{C} : H^+(D) \to H^-(D)$ компактен. Тогда верны следующие утверждения:*

1) спектр оператора T, соответствующего оператору $L_0 + \delta L + \mathcal{C}$ в пространстве $H^-(D)$, дискретен;

2) для любого $\varepsilon > 0$ все собственные значения оператора T (за исключением конечного числа) принадлежат углу $|\arg(\lambda)| < \arcsin \|\delta L\| + \varepsilon$;

3) каждый луч $\arg \lambda = \vartheta$ при условии, что

$$|\vartheta| > \arcsin \|\delta L\|, \tag{1.55}$$

будет лучшем минимального роста $\mathcal{R}(\lambda; T)$;

4) система корневых векторов оператора T полна в пространствах $H^-(D)$, $[L^2(D)]^k$, $H^+(D)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что оператор $(L_0 + \delta L) : H^+(D) \to H^-(D)$ непрерывно обратим и, следовательно, оператор $(L_0 + \delta L + \mathcal{C}) : H^+(D) \to H^-(D)$, действительно, фредгольмов.

Из теоремы 1.3.9 следует, что все лучи, удовлетворяющие (1.55), будут лучами минимального роста для $\mathcal{R}(\lambda; T_0 + \delta T)$ для замкнутого оператора $(T_0 + \delta T)$ в пространстве $H^-(D)$, где $\mathcal{R}(\lambda; T_0 + \delta T)$ соответствует $(L_0 + \delta L) : H^+(D) \to H^-(D)$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда оценки (1.51), (1.53) означают, что существуют постоянные c_1,c_2, зависящие от ε, такие, что

$$\begin{aligned} \|(L_0 + \delta L - \lambda\, \iota' \iota)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^-(D), H^+(D))} &\leq c_1, & (1.56)\\ \|(T_0 + \delta T - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^-(D))} &\leq c_2\, |\lambda|^{-1} & (1.57) \end{aligned}$$

для всех λ, удовлетворяющих

$$|\arg \lambda| \geq \arcsin \|\delta L\|_{\mathcal{L}(H^+(D), H^-(D))} + \varepsilon. \tag{1.58}$$

Далее, используя (1.42), (1.56) и теорему 1.3.9, получим

$$T - \lambda I = \left(I + \mathcal{C}(L_0 + \delta L - \lambda\, \iota' \iota)^{-1}\right)(T_0 + \delta T - \lambda I) \tag{1.59}$$

на $H^+(D)$ для всех лучей, удовлетворяющих (1.58).

Докажем теперь, что существует постоянная $M_\varepsilon > 0$, зависящая от ε, такая, что оператор $(I + \mathcal{C}(L_0 + \delta L - \lambda\, \iota' \iota)^{-1})$ инъективен для всех таких λ, попадающих под условия (1.58) и $|\lambda| \geq M_\varepsilon$ одновременно. Доказательство проведем, используя аргументы от противного, аналогично теореме 1.3.6.

Предположим, что для каждого натурального числа k существует функция $f_k \in H^-(D)$, удовлетворяющая $\|f_k\|_{H^-(D)} = 1$, и λ_k, попадающий под условия (1.58) и $|\lambda_k| \geq k$ одновременно, так, чтобы

$$\left(I + \mathcal{C}(L_0 + \delta L - \lambda_k \,\iota'\iota)^{-1}\right) f_k = 0. \tag{1.60}$$

Из (1.56) следует, что последовательность $u_k = (L_0 + \delta L - \lambda_k \iota'\iota)^{-1} f_k$ ограничена в пространстве $H^+(D)$. По принципу слабой компактности для гильбертовых пространств, без ограничения общности, можно считать, что последовательности $\{f_k\}$, $\{u_k\}$ сходятся слабо в пространствах $H^-(D)$, $H^+(D)$ к функциям f, u соответственно. Так как C компактен, то последовательность $\{\mathcal{C}u_k\}$ сходится к $\mathcal{C}u$ в пространстве $H^-(D)$ и, согласно (1.60), последовательность $\{f_k\}$ сходится к f. Очевидно, $\|f\|_{H^-(D)} = 1$. В частности, последовательность $\{\mathcal{C}(L_0 + \delta L - \lambda_k \,\iota'\iota)^{-1}) f_k\}$ сходится к $(-f)$, откуда следует, что

$$f = -\mathcal{C}u. \tag{1.61}$$

Далее, так как $f_k = (L_0 + \delta L - \lambda_k \,\iota'\iota)\, u_k$, то устремляя $k \to \infty$ в этой формуле, получим

$$f = (L_0 + \delta L)u - \lim_{k\to\infty} \lambda_k \,\iota'\iota\, u_k.$$

В силу компактности оператора $\iota'\iota$ последовательность $\{\iota'\iota \; u_k\}$ сходится к $\iota'\iota \; u$ в пространстве $H^-(D)$, и $\iota'\iota u \neq 0$, т.к., во-первых, справедлива формула (1.61), а, во-вторых, оператор $\iota'\iota$ инъективен. Поэтому слабый предел

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \,\iota'\iota\, u_k = (L_0 + \delta L)u - f$$

не существует для неограниченных $\{\lambda_k\}$, что и дает противоречие.

Далее, оператор $(I + \mathcal{C}(L_0 + \delta L - \lambda \,\iota'\iota)^{-1})$ фредгольмов и его индекс равен нулю. Следовательно, он непрерывно обратим для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, подходящих под условия (1.58) и $|\lambda| \geq M_\varepsilon$ одновременно. Установим

$$N_\varepsilon = \inf \|(I + \mathcal{C}(L_0 + \delta L - \lambda \,\iota'\iota)^{-1}) f\|_{H^-(D)} \geq 0,$$

где точная нижняя грань берется по всем $f \in H^-(D)$ с единичной нормой и по всем точкам $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющим (1.58) и $|\lambda| \geq M_\varepsilon$ одновременно. Утверждается, что $N_\varepsilon > 0$. Для доказательства этого факта будем аргументировать от противного.

Предположим $N_\varepsilon = 0$. Тогда существует последовательность $\{f_k\}$ в $H^-(D)$ такая, что норма каждого элемента f_k равна 1, и существует последовательность $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющая (1.58), $|\lambda| \geq M_\varepsilon$ одновременно как и выше, для которых выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|(I + \mathcal{C}(L_0 + \delta L - \lambda_k \,\iota'\iota)^{-1}) f_k\|_{H^-(D)} = 0. \tag{1.62}$$

Вновь, согласно (1.56), последовательность $u_k = (L_0 + \delta L - \lambda_k \, \iota'\iota)^{-1} f_k$ ограничена в $H^+(D)$. По принципу слабой компактности для гильбертовых пространств последовательности $\{f_k\}$ и $\{u_k\}$ слабо сходятся в $H^-(D)$, $H^+(D)$ к функциям f, u соответственно. Так как $\mathcal{C}$ компактен, то последовательность $\{\mathcal{C}u_k\}$ сходится к $\mathcal{C}u$ в $H^-(D)$ и, таким образом, $\{f_k\}$ сходится к f в силу (1.62); очевидно, что $\|f\|_{H^-(D)} = 1$. В частности, получаем, что последовательность $\mathcal{C}(L_0 + \delta L - \lambda_k, \iota'\iota)^{-1}) \, f_k$ сходится к $(-f)$, откуда при $u \neq 0$

$$f = -\mathcal{C}u. \tag{1.63}$$

Если последовательность $\{\lambda_k\}$ ограничена в $\mathbb{C}$, то по принципу компактности при переходе к подпоследовательности при необходимости можно считать, что $\{\lambda_k\}$ сходится к $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, которая удовлетворяет неравенствам (1.58) и $|\lambda| \geq M_\varepsilon$ одновременно. Так как

$$(L_0 + \delta L - \lambda_k \, \iota'\iota)^{-1} f_k - (L_0 + \delta L - \lambda_0 \, \iota'\iota)^{-1} f =$$

$$= (L_0 + \delta L - \lambda_j \, \iota'\iota)^{-1})(f_k - f) + \big((L_0 + \delta L - \lambda_k \, \iota'\iota)^{-1} - (L_0 + \delta L - \lambda_0 \, \iota'\iota)^{-1}\big) \, f$$

и для нормы этого оператора верно, что

$$\| \big((L_0 + \delta L - \lambda_k \, \iota'\iota)^{-1} - (L_0 + \delta L - \lambda_0 \, \iota'\iota)^{-1}\big) \, f \|_{H^-(D)} \leq$$

$$\leq |\lambda_k - \lambda_0| \, \|(L_0 + \delta L - \lambda_k \, \iota'\iota)^{-1}\| \, \|(L_0 + \delta L - \lambda_0 \, \iota'\iota)^{-1}\| \, \|f\|_{H^-(D)},$$

то оценка (1.56) означает, что в этом случае последовательность $\{(L_0 + \delta L - \lambda_k \, \iota'\iota)^{-1} f_k\}$ сходится к $(L_0 + \delta L - \lambda_0 \, \iota'\iota)^{-1} f$, и, таким образом,

$$\big(I + \mathcal{C}(L_0 + \delta L - \lambda_0 \, \iota'\iota)^{-1}\big) \, f = 0$$

в силу (1.62). Но λ_0 удовлетворяет (1.58) и $|\lambda| \geq M_\varepsilon$, и, следовательно, инъективность оператора $I + \mathcal{C}(L_0 + \delta L - \lambda_0 \, \iota'\iota)^{-1}$ (установленная выше) дает $f = 0$. Это противоречит утверждению, что $\|f\| = 1$.

Если последовательность $\{\lambda_k\}$ неограниченна в $\mathbb{C}$, то достаточно повторить приведенные выше аргументы. Действительно, в этом случае $f_k = (L_0 + \delta L - \lambda_k \, \iota'\iota) u_k$ и при переходе к слабому пределу по $k \to \infty$ получим $f = (L_0 + \delta L) u - \lim_{k\to\infty} \lambda_k \, \iota'\iota \, u_k$. Так как оператор $\iota'\iota$ компактен, то последовательность $\{\iota'\iota \, u_k\}$ сходится к $\iota'\iota \, u$ в пространстве $H^-(D)$. Более того, $\iota'\iota \, u \neq 0$ в силу (1.63) и инъективности оператора $\iota'\iota$. Это показывает, что слабый предел $\lim_{n\to\infty} \lambda_k \, \iota'\iota \, u_k = (L_0 + \delta L) u - f$ не существует, если $\{\lambda_k\}$ не ограничена в $\mathbb{C}$. Получаем противоречие. Поэтому $N_\varepsilon > 0$ и для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих (1.58) и $|\lambda| \geq M_\varepsilon$ одновременно, мы получим

$$\| \big(I + \mathcal{C}(L_0 + \delta L - \lambda \, \iota'\iota)^{-1}\big)^{-1} \|_{\mathcal{L}(H^-(D))} \leq 1/N_\varepsilon. \tag{1.64}$$

Из оценок (1.56), (1.64) и формулы (1.59) следует, что для любых заданных $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих (1.58) и $|\lambda| \geq M_\varepsilon$ одновременно, резольвента $\mathcal{R}(\lambda; T)$ существует и

$$\|\mathcal{R}(\lambda; T)\|_{\mathcal{L}(H^-(D))} \leq \mathrm{const}\,(\varepsilon)\,|\lambda|^{-1}.$$

Так как $\mathcal{C}$ – компактен, то существует только конечное число $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < N_\varepsilon$, таких, что оператор $(I + \mathcal{C}(L_0 - \lambda\,\iota'\iota))$ не инъективен. Поэтому из формулы (1.59) все собственные значения оператора T, соответствующие $L_0 + \delta L + \mathcal{C}$ (за исключением конечного числа), принадлежат углу $|\arg\lambda| < \arcsin\|\delta L\| + \varepsilon$. Наконец, так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то все лучи (1.55) будут лучами минимального роста. По условию теоремы, углы между парами соседних лучей $\arg\lambda = \vartheta$, удовлетворяющих (1.55), должны быть меньше, чем $2\pi s/n$, поэтому из теоремы 1.3.8 следует требуемое. □

Следствие 1.3.3. *В условиях теоремы 1.3.5, если $\tilde{M} < \sin\pi/2k$, то система корневых функций замкнутого оператора T полна в пространствах $H^-(D)$, $[L^2(D)]^k$ и $H^+(D)$, и для любого $\delta > 0$ все собственные значения T (кроме их конечного числа) принадлежат углу $|\arg\lambda| < \delta + \arcsin\tilde{M}$ в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Следует немедленно из теоремы 1.3.5, теоремы 1.3.3 и доказательства теоремы 1.3.9 (также и из спектральной теории несамосопряженных операторов: см., например, [31, Теорема 9.2, Теорема 9.10, Теорема 10.5, Теорема 10.6, Следствие 9.4, Следствие 9.5, Следствие 9.9], [63, Теорема 4.5]). □

1.4 О регуляризации задачи Коши для эллиптических систем

1.4.1 Постановка задачи Коши

Пусть $A = \sum_{j=1}^n A_j(x)\partial_j + A_0(x)$ – матричный (неоднородный) дифференциальный оператор первого порядка в области $X \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $A_j^*(x)$ – сопряженная матрица для $A_j(x)$ и $A^* = -\sum_{j=1}^n \partial_j(A_j^*(x)\cdot) + A_0^*$ будет формально-сопряженным оператором для A.

Если оператор A – эллиптический, то тогда дифференциальный оператор второго порядка A^*A сильно эллиптичен на X. Всюду далее мы будем рассматривать только эллиптический оператор A на X. Более того, потребуем, чтобы свойство единственности в малом (1.3) выполнялось для операторов A и A^* одновременно.

Рассмотрим некорректную задачу Коши для оператора A в области D с граничными значениями на множестве S: *по заданному распределению f на D, найти распределение u, удовлетворяющее в собственном смысле*

$$\begin{cases} Au &= f \quad \text{в} \quad D, \\ u &= 0 \quad \text{на} \quad S. \end{cases} \tag{1.65}$$

Для того, чтобы проконтролировать поведение решения задачи (1.65), естественно ввести определенные функциональные пространства. Для $\varepsilon \geq 0$ рассмотрим эрмитову форму $\varepsilon \geq 0$:

$$(u, v)_{+,\varepsilon} = \varepsilon\,(u, v)_{[L^2(\partial D)]^k} + (Au, Av)_{[L^2(D)]^k}$$

на пространстве $[C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$, попадающую в класс форм, изученных в предыдущем параграфе. Как следует из теоремы 1.2.1, пространство $H^+(D, S)$ непрерывно вложено в $[H^{1/2-\delta}(D)]^k$, для любого $\delta > 0$.

Очевидно, что нормы $\|u\|_{+,\varepsilon}$ и $\|u\|_{+,\delta}$, индуцированные соответствующими скалярными произведениями будут эквиваленты для любых положительных ε и δ. В частности,

$$\sqrt{\varepsilon}\,\|u\|_{+,1} \leq \|u\|_{+,\varepsilon} \leq \|u\|_{+,1} \text{ для всех } u \in H^+(D) \text{ и } 0 < \varepsilon \leq 1. \tag{1.66}$$

На самом деле эрмитова форма $(\cdot, \cdot)_{+,\varepsilon}$ является частным случаем смешанной задачей (1.29) для оператора A^*A, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Задачу (1.65) на пространстве $H^+(D; S)$ мы будем рассматривать как исследование ограниченного линейного оператора

$$A : H^+(D; S) \to [L^2(D)]^k. \tag{1.67}$$

Замечание 1.4.1. *Теорема 1.2.1 означает, что при отсутствии коэрцитивной оценки в пространствах $H^+(D, S)$ без дополнительных пояснений можно использовать только слагаемые типа $a_1(x)A$, где a_1 –это функциональная $(k \times k)$-матрица с элементами $a_1^{(p,q)}$, удовлетворяющими $a_1^{(p,q)} \in L^\infty(D)$.*

Лемма 1.4.1. *Пусть оператор A^* обладает свойством* (1.3)*, а внутренняя часть $\partial D \setminus \overline{S}$ на ∂D будет не пуста. Если $\partial D \in C^\infty$, то область значений оператора (1.67) плотна в $[L^2(D)]^k$.*

Доказательство. Пусть $g \in [L^2(D)]^k$ удовлетворяет следующему условию

$$(g, Av)_{[L^2(D)]^k} = 0 \text{ для всех } v \in H^+(D). \tag{1.68}$$

Пусть ρ – это определяющая функция для области D: $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 0\}$. Так как $\partial D \subset C^\infty$, то можно выбрать $\rho \in [C^\infty(U)]^k$ для окрестности U границы ∂D, с условием $|\nabla\rho| \neq 0$ на ∂D, так, что векторное поле $\nu = \frac{\nabla\rho}{|\nabla\rho|}$ будет единичным внешним нормальным векторным полем к ∂D. Для достаточно маленьких $\delta > 0$ рассмотрим области $D_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < -\delta\}$.

Очевидно, что $D_\delta \Subset D$ и $\rho_\delta = \rho + \delta$ есть определяющие функции для областей D_δ с условием $\nabla\rho = \nabla\rho_\delta$ и $\nu_\delta = \frac{\nabla\rho}{|\nabla\rho|}$. Иными словами, ν_δ есть единичное внешнее поле вектора нормали к ∂D_δ.

Поскольку пространство $H^+(D)$ содержит все функции с компактным носителем D, то (1.68) означает, что $A^*g = 0$ в D, а значит $g \in [C^\infty(D)]^k$ поскольку оператор A

эллиптичен и имеет гладкие коэффициенты. Интегрируя по частям, мы получаем

$$0 = \lim_{\delta \to +0} (g, Av)_{[L^2(D)]^k} = \int\limits_{\partial D_\delta} v^* \left(\sum_{j=1}^{n} A_j^* \nu_j \right) g \, ds_\delta$$

для всех $v \in H^+(D)$. Таким образом, $g = 0$ на $\partial D \setminus \overline{S}$ в смысле слабых граничных значений, см. [60]. Далее, так как g – решение краевой задачи для эллиптического оператора A^*, то по теореме единственности для задачи Коши [60, Теорема 2.8] функция g тождественно равна нулю в D. □

Итак, мы описали лишь замыкание образа отображения (1.67). Но вопрос описания самого образа (1.67) – намного более сложная задача. Первым шагом в этом направлении будет следующая лемма.

Лемма 1.4.2. *Пусть $\partial D \in C^\infty$, а оператор A^* обладает свойством* (1.3). *Если $f \in [L^2(D)]^k$, то функция $u \in H^+(D)$ будет решением задачи* (1.65) *тогда и только тогда, когда для всех $v \in H^+(D)$ верно, что*

$$(Au, Av)_{[L^2(D)]^k} = (f, Av)_{[L^2(D)]^k}, \tag{1.69}$$

Доказательство. Если задача (1.65) разрешима и u – это одно из ее решений, то тогда (1.69), очевидно, выполнено. Обратно, если (1.69) выполнено для элемента $u \in H^+(D)$, то тогда

$$(Au - f, Av)_{[L^2(D)]^k} = 0,$$

или, иначе, $A^*(Au - f) = 0$ в D, так как пространство $H^+(D)$ содержит все гладкие функции с компактным носителем в D. В частности, функция $(Au - f)$ будет решением эллиптического оператора A^* в D. Интегрируя по частям как в доказательстве леммы 1.4.1, получаем, что

$$\lim_{\delta \to +0} \int\limits_{\partial D_\delta} v^* \left(\sum_{j=1}^{n} A_j^* \nu_j \right) (Au - f) \, ds_\delta = (v, (A^*(Au - f)))_{[L^2(D)]^k} - (Av, Au - f)_{[L^2(D)]^k} = 0 \tag{1.70}$$

для всех $v \in [C^\infty(\overline{D}, \overline{S})]^k$. Следовательно, также как и в доказательстве леммы 1.4.1, $(Au - f) = 0$ на $\partial D \setminus \overline{S}$ в смысле слабых граничных значений.

Наконец, так как $(Au - f)$ – это решение краевой задачи для эллиптического оператора A^*, то тогда $(Au - f)$ тождественно равно нулю в D, см. [60, Теорема 2.8]. □

Уточним смысл равенства (1.69). Более подробно, оно означает, что решение $u \in H^+(D)$ задачи Коши (1.65) на самом деле является решением смешанной задачи типа Зарембы

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} A^* A u & = & \overline{A}^* f & \text{в} & D, \\ tr(u) & = & 0 & \text{на} & S, \\ \nu_{A,\partial D}(Au) & = & \nu_{A,\partial D}(f) & \text{на} & \partial D \setminus \overline{S} \end{array} \right. \tag{1.71}$$

(см., например, [6], [64], [72]). Отсюда $A^*A : H^+(D;S) \to H^-(D;S)$. Действительно, из доказательства леммы 1.4.2 следует равенство $A^*Au = A^*f$ в D в смысле распределений и равенство $\nu_{A,\partial D}(Au - f) = 0$ на $\partial D \setminus \overline{S}$ в смысле слабых граничных значений. В частности, если $\nu_{A,\partial D}(f)$ хорошо определена на $\partial D \setminus \overline{S}$, то тогда $\nu_{A,\partial D}(Au)$ хорошо определена на $\partial D \setminus \overline{S}$. Безусловно, смешанная задача (1.71), рассмотренная в подходящих пространствах, дает ничто иное, как (1.69). В следующем подпункте § 1.4 будут получены условия разрешимости задачи (1.65).

1.4.2 Регуляризация задачи Коши

Рассмотрим следующую возмущенную задачу Коши (с учетом леммы 1.4.2, рассмотренной выше):

Задача 1.4.1. *Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1]$. По заданной функции $f \in [L^2(D)]^k$, найти элемент $u_\varepsilon \in H^+(D)$ такой, что для любого $v \in H^+(D)$ будет выполнено*

$$(Au_\varepsilon, Av)_{[L^2(D)]^k} + \varepsilon\,(u_\varepsilon, v)_{[L^2(\partial D\setminus\overline{S})]^k)} = (f, Av)_{[L^2(D)]^k}. \tag{1.72}$$

Как и в предыдущем параграфе, уравнение (1.72) приводит к возмущению смешанной задачи (1.71). Более точно,

$$\left\{\begin{array}{rcll} A^*Au_\varepsilon & = & A^*f & \text{в} \quad D, \\ tr(u_\varepsilon) & = & 0 & \text{на} \quad S, \\ \nu_{A,\partial D}(Au_\varepsilon) + \varepsilon\, tr(u_\varepsilon) & = & \nu_{A,\partial D}(f) & \text{на} \quad \partial D \setminus \overline{S}. \end{array}\right. \tag{1.73}$$

Принципиальная разница между задачей (1.65) и задачей 1.4.1 в том, что последняя корректна в пространстве $H^+(D)$.

Лемма 1.4.3. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любой $f \in [L^2(D)]^k$ существует единственное решение $u_\varepsilon(f) \in H^+(D)$ задачи 1.4.1. Более того, для него верно неравенство*

$$\|u_\varepsilon(f)\|_{+,\varepsilon} \le \|f\|_{[L^2(D)]^k}.$$

Доказательство. Немедленно следует из леммы 1.3.4, примененной к форме $(\cdot,\cdot)_{+,\varepsilon}$. □

Грубую оценку для семейства $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ можно получить из неравенства (1.66), леммы 1.4.3 следующим образом:

$$\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1} \le \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|u_\varepsilon(f)\|_{+,\varepsilon} \le \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\|f\|_{[L^2(D)]^k},\ \varepsilon \in (0,1]. \tag{1.74}$$

Тогда это семейство может быть неограниченным при $\varepsilon \to +0$. Выясним как поведение семейства $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon>0}$ влияет на разрешимость задачи (1.65).

Теорема 1.4.1. *Семейство* $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ *ограниченно тогда и только тогда, когда существует такая функция* $u \in H^+(D)$, *что выполнено* (1.69). *Более того,* $\lim_{\varepsilon\to+0}\|Au_\varepsilon(f) - f\|_{[L^2(D)]^k} = 0$ *и последовательность* $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ *сходится слабо в* $H^+(D)$ *при* $\varepsilon \to +0$ *к решению* $u \in H^+(D)$ *задачи* (1.65). *А также* $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ *сходится к* u *в* $[H^s(D)]^k$ *для всех* $s < 1/2$ *также и в пространстве* $[H^1_{\mathrm{loc}}(D\cup S)]^k$.

Доказательство. Сначала мы докажем следующую лемму.

Лемма 1.4.4. *Пусть существует такое множество* $M \subset (0,1]$, *что*

1) *нуль является предельной точкой* M;

2) *семейство* $\{\|u_\delta(f)\|_{+,1}\}_{\delta\in M}$ *ограниченно.*

Тогда существует такая функция $u \in H^+(D)$, *что выполнено* (1.69).

Доказательство. Предположим, что нуль является предельной точкой множества M и семейство функций $\{\|u_\delta(f)\|_{+,1}\}_{\delta\in M}$ ограниченно. Согласно (1.72) получаем

$$(Au_\delta(f), Av)_{[L^2(D)]^k} + \delta\,(u_\delta(f), v)_{[L^2(D)]^k} = (f, Av)_{[L^2(D)]^k}$$

для любого $v \in H^+(D)$. Переходя к пределу при $M \ni \delta \to +0$ в последнем равенстве и пользуясь тем, что $\{u_\delta(f)\}_{\delta\in M}$ ограниченно, получаем, что для любого $v \in H^+(D)$

$$\lim_{\delta\to+0}(Au_\delta(f), Av)_{[L^2(D)]^k} = (f, Av)_{[L^2(D)]^k}. \tag{1.75}$$

Напомним, что из стандартной теории функционального анализа любое ограниченное множество в гильбертовом пространстве слабо компактно. Следовательно, существует такая подпоследовательность $\{u_{\delta_j}(f)\} \subset H^+(D)$, которая сходится слабо в этом пространстве к некоторому элементу $u \in H^+(D)$. Здесь $\{\delta_j\} \to 0$ при $j \to \infty$. Покажем теперь, что $\{u_{\delta_j}(f)\}$ сходится слабо к u в $[H^s(D)]^k$ при $s < 1/2$ и $j \to \infty$.

Вложение $i_s : H^+(D) \to [H^s(D)]^k$ будет непрерывно для любого $s < 1/2$ по теореме (1.2.1). Следовательно, сопряженный оператор $i_s^\star : [H^s(D)]^k \to H^+(D)$ будет также ограничен и для любого $v \in [H^s(D)]^k$

$$\lim_{j\to\infty}(i_s u_{\delta_j}(f), v)_{[H^s(D)]^k} = \lim_{j\to\infty}(u_{\delta_j}(f), i_s^\star v)_{H^+(D)} = (u, i_s^\star v)_{H^+(D)}.$$

Это в точности означает, что семейство $\{u_{\delta_j}(f)\}$ сходится слабо в пространстве $[H^s(D)]^k$.

Обозначим через $A^\star : [L^2(D)]^k \to H^+(D)$ сопряженный к ограниченному линейному оператору $A : H^+(D) \to [L^2(D)]^k$. Простые вычисления показывают, что

$$\lim_{M\ni\delta\to+0}(Au_\delta(f), Av)_{[L^2(D)]^k} = \lim_{M\ni\delta\to+0}(u_\delta(f), A^\star Av)_{H^+(D)} = \tag{1.76}$$

$$= (u(f), A^\star Av)_{H^+(D)} = (Au(f), Av)_{[L^2(D)]^k}$$

для любого $v \in H^+(D)$. Комбинируя (1.75) и (1.76), получаем, что (1.69) выполняется для функции $u \in H^+(D)$. □

Лемма 1.4.5. *Если существует функция $u \in H^+(D)$, удовлетворяющая (1.69), то тогда семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ ограниченно и*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|A(u_\varepsilon(f) - u)\|_{[L^2(D)]^k} = 0.$$

Более того, семейство $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится слабо к решению $u \in H^+(D)$ при $\varepsilon \to +0$ и сходится к решению u в $[H^s(D)]^k$ для всех $s < 1/2$.

Доказательство. Пусть существует $u \in H^+(D)$, удовлетворяющее (1.69). Обозначим $R_\varepsilon = u_\varepsilon(f) - u$. Тогда из (1.69) и (1.72) следует, что для любого $v \in H^+(D)$ верно

$$(AR_\varepsilon, Av)_{[L^2(D)]^k} + \varepsilon\,(R_\varepsilon, v)_{[L^2(\partial D)]^k} = -\varepsilon\,(u, v)_{[L^2(\partial D)]^k}. \tag{1.77}$$

Так как

$$|-\varepsilon\,(u, v)_{[L^2(\partial D)]^k}| \le \varepsilon\|u\|_{[L^2(\partial D)]^k}\|v\|_{[L^2(\partial D)]^k} \le \sqrt{\varepsilon}\|u\|_{[L^2(\partial D)]^k}\|v\|_{+,\varepsilon},$$

то тогда отображение $v \mapsto -\varepsilon\,(u, v)_{[L^2(\partial D)]^k}$ определяет непрерывный линейный функционал $g_\varepsilon(u)$ в пространстве $H^+(D)$ и

$$\|g_\varepsilon(u)\| \le \sqrt{\varepsilon}\|u\|_{[L^2(\partial D)]^k}.$$

Таким образом (1.77) означает, что $R_\varepsilon = w_\varepsilon(g_\varepsilon(u))$ будет решением задачи 1.72. Далее, в соответствии с (1.66), леммой 1.4.3 и (1.74) получаем

$$\|R_\varepsilon\|_{+,1} \le \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\|R_\varepsilon\|_{+,\varepsilon} \le \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\sqrt{\varepsilon}\,\|u\|_{[L^2(\partial D)]^k} = \|u\|_{[L^2(\partial D)]^k}.$$

Следовательно, семейства $\{\|R_\varepsilon\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$, $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ ограничены. Поэтому равенство (1.77) просто означает, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|A(u_\varepsilon(f) - u)\|^2_{[L^2(D)]^k} = \lim_{\varepsilon\to+0} \|AR_\varepsilon\|^2_{[L^2(D)]^k} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\left(\|R_\varepsilon\|^2_{[L^2(\partial D)]^k} + (u, R_\varepsilon)_{[L^2(\partial D)]^k}\right) = 0.$$

Наконец покажем, что семейство $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится слабо к решению u в пространстве $H^+(D)$ при $\varepsilon \to +0$. Доказательство будем строить от противного. Действительно, если $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ не сходится слабо к u в $H^+(D)$, тогда существует $v \in H^+(D)$, $\gamma > 0$ и последовательность $\{\varepsilon_j\} \to +0$ при $j \to \infty$, такие, что

$$|(u_{\varepsilon_j} - u, v)_{+,1}| \ge \gamma \tag{1.78}$$

для любого $j \in \mathbb{N}$. Но последовательность $\{u_{\varepsilon_j}\}$ ограничена в гильбертовом пространстве $H^+(D)$, и, следовательно, существует слабосходящаяся подпоследовательность в $H^+(D)$. Для упрощения обозначений, пусть она будет все также $\{u_{\varepsilon_j}\}$. Как мы уже видели в доказательстве леммы 1.4.4, слабый предел последовательность $\{u_{\varepsilon_j}\}$ есть решение u. Это противоречит (1.78), а, следовательно, первая часть леммы доказана.

Наконец, согласно теореме 1.2.1 пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство Соболева-Слободецкого $[H^{1/2-\delta}(D)]^k$ при любом $\delta > 0$. Хорошо известно, что компактные операторы в гильбертовом пространстве переводят слабо сходящуюся последовательность в сходящуюся. Таким образом, из теоремы Реллиха-Кондрашова о компактных вложениях для пространств Соболева последовательность $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится к u в $[H^s(D)]^k$ для любого $s < 1/2$ при $\varepsilon \to +0$. $\square$

Доказательство первой части теоремы 1.4.1 немедленно следует из лемм 1.4.4 и 1.4.5. $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ Чтобы завершить доказательство, необходимо показать, что $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ будет сходиться к u в топологии пространства $[H^1_{\mathrm{loc}}(D \cup S)]^k$, если $u \in H^+(D)$ – это решение задачи (1.65). Действительно, семейство $\{u_\varepsilon(f) - u\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ ограниченно в $H^+(D)$ так как

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|A(u_\varepsilon(f) - u)\|_{[L^2(D)]^k} = 0, \quad tr(u_\varepsilon(f) - u) = 0$$

на S для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ и по лемме 1.4.5. Тогда, применяя [67, Теорема 7.2.6], получаем, что последовательность $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится к u в $[H^1_{\mathrm{loc}}(D \cup S)]^k$. $\square$

Отметим, что, в отличие от [62], рассматриваются несколько иные пространства соболевского типа, и взамен слабой аппроксимирующей последовательности $\{u_\varepsilon\}$ в $[L^2(D)]^k$ при $\varepsilon \to +0$ предоставляется последовательность, аппроксимирующая решение в $[H^{1/2-\delta}(D)]^k$-норме для любого $\delta > 0$.

Наконец, выпишем формулу карлемановского типа для решений задачи (1.65).

Однако, теорема 1.2.1 вместе с теоремой вложения Реллиха-Кондрашова и теоремой Гильберта-Шмидта дают существенное преимущество.

Лемма 1.4.6. *Для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ существуют положительные числа $\{\lambda^{(\varepsilon)}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и функции $\{b^{(\varepsilon)}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^+(D)$ такие, что*

$$(Ab^{(\varepsilon)}_k, Av)_{[L^2(D)]^k} + \varepsilon\,(b^{(\varepsilon)}_k, v)_{[L^2(\partial D\setminus\overline{S})]^k} = \lambda^{(\varepsilon)}_k (b^{(\varepsilon)}_k, v)_{[L^2(D)]^k}$$

для любого $v \in H^+(D)$, где система $\{b^{(\varepsilon)}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ есть ортонормированный базис по норме $\|\cdot\|_{+,\varepsilon}$ в пространстве $H^+(D)$. Кроме того, эта система будет и ортогональным базисом в $[L^2(D)]^k$.

Доказательство. См. лемму 1.3.8 (ср. также [57, Лемма 4], [63]). $\square$

По построению каждая функция $b_k^{(\varepsilon)}$ удовлетворяет уравнению типа Гельмгольца

$$-(A^*A - \varepsilon + \lambda_k^{(\varepsilon)})b_k^{(\varepsilon)} = 0 \text{ в } D.$$

В частности, любая $b_k^{(\varepsilon)}$ есть бесконечно гладкая функция в D. В работе [80] были получены формулы для решения подобных задач, а также был указан алгоритм поиска собственных векторов задачи Зарембы, а, следовательно, и решения задачи (1.65).

Следствие 1.4.1. *Для любой функции $u \in H^+(D)$ верно, что*

$$(u, v)_{+,1} = \lim_{\varepsilon \to +0} \lim_{N \to +\infty} ((Au, A\mathcal{G}_\varepsilon^{(N)}(z, \cdot))_{[L^2(D)]^k}, v(z))_{[L^2(D)]^k},$$

для всех $v \in H^+(D)$, где $\mathcal{G}_\varepsilon^{(N)}(z, \zeta) = \sum_{k=1}^N \frac{b_k^{(\varepsilon)}(z)\overline{b_k^{(\varepsilon)}(\zeta)}}{\|b_k^{(\varepsilon)}\|_{[L^2(D)]^k}}$.

Глава 2

Задача Штурма-Лиувилля для системы Ламе в весовых пространствах Соболева-Слободецкого

В этой главе будут рассмотрены три краевые задачи Штурма-Лиувилля (две из которых будут коэрцитивными, а одна – некоэрцитивная) для оператора Ламе с граничными условиями робэновского типа в весовых пространствах в ограниченной липшицевой области D. Более точно, мы введем и опишем пространства для решений рассмотренных задач и докажем включение оных в шкалу уже известных пространств Соболева-Слободецкого. Также докажем фредгольмовость краевых задач в подходящих весовых пространствах. В завершении главы, опишем как условия полноты систем корневых функций поставленных задач, так и их спектральные свойства.

2.1 Задача Штурма-Лиувилля для системы Ламе

Обозначим через $\mathcal{L}_0$ оператор типа Ламе в $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{L}_0(x,\partial) = -\mu(x)I_n\Delta_n - (\lambda(x)+\mu(x))\nabla_n \mathrm{div}_n \tag{2.1}$$

где I_n – единичная матрица, размерности $(n \times n)$, Δ_n – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, ∇_n – оператор градиента в $\mathbb{R}^n$, div_n – оператор дивергенции в $\mathbb{R}^n$, а μ, λ – вещественные функции из $L^\infty(D)$ такие, что $\mu \geq \kappa$, $(2\mu+\lambda) \geq \kappa$ для некоторой постоянной $\kappa > 0$. При $n = 3$ и $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 0$ этот оператор играет важную роль при описании смещений упругого тела под нагрузкой (см. [47]). Также он может служить одной из линеаризаций стационарной версии уравнений Навье-Стокса для сжимаемой жидкости при заданном (известном) давлении (см. [22, §15]).

В математике и технике широко применяется матричная форма записи линейных дифференциальных операторов, аналогичная алгебраической символике. Такая символика в ряде случаев позволяет избежать сложных преобразований и записывать формулы в простой и удобной форме.

Хорошо известно, что если функции μ, λ принадлежат $C^{0,1}(D)$, то при описанных выше условиях оператор Ламе является сильно эллиптичным, ибо тогда $p = 2$, $l = k = n$ и

$$\sigma_2(\mathcal{L}_0)(x,\xi) = \mu(x)I_n|\xi|^2 + (\mu(x)+\lambda(x))\xi\xi^T,$$

$$\det\,[\sigma_2(\mathcal{L}_0)(x,\xi)] = \mu^{n-1}(x)(2\mu(x)+\lambda(x))|\xi|^{2n} \geq \kappa^n|\xi|^{2n} > 0 \text{ для всех } \xi\neq 0,$$

$$\Re[w^*\sigma_2(\mathcal{L}_0)(x,\xi)w] = \mu(x)|w|^2|\xi|^2 + (\mu(x)+\lambda(x))|\xi^T w|^2 \geq 0 \text{ для всех } \xi\in\mathbb{R}^n, w\in\mathbb{C}^n.$$

Более того существует такой формально «неотрицательный», самосопряженный оператор $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}(x,\partial) = \mathfrak{D}^*\mathfrak{D}$, который отличается от оператора $\mathcal{L}_0(x,\partial)$ слагаемыми низкого порядка; здесь под $\mathfrak{D} = \sum_{j=1}^n \mathfrak{D}_j\partial_j$ понимается дифференциальный $(k\times n)$-матричный оператор первого порядка, а под $\mathfrak{D}^*$ – формально сопряженный к нему. Конечно, такой оператор $\mathfrak{D}$ можно выбрать не единственным образом. В этой главе мы рассмотрим три возможных факторизации $\mathfrak{D}$ оператора Ламе. Для того, чтобы ввести третий из них, обозначим через $M_1\otimes M_2$ – произведение Кронекера матриц M_1 и M_2, rot_n понимается как $\left(\frac{(n^2-n)}{2}\times n\right)$-матричный оператор, строки которого имеют вид $(-1)^{i+j}\left(\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j} - \vec{e}_j\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$, $1\leq i<j\leq n$, где $\vec{e}_i$ – единичный вектор в $\mathbb{R}^n$ с i-той компонентой, равной единице, представляющий завихрение (или стандартный оператор rot для $n=2, n=3$), и через $\mathbb{D}_n$ будем обозначать $\left(\frac{(n^2+n)}{2}\times n\right)$-матричный оператор, строки которого имеют вид либо $\sqrt{2}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$, $1\leq i\leq n$, либо $(\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}+\vec{e}_j\frac{\partial}{\partial x_i})$ при $1\leq i<j\leq n$. Оператор $\mathbb{D}_n$ представляет собой деформацию (напряжение). Таким образом, примерами факторизации $\mathfrak{D}$ оператора $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}(x,\partial)$ являются:

$$\mathfrak{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\ \mathbb{D}_n \\ \sqrt{\lambda}\mathrm{div}_n \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\ I_n\otimes\nabla_n \\ \sqrt{\mu+\lambda}\ \mathrm{div}_n, \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D}^{(3)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\ \mathrm{rot}_n \\ \sqrt{2\mu+\lambda}\mathrm{div}_n \end{pmatrix}.$$

Отметим, что размерности матричных операторов $\mathfrak{D}^{(j)}$, $j=\overline{1,3}$, и ограничения на μ,λ будут следующими:

· $k_1 = (n^2+n)/2+1$ и $\lambda\geq 0$, $(\mu+\lambda)\geq 0$ – для первого оператора;

· $k_2 = n^2+1$ и $\lambda\geq 0$, $(2\mu+\lambda)\geq\kappa>0$ – для второго оператора;

· $k_3 = (n^2-n)/2+1$ и $\lambda\geq 0$, $(2\mu+\lambda)\geq\kappa>0$ – для третьего оператора.

Далее, так как главный символ композиции операторов есть произведение главных символов, то

$$\sigma_2(\mathcal{L}_0) = \sigma_1^*(\mathfrak{D}^{(j)})\sigma_1\mathfrak{D}^{(j)}.$$

Значит, ранги символов любого из операторов $\mathfrak{D}^{(j)}$ максимальны, а сами операторы $\mathfrak{D}^{(j)}$ являются (переопределенными) эллиптическими.

Зафиксируем связное подмножество S на ∂D, открытое в относительной топологии на границе и имеющее кусочно-гладкую границу на гиперповерхности ∂D. Также зафиксируем подмножество Y из ∂S и весовую функцию ρ, связанную с ними. Кроме того, мы будем предполагать, что функции $\mu,\lambda\in C^{0,1}(D)\cap L^\infty(D)$, $\rho\nabla_n\mu\in[L^\infty(D)]^n$, $\rho\nabla_n\lambda\in[L^\infty(D)]^n$.

Рассмотрим $(n\times n)$-матричный линейный дифференциальный оператор $\mathfrak{A}$ в области

D, ассоциированный с $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}(x,\partial)=\mathfrak{D}^*\mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ – один из операторов $\mathfrak{D}^{(j)}$, $j=1,2,3$:

$$\mathfrak{A}u=\mathfrak{D}^*\mathfrak{D}u+a_1\ I_n\otimes\nabla_n+a_0(x)u, \tag{2.2}$$

здесь a_0 и a_1 есть функциональные $(n\times n)$- и $(n\times n^2)$- матрицы соответственно, а для их компонент $a_j^{(p,q)}$ справедливо, что $\rho^2a_0^{(p,q)}\in L^\infty(D)$, $\rho a_1^{(p,q)}\in L^\infty(D)$.

Пусть $\nu_{\mathfrak{D},\partial D}=\sum_{i=1}^n\mathfrak{D}_i^*\nu_i\mathfrak{D}$ – конормальная производная, определенная относительно оператора $\mathfrak{D}$ на границе области D, где $\nu=(\nu_1,\dots\nu_n)$ векторное поле, состоящее из единичных внешних нормалей по отношению к ∂D (определенное для почти всех точек $x\in\partial D$). В свою очередь, $\mathfrak{D}_i^*$ является сопряженной матрицей для матрицы $\mathfrak{D}_i$. Очевидно, что для двух операторов $\mathfrak{D}^{(j)}$, введенных выше, операторы $\nu_{\mathfrak{D}^{(j)},\partial D}$ различаются на матрицу, элементы которой суть касательные производные к границе.

Теперь введем в рассмотрение граничный оператор

$$\mathfrak{B}=b_1(x)\nu_{\mathfrak{D},\partial D}+b_0(x)+\partial_\tau,$$

где ∂_τ – это $(n\times n)$-матрица, состоящая из касательных производных к ∂D. О $(n\times n)$-матрицах $b_0(x)$ и $b_1(x)$ будем предполагать, что их компоненты локально ограниченные, измеримые функции на $\partial D\setminus Y$. Мы позволим матрице $b_1(x)$ вырождаться (и даже исчезать) на открытом связном подмножестве S поверхности ∂D, имеющем кусочно-гладкую границу ∂S; в этом случае предполагается, что матрица $b_0(x)$ невырождена на S, а компоненты касательной составляющей ∂_τ равны нулю на S. Также, в случае, если $S\neq\emptyset$, будем требовать, чтобы $b_1(x)|_S=0$, $\partial_\tau|_S=0$, а $b_0(x)$ не вырождалась на S.

Обычно для задания краевых условий первого порядка к оператору типа Ламе используется граничный тензор напряжений σ_T с компонентами

$$\sigma_T^{i,j}=\mu\,\delta_{i,j}\sum_{k=1}^n\nu_k\frac{\partial}{\partial x_k}+\mu\,\nu_j\frac{\partial}{\partial x_i}+\lambda\,\nu_i\frac{\partial}{\partial x_j},\ 1\le i,j\le n. \tag{2.3}$$

Лемма 2.1.1. *Граничный тензор напряжений σ с компонентами* (2.3)*, связан с конормальными производными, определенными относительно операторов $\mathfrak{D}^{(j)}$, следующим образом:*

$$\sigma_T=\nu_{\mathfrak{D}^{(1)},\partial D}=\nu_{\mathfrak{D}^{(2)},\partial D}+\mu(x)\partial_{\tau_0}=\nu_{\mathfrak{D}^{(3)},\partial D}+2\mu(x)\partial_{\tau_0} \tag{2.4}$$

с касательной составляющей

$$\partial_{\tau_0}=\left((\nu(x)\mathrm{div_n})^{\mathrm{T}}-\nu(\mathrm{x})\mathrm{div_n}\right).$$

Доказательство. Проводится с помощью непосредственных вычислений. □

Мы будем искать решение следующей смешанной задачи: *по данной обобщенной n-векторной функции f в области D, найти n-векторное распределение u в области D, удовлетворяющее в подходящем смысле* (см. [47, §12] для $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}^{(1)}$)

$$\begin{cases} \mathfrak{A}u = f & \text{в} \quad D, \\ \mathfrak{B}u = 0 & \text{на} \quad \partial D. \end{cases} \tag{2.5}$$

При $S = \partial D$ мы получаем разновидность классической задачи Дирихле для сильно эллиптических операторов. Известно, что коэрцитивность такой задачи следует из неравенства Гординга для сильно эллиптических операторов: если B – это некоторый сильно эллиптический $(k \times k)-$матричный дифференциальный оператор порядка $2p$, то для любого $s > 0$ существуют постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что выполняется неравенство

$$\|u\|_{[H^p(D)]^k} \leq c_1 \Re(Bu, u)_{[L^2(D)]^k} + c_2 \|u\|^2_{[H^{-s}(D)]^k}$$

для любого $u \in [C_0^\infty(D)]^k$ (см., например, [10]). В частности, известно, что для произвольного (вообще говоря, переопределенного) эллиптического $(l \times k)$-матричного оператора A порядка p, оператор $A^* A$ порядка $2p$ сильно эллиптичен. Если для для любой функции $u \in C_0^\infty(D)$ из того, что $Au = 0$ следует, что $u = 0$, то существует такая постоянная $c > 0$, что

$$\|u\|^2_{[H^p(D)]^k} \leq c \|Au\|^2_{[L^2(D)]^l}.$$

Однако эти стандартные рассуждения приводят к теореме существования и коэрцитивности для задачи только в случае $S = \partial D$. Нас в первую очередь будет интересовать случай $S \neq \partial D$.

В классической теории краевых задач типовым предположением является выполнение условий Шапиро-Лопатинского для пары $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ на гладкой части ∂D (см., например, [20], [34], [52] и многие другие), что является необходимым условием для коэрцитивных задач. Мы такого предположения делать не будем. Ниже мы покажем, что при $S \neq \partial D$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(1)}$ или $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(2)}$ смешанная задача (2.5) коэрцитивна в пространствах Соболева, но при $S \neq \partial D$ и при $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(3)}$ она некоэрцитивна (см. [42] для $n = 2$).

Так как при изучении спектральных свойств задачи мы будем использовать метод возмущения компактных самосопряженных операторов, то расщепим коэффициенты

$$a_0 = a_{0,0} + \delta a_0,\ b_0 = b_{0,0} + \delta b_0,$$

где $a_{0,0}(x)$ – эрмитова неотрицательная функциональная $(n \times n)$-матрица в D, для компонент которой справедливо, что $\rho^2 a_{0,0}^{(p,q)} \in L^\infty(D)$, а $(n \times n)$-матрица $b_{0,0}$ выбрана так, что $(n \times n)$-матрица $b_1^{-1} b_{0,0}$ (при условии существования обратной матрицы к b_1) была эрмитовой неотрицательной и ее элементы представляли бы собой локально измеримые, ограниченные функции на $\partial D \setminus S$. Допустимый класс возмущений для δa_0, δb_0 будет описан в теоремах 2.1.2, 2.1.3 ниже.

На пространстве $[C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ рассмотрим следующую эрмитову форму:

$$(u, v)_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}} = \left(\mathfrak{D}^{(j)} u, \mathfrak{D}^{(j)} v\right)_{[H^{0,\gamma}(D)]^{k_j}} + (a_{0,0} u, v)_{[H^{0,\gamma}(D)]^n} + (b_1^{-1} b_{0,0} u, v)_{[H^{0,\gamma}(\partial D \setminus S)]^n}.$$

Обращаем внимание на то, что каждый интеграл в этом тождестве корректно определен для всех $\gamma \in \mathbb{R}$, т.к. элементы пространства $[C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ исчезают в окрестности Y. Форма $(\cdot, \cdot)_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(2)}}$ сильно коэрцитивна на пространстве $[H^{1,\gamma}(D, S \cup Y)]^n$ для всех $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\|\mathfrak{D}^{(2)} u\|^2_{[H^{0,\gamma}(D)]^{k_2}} \geq c \|\nabla_n u_j\|^2_{H^{0,\gamma}(D)} \text{ для всех } u \in [H^{1,\gamma}(D, S \cup Y)]^n \tag{2.6}$$

для некоторой константы c, независящей от u. Формы, соответствующие операторам $\mathfrak{D}^{(1)}$ и $\mathfrak{D}^{(3)}$, не являются сильно коэрцитивными в общем случае, так как если, например, взять $\rho = 1$, то для оператора $\mathfrak{D}^{(1)}$ выполнено равенство $\mathfrak{D}^{(1)} u = 0$ и при непостоянном векторе $u = x_i \vec{e}_j - x_j \vec{e}_i$, $i \neq j$, а для оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$ выполнено аналогичное равенство $\mathfrak{D}^{(3)} \nabla_n h = 0$ в D для всех гармонических функций h в D. Однако, форма, соответствующая оператору $\mathfrak{D}^{(1)}$, будет также коэрцитивна при разумных допущениях на $[H^{1,\gamma}(D, S \cup Y)]^n$ для всех $\gamma \in \mathbb{R}$ (см. Лемма 2.1.3 ниже), иными словами

$$\|u\|^2_{[H^{0,\gamma}(D)]^n} + \|\mathfrak{D}^{(1)} u\|^2_{[H^{0,\gamma}(D)]^{k_1}} \geq c \|u\|^2_{[H^{1,\gamma}(D)]^n} \text{ для всех } u \in [H^{1,\gamma}(D, S \cup Y)]^n.$$

Обозначим через $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D)$ пополнение $[C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ относительно нормы $\|\cdot\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}}$, индуцированной скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}}$ (в тех случаях, когда форма таковым является).

Лемма 2.1.2. *Эрмитова форма $(\cdot, \cdot)_{+,\gamma,\mathfrak{D}}$ определяет скалярное произведение на пространстве $[C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ при выполнении одного из следующих условий:*

1) открытое множество $S \subset \partial D$ не пусто (в топологии ∂D);

2) $a_{0,0} \geq c_0 I_n$ в $\overline{U}$ с некоторой постоянной $c_0 > 0$ на непустом открытом множестве $U \subset D$;

3) $b_1^{-1} b_{0,0} \geq c_1 I_n$ в $\overline{V}$ с некоторой постоянной $c_1 > 0$ на непустом открытом множестве $V \subset \partial D \setminus S$.

Кроме того, в этих случаях справедливо:

а) пространство $[H^{1,\gamma}(D, S)]^n$ непрерывно вложено в $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$, если компоненты матрицы $\rho b_1^{-1} b_{0,0}$ принадлежат $L^\infty(\partial D \setminus S)$;

б) если $\rho \equiv 1$ или существует такая постоянная $c_0 > 0$, что $\rho^2 a_{0,0} \geq c_0 I_n$ на $\overline{D} \setminus Y$, тогда существует непрерывное вложение $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D) \to [H^{0,\gamma+1}(D)]^n$; более того, в этом случает элементы из $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D)$ принадлежат пространству $[H^1_{\mathrm{loc}}(D \cup S)]^n$ и обращаются в нуль на S.

Доказательство. Что касаемо утверждения о скалярном произведении, то нам нужно только проверить, что $(u, u)_{+,\gamma,\mathfrak{D}} = 0$ для $u \in [C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ тогда и только тогда, когда $u = 0$ в D. С этой целью, отметим, что операторы первого порядка:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\mu^{-1}} I_{k_1 - 1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \mathfrak{D}^{(1)}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{\mu^{-1}} I_{k_2 - 1} & 0 \\ 0 & \sqrt{(\mu + \lambda)^{-1}} \end{pmatrix} \mathfrak{D}^{(2)},$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\mu^{-1}} I_{k_3-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{(2\mu+\lambda)^{-1}} \end{pmatrix} \mathfrak{D}^{(3)},$$

имеют постоянные коэффициенты и инъективный главный символ. Поэтому по теореме Петровского решения системы $\mathfrak{D}^{(j)} u = 0$ в D, $j = 1, 2, 3$, вещественно аналитичны в этой области. Таким образом, утверждение леммы о скалярном произведении следует из теоремы единственности для вещественно-аналитических функций при условии 2).

Тогда из условий 1) или 3) следует, что любой вектор u, лежащий в пространстве $[C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ и удовлетворяющий $(u, u)_{+,\gamma,\mathfrak{D}} = 0$, обращается в нуль на открытом непустом подмножестве ∂D. Поскольку u также удовлетворяет $\mathfrak{D}^{(j)} u = 0$ в D, то из теоремы единственности для задачи Коши для систем с инъективным символом следует, что $u \equiv 0$ в D (см., например, в статье [60, Теорема 2.8]).

Если элементы матрицы $\rho b_1^{-1} b_{0,0}$ принадлежат пространству $L^\infty(\partial D \setminus S)$ то по лемме 1.1.1, получаем, что для всех $u \in [C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ выполнено следующее:

$$|(b_1^{-1} b_{0,0} u, u)_{H^{0,\gamma}(\partial D \setminus S)}| = |(\rho b_1^{-1} b_{0,0} u, u)_{H^{0,\gamma+1/2}(\partial D \setminus S)}| \leq c \|u\|^2_{H^{0,\gamma+1/2}(\partial D \setminus S)} \leq \tilde{c} \|u\|^2_{H^{1,\gamma}(D)}, \tag{2.7}$$

где положительные постоянная c не зависит от u. С другой стороны, так как компоненты матриц $\rho^2 a_{0,0}$, и $a_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ принадлежат $L^\infty(D)$, то для всех элементов $u \in [C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ выполнено следующее:

$$|(a_{0,0} u, u)_{H^{0,\gamma}(D)}| = |(\rho^2 a_{0,0} u, u)_{H^{0,\gamma+1}(D)}| \leq c_0 \|u\|^2_{H^{0,\gamma+1}(D)} \leq c_0 \|u\|^2_{H^{1,\gamma}(D)}, \tag{2.8}$$

$$|(a_{i,j} \partial_j u, \partial_i u)_{H^{0,\gamma}(D)}| \leq c_{i,j} \|\nabla u\|^2_{H^{0,\gamma}(D)} \leq c_{i,j} \|u\|^2_{H^{1,\gamma}(D)}, \tag{2.9}$$

где положительные постоянные c_0, $c_{i,j}$ не зависят от u.

Если (2.13) справедливо, то для всех $u \in [C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ получаем, что

$$\|u\|^2_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}} \geq (a_{0,0} u, u)_{H^{0,\gamma}(D)} \geq q \|u\|^2_{H^{0,\gamma+1}(D)},$$

т.е. пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D)$ непрерывно вложено в пространство $H^{0,\gamma+1}(D)$.

В виду того, что решения $\mathfrak{D}^{(j)} u = 0$ являются вещественно аналитическими функциями в D, а $\mathfrak{D}^{(j)}$ инъективно на $[C_0^\infty(D)]^n$, то мы можем воспользоваться неравенством Гординга для $\mathfrak{D}^{(j)}$:

$$\|u\|^2_{[H^1(D)]^n} \leq c\, (\mathfrak{D}^{(j)} u, \mathfrak{D}^{(j)} u)_{[L^2(D)]^{k_j}} \text{ для всех } u \in [H^1_0(D)]^n, \tag{2.10}$$

с положительной постоянной c, независящей от u. Возьмем область $G \subset D$, такую, что $\overline{G} \subset D \cup S$ и зафиксируем функцию $\phi \in C^1(\overline{D})$, обращающуюся в нуль вне компактного множества $\overline{G}$, а также такую, что $\phi(x) = 1$ для всех $x \in \overline{G}$. Тогда $\phi u \in [C^1(\overline{D}, \partial D)]^n$ для любых $u \in [C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ и, в соответствии с (2.10), получаем:

$$\|u\|^2_{[H^1(G)]^n} \leq \|\phi u\|^2_{[H^1(D)]^n} \leq c \|\mathfrak{D}^{(j)}(\phi u)\|^2_{[L^2(D)]^{k_j}} \leq c_\gamma \|\mathfrak{D}^{(j)}(\phi \rho^{-\gamma} u)\|^2_{[L^2(D)]^{k_j}} \tag{2.11}$$

для всех элементов $u \in [C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$, с постоянной c_γ, не зависящей от u, потому что ϕ равно нулю в окрестности Y.

Наконец, так как $\rho \in C(\overline{D})$, $\nabla\rho \in L^\infty(D)$ и выполнено (2.13), то

$$\|\mathfrak{D}^{(j)}(\phi\rho^{-\gamma}u)\|^2_{[L^2(D)]^{k_j}} \leq 2\|\phi\mathfrak{D}^{(j)}u\|^2_{[H^\gamma(D)]^{k_j}} +$$

$$+2\|(\mathfrak{D}^{(j)}\phi)\rho u\|^2_{[H^{0,\gamma+1}(D)]^{k_j}} + 2\gamma^2\|(\mathfrak{D}^{(j)}\rho)\phi u)\|^2_{[H^{0,\gamma+1}(D)]^{k_j}} \leq c\|u\|^2_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}} \tag{2.12}$$

для всех $u \in [C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$, где постоянная c не зависит от u. В частности, неравенства (2.11), (2.12) означают, что любая последовательность $\{u_\nu\} \subset [C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ сходится в пространствах $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D)$, $[H^1(G)]^n$. Это доказывает утверждение b).

Наконец, утверждение a) можно также проверить непосредственно. По условию леммы компоненты матрицы $\rho^2 a_{0,0}$ принадлежат $L^\infty(D)$. Однако, если ко всему прочему компоненты матрицы $\rho b_1^{-1} b_{0,0}$ будут принадлежать $L^\infty(\partial D \setminus S)$, то величины

$$\|\rho^2 a_{0,0}\|_{L^\infty(D)} = \max_{p,q} \|\rho^2 a_{0,0}^{(p,q)}\|_{L^\infty(D)}, \ \ \|\rho b_1^{-1} b_{0,0}\|_{L^\infty(D)} = \max_{p,q} \|\rho (b_1^{-1} b_{0,0})^{(p,q)}\|_{L^\infty(D)}$$

конечны. Значит, по лемме 1.1.1 верно, что

$$\|u\|^2_{+,\gamma,\mathfrak{D}} \leq \|\rho^2 a_{0,0}\|_{L^\infty(D)} \|u\|^2_{[H^{0,\gamma+1}(D)]^n} + \|\rho b_1^{-1} b_{0,0}\|_{L^\infty(\partial D\setminus S)} \|u\|^2_{[H^{0,\gamma+1/2}(\partial D)]^n} +$$

$$+\|u\|^2_{[H^{1,\gamma}(D)]^n} \leq c\ \|u\|^2_{[H^{1,\gamma}(D)]^n}$$

для всех $u \in [H^1(D, S \cup Y)]^n$ с некоторой положительной постоянной c, не зависящей от u. Таким образом, утверждение a) непосредственно следует из (2.7), (2.8), (2.9). $\square$

Лемма 2.1.3. *Пусть $\mu, \lambda \in L^\infty(D)$, $(\mu + \lambda) \geq 0$. При $\rho \equiv 1$ вложение пространства $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D) \to [H^1(D)]^n$, $j = 1, 2$ непрерывно при выполнении любого из условий 1), 2), 3) леммы 2.1.2. Если существует $q > 0$ такое, что*

$$\rho^2 a_{0,0} \geq q I_n \ \text{в} \ \overline{D} \setminus Y, \tag{2.13}$$

то пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D)$ непрерывно вложено в $[H^{1,\gamma}(D)]^n, j = 1, 2$.

Доказательство. Непрерывность вложения $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(1)}}(D) \to [H^{1,\gamma}(D)]^n$ следует из второго неравенства Корна: для любого $v \in [H^1(D)]^n$

$$\int\limits_D \sum_{i,h=1}^n \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_h} + \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int\limits_D |v|^2\, dx \geq const \|v\|_{[H^1(D)]^n}.$$

Смысл этого неравенства и есть оценка эрмитовой формы, рассмотренной выше (см. [47, формула (12.11)]). Непрерывность вложения $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(2)}}(D) \to [H^{1,\gamma}(D)]^n$ следует из сильной, коэрцитивной оценки (2.6). Другими словами, так как $\mu \geq \kappa > 0$ в $\overline{D}$, то для оператора

$\mathfrak{D}^{(2)}$ выполнено

$$\|\mathfrak{D}^{(2)}u\|^2_{[H^{0,\gamma}(D)]^{k_2}} \geq \kappa\|\nabla_n \otimes I_n u\|^2_{[H^{0,\gamma}(D)]^{n^2}} \text{ для всех } u \in [C^1(\overline{D}, S \cup Y)]^n.$$

Поэтому для обычных пространств Соболева доказательство мало чем отличается от классического случая (см., например, [23, гл. III, §5, Теорема 5]). При $Y \neq \emptyset$ и условии (2.13) норма на $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(2)}}(D)$, очевидно, не слабее, чем норма на $[H^{1,\gamma}(D)]^n$. $\square$

Для оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$ лемма 2.1.3 не верна, так как в этом случае

$$\mathfrak{D}^{(3)}(\nabla_n h) = 0 \text{ в } D$$

для любой функции h, гармонической в области D, а значит пространство решений уравнения $\mathfrak{D}^{(3)}u = 0$ в области D бесконечномерно. В § 2.3 будут приведены два примера, подтверждающие эту теорию.

Тем не менее, при определенных условиях можно указать достаточно точные теоремы вложения для пространств, порожденных некоэрцитивными формами (см. [37]), в том числе и для пространства $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$. Следующее утверждение описывает условия, при которых справедливы непрерывные вложения $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ в шкалу пространств Соболева-Слободецкого. В целом, схема доказательства та же, что и для скалярных операторов (см. [57], [63], а также близкие рассуждения в теореме 1.2.1 главы 1).

Обозначим через $h^s(D)$ пространство решений уравнения $\mathcal{L}_0 u = 0$ в области D, принадлежащих пространству Соболева $[H^s(D)]^n$; по теореме Фридрихса справедливо вложение $h^s(D) \subset [C^\infty(D)]^n$, если $\mu, \lambda \in C^\infty(\overline{D})$.

Теорема 2.1.1. *Пусть коэффициенты μ, λ лежат в классе $C^\infty(X)$ в некоторой окрестности X компакта $\overline{D}$ в $\mathbb{R}^n$, а $\rho \equiv 1$. Тогда*

1) пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ непрерывно вложено в $[L^2(D)]^n$, если выполнено условие (2.13);

2) пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ непрерывно вложено в $[H^{1/2-\varepsilon}(D)]^n$ для любого $\varepsilon > 0$, если

$$b_1^{-1} b_{0,0} \geq c_1 I_n \text{ на } \partial D \setminus S \text{ с некоторой постоянной } c_1 > 0. \tag{2.14}$$

Более того, если $\partial D \in C^2$, то из (2.14) следует, что $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ непрерывно вложено в $[H^{1/2}(D)]^n$.

Доказательство. Утверждение 1) немедленно следует из определения нормы $\|\cdot\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(3)}}$, иначе говоря, из оценки (2.13) вытекает, что слагаемое $\|a_{0,0}u\|_{[H^{0,\gamma}(D)]^n}$ нормы $\|u\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(3)}}$ неотрицательно. Факторизация оператора Ламе $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(x, \partial)$ подразумевает, что слагаемое $\|\mathfrak{D}^{(3)}u\|_{[H^{0,\gamma}(D)]^{k_3}}$ неотрицательно. Отметим, что ранее мы произвели расщепление матрицы b_0 таким образом, что норма $\|b^{-1}b_{0,0}u\|_{[H^{0,\gamma}(D)]^n} \geq 0$. Поэтому верна оценка:

$$\|u\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(3)}} \geq \|u\|_{[H^{0,\gamma}]^n}.$$

Однако, учитывая, что $\|u\|_{[H^{0,\gamma}]^n} \geq \|u\|_{[L^2(D)]^n}$, то справедливо неравенство:

$$\|u\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(3)}} \geq \|u\|_{[L^2(D)]^n}.$$

Это и доказывает утверждение 1).

Пусть теперь выполнена оценка (2.14). Тогда норма $\|\cdot\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(3)}}$ не слабее нормы $\|\cdot\|_h$ на пространстве $[H^1(D,S)]^n$, определенной как:

$$\|u\|_h = \left(\|\mathfrak{D}^{(3)}u\|^2_{[L^2(D)]^{k_3}} + \|u\|^2_{[L^2(\partial D\setminus S)]^n}\right)^{1/2}, \quad \text{где } u \in [H^1(D,S)]^n.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Покажем, что норма $\|\cdot\|_h$ не слабее, чем норма $\|\cdot\|_{[H^{1/2-\varepsilon}(D)]^n}$ на пространстве $[H^1(D,S)]^n$. В самом деле, интегрируя по частям легко убедиться, что векторная функция $v \in [C^\infty(X)]^n$ удовлетворяет $(\mathfrak{D}^{(3)})^*\mathfrak{D}^{(3)}v = 0$ в X тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}^{(3)}v = 0$ в X. Как мы уже видели выше в доказательстве леммы 2.1.2, любое слабое решение этого уравнения является вещественно-аналитическим в X и поэтому $v \equiv 0$. Итак, в этих условиях оператор $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}^{(3)}}$ имеет двустороннее фундаментальное решение на X, скажем, $\phi_n(x,y)$. Например, если μ и λ постоянны, то можно взять стандартное ядро Кельвина-Сомильяны $\phi(x) = (\phi_{ij}(x))_{i,j=1,2,\dots,n}$ с компонентами

$$\phi_{ij}(x) = \frac{1}{2\mu(\lambda+2\mu)}\left(\delta_{ij}\,(\lambda+3\mu)\varphi_n(x) - (\lambda+\mu)\,x_j\,\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_n(x)\right),$$

здесь $i,j = 1,2,...,n$, δ_{ij} есть символ Кронекера, а $\varphi_n(x)$ – стандартное фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\sigma_n|x|^{n-2}}, & n > 2, \\ \frac{1}{2\pi}ln|x|, & n = 2, \end{cases}$$

где σ_n – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ (см. [16]).

Объемный потенциал

$$\Phi v(x) = \int_D \phi_n(x,y)v(y)dx, v \in [L^2(D)]^n, \tag{2.15}$$

индуцирует линейный непрерывный оператор $\Phi : [L^2(D)]^n \to [H^2(X)]^n$ для любой ограниченной области X, содержащей $\overline{D}$.

Установим равенства $H^0_D = [L^2(D)]^n$, $H^+_D = [H^s(D)]^n$ и $\langle u,v\rangle_D = \lim\limits_{\nu\to\infty}(v,u_\nu)_{[L^2(D)]^n}$ для функций $u \in [H^{-s}(D)]^n$, $v \in [H^s(D)]^n$, где последовательность $\{u_\nu\} \subset [C^\infty(\overline{D})]^n$ сходится к u в пространстве $[H^{-s}(D)]^n$. Так как у нас есть непрерывное вложение $[H^s(X)]^n \to [H^s(D)]^n$ для $s > 0$, то (1.1), означает, что любой элемент $u \in [H^{-s}(D)]^n$ продолжается до элемента $F_u \in [(H^s(X))']^n$, следующим образом

$$F_u(v) = \langle u,v\rangle_D \text{ для всех } v \in [H^s(X)]^n.$$

По двойственности, описанной в первом параграфе главы 1.2, существует элемент $\chi_D^{(s)} u \in [H^{-s}(X)]^n$ такой, что

$$\langle \chi_D^{(s)} u, v \rangle_X = \langle u, v \rangle_D \text{ для всех } v \in [H^s(X)]^n.$$

Таким образом, на пространстве $[H^{-s}(D)]^n$ был определен ограниченный линейный оператор $\chi_D^{(s)} : [H^{-s}(D)]^n \to [H^{-s}(X)]^n$, $s \in \mathbb{R}_+$. Распределение $\chi_D^{(s)} u$, $s \geq 0$, действует в $\overline{D}$, поэтому объемный потенциал (2.15) индуцирует ограниченный линейный оператор

$$\Phi \circ \chi_D^{(\varepsilon-1/2)} I_n : [H^{\varepsilon-1/2}(D)]^n \to [H^{\varepsilon+3/2}(X)]^n, \quad 0 < \varepsilon \leq 1/2.$$

(см., например, [3]). Тогда, если $0 < \varepsilon \leq 1/2$, то операторы

$$\mathfrak{D} \circ \Phi \circ \chi_D^{(\varepsilon-1/2)} I_n : [H^{\varepsilon-1/2}(D)]^n \to [H^{\varepsilon+1/2}(X)]^k,$$

$$\nu_{\mathfrak{D},\partial D} \circ \Phi \circ \chi_D^{(\varepsilon-1/2)} I_n : [H^{\varepsilon-1/2}(D)]^n \to [H^{\varepsilon}(\partial D)]^n$$

по теореме о следах для пространств Соболева также ограничены при $0 < \varepsilon \leq 1/2$. Заметим, что при $\varepsilon = 0$ последнее утверждение не верно, по причине того, что элементы пространства $[H^{1/2}(X)]^n$ могут вовсе не иметь следов на $\partial D \subset X$.

Интегрируя по частям для функций $u \in [H^1(D,S)]^n$ и $v \in [L^2(D)]^n$, с учетом факторизации $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}^*\mathfrak{D}$, получаем:

$$(v,u)_{[L^2(D)]^n} = (\mathcal{L}_{\mathfrak{D}} \Phi I_n v, u)_{[L^2(D)]^n} = (\mathfrak{D}\Phi I_n v, \mathfrak{D}u)_{[L^2(D)]^k} + (\nu_{\mathfrak{D}} \Phi I_n v, u)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^n}. \quad (2.16)$$

Пусть $\{v_\mu\}$ есть какая-нибудь последовательность в $[H^1(D)]^n$, сходящаяся к элементу v в пространстве $[H^{\varepsilon-1/2}(D)]^n$, $0 < \varepsilon < 1/2$. Так как пространство $[H^s(D)]^n$ рефлексивно для каждого s, то из (2.16) и непрерывности операторов $\mathfrak{D} \circ \Phi \circ \chi_D^{(\varepsilon-1/2)} I_n$, $\nu_{\mathfrak{D}} \circ \Phi \circ \chi_D^{(\varepsilon-1/2)} I_n$, для элемента $u \in [H^1(D,S)]^n$ выполнено неравенство

$$\|u\|_{[H^{1/2-\varepsilon}(D)]^n} = \sup_{\substack{v \in [H^{\varepsilon-1/2}(D)]^n \\ v \neq 0}} \frac{|\langle v, u \rangle|}{\|v\|_{[H^{\varepsilon-1/2}(D)]^n}} =$$

$$= \sup_{\substack{v \in [H^{\varepsilon-1/2}(D)]^n \\ v \neq 0}} \frac{|(\mathfrak{D} \circ \Phi \circ \chi_D I_n v, \mathfrak{D}u)_{[L^2(D)]^k} + (\nu_{\mathfrak{D}} \circ \Phi \circ \chi_D I_n v, u)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^n}|}{\|v\|_{[H^{\varepsilon-1/2}(D)]^n}} \leq$$

$$\leq c \left(\|\mathfrak{D} \circ \Phi \circ \chi_D I_n\| \, \|\mathfrak{D}u\|_{[L^2(D)]^k} + \|\nu_{\mathfrak{D}} \circ \Phi \circ \chi_D I_n\| \, \|u\|_{[L^2(\partial D \setminus S)]^n} \right).$$

или, иначе,

$$c\|u\|_{[H^{1/2-\varepsilon}(D)]^n} \leq \|\mathfrak{D} \circ \Phi \circ \chi_D I_n\| \, \|\mathfrak{D}u\|_{[L^2(D)]^k} + \|\nu_{\mathfrak{D}} \circ \Phi \circ \chi_D I_n\| \, \|u\|_{[L^2(\partial D \setminus S)]^n}$$

с некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от u. Таким образом, существуют такие постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, что

$$\|u\|_{[H^{1/2-\varepsilon}(D)]^n} \leq C_1 \ \|u\|_h \leq C_2 \ \|u\|_{+,\gamma} \text{ для всех } u \in [H^1(\overline{D}, S)]^n.$$

Это доказывает непрерывное вложение $H^{+,\gamma}(D) \hookrightarrow [H^{1/2-\varepsilon}(D)]^n$ для любого $\varepsilon > 0$.

В силу факторизации оператор $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}$ сильно эллиптический и формально-сопряженный, а задача Дирихле для него фредгольмова и имеет нулевой индекс (см., например, [4], [65, Лемма 3.2]). Как уже было отмечено выше, если равенство $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}^{(3)}} u = 0$ в области D для $u \in [C_0^\infty(D)]^n$ возможно только при $u \equiv 0$, то данная задача имеет одно и только одно решение. Далее, пусть G и P обозначают соответственно функцию Грина и интеграл Пуассона задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}$ в области D. Тогда они индуцируют ограниченные операторы (см., например, [4], [65, Теорема 3.3])

$$G_1 : [\tilde{H}^{-1}(D)]^n \to [H_0^1(D)]^n, \quad P_1 : [H^{1/2}(D)]^n \to [H^1(D)]^n.$$

Так как $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}$ индуцирует непрерывный линейный оператор $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}} : [H^1(D)]^n \to [\tilde{H}^{-1}(D)]^n$ через равенство

$$\langle \mathcal{L}_{\mathfrak{D}} u, v\rangle = (\mathfrak{D}u, \mathfrak{D}v)_{[L^2(D)]^k}, \ u \in [H^1(D)]^n, v \in [H_0^1(D)]^n,$$

то $u = P_1 u + G_1 \mathcal{L}_{\mathfrak{D}} u$ для каждого $u \in [H^1(D)]^n$. Следовательно, для двух элементов $u, v \in [H^1(D, S)]^n$ верно, что

$$(u, v)_h = (Pu, Pv)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^n} + (\mathfrak{D}^{(3)} u, \mathfrak{D}^{(3)} v)_{[L^2(D)]^{k_3}}. \tag{2.17}$$

С другой стороны, интегрирование по частям дает

$$(\mathfrak{D}^{(3)} P_1 u, \mathfrak{D}^{(3)} G_1 \mathcal{L}_{\mathfrak{D}} u)_{[L^2(D)]^{k_3}} = 0,$$

поэтому, для всех $u \in [H^1(\overline{D}, S)]^n$,

$$C_2^2 C_1^{-2} \|u\|^2_{+,\gamma} \geq \|u\|^2_h \geq \|P_1 u\|^2_{[L^2(\partial D \setminus S)]^n} + \|\mathfrak{D}^{(3)} G_1 \mathcal{L}_{\mathfrak{D}} u\|^2_{[L^2(D)]^{k_3}}.$$

Из неравенства (2.10), а также из (2.17) вытекает, что любая последовательность $\{u_\mu\} \subset [H^1(D, S)]^n$, сходящаяся к элементу $u \in H^+_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ в пространстве $H^+_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ может быть представлена как

$$u_\mu = P_1 u_\mu + G_1 \mathcal{L}_{\mathfrak{D}^{(3)}} u_\mu,$$

где последовательность $\{G_1 \mathcal{L}_{\mathfrak{D}^{(3)}} u_\mu\}$ сходится в $[H_0^1(D)]^n \subset [H^1(D, S)]^n$ к некоторому элементу w_1.

Теперь из уже доказанной части теоремы вытекает, что $\{P_1 u_\mu\}$ сходится к некоторому элементу w_2 в $[H^{1/2-\varepsilon}(D)]^n$. По теореме Стилтьеса-Витали для решений эллиптических систем элемент w_2 удовлетворяет $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}^{(3)}} w_2 = 0$ в D. Поэтому

$$u = w_1 + w_2, \quad \mathcal{L}_{\mathfrak{D}^{(3)}} u = \mathcal{L}_{\mathfrak{D}^{(3)}} w, \quad u = Pu + G_1 \mathcal{L}_{\mathfrak{D}^{(3)}} u; \tag{2.18}$$

здесь Pu – интеграл пуассоновского типа от следа $u_{|\partial D} \in [L^2(\partial D)]^n$ векторной функции $u \in H^+_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$, существование которого гарантируется конструкцией нормы $\|\cdot\|_{+,\mathfrak{D}^{(3)}}$ и условием (2.14). Это доказывает непрерывное вложение $H^+_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D) \hookrightarrow [H^{1/2-\varepsilon}(D)]^n$.

Для завершения доказательства практически дословно повторяются аргументы из 1.2.1 (см., например, [57, Теорема 1] для аналогичной смешанной задачи для уравнения Лапласа). □

Из теоремы 2.1.1 нетрудно извлечь следующее утверждение.

Следствие 2.1.1. *Пусть μ, $\lambda \in C^\infty(X)$ и выполнены (2.13), (2.14). Тогда пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ непрерывно вложено в $[H^{1/2-\varepsilon,\gamma}(D)]^n$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Если $n = 2$ и $\mu = 1 = -\lambda$, то в качестве оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$ выступает система Коши-Римана в $\mathbb{C}$, что попадает в ситуацию, описанную в [57, Теорема 1] для стандартных пространств Соболева. Это означает, что, вообще говоря, в условиях теоремы 2.1.1, при $S = \emptyset$ и $\partial D \in C^2$ непрерывное вложение $H^+_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D) \to [H^{1/2}(D)]^n$ является не улучшаемым по шкале пространств Соболева-Слободецкого (см. [57, Примеры 1, 2] в случае, когда область D – единичный шар). Также уместно отметить, что вложение, описанное в теореме 2.1.1 и в следствие 2.1.1, вообще говоря, не улучшаемо на шкале пространств Соболева-Слободецкого (более детальное доказательство см. в примере 2.3.5 ниже).

Замечание 2.1.1. *Лемма 2.1.3, теорема 2.1.1 и следствие 2.1.1 означают, что в пространствах $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(1)}}(D)$ и $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(2)}}(D)$ мы можем использовать произвольные возмущения первого порядка $a_1\ I_n \otimes \nabla_n$ в (2.2) при $\rho a_1^{(p,q)} \in L^\infty(D)$, в то время, как для оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$ можно использовать только слагаемые типа $\tilde{a}_1(x)\mathfrak{D}^{(3)}$, где $\tilde{a}_1$ – это $(n \times k_3)$-матрица с элементами $\tilde{a}_1^{(p,q)}$, удовлетворяющими $\rho\tilde{a}_1^{(p,q)} \in L^\infty(D)$.*

Перейдем к рассмотрению обобщенной постановки задачи Штурма-Лиувилля. С этой целью, предположим, что $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) = H^+$ непрерывно вложено в $H^{0,\gamma}(D) = H^0$ (условия, когда это справедливо, были описаны выше) и обозначим через пространство $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) = H^-$ пополнение $[H^1(D,S)]^n$ по соответствующей отрицательной норме

$$\|u\|_{-,\gamma,\mathfrak{D}} = \sup_{\substack{v \in [H^1(D,S)]^n \\ v \neq 0}} \frac{|(v,u)_{[H^{0,\gamma}(D)]^n}|}{\|v\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}}}.$$

Согласно лемме [30, Лемма 2.2] пространство $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ топологически изоморфно сопряженному $(H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D))^*$. Соответствующее спаривание 1.1, определяющее изоморфизм, обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle_\gamma$. Кроме того, интегрируя по частям, получаем, что

$$(Au, v)_{[H^{0,\gamma}(D)]^n} = (\mathfrak{D}u, \mathfrak{D}v)_{[H^{0,\gamma}(D)]^k} + \big(b_1^{-1}(b_0 + \partial_\tau)u, v\big)_{[H^{0,\gamma}(\partial D \setminus S)]^n} +$$

$$+\Big(a_1 \; I_n \otimes \nabla_n u - 2\gamma\rho^{-1}(\mathfrak{D}\rho)^*\mathfrak{D}u + a_0 u, v\Big)_{[H^{0,\gamma}(D)]^n}$$

для всех $u \in [C^2(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ и $v \in [C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$, удовлетворяющих граничному условию задачи (2.5); здесь через $\mathfrak{D}\rho$ обозначена следующая функциональная матрица:

$$\mathfrak{D}\rho = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{D}_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}.$$

Предположим, что (см. замечание 2.1.1)

$$\Big| \big(b_1^{-1}(\delta b_0 + \partial_\tau)u, v\big)_{[L^2(\partial D\setminus S)]^n} + \Big(a_1 \; I_n \otimes \nabla_n u + \delta a_0 \, u, v\Big)_{[L^2(D)]^n} \Big| \le c \, \|u\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}} \|v\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}} \quad (2.19)$$

для всех $u, v \in [H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D, S \cup Y)]^n$, где c – некоторая положительная постоянная, независящая от u и v.

При выполнении условия (2.19), для каждого фиксированного элемента $u \in H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ эрмитова форма

$$Q(u,v) = (\mathfrak{D}u, \mathfrak{D}v)_{[H^{0,\gamma}(D)]^k} + \big(b_1^{-1} b_0 u, v\big)_{[H^{0,\gamma}(\partial D\setminus S)]^n} +$$

$$+\Big(a_1 \; I_n \otimes \nabla_n u - 2\gamma\rho^{-1}(\mathfrak{D}\rho)^*\mathfrak{D}u + a_0 u, v\Big)_{[H^{0,\gamma}(D)]^k}$$

определяет непрерывный линейный функционал f на пространстве $H^{+,\gamma}(D)$ через равенство $f(v) := \overline{Q(u,v)}$ для $v \in H^{+,\gamma}(D)$. Согласно [30, Лемма 2.2] найдется единственный элемент $H^{-,\gamma}(D)$, который мы обозначим через Lu, такой, что

$$f(v) = \langle v, Lu \rangle_\gamma$$

для всех $v \in H^{+,\gamma}(D)$. Таким образом, был определен линейный оператор

$$L : H^{+,\gamma}(D) \to H^{-,\gamma}(D).$$

Как следует из (2.19), оператор L ограничен. Ограниченный линейный оператор

$$L_0 : H^{+,\gamma}(D) \to H^{-,\gamma}(D),$$

определенный этим же способом через эрмитову форму $(\cdot,\cdot)_{+,\gamma}$, т.е.,

$$(v, u)_{+,\gamma,\mathfrak{D}} = \langle v, L_0 u \rangle_\gamma \quad (2.20)$$

для всех $u, v \in H_{+,\gamma}(D)$, соответствует случаю $a_1 = \rho^{-1}\mathfrak{D}^*\rho$, $a_0 = a_{0,0}$ и $b_0 = b_{0,0}$.

Следующим шагом мы сформулируем постановку обобщенной формулировки задачи (2.5) в весовых пространствах: *по заданному элементу $f \in H^{-,\gamma}(D)$, найти*

$u \in H^{+,\gamma}(D)$ *такой, что*

$$\overline{Q(u,v)} = \langle v, f\rangle_\gamma \text{ для всех } v \in H^{+,\gamma}(D). \tag{2.21}$$

Теперь можно исследовать задачу (2.21) стандартными методами функционального анализа [20, Гл. 3, §§ 4–6]), аналогично коэрцитивному случаю. Поскольку задача Дирихле достаточно хорошо изучена ([34], [38]), то все внимание будет сконцентрировано на изучение смешанной задачи при выполнении условия (2.13) в случае, когда $S \neq \partial D$.

Лемма 2.1.4. *Предположим, что пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ непрерывно вложено в пространство $H^{0,\gamma}(D)$, $a_1 = 2\gamma\rho^{-1}(\mathfrak{D}\rho)^*$, $\delta a_0 = 0$ и $\delta b_0 = 0$. Тогда для каждого элемента $f \in H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ существует единственное решение $u \in H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ задачи (2.21), т.е. оператор $L_0 : H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ непрерывно обратим. Более того, нормы оператора L_0 и обратного ему оператора L_0^{-1} равны единице.*

Доказательство. Доказывается аналогично лемме 1.3.4, только в данном случае под A_0 и B_0 из леммы 1.3.4 мы будем понимать следующие выражения:

$$A_0 = \mathfrak{D}^*\mathfrak{D}u + 2\gamma\rho^{-1}(\mathfrak{D}\rho)^*\ I_n \otimes \nabla_n + a_{0,0}(x)u, \quad B_0 = b_1(x)\nu_{\mathfrak{D},\partial D} + \partial_\tau + b_{0,0}.$$

□

Следующие три леммы описывают ограниченные и компактные возмущения оператора L_0.

Лемма 2.1.5. *Пусть $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ непрерывно вложено в $H^{s,\gamma}(D)$, где $0 < s \leq 1$. Если $\rho a_1 \in L^\infty(D)$, $\rho^2\delta a_0 \in L^\infty(D)$, то соответствующие им слагаемые в формуле (2.21) индуцируют непрерывные операторы, действующие из $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ в $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$. Кроме того, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\rho^{2-\varepsilon}\delta a_0 \in L^\infty(D)$, $\rho^{1-\varepsilon}a_1 \in L^\infty(D)$ то соответствующие им слагаемые в формуле (2.21) индуцируют компактные операторы, действующие из $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ в $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$.*

Доказательство. Проводится аналогично лемме 1.3.6. В данном случае аналогом C_1 из леммы 1.3.6 выступает оператор, индуцированный слагаемым $(a_1 I_n \otimes \nabla u, v)_{[H^{0,\gamma}]^m}$, а аналогом оператора C_0 – оператор, индуцированный выражением $(\delta a_0 u, v)_{[H^{0,\gamma}]^n}$. □

В коэрцитивном случае (соответствующий операторам $\mathfrak{D}^{(1)}$, $\mathfrak{D}^{(2)}$) мы можем расширить класс возмущений. С этой целью зафиксируем некоторую полную систему $\{t_j\}$ среди касательных векторов (с ограниченными интегрируемыми компонентами). Это могут быть, например, вектора

$$\vec{e}_j\nu_i - \vec{e}_i\nu_j, \quad i > j. \tag{2.22}$$

Тогда $\partial_\tau = \sum_{i>l} d_{i,l}(x)\partial_{t_{i,l}}$ с некоторыми $(n \times n)$-матрицами $d_{i,l}(x)$.

Лемма 2.1.6. *Допустим $j = 1$ или $j = 2$. Пусть выполнено (2.13) или $\rho \equiv 1$. Если $\rho b_1^{-1}\delta b_0 \in [L^\infty(\partial D \setminus S)]^n$, то соответствующее слагаемое в постановке задачи (2.21) индуцирует ограниченный оператор, действующий из пространства $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}(j)}(D)$ в $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}(j)}(D)$. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $(\rho^{1-\varepsilon} b_1^{-1}\delta b_0) \in [L^\infty(\partial D \setminus S)]^n$, то соответствующее слагаемое в формулировке задачи (2.21) индуцирует компактный оператор $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}(j)}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}(j)}(D)$. Кроме того, если $(b_1^{-1}d_{i,l}) \in [C^{0,\alpha}(\partial D \setminus S)]^n$, $1 \le i \le n-1$, $1 \le l \le n-1$, $i < l$, $1/2 < \alpha \le 1$, то матрица ∂_τ касательных производных индуцирует ограниченный оператор, действующий из пространства $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}(j)}(D)$ в $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}(j)}(D)$, норма которого оценивается через $c\sum_{i>l} \|b_1^{-1}d_{i,l}\|_{[C^{0,\alpha}(\partial D\setminus S)]^n}$ с некоторой постоянной $c > 0$.*

Доказательство. Непрерывность и компактность оператора, индуцированного членом $(b_1^{-1}\delta b_0)$, следует из леммы 2.1.3, компактности вложений для весовых пространств Соболева и непрерывности оператора следа tr, такого, что $tr : [H^{1,\gamma}(D)]^n \to [H^{1/2,\gamma}(\partial D)]^n$ на пространстве $[H^{1,\gamma}(D)]^n$ (см. лемму 1.1.1). Таким образом, для доказательства непрерывности и компактности оператора, индуцированного членом $(b_1^{-1}\delta b_0)$, нужно практически дословно повторить аргументы из работы [31, Лемма 13.5], относящиеся к соответствующей задаче для скалярных операторов.

Для завершения доказательства, мы должны проверить непрерывность касательного оператора, индуцированного ∂_τ. Для этого напомним, что для каждой непрерывной, липшицевой функции $f \in [C^{0,1}(K)]^n$ на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$ существует явно заданное продолжение F на все пространство $\mathbb{R}^n$:

$$F(x) = \inf_{y\in K}(f(y) + \|f\|_{[C^{0,1}(K)]^n}|x-y|), \tag{2.23}$$

которое удовлетворяет неравенству $\|F\|_{[C^{0,1}(\tilde K)]^n} \le \|f\|_{[C^{0,1}(K)]^n}$ для любого большого компакта $\tilde K$. Обозначим через $(\hat d_{i,j}\partial_{t_{i,l}}) \in [C^{0,1}(\overline{D})]^n$ соответствующее продолжение матрицы $\tilde d_{i,l} = b_1^{-1}d_{i,l}$ из $\partial D \setminus S$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Тогда действие касательного оператора можно представить следующим образом:

$$(\tilde d_{i,l}\partial_{t_{i,l}}u, v)_{[H^{0,\gamma}(\partial D\setminus S)]^n} := (\partial_l u, \partial_i(\rho^{-2\gamma}\hat d^*_{i,l}v))_{[L^2(D)]^n} - (\partial_i u, \partial_l(\rho^{-2\gamma}\hat d^*_{i,l}v))_{[L^2(D)]^n}, \tag{2.24}$$

где $u, v \in [H^{1,\gamma}(D, S\cup Y)]^n$. Так как $\phi\rho^{-2\gamma}v \in [H^1_0(D,]^n$ для любой векторной функции $v \in [H^{1,\gamma}(D, S\cup Y)]^n$ и любой функции $\phi \in C^{0,1}(\overline{D})$, обращающихся в нуль на $\partial D \setminus S$, интегрирование по частям показывает, что определение (2.24) не зависит от продолжения $\hat d_{i,l}$ матрицы $\tilde d_{i,l}$. С другой стороны, элементы матрицы $\nabla\rho$ принадлежат $L^\infty(D)$ по предположению, а элементы матрицы $\nabla \hat d_{i,l}$ принадлежат $L^\infty(D)$ по теореме Радемахера. Более того, для $u, v \in [H^{1,\gamma}(D, S\cup Y)]^n$ имеем $u, v \in [H^{0,\gamma+1}(D)]^n$, $\nabla u, \nabla v \in [H^{0,\gamma}(D)]^n$ и

$$(\partial_l u, \partial_i(\rho^{-2\gamma}\hat d^*_{i,l}v))_{[L^2(D)]^n} = (\partial_l u, \rho^{-2\gamma}(\partial_i \hat d^*_{i,l})v - 2\gamma(\partial_i\rho)\rho^{-2\gamma-1}\hat d^*_{i,l}v + \rho^{-2\gamma}\hat d^*_{i,l}(\partial_i v))_{[L^2(D)]^n}$$

Поэтому, из (2.23) вытекает существование постоянной $c_{i,l}$, такой, что

$$|(\partial_l u, \partial_i(\rho^{-2\gamma}\hat{d}^*_{i,l}v))_{[L^2(D)]^n}\| \le c_{i,l}\|b_1^{-1}d_{i,l}\|_{[C^{0,1}(\partial D\setminus S)]^n}\|u\|_{[H^{1,\gamma}(D)]^n}\|v\|_{[H^{1,\gamma}(D)]^n}$$

для всех $u, v \in [H^{1,\gamma}(D, S\cup Y)]^n$, а это уже доказано в лемме 2.1.3, так как мы предполагали непрерывность вложения $[H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D)]^n \to [H^{1,\gamma}(D)]^n$, $j = 1, 2$. □

Лемма 2.1.7. *Пусть выполнено неравенство (2.14) и $b_1^{-1}\delta b_0 \in L^\infty(\partial D\setminus S)$. Если справедливо (2.13) или $\rho \equiv 1$, то соответствующее слагаемое в задаче (2.21) индуцирует непрерывный оператор, действующий из $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ в $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$.*

Доказательство. Следует из доказательства леммы 1.3.7. □

Как показывают [57, Примеры 1,2] граничные слагаемые δb_0 и ∂_τ не могут индуцировать компактное и непрерывное возмущение оператора $L_{\mathfrak{D}}$ при $n = 2$ для $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(3)}$.

Произведем следующее расщепление

$$\delta b_0 = \delta b_0^{(s)} + \delta b_0^{(c)}, \quad \delta a_0 = \delta a_0^{(s)} + \delta a_0^{(c)}, \quad a_1\nabla_n\otimes I_n = 2\gamma\rho^{-1}(\mathfrak{D}\rho)^*\mathfrak{D} + (a_1^{(s)} + a_1^{(c)})\nabla_n\otimes I_n,$$

так, чтобы $\delta b_0^{(c)}$, $\delta a_0^{(c)}$ и $a_1^{(c)}$ индуцировали компактные возмущения оператора $L_{\mathfrak{D}}$, а слагаемые $\delta b_0^{(s)}$, $\delta a_0^{(s)}$ и $a_1^{(s)}$ – достаточно маленькие.

Доказательство следующих двух утверждений проводится с использованием стандартных методов функционального анализа, см., например, [23], [52], [63].

Теорема 2.1.2. *Пусть $j = 1$ или $j = 2$. Допустим $d_{i,l} \in [C^{0,1}(\partial D\setminus S)]^n$, $i > l$. Кроме того, пусть выполнено неравенство (2.13) или $\rho \equiv 1$. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\rho^{2-\varepsilon}\delta a_0^{(c)} \in [L^\infty(D)]^n$, $\rho^{1-\varepsilon}a_1^{(c)} \in [L^\infty(D)]^n$, $\rho^{1-\varepsilon}\delta b_0^{(c)} \in [L^\infty(\partial D\setminus S)]^n$, и*

$$|(b_1^{-1}(\delta b_0^{(s)} + \partial_\tau)u, v)_{[L^2(\partial D\setminus S)]^n} + (a_1^{(s)}\ I_n\otimes\nabla_n u + \delta a_0^{(s)}\,u, v)_{[L^2(D)]^n}| \le M\,\|u\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}}\|v\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}}$$

для всех $u, v \in [H^1(D, S\cup S)]^n$ с некоторой постоянной $0 < M < 1$, независящей от функций u, v, то задача (2.21) фредгольмова.

Доказательство. Доказывается аналогично лемме 1.3.5. □

Для оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$ мы произведем расщепление по-другому (см. замечание 2.1.1):

$$\tilde{a}_1 = 2\gamma\rho^{-1}(\mathfrak{D}^{(3)}\rho)^* + \tilde{a}_1^{(s)} + \tilde{a}_1^{(c)}.$$

Теорема 2.1.3. *Пусть $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(3)}$, справедливо (2.14), функции λ, μ бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности $\overline{D}$, $\tau = 0$, $\delta b_0^{(c)} = 0$. Кроме того, пусть выполнено неравенство (2.13) или $\rho \equiv 1$. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что реализуются вложения $\rho^{2-\varepsilon}\delta a_0^{(c)} \in [L^\infty(D)]^n$, $\rho^{1-\varepsilon}a_1^{(c)} \in [L^\infty(D)]^n$, и*

$$|(b_1^{-1}\delta b_0^{(s)}u, v)_{[L^2(\partial D\setminus S)]^n} + (\tilde{a}_1^{(s)}\mathfrak{D}^{(3)}u + \delta a_0^{(s)}\,u, v)_{[L^2(D)]^n}| \le \tilde{M}\|u\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(3)}}\|v\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(3)}}$$

для всех $u, v \in [H^1(D, S \cup S)]^n$ с некоторой постоянной $0 < \tilde{M} < 1$, независящей от функций u, v, то задача (2.21) фредгольмова.

Доказательство. Эта теорема доказывается аналогично лемме 1.3.5. $\square$

2.2 Спектральные свойства смешанных задач

Рассмотрим на $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ полуторалинейную форму

$$(u, v)_{-,\gamma,\mathfrak{D}} := \langle L_0^{-1} u, v\rangle_\gamma \text{ для } u, v \in H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D),$$

для которой, как хорошо известно, $\sqrt{(u,u)_{-,\gamma,\mathfrak{D}}} = \|u\|_{-,\gamma,\mathfrak{D}}$ для всех $u \in H^{-,\gamma}(D)$. Отныне мы наделяем пространство $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{-,\gamma,\mathfrak{D}}$. Всюду далее в этой главе $\iota_\gamma : H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{0,\gamma}(D)$ есть оператор естественного вложения.

Теорема 2.2.1. *Если $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ непрерывно вложено в $H^{0,\gamma}(D)$, то обратный оператор L_0^{-1} к оператору (2.20) индуцирует положительные самосопряженные операторы*

$$\iota'_\gamma \iota_\gamma\, L_0^{-1} : H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D),\ \iota_\gamma\, L_0^{-1}\, \iota'_\gamma : H^{0,\gamma}(D) \to H^{0,\gamma}(D),$$

$$L_0^{-1}\, \iota'_\gamma \iota_\gamma : H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D),$$

которые имеют одинаковые системы собственных векторов и собственных значений; причем собственные значения положительные. Более того, если пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ непрерывно вложено в пространство $[H^{s,\gamma}(D)]^n$ при $0 < s \le 1$, то эти операторы компактны, порядки их конечны и равны $2s$, а собственные вектора образуют ортогональные базисы в $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$, $H^{0,\gamma}(D)$ и $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$.

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы достаточно повторить аргументы леммы 1.3.8 (см., например, [52], [63]).

Если (2.14) справедливо, тогда из теоремы 2.1.1 следует, что вложение ι_γ компактно. Компактность также следует из леммы 1.1.1 в условиях доказываемой теоремы. Тогда все операторы $(\iota'_\gamma \iota_\gamma\, L_0^{-1})$, $(\iota_\gamma\, L_0^{-1}\, \iota'_\gamma)$, $(L_0^{-1}\, \iota'_\gamma \iota_\gamma)$ также компактны.

Перейдем к доказательству утверждения о порядках операторов. С этой целью обратимся к работе [36] (смотри также в [3, Предложение 5.4.1]). В данной работе доказывается, что если есть $\delta > 0$ такая, что компактный оператор $\mathcal{C}$ отображает пространство $H^s(D)$ непрерывно на пространство $H^{s+\delta}(D)$, то он имеет конечный порядок p (на самом деле, можно выбрать $p = n/\delta + \tau$ для каждого $\tau > 0$). Но из оценки (2.14) и теоремы 2.1.1 вытекает, что при $\rho \equiv 0$ оператор $(\iota_\gamma\, L_0^{-1} \iota'_\gamma)$ в действительности отображает пространство $H^0(D)$ в пространство $[H^{1/2-\varepsilon}(D)]^n$ для любой $\varepsilon > 0$. Поэтому его порядок будет конечен в пространствах Соболева. Так как у операторов $(\iota'_\gamma \iota_\gamma\, L_0^{-1})$ и $(L_0^{-1}\, \iota'_\gamma \iota_\gamma)$ те же собственные значения, то их порядки будут конечны в этих пространствах.

Далее, так как естественное вложение $[H^{s,0}(D)]^n \to [H^s(D,Y)]^n$, очевидно, непрерывно, то для весовых пространств Соболева соответствие $u \mapsto \rho^{-\gamma} u$ индуцирует непрерывное отображение $S^+ : [H^{s,\gamma}(D)]^n \to [H^s(D)]^n$, а соответствие $v \mapsto \rho^\gamma v$ индуцирует непрерывное отображение $S^- : [H^{-s}(D)]^n \to [H^{-s,\gamma}(D)]^n$. Поэтому, если вложение $i_s : H^{+,\gamma}(D) \to [H^{s,\gamma}(D)]^n$ непрерывно, то, как и ранее, из результатов работы [36] можно вывести, что оператор $(\iota'_s \iota_s\, S^+ i_s L_0^{-1} i'_s S^-) : [H^{-s}(D)]^n \to [H^{-s}(D)]^n$ имеет порядок $2s$ и те же собственные значения, что и оператор $(\iota'_\gamma \iota_\gamma\, L_0^{-1})$ (здесь $\iota_s : [H^s(D)]^n \to [L^2(D)]^n$ также естественное вложение, см. [31, §9] для скалярных операторов). $\square$

Нетрудно показать, что оператор $L : H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ индуцирует замкнутый плотно определенный линейный оператор $T : H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ с областью определения $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$. При этом оператору L_0 соответствует симметрический оператор $T_0 : H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$, имеющий те же собственные вектора, что и оператор $(\iota'_\gamma \iota_\gamma\, L_0^{-1}) : H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$, см. §1.3.1.

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы 2.1.2, если $M < \sin \pi/n$, то система корневых функций замкнутого оператора T полна в пространствах $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D)$, $H^{0,\gamma}(D)$ и $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D), j = 1,2$. Более того, для любого $\delta > 0$ все собственные значения T (кроме их конечного числа) принадлежат углу $|\arg \lambda| < \delta + \arcsin M$ в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Следует немедленно из теорем 2.1.2, 2.2.1 и доказательства теоремы 1.3.9 (а также из спектральной теории несамосопряженных операторов, см., например, [2], [4], [31, Теорема 9.2, Теорема 9.10, Следствие 9.4 (для операторов $\mathfrak{D}^{(1)}$, $\mathfrak{D}^{(2)}$), Следствие 9.5 (для оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$), Следствие 9.9], [40], [63, Теорема 6.8]). $\square$

Следствие 2.2.2. *В условиях теоремы 2.1.3, если $\tilde{M} < \sin \pi/2n$, то система корневых функций замкнутого оператора T полна в пространствах $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$, $H^{0,\gamma}(D)$ и $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$, и для любого $\delta > 0$ все собственные значения T (кроме их конечного числа) принадлежат углу $|\arg \lambda| < \delta + \arcsin \tilde{M}$ в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Следует немедленно из теорем 2.1.3, 2.2.1 и доказательства теоремы 1.3.9 (также из спектральной теории несамосопряженных операторов, см., например, [31, Теорема 9.2, Теорема 9.10, Теорема 10.5, Теорема 10.6, Следствие 9.4 (для операторов $\mathfrak{D}^{(1)}$, $\mathfrak{D}^{(2)}$), Следствие 9.5 (для оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$), Следствие 9.9], [63, Теорема 4.5]). $\square$

2.3 Примеры

В начале этого параграфа приведем два примера, которые бы продемонстрировали, что для оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$ лемма 2.1.3 не верна, так как в этом случае

$$\mathfrak{D}^{(3)}(\nabla_n h) = 0 \text{ в } D$$

для любой функции h, гармонической в области D, а значит, пространство решений $\mathfrak{D}^{(3)} u = 0$ в области D бесконечномерно, о чем как раз и говорилось выше.

Пример 2.3.1. В качестве области D возьмем цилиндр в $\mathbb{R}^3$

$$D = \{(x_1, x_2) \in \Omega, 0 < x_3 < 1\},$$

основанием которого является круг $\Omega = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Положим, например, что $\rho \equiv 1$, $a_{0,0} \equiv \rho^{-2}$, $b_1^{-1} b_{0,0} \in [L^\infty(\partial D \setminus S)]^3$, и $S = \emptyset$. Тогда $[H^{1,\gamma}(D)]^3 = [H^1(D)]^3$. Установим $h_n = \Re(x_1 + \iota_\gamma x_2)^n$, где ι_γ – мнимая единица, а $\Re(a)$ обозначает действительную часть комплексного числа a. Как действительная часть голоморфного монома $(x_1 + \iota_\gamma x_2)^n$, функция h_n гармонична в D. Нетрудно проверить, что система $\{\nabla_3 h_n\}$ ортогональна в $[H^1(\Omega)]^3$, а значит, и в $[H^1(D)]^3$ (последнее следует из теоремы Фубини). Тогда из неравенства Бесселя следует, что последовательность $\{u_n = \nabla_3 h_n / \|\nabla_3 h_n\|_{[H^1(D)]^3}\}$ слабо сходятся к нулю $[H^1(D)]^3$. Далее, из теорем вложения Соболева вытекает, что последовательность $u_n = \nabla_3 h_n / \|\nabla_3 h_n\|_{[H^1(D)]^3}$ сходится к нулю в $[L^2(D)]^3$ и $[L^2(\partial D)]^3$, в то время как $\|u_n\|_{[H^1(D)]^3} = 1$. Наконец, $\mathfrak{D}^{(3)} u_n = 0$, а следовательно и последовательность $\|u_n\|_{H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)} \to 0$ при $n \to +\infty$, что означает невозможность непрерывного вложения $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ в $[H^{1,\gamma}(D)]^3$.

Пример 2.3.2. Чтобы проиллюстрировать случай $S \neq \emptyset$ рассмотрим $n = 2$. В этой ситуации можно модифицировать хорошо известный пример Адамара некорректной задачи Коши для уравнения Лапласа. Для этого в качестве области D рассмотрим верхний полукруг в пространстве $\mathbb{R}^2$: $\{x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$, а в качестве S – отрезок $[-1, 1] \times \{0\} \subset \partial D$. Положим, например, что $a_{0,0} \equiv 0$, $b_{0,0} \equiv 0$ на $\partial D \setminus S$, $\rho \equiv 1$. Воспользуемся тем, что матрица

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{rot}_2 \\ -\mathrm{div}_2 \end{pmatrix}$$

представляет собой дифференциальный оператор, формально сопряженный к оператору Коши-Римана. На ∂D рассмотрим последовательность $\{v_p\}$ с компонентами

$$v_p^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{p} \sin(\pi p x_1), & x_2 = 0, \\ 0, & x_2 > 0. \end{cases}, \quad v_p^{(2)} \equiv 0.$$

Из теоремы Лагранжа следует, что v_p – липшицевы векторные функции на ∂D. В частности, последовательность $\{v_p\}$ сходится к нулю в пространстве $[H^{1/2}(\partial D)]^2$. Если P_Δ интеграл Пуассона задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D, примененный к функции v, то последовательность $\{P_\Delta(v_p)\}$ сходится к нулю в пространстве $[H^1(D)]^2$. Отсюда можно сделать вывод, что последовательность

$$\left\{ u_p = \begin{pmatrix} \Re(\sin \pi(x_1 - \iota_\gamma x_2)) \\ \Im(\sin \pi(x_1 - \iota_\gamma x_2)) \end{pmatrix} - P_\Delta(v_p) \right\}$$

лежит в $[H^1(D)]^2$ и равна нулю на S (здесь $\Im(a)$ обозначает мнимую часть комплексного числа a, а $\Re(a)$ – действительную). Кроме того, по построению, последовательность $\{\mathfrak{D}^{(3)}u_p = -\mathfrak{D}^{(3)}P_\Delta(v_p)\}$ сходится к нулю в пространстве $[L^2(D)]^2$. Поэтому $\{u_p\}$ сходится к нулю в $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(2)}}(D)$, но не сходится даже в $[L^2(D)]^2$.

Пример 2.3.3. Возьмем $\rho \equiv 1$. Смешанная задача (2.21) для операторов

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{D}^{(1)})^*\mathfrak{D}^{(1)},\ \mathfrak{B} = \chi_S + \chi_{\partial D\setminus S}\sigma$$

является классической в теории упругости (см. [47, §12]); здесь χ_M – это характеристическая функция множества M. При соответствующей полуторалинейной форме $(\cdot,\cdot)_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(1)}}$ она коэрцитивна для $b_{0,0} = 0$, $\mu \geq \kappa > 0$, $\lambda \geq 0$ (см. лемма 2.1.3). Более того, можно рассматривать граничные операторы вида $[\chi_S + \chi_{\partial D\setminus S}(\sigma + T(x)\partial_{\tau_0} + \delta b_0)]$ с матрицей T, имеющей достаточно маленькие элементы класса $C^{0,\alpha}(\partial D \setminus S)$, $1/2 < \alpha \leq 1$, и с возмущением δb_0, описанным в теореме 2.1.2. Приемлемые возмущения младших порядков также указаны в теореме 2.1.2. Наконец, отметим, что условия полноты для такой задачи были описаны в следствии 2.2.1.

Пример 2.3.4. Пусть D есть единичный круг в $\mathbb{R}^2(\cong \mathbb{C})$, а S – та часть единичной окружности, для которой $\arg(z) \in [0,2\pi] \setminus [-\pi/2,\pi/2]$. В данном примере размерность матричного оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$ будет равна $k_3 = 2$. При $\rho \equiv 1$, рассмотрим смешанную задачу (2.21) для следующей пары операторов

$$\begin{cases} \mathfrak{A}u &= (\mathfrak{D}^{(3)})^*\mathfrak{D}^{(3)}u &= f \quad \text{в} \quad D, \\ \mathfrak{B}u &= \chi_S u + \chi_{\partial D\setminus S}(\nu_{\mathfrak{D}^{(3)},\partial D} + b_{0,0})u &= 0 \quad \text{на} \quad \partial D, \end{cases}$$

см. (2.1), (2.3). Уточним, что в данном случае χ_M – характеристическая функция множества M со следующими постоянными $\mu \geq \kappa > 0$, $\mu + \lambda \geq \kappa > 0$, при этом матрица $b_{0,0} > 0$ состоит из постоянных элементов. Иными словами, мы предполагаем, что $a_1 = 0, a_0 = 0, b_1 = 1, b_0 = b_{0,0} > 0$. Таким образом, $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ непрерывно вложено в $[H^{1/2}(D)]^2$ (см. теорему 2.1.1). Из того, что $\rho \equiv 1$, получаем, что $[H^{0,\gamma}(D)]^2$ совпадает с пространством $[L^2(D)]^2$. Тогда норма в пространстве $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ для элемента u из этого пространства будет выглядеть следующим образом:

$$\|u\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(3)}} = \|\mathfrak{D}^{(3)}u\|_{[L^2(D)]^2} + \|b_{0,0}u\|_{[L^2(\partial D\setminus S)]^2}.$$

Пусть φ функция класса $C^\infty(\overline{D})$, которая тождественно равна нулю в окрестности S и равная единице на той части, где $\arg(z) \in [-\pi/4,\pi/4]$, принадлежит $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$. Зададим новую векторную функцию

$$u_\varepsilon = \phi(z)(\Re v_\varepsilon, \Im v_\varepsilon), \quad v_\varepsilon(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^{4\nu}}{(4\nu+1)^{(1+\varepsilon)/2}}.$$

Иными словами,

$$u_\varepsilon = \begin{cases} (\Re v_\varepsilon, \Im v_\varepsilon), & \text{при} \quad \arg z \in \left[\frac{-\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \\ 0, & \text{при} \quad \arg z \in U_S, \end{cases}$$

где U_S есть некоторая это окрестность S. Очевидно, что

$$\mathfrak{D}^{(3)} v_\varepsilon = 0, \ \mathfrak{D}^{(3)} u_\varepsilon = (\mathfrak{D}^{(3)}\phi) v_\varepsilon. \tag{2.25}$$

Более точно, равенства верны, во-первых, потому что v_ϵ – это антиголоморфная функция, а оператор $\mathfrak{D}^{(3)}$ – сопряженный оператор к оператору Коши-Римана. Про второе равенство можно сказать, что оно является следствием комбинации первого равенства и правила Лейбница. Однако, стоит пояснить, что запись $(\mathfrak{D}^{(3)}\phi)$ означает, что каждая компонента матрицы $\mathfrak{D}^{(3)}$ применяется к ϕ, а ϕ, напоминаю, является скаляром.

Покажем, что u_ε сходится в пространстве $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ и найдем ее норму. Для этого воспользуемся известным фактом, что у комплексного числа есть тригонометрическое представление $z = r\left(\cos(argz) + i\sin(argz)\right) = re^{iargz}$, где $r = |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$.

Так как заданная область D – это единичный круг (т.е. $|z| \le 1$), то очевидно, что:

$$(\overline{z}^k, \overline{z}^\nu)_{L^2(D)} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{k+\nu+1} e^{i(k-\nu)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, & k \neq \nu, \\ \pi/(\nu+1), & k = \nu. \end{cases}$$

Поэтому

$$\|v_\varepsilon\|^2_{L^2(D)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\pi}{(4\nu+1)^{(2+\varepsilon)}},$$

а значит и ряд v_ε сходится в $[L^2(D)]^2$ и, с учетом (2.25), сходится в пространстве $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$. Это доказывает сходимость последовательности $\{\Re v_\varepsilon, \Im v_\varepsilon\}$ в пространстве $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$, что, в свою очередь, свидетельствует о сходимости последовательности u_ε в $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$. С другой стороны, в соответствии с [59, Лемма 1.4], верно, что:

$$\|v_\varepsilon\|^2_{H^s(D)} \ge const \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\pi(4\nu+1)^{2s-1}}{(4\nu+1)^{(1+\varepsilon)}}, \quad 0 < s \le 1,$$

Поэтому ряд v_ε сходится в $[H^s(D)]^2$ для любого $0 \le s \le 1/2$. Тогда и ряд u_ε сходится в $[H^s(D)]^2$ для любого $0 \le s \le 1/2$.

Далее из $s > \frac{1}{2}$, следует $2s-1 > 0$. Значит, для любого $s > \frac{1}{2}$ существует $0 < \varepsilon \le 2s-1$ для которого ряды v_ε и u_ε не сходятся в $[H^s(D)]^2$. Таким образом, u_ε принадлежит $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$, но для любого $s \in (1/2, 1]$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $u_\varepsilon \notin [H^s(D)]^2$. Напомним, что $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ непрерывно вложено в $[H^{1/2}(D)]^2$ (см. теорему 2.1.1), но, учитывая доказанное выше, не вложено непрерывно в $[H^s(D)]^2$ ни при каком $s \in (1/2, 1]$ (см., например, [57, Примеры 1, 2]). Более того, при $Y \subset \partial S$ этот пример можно легко адаптировать для весовых пространств. В этом случае норма в пространстве $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ для элемента $u \in H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ представима в виде:

$$\|u\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(3)}} = \|\mathfrak{D}^{(3)} u\|_{H^{0,\gamma}(D)} + \|b_{0,0} u\|_{H^{0,\gamma}(\partial D \setminus S)},$$

а функция ρ есть расстояние до подмножества Y границы множества S.

Очевидно, что оператор $\nu_{\mathfrak{D}^{(3)},\partial D}$ отвечает не только за стресс / вязкость на границе, но за более широкий класс взаимодействий с ∂D. Например, интерпретируя системы Ламе как линеаризацию стационарной версии уравнений типа Навье-Стокса для сжимаемой жидкости, мы видим, что граничный оператор $(\nu_{\mathfrak{D}^{(3)},\partial D} + b_{0,0})$ отражает скорее вихри и функции источника на конормальных направлениях для $\partial D \setminus S$. Это означает, что граничный оператор $\nu_{\mathfrak{D}^{(3)},\partial D}$ больше подходит для изучения проблем, связанных с моделями турбулентных течений, чем операторы $\nu_{\mathfrak{D}^{(1)},\partial D}$ и $\nu_{\mathfrak{D}^{(2)},\partial D}$. Тогда, естественно, что класс возможных решений (2.21) расширяется до $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ из-за потери регулярности решений вблизи $\partial D \setminus S$.

Пример 2.3.5. Пусть $\rho \equiv 1$. Зафиксируем непустое открытое множество S на ∂D. Рассмотрим смешанную задачу (2.21) для операторов $\mathfrak{A} = (\mathfrak{D}^{(2)})^* \mathfrak{D}^{(2)}$ и граничного оператора $\mathfrak{B} = \chi_S + \chi_{\partial D \setminus S}(\nu_{\mathfrak{D}^{(2)},\partial D} + h\mu(x)\partial_{\tau_0})$ с малым числовым параметром h, см. (2.1), (2.3) при $\mu \geq \kappa > 0$, $\mu + \lambda \geq \kappa > 0$. В частности, если мы выберем вектор (2.22) в качестве базиса среди касательных векторов для ∂D, то $d_j(x) = h\chi_{\partial D \setminus S}\mu(x) I_n$, $1 \leq j \leq n-1$.

Предположим, что $\mu, \lambda \in C^{0,1}(\overline{D})$. Тогда для всех $1/2 < \alpha \leq 1$: $\mu \in L^\infty(D)$, $\nabla_n \mu \in L^\infty(D)$, $\mu \in C^{0,\alpha}(\partial D \setminus S)$. Согласно лемме 2.1.3, нормы пространств $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(2)}}(D), [H^1(D)]^n$ эквивалентны. При этом, из леммы 2.1.5 следует, что слагаемые первого порядка индуцируют компактный оператор, действующий из пространства $[H^1(D)]^n$ в пространство $[H^{-1}(D)]^n$. Теперь, если величина $|h|$ достаточно, мала, то задача (2.21) фредгольмова, а ее корневые функции плотны в $[H^1(D)]^n$, $[H^{-1}(D)]^n$, $[L^2(D)]^n$. В случае, если величина $|h|$ достаточно мала, то задача (2.21) однозначно разрешима. Другие приемлемые возмущения описываются в теореме 2.1.2.

Если $\rho \equiv 1$, а коэффициенты λ, μ постоянны, то по формуле Остроградского-Гаусса, для всех $u, v \in [H^1(D, S)]^n$ выполнено

$$|(\partial_{\tau_0} u, v)_{L^2(\partial D \setminus S)}| = \left| \sum_{j=1}^n (\nabla_n u_j, \partial_j v)_{L^2(D)} - (\mathrm{div}_n\, u, \mathrm{div}_n\, v)_{L^2(D)} \right|,$$

для всех $u, v \in [H^1(D, S)]^n$, т.е. $\mu \|\partial_{\tau_0}\| \leq 1$. Но из формулы (2.4) следует, что $\nu_{\mathfrak{D}^{(3)},\partial D} + b_{0,0} = \nu_{\mathfrak{D}^{(2)},\partial D} + b_{0,0} - \mu\partial_{\tau_0}$. Таким образом, если-бы $\mu\|\partial_{\tau_0}\| < 1$, то для матрицы $b_{0,0}$ с довольно маленькими элементами смешанная задача с граничным оператором $\nu_{\mathfrak{D}^{(3)},\partial D} + b_{0,0}$ могла бы трактоваться как малое возмущение смешанной задачи с граничным оператором $\nu_{\mathfrak{D}^{(3)},\partial D}$. Однако это противоречит примеру 2.3.5, по причине того, что пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ не вложено непрерывно в $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(2)}}(D) = [H^{1,\gamma}(D)]^n$. Следовательно, для постоянных коэффициентов Ламе метод возмущений действует при $|h| < 1$.

В частности, формула (2.4) означает, что смешанную задачу с граничным оператором $\chi_S + \chi_{\partial D\setminus S}\nu_{\mathfrak{D}^{(2)},\partial D}$ невозможно исследовать методом малых возмущений для смешанной задачи с граничным оператором $\chi_S + \chi_{\partial D\setminus S}\sigma$ в пространстве $[H^{1,\gamma}(D)]^n$.

В заключении параграфа и главы в целом, рассмотрим примеры подходящих весовых функций для определенных пространств.

Пример 2.3.6. Рассмотрим цилиндр $D = \{(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \Omega, 0 < x_n < 1\}$ с основанием $S = \{(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \Omega, x_n = 0\}$ и множеством $Y = \partial S$, где Ω – область с гладкой границей в $\mathbb{R}^{n-1}$. Пусть $\phi(x_1,\dots,x_{n-1})$ – определяющая функция области Ω, т.е. вещественная функция с $\nabla\phi = 1$ на $\partial\Omega$ и такая, что область Ω можно задать как $\Omega = \{(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \phi(x_1,\dots,x_{n-1}) < 0\}$. Тогда $\rho(x) = \sqrt{\phi^2(x_1,\dots,x_{n-1}) + x_n^2}$.

Пример 2.3.7. Рассмотрим куб $D = \{-1 < x_j < 1, 1 \le j \le n-1, 0 < x_n < 1\}$ с выделенной стороной $S = \{-1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1, -1 < x_j < 1, 1 \le j \le n-1, x_n = 0\}$ и множеством $Y = \partial S$. В этой ситуации в качестве весовой функции можно взять $\rho(x) = \left(\Pi_{j=1}^{n-1}((x_j-1)^2 + x_n^2)\,((x_j+1)^2 + x_n^2)\right)^{1/2}$. Уместно отметить, что если $n > 2$, то в этом случае $\nabla\rho = 0$ в вершинах куба, принадлежащих Y. Данный факт влияет, в основном, на теоремы вложения для весовых пространств $H^{s,\gamma}(D)$ (см. [31, §§4-5]).

Глава 3

Собственные значения задачи Зарембы для круга

В этой главе мы рассмотрим краевую задачу с граничными условиями типа Зарембы для оператора Лапласа в единичном круге на комплексной плоскости. Более точно, мы опишем один способ нахождения собственных значений и построение собственных функций таких задач. Для этой цели мы будем использовать теорему Эренпрайса-Мальгранжа-Паламодова об экспоненциальном представлении решений уравнений с постоянными коэффициентами.

3.1 Задача типа Зарембы для единичного диска

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость с координатами $z = x_1 + \sqrt{-1}x_2, \bar{z} = x_1 - \sqrt{-1}x_2$. Далее, через $\mathcal{D}$ обозначим единичный диск в пространстве $\mathbb{C}$. Будем рассматривать комплекснозначные функции, определенные в диске $\mathcal{D}$ и в его замыкании $\overline{\mathcal{D}}$. Пусть S будет (относительно) открытым, связным подмножеством границы диска $\partial\mathcal{D}$ и полагаем, что a_0, b_0, b_1, b_2 суть неотрицательные числа со следующим условием условием: $b_1 + b_2 = 2$.

Рассмотрим следующую (вообще говоря, некоэрцитивную) задачу типа Зарембы для оператора Лапласа с граничными условиями смешанного типа на диске $\mathcal{D}$.

Задача 3.1.1. *По заданному распределению $f \in \mathcal{D}$, найти распределение $u \in \mathcal{D}$, что*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u + a_0 u &=& f & \text{в} \quad \mathcal{D}, \\ u &=& 0 & \text{на} \quad S, \\ Bu &=& 0 & \text{на} \quad \partial\mathcal{D} \setminus S. \end{array}\right. \tag{3.1}$$

В данной задаче граничный оператор B определен следующим образом:

$$Bu = b_0 u + b_1 z\partial + b_2 \overline{z}\overline{\partial}.$$

Безусловно, случай $S = \partial\mathcal{D}$ соответствует задаче Дирихле для оператора Лапласа в $\mathcal{D}$.

Заремба (см. [72]) изучал подобные (вещественные) задачи в пространстве гладких функций над гладкой областью D в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ при условии, что $S \neq \emptyset$, $\partial D \setminus S \neq \emptyset$ и B есть (внешняя) нормальная производная к ∂D, т.е.

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \nu_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

(здесь $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ есть единичный нормальный вектор к D), что соответствует $b_0 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$ в случае единичного диска на комплексной плоскости.

Для определения функционального пространства решений задачи (3.1) воспользуемся стандартным метод эрмитовых форм, описанным в этой диссертации выше. Более подробно, пусть $\bar{\partial}$ – оператор Коши-Римана в $\mathbb{C}^n$, т.е.

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\Big).$$

Тогда формально сопряженным оператором $\bar{\partial}^*$ для $\bar{\partial}$ будет

$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\Big) =: -\partial.$$

Отметим, что $\bar{\partial}^*\bar{\partial}$ – это просто оператор Лапласа в вещественном пространстве $\mathbb{R}^2$ с координатами $x = (x_1, x_2)$, умноженный на $(-1/4)$.

При решении данной задачи мы, как и ранее, будем использовать функционал $\|u\|_+$. В этой главе он будет рассмотрен на пространстве $H^1(\mathcal{D})$ в виде

$$\|u\|_+ = \Big(a_0\|u\|^2_{L^2(\mathcal{D})} + 2b_1\|\partial u\|^2_{L^2(\mathcal{D})} + 2b_2\|\overline{\partial} u\|^2_{L^2(\mathcal{D})} + b_0\|u\|^2_{L^2(\partial\mathcal{D}\setminus S)}\Big)^{1/2}$$

Если функционал определяет норму на $H^1(\mathcal{D}, S)$, то через $H^+(\mathcal{D})$ обозначим пополнение $H^1(\mathcal{D}, S)$ по данной норме. Тогда $H^+(\mathcal{D})$ – гильбертово пространство и

$$(u, v)_+ = a_0(u, v)_{L^2(\mathcal{D})} + 2\, b_1(\partial u, \partial v)_{L^2(\mathcal{D})} + 2\, b_2(\overline{\partial} u, \overline{\partial} v)_{L^2(\mathcal{D})} + b_0(u, v)_{L^2(\partial\mathcal{D}\setminus S)}.$$

По определению, элементы пространства $H^+(\mathcal{D})$ имеют хорошо определенный след на границе $\partial\mathcal{D}$, принадлежащий пространству $L^2(\partial\mathcal{D})$; в частности, из эллиптической регулярности следует, что функции из пространства $H^+(\mathcal{D})$ принадлежат также пространству $H^1_{loc}(\mathcal{D} \cup S)$ и равны нулю на S.

Предположим, что пространство $H^+(\mathcal{D})$ непрерывно вложено в пространство $L^2(\mathcal{D})$. Тогда, как и ранее, обозначим через $H^-(\mathcal{D})$ двойственное пространство к $H^+(\mathcal{D})$ и через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ спаривание, индуцированное скалярным произведением в $L^2(\mathcal{D})$. Так как

$$4\partial\overline{\partial} = 4\overline{\partial}\partial = \Delta, \quad (z\partial u, v)_{L^2(\partial\mathcal{D}\setminus S)} = 2(\partial u, \partial v)_{L^2(\mathcal{D})} + 1/2(\Delta u, v)_{L^2(\mathcal{D})},$$

$$(\bar{z}\overline{\partial} u, v)_{L^2(\partial\mathcal{D}\setminus S)} = 2(\overline{\partial} u, \overline{\partial} v)_{L^2(\mathcal{D})} + 1/2(\Delta u, v)_{L^2(\mathcal{D})}$$

для всех $u, v \in H^2(\mathcal{D}) \cap H^1(\mathcal{D}, S)$, то интегрирование по частям дает возможность переформулировать задачу типа Зарембы для оператора Лапласа с граничными условиями смешанного типа в $\mathcal{D}$ следующим образом:

Задача 3.1.2. *По заданному распределению $f \in H^-(\mathcal{D})$, найти такое распределение $u \in H^+(\mathcal{D})$, что*

$$(u, v)_+ = \langle f, v \rangle \text{ для всех } v \in H^+(\mathcal{D}).$$

Тогда по теорема Рисса об общем виде непрерывных линейных функционалов в гильбертовых пространствах существует единственное решение $u \in H^+(\mathcal{D})$ задачи 3.1.2 для каждой функции $f \in H^-(\mathcal{D})$, "ортогональной"к нулевому пространству задачи в отношении спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$, (см., например, [23]). По теореме единственности для задачи Коши для эллиптических систем, нулевое пространство равно нулю, если $S \neq \emptyset$ (см. [60, Теорема 2.8]).

Пример 3.1.1. Если $b_1 > 0$ и $b_2 > 0$, то норма $\| \cdot \|_+$ эквивалентна стандартной норме $\| \cdot \|_{H^1(\mathcal{D})}$ на пространстве $H^1(\mathcal{D}, S)$, и пространство $H^+(\mathcal{D})$ совпадает с пространством $H^1(\mathcal{D}, S)$, (см., например, [23]). Это означает, что задача 3.1.2 удовлетворяет условиям Шапиро-Лопатинского на $\partial\mathcal{D} \setminus S$ и, следовательно, решения задачи принадлежат пространству $C^\infty(\overline{\mathcal{D}} \setminus \partial S) \cap H^1(\mathcal{D})$ для всех $f \in C^\infty(\overline{\mathcal{D}})$. В частности, задача 3.1.2 будет фредгольмовой и ее индекс равен нулю. Более того, спектр задачи дискретен, собственные значения не отрицательные (и даже $\lambda \geq a_0$), а соответствующие собственные вектора формируют ортогональный базис в пространствах $H^+(\mathcal{D})$, $H^-(\mathcal{D})$ и $L^2(\mathcal{D})$ (см., например, в [23], [44] или в других источниках).

Пример 3.1.2. Если $b_0 > 0$ и одно из чисел $b_j > 0$, $j = 1, 2$, будет положительным, то норма $\| \cdot \|_+$ будет не слабее, чем стандартная норма $\| \cdot \|_{H^{1/2}(\mathcal{D})}$ на $H^1(\mathcal{D}, S)$, и пространство $H^+(\mathcal{D})$ будет непрерывно вложено в пространство Соболева-Слободецкого $H^{1/2}(\mathcal{D}, S)$ (см. [63, Теорема 2.5]). Пример, построенный в [63, Замечание 5.1], демонстрирует, что если $b_1 = 0$, то вложение будет достаточно точным, и, таким образом, задача 3.1.2 – некоэрцитивна. С другой стороны, если $b_1 = 0$, тогда задача 3.1.2 является краевой задачей с так называемыми граничными условиями $\overline{\partial}$-неймановского типа. Итак, объединяя теорему [63, Теорема 2.5] и результаты [49], получаем, что решения поставленной задачи принадлежат пространству $C^\infty(\overline{\mathcal{D}} \setminus \partial S) \cap H^{1/2}(\mathcal{D})$ для любой функции $f \in C^\infty(\overline{\mathcal{D}})$. Вновь, задача 3.1.2 будет фредгольмова, ее индекс – нулевой, спектр – дискретен, собственные значения – неотрицательные (и даже $\lambda \geq a_0$), а соответствующие собственные вектора формируют ортогональный базис в пространствах $H^+(\mathcal{D})$, $H^-(\mathcal{D})$ и $L^2(\mathcal{D})$ (см., например, [63, Лемма 3.1]).

Пример 3.1.3. Если $S = \emptyset$, $a_0 > 0$ и $b_0 = b_1 = 0$, то нулевое пространство задачи 3.1.2 совпадает с пространством голоморфных функции класса $L^2(\mathcal{D})$, и, следовательно, в этом случае задача 3.1.2 не является фредгольмовой.

3.2 Применение метода Фурье

Рассмотрим смешанную краевую задачу на пространстве $H^+(\mathcal{D})$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + a_0 u & = & \lambda u & \text{в} \quad \mathcal{D}, \\ u & = & 0 & \text{на} \quad S, \\ Bu & = & 0 & \text{на} \quad \partial\mathcal{D} \setminus S, \end{array} \right. \tag{3.2}$$

т.е. для всех элементов $v \in H^1(\mathcal{D}, S)$ верно, что

$$2b_1(\partial u, \partial v)_{L^2(\mathcal{D})} + 2b_2(\overline{\partial} u, \overline{\partial} v)_{L^2(\mathcal{D})} + b_0(u, v)_{L^2(\partial\mathcal{D}\setminus S)} = (\lambda - a_0)(u, v)_{L^2(\mathcal{D})}. \tag{3.3}$$

Напомним, что мы рассматриваем только случай, когда $a_0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$. Так как оператор Гельмгольца $(-\Delta + a_0 - \lambda)$ – эллиптический, то все решения задачи (3.2) принадлежат пространству $C^\infty(\mathcal{D} \cup S)$. Более того, по теореме Петровского они буду также вещественно-аналитическими в диске $\mathcal{D}$. Результаты С. Б. Моррея и Л. Ниренберга (см. [53]) демонстрируют нам, что решения поставленной задачи также аналитически продолжаются в окрестность компакта $K \subset S$. Однако точки множества $\partial S \subset \partial\mathcal{D}$ могут иметь особенности для решений задачи (3.2).

Пример 3.2.1. Пусть $S = \emptyset$. Тогда можно использовать методом Фурье для разделения переменных. На самом деле эта задача очень похожа на коэрцитивную смешанную задачу для оператора Лапласа в круге (см. [32, Дополнение II, ч. 1, §2]).

Для этого перейдем к полярным координатам

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi, \\ x_2 = r\sin\varphi, \end{cases}$$

где $\varphi \in [0, 2\pi]$ суть координаты на единичном круге $\partial\mathcal{D}$ в $\mathbb{C}$. Оператор Лапласа Δ в сферических координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\Big(\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big)^2 + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big). \tag{3.4}$$

С другой стороны, в единичном диске

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = r\frac{\partial}{\partial r}, \quad \overline{z}\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \quad z\partial = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует равенство

$$Bu = b_0 u + \frac{b_2 - b_1}{2}\sqrt{-1}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi} + r\,\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Как и обычно для решения однородного уравнения $(-\Delta + a_0 - \lambda)u = 0$ установим $u(r, \varphi) = g(r)h(\varphi)$, чтобы получить два различных уравнения на g и h соответственно

$$\Big(-\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big)^2 + (a_0 - \lambda)r^2\Big)g = c\,g, \quad -\frac{\partial^2 h}{\partial\varphi^2} = c\,h,$$

где c – произвольная постоянная.

Тогда у второго уравнения будет ненулевое решение только в том случае, когда постоянная c есть собственное значение функции $(-\frac{\partial^2 h}{\partial\varphi^2})$. При условии $p = \mathbb{Z}$ собственные значения общеизвестны и они равны $c = p^2$ (см., например, [32]). Соответствующими собственными функциями для $(-\frac{\partial^2 h}{\partial\varphi^2})$ будут комплексные экспоненты

$$h_p(\varphi) = \exp[\sqrt{-1}p\varphi].$$

Очевидно, что

$$h_p = \begin{cases} z^p_{|\partial\mathcal{D}} & \text{if} \quad p \in \mathbb{Z}_+, \\ \overline{z}^p_{|\partial\mathcal{D}} & \text{if} \quad -p \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Тогда из (3.5) следует

$$Bu = h_p(\varphi)\left(\frac{(2b_0 + (b_1 - b_2)p)g(r)}{2} + rg'(r)\right).$$

Зафиксируем $p \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения относительно переменной $0 < r < 1$

$$\Big(- \frac{1}{r^2}\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big)^2 + \frac{p^2}{r^2}\Big) g_p(r) = (\lambda - a_0)\ g_p(r), \tag{3.6}$$

$$g_p'(1) + \Big(\frac{2b_0 + (b_1 - b_2)p}{2}\Big) g_p(1) = 0 \text{ и } g_p(r) \text{ ограниченно в точке } r = 0. \tag{3.7}$$

(см., например, [32, Дополнение II, ч. 1, §2]). Действительно, если $\lambda \in \mathbb{R}$, то (3.6) представляет собой некую версию уравнения Бесселя, а его (вещественное) решение $g(r)$ может быть выражено через функцию Бесселя $\mathcal{J}_p$, если пространство всех решений является двумерным (см., например, [32, Дополнение II, ч. 1, §2]). Например, если $\lambda = a_0$, то $g_p(r) = ar^p + br^{-p}$ будет общим решением для (3.6), где a и b суть произвольные постоянные. В общем случае пространство решений задачи (3.6) содержит одномерное подпространство функций, ограниченных в точке $r = 0$, ср. [32]. Более точно,

$$g_p(r) = \mathcal{J}_p(r\sqrt{\lambda - a_0})$$

(см., например, [71, §2.11]), где

$$\mathcal{J}_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}} \frac{z^{2k+p}}{k!\,(k+p)!}, \quad \mathcal{J}_{-p}(z) = (-1)^p \mathcal{J}_p(z),\ z \in \mathbb{C},\ p \in \mathbb{Z}_+.$$

Для $p \in \mathbb{Z}$ зафиксируем нетривиальное решение $g_p(r)$ у задачи (3.6)–(3.7), соответствующее собственному значению λ_p. Хорошо известно, что система $\{g_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ формирует ортогональный базис в пространстве $L^2([0,1], r)$ с весом r. Тогда функция $u_p = g_p(r)\exp[\sqrt{-1}p\varphi]$ удовлетворяет уравнениям

$$(-\Delta + (a_0 - \lambda_p))\, u_p = 0 \text{ в } \mathbb{C}, \tag{3.8}$$

$$Bu_p = 0 \text{ на } \partial\mathcal{D}. \tag{3.9}$$

В самом деле, из (3.4), (3.5), (3.6) и рассуждений выше, получаем, что последние равенства сохраняются и в пространстве $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Далее, так как функция u_p ограничена в начале координат, то (3.8) – выполнено. С другой стороны, (3.9) немедленно следует из (3.5). Тогда

$$u_p(r,\varphi) = g_p(r)\exp[\sqrt{-1}p\varphi] = \exp[\sqrt{-1}p\varphi]u_p(z) = (z/|z|)^p \mathcal{J}_p(|z|\sqrt{\lambda_p - a_0}).$$

Отсюда соответствующее собственное значение λ_p будет корнем функции

$$G_p(\lambda) = \sqrt{\lambda - a_0}\,\mathcal{J}_p'(\sqrt{\lambda - a_0}) + \Big(\frac{2b_0 + (b_1 - b_2)p}{2}\Big)\mathcal{J}_p(\sqrt{\lambda - a_0}).$$

Из довольно известных дифференциальных соотношений (см., например, [35, 9.1.27] или [71, §2.12]) следует, что

$$\mathcal{J}_p'(r) = \mathcal{J}_{p-1}(r) - \frac{p}{r}\mathcal{J}_p(r), \quad G_p(\lambda) = (b_0 - pb_2)\,\mathcal{J}_p(\sqrt{\lambda - a_0}) + \sqrt{\lambda - a_0}\,\mathcal{J}_{p-1}(\sqrt{\lambda - a_0}).$$

Как обычно, полнота системы $\{u_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $L^2(\mathcal{D})$ доказывается по теореме Фубини. Действительно, так как система $\{\exp[\sqrt{-1}p\varphi]\}_{p\in\mathbb{Z}}$ формирует ортогональный базис в пространстве $L^2([0,2\pi])$, а система $\{g_p(r)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ – ортогональный базис в пространстве $L^2([0,1],r)$, то по аналогичным выше рассуждениям система $\{g_p(r)\exp[\sqrt{-1}p\varphi]\}$, $p \in \mathbb{Z}$, будет ортогональным базисом в пространстве $L^2([0,2\pi]\times[0,1]) = L^2(\mathcal{D})$.

Стоит отметить, что данная схема работает даже в тех случаях, когда нельзя гарантировать компактность вложения $H^+(\mathcal{D}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{D})$. Действительно, если $S = \emptyset$, $a_0 > 0$, $b_0 = b_1 = 0$, то вложение $H^+(\mathcal{D}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{D})$ непрерывно. Более того, оно может быть некомпактным, т.к. пространство $H^+(\mathcal{D})$ содержит пространство голоморфных $L^2(\mathcal{D})$-функций. Однако, используя задачу (3.6), (3.7) для уравнения Бесселя, мы можем построить базис в $L^2(\mathcal{D})$, состоящий из собственных функций соответствующей задачи Зарембы. Отметим, что если $\lambda = a_0$, то все голоморфные мономы $\{z^p\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ будут собственными векторами, соответствующими данному собственному значению с бесконечной кратностью.

Пример 3.2.2. Пусть внутренняя часть множества S будет не пуста. Если либо $a_0 > 0$, либо $b_0 > 0$, то из (3.3) решение задачи u, соответствующее $\lambda = a_0$, будет решением эллиптической системы

$$b_1\partial u = b_2\overline{\partial} u = 0 \text{ в } \mathcal{D}.$$

Если либо $a_0 > 0$, либо $b_0 > 0$, то решение $u \in L^2(\mathcal{D})$ и, следовательно, это решение будет иметь конечный порядок роста около $\partial\mathcal{D}$. Так как u исчезает на S слабо, то по теореме единственности для задачи Коши для эллиптических систем $u \equiv 0$ в $\mathcal{D}$ (см., например, [60, Теорема 2.8]).

Зафиксируем $\lambda > a_0$. Из примера 3.2.1 следует, что решение u можно представить в виде

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\sqrt{-1}p_k\varphi} \mathcal{J}_{p_k}(r\sqrt{\lambda - a_0})$$

с некоторыми числами $N \in \mathbb{N}$, $p_k \in \mathbb{Z}$ и $c_k \in \mathbb{C}$. Тогда $-\Delta u = \lambda u$ в $\mathcal{D}$. Далее, при применении граничного оператора на $\partial\mathcal{D} \setminus S$, получим

$$\sum_{k=1}^{N} c_k e^{\sqrt{-1}p_k\varphi} \left(\frac{(2b_0 + (b_1 - b_2)p_k)}{2} \mathcal{J}_{p_k}(\sqrt{\lambda - a_0}) + \sqrt{\lambda - a_0}\mathcal{J}'_{p_k}(\sqrt{\lambda - a_0}) \right) = 0.$$

Так как конечная система $\{e^{\sqrt{-1}p_k\varphi}\}_{k=1}^{N}$ линейно независима на любом конечном интервале $(\alpha, \beta) \subset [0, 2\pi]$, то

$$\left(\frac{(2b_0 + (b_1 - b_2)p_k)}{2} \mathcal{J}_{p_k}(\sqrt{\lambda - a_0}) + \sqrt{\lambda - a_0}\mathcal{J}'_{p_k}(\sqrt{\lambda - a_0}) \right) = 0$$

для всех $1 \leq k \leq N$ и, следовательно, $Bu = 0$ на всей границе $\partial\mathcal{D}$.

Так как решение задачи u должно исчезать в том числе и на S, то вновь по теореме единственности для задачи Коши для эллиптических систем $u \equiv 0$ в $\mathcal{D}$ (см., например, [60, Теорема 2.8]). Иными словами, мы должны искать собственные функции в виде

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\sqrt{-1}p_k\varphi} \mathcal{J}_{p_k}(r\sqrt{\lambda - a_0}), \tag{3.10}$$

с некоторыми числами $p_k \in \mathbb{Z}$ и $c_k \in \mathbb{C}$ или даже с некоторой мерой $d\mu$ на $\mathbb{R}$ вида

$$u(r,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sqrt{-1}p\varphi} \mathcal{J}_p(r\sqrt{\lambda - a_0}) d\mu(p).$$

Из последней формулы следует, что необходимо отдать приоритет теореме Эренпрайса-Мальгранжа-Паламодова об экспоненциальном представление решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами взамен метода разделения переменных (см., например, [24]).

3.3 Применение теоремы об экспоненциальном представлении

Пусть всюду далее $a_0 = 0$, так как ненулевое a_0 даст лишь сдвиг по спектру. Итак, из преобразования Фурье следует, что характеристическое многообразие оператора Гельмгольца $(-\Delta - \lambda)$, $\lambda \geq 0$ совпадет с кругом $\mathcal{N} = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 = \lambda\} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta|^2 = \lambda\}$, где $\zeta = y_1 + \sqrt{-1}y_2$.

По определению, элементы пространства $H^+(\mathcal{D})$ обладают хорошо определенным следом на $\partial\mathcal{D}$, который принадлежит пространству $L^2(\partial\mathcal{D})$. В частности, решения уравнения (3.2) из пространства $H^+(\mathcal{D})$ будут гладкими функциями в диске $\mathcal{D}$, имеющие конечный порядок роста около границы $\partial\mathcal{D}$ (см. [60]). Тогда по теореме об экспоненциальном представлении решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, см. [24, Введение и гл. VI, §4, Теорема 1], решение для (3.2) необходимо искать в виде

$$u(x) = \int_{y_1^2+y_2^2=\lambda} \exp[\sqrt{-1}(x_1y_1 + x_2y_2)]\, d\mu(y),\ \ \lambda > 0,$$

здесь $d\mu(y)$ есть (в общем, не определенная однозначно) комплексная мера на $\mathcal{N}$, т.е. $d\mu \in C'(\overline{\mathcal{N}})$, где $C'(\overline{\mathcal{N}})$ есть двойственное к пространству Банаха $C(\overline{\mathcal{N}})$ непрерывных функций на $\overline{\mathcal{N}}$. После комплексификации мы получаем несколько иную форму:

$$u(z) = \int_{|\zeta|=1} \exp[\sqrt{-\lambda}(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta)/2]\, d\mu(\zeta),\ \ \lambda > 0. \tag{3.11}$$

Так как решения (3.2) в пространстве $H^+(\mathcal{D})$ будут гладкими функция на диске $\mathcal{D}$ с конечным порядком роста около $\partial\mathcal{D}$, то след Bu будет также хорошо определен в пространстве распределений на $\partial\mathcal{D}$, см. [60, Теорема 2.6]. В частности, так как распределение $u_{|\partial\mathcal{D}\setminus S} \in L^2(\partial\mathcal{D} \setminus S)$, то $b_1 z\partial u + b_2\bar{z}\overline{\partial}u$ принадлежит $L^2(\partial\mathcal{D} \setminus S)$ для любого решения из пространства $H^+(\mathcal{D})$ уравнения (3.2).

В виду того, что u можно определить в пределах пространства $L^2(S)$, а Bu можно определить в пределах пространства $L^2(\partial\mathcal{D}\setminus S)$, то можно искать меру $d\mu(\zeta)$ так, чтобы у решения u из (3.11) были следы u и Bu, исчезающие на S и $(\partial\mathcal{D} \setminus S)$ соответственно как элементы пространств Лебега $L^2(S)$ и $L^2(\partial\mathcal{D} \setminus S)$. С этой целью, предположим, что

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1,\, \alpha < \arg(z) < 2\pi\}$$

с числом $0 < \alpha \leq 2\pi$ ($\alpha = 2\pi$ соответствует случаю $S = \emptyset$). Тогда система $\{z^{2p\pi/(2\pi-\alpha)}\}_{p\in\mathbb{Z}}$ будет ортогональным базисов в $L^2(S)$, если $0 < \alpha < 2\pi$. Следовательно

$$\partial\mathcal{D} \setminus S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1,\, 0 \leq \arg(z) \leq \alpha\}$$

и система $\{z^{2p\pi/\alpha}\}_{p\in\mathbb{Z}}$ будет ортогональным базисом в пространстве $L^2(\partial\mathcal{D} \setminus S)$.

Теперь, функция u из (3.11) будет решением уравнения (3.2), лежащим в пространстве $H^+(\mathcal{D})$, тогда и только тогда, когда для всех $p \in \mathbb{Z}$ выполняются равенства

$$\int_S u(z) z^{-2p\pi/(2\pi-\alpha)} \frac{dz}{z} = 0, \tag{3.12}$$

$$\int_{\partial\mathcal{D}\setminus S} (Bu)(z) z^{-2p\pi/\alpha} \frac{dz}{z} = 0, \tag{3.13}$$

где
$$Bu(z)=\int_{|\zeta|=1}\left(b_0+\frac{\sqrt{-\lambda}b_1 z\bar\zeta}{2}+\frac{\sqrt{-\lambda}b_2\bar z\zeta}{2}\right)\exp[\sqrt{-\lambda}(z\bar\zeta+\bar z\zeta)/2]\,d\mu(\zeta).$$

Так как
$$\exp[z+\bar z]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\frac{z^j\,\bar z^{m-j}}{j!\,(m-j)!},\tag{3.14}$$

то равенства (3.12), (3.13) выполнены для всех $p\in\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда для всех $p\in\mathbb{Z}$ верно, что

$$\int_S\int_{|\zeta|=1}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m\sum_{j=0}^{m}\frac{z^{j-2p\pi/(2\pi-\alpha)}\,\bar z^{m-j}\bar\zeta^j\zeta^{m-j}}{j!\,(m-j)!}d\mu(\zeta)\,\frac{dz}{z}=0,$$

$$b_0\int_{\partial\mathcal{D}\setminus S}\int_{|\zeta|=1}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m\sum_{j=0}^{m}\frac{z^{j-2p\pi/\alpha}\,\bar z^{m-j}\bar\zeta^j\zeta^{m-j}}{j!\,(m-j)!}d\mu(\zeta)\,\frac{dz}{z}+$$
$$+b_1\int_{\partial\mathcal{D}\setminus S}\int_{|\zeta|=1}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{m+1}\sum_{j=0}^{m}\frac{z^{j+1-2p\pi/\alpha}\,\bar z^{m-j}\bar\zeta^{j+1}\zeta^{m-j}}{j!\,(m-j)!}d\mu(\zeta)\,\frac{dz}{z}+$$
$$+b_2\int_{\partial\mathcal{D}\setminus S}\int_{|\zeta|=1}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{m+1}\sum_{j=0}^{m}\frac{z^{j-2p\pi/\alpha}\,\bar z^{m-j+1}\bar\zeta^{j}\zeta^{m-j+1}}{j!\,(m-j)!}d\mu(\zeta)\,\frac{dz}{z}=0.\tag{3.15}$$

Напомним, что

$$\int_{\beta_1\le\arg(z)\le\beta_2}z^p\bar z^q\frac{dz}{z}=\begin{cases}\sqrt{-1}(\beta_2-\beta_1), & p=q,\\ \frac{\exp[\sqrt{-1}\beta_2(p-q)]-\exp[\sqrt{-1}\beta_1(p-q)]}{p-q}, & p\neq q.\end{cases}\tag{3.16}$$

Следовательно, применяя (3.16), получим, что (3.12) будет выполнено для всех $p\in\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда для всех $p\in\mathbb{Z}$ выполняется следующее

$$0\;=\;\int_{|\zeta|=1}\sum_{\substack{\frac{m}{2}+\frac{p\pi}{2\pi-\alpha}\in\mathbb{Z}_+\\ 0\le\frac{m}{2}+\frac{p\pi}{2\pi-\alpha}\le m}}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m\frac{(2\pi-\alpha)\sqrt{-1}\,\zeta^{\frac{-2p\pi}{2\pi-\alpha}}\,d\mu(\zeta)}{(\frac{m}{2}-\frac{p\pi}{2\pi-\alpha})!\,(\frac{m}{2}+\frac{p\pi}{2\pi-\alpha})!}+$$
$$+\int_{|\zeta|=1}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m\sum_{\substack{0\le j\le m\\ 2j-\frac{2p\pi}{2\pi-\alpha}\neq m}}\mathcal{K}^{(1)}_{m,j}(p,\alpha)\frac{\bar\zeta^j\zeta^{m-j}d\mu(\zeta)}{j!\,(m-j)!},\tag{3.17}$$

здесь

$$\mathcal{K}^{(1)}_{m,j}(p,\alpha)=\frac{\exp[\sqrt{-1}\,2\pi\,(2j-\frac{2p\pi}{2\pi-\alpha}-m)]-\exp[\sqrt{-1}\,\alpha\,(2j-\frac{2p\pi}{2\pi-\alpha}-m)]}{2j-\frac{2p\pi}{2\pi-\alpha}-m}.$$

По аналогии, применяя (3.15) и (3.16), получаем, что (3.13) верно для всех $p\in\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда для любого $p \in \mathbb{Z}$ выполняется

$$0 \;=\; b_0 \int_{|\zeta|=1} \sum_{\substack{\frac{m}{2}+\frac{p\pi}{\alpha}\in\mathbb{Z}_+ \\ 0\le\frac{m}{2}+\frac{p\pi}{\alpha}\le m}} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m \frac{\alpha\sqrt{-1}\,\zeta^{\frac{-2p\pi}{\alpha}}\,d\mu(\zeta)}{(\frac{m}{2}-\frac{p\pi}{\alpha})!\,(\frac{m}{2}+\frac{p\pi}{\alpha})!} +$$

$$+b_0 \int_{|\zeta|=1} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m \sum_{\substack{0\le j\le m \\ 2j-\frac{2p\pi}{\alpha}\ne m}} \mathcal{K}^{(2)}_{m,j}(p,\alpha) \frac{\bar{\zeta}^j \zeta^{m-j} d\mu(\zeta)}{j!\,(m-j)!} +$$

$$+b_1 \int_{|\zeta|=1} \sum_{\substack{\frac{m-1}{2}+\frac{p\pi}{\alpha}\in\mathbb{Z}_+ \\ 0\le\frac{m-1}{2}+\frac{p\pi}{\alpha}\le m}} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{m+1} \frac{\alpha\sqrt{-1}\,\zeta^{\frac{-2p\pi}{\alpha}}\,d\mu(\zeta)}{(\frac{m}{2}-\frac{1}{2}+\frac{p\pi}{\alpha})!\,(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}-\frac{p\pi}{\alpha})!} +$$

$$+b_1 \int_{|\zeta|=1} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{m+1} \sum_{\substack{0\le j\le m \\ 2j-\frac{2p\pi}{\alpha}\ne m-1}} \mathcal{K}^{(2)}_{m-1,j}(p,\alpha) \frac{\bar{\zeta}^{j+1} \zeta^{m-j} d\mu(\zeta)}{j!\,(m-j)!} +$$

$$+b_2 \int_{|\zeta|=1} \sum_{\substack{\frac{m+1}{2}+\frac{p\pi}{\alpha}\in\mathbb{Z}_+ \\ 0\le\frac{m+1}{2}+\frac{p\pi}{\alpha}\le m}} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{m+1} \frac{\alpha\sqrt{-1}\,\zeta^{-\frac{2p\pi}{\alpha}}\,d\mu(\zeta)}{(\frac{m+1}{2}+\frac{p\pi}{\alpha})!\,(\frac{m-1}{2}-\frac{p\pi}{\alpha})!} +$$

$$+b_2 \int_{|\zeta|=1} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{m+1} \sum_{\substack{0\le j\le m \\ 2j-\frac{2p\pi}{\alpha}\ne m+1}} \mathcal{K}^{(2)}_{m+1,j}(p,\alpha) \frac{\bar{\zeta}^{j} \zeta^{m-j+1} d\mu(\zeta)}{j!\,(m-j)!}, \tag{3.18}$$

здесь

$$\mathcal{K}^{(2)}_{m,j}(p,\alpha) = \frac{\exp[\sqrt{-1}\alpha(2j-\frac{2p\pi}{\alpha}-m)]-1}{2j-\frac{2p\pi}{\alpha}-m}.$$

Выражения (3.17) и (3.18) кажутся довольно громоздкими. Однако мы можем упростить их, если правильно опишем пространство мер на $\partial\mathcal{D}$. В самом деле, хорошо известно, что пространство мер на $\partial\mathcal{D}$ топологически изоморфно пространству $C'(\partial\mathcal{D})$, двойственному к пространству $C(\partial\mathcal{D})$ непрерывных функций на $\partial\mathcal{D}$. Дадим другое описание двойственного пространства. Для этого напомним, что банахово пространство $C(\partial\mathcal{D})$ можно определить через пространство $\tilde{C}[0,2\pi]$ всех непрерывных функций на отрезке $[0,2\pi]$ с равными значениями в концах этого отрезка:

$$\tilde{C}[0,2\pi] = \{u \in C[0,2\pi] \,:\, u(0)=u(2\pi)\}.$$

В частности, ряд Фурье

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} (u,\zeta^q)_{L^2(\partial\mathcal{D})}\zeta^q$$

сходится равномерно на $\partial\mathcal{D}$ (к u) для всех $u \in C(\partial\mathcal{D})$ и

$$\|u\|_{C(\partial\mathcal{D})} = \max_{|\zeta|=1} \Big| \sum_{q\in\mathbb{Z}} (u,\zeta^q)_{L^2(\partial\mathcal{D})}\zeta^q \Big|.$$

Рассмотрим (линейное) пространство формальных рядов

$$\mathfrak{C}(\partial\mathcal{D}) = \left\{ d = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \frac{d_q \zeta^q \, d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta}, \; |\zeta| = 1 \right\},$$

где мера $\{d_q\}$ выбирается таким образом, чтобы функционал

$$\|d\|_- = \sup_{\substack{v\in C(\partial\mathcal{D})\\ v\neq 0}} \frac{\left| \sum_{q\in\mathbb{Z}} (v, \zeta^q)_{L^2(\partial\mathcal{D})} d_q \right|}{\|v\|_{C(\partial\mathcal{D})}} \tag{3.19}$$

был конечен. Если $\|d\|_- = 0$, то из того, что $v = z^p$, верно

$$0 \leq \left| \sum_{q\in\mathbb{Z}} (\zeta^p, \zeta^q)_{L^2(\partial\mathcal{D})} d_q \|\zeta^p\|^{-1}_{C(\partial\mathcal{D})} \right| = 2\pi |d_p| \leq \|d\|_- = 0.$$

для всех $p \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $d_p = 0$ для всех $p \in \mathbb{Z}$ и данный функционал будет нормой на пространстве $\mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$. Очевидно, что $\mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$ также банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_-$. Действительно, выберем последовательность Коши $\{d^{(s)}\}_{s\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$. Тогда

$$0 \leq \left| \sum_{q\in\mathbb{Z}} (\zeta^p, \zeta^q)_{L^2(\partial\mathcal{D})} (d^{(s)}_q - d^{(r)}_q) \|\zeta^p\|^{-1}_{C(\partial\mathcal{D})} \right| = 2\pi |d^{(s)}_p - d^{(r)}_p| \leq \|d^{(s)} - d^{(r)}\|_-.$$

В частности, для любого $p \in \mathbb{Z}$ последовательность $\{d^{(s)}_p\}_{s\in\mathbb{N}}$ будет последовательностью Коши в $\mathbb{C}$. Следовательно, для любого $p \in \mathbb{Z}$ последовательность $\{d^{(s)}_p\}_{s\in\mathbb{N}}$ сходится к комплексному числу $d^{(0)}_p$. По определению для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $s, r \geq N_\varepsilon$ выполнено $\|d^{(s)} - d^{(r)}\|_- < \varepsilon$. Это эквивалентно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $s, r \geq N_\varepsilon$ выполнено

$$\frac{\left| \sum_{q\in\mathbb{Z}} (v, \zeta^q)_{L^2(\partial\mathcal{D})} (d^{(s)}_q - d^{(r)}_q) \right|}{\|v\|_{C(\partial\mathcal{D})}} < \varepsilon \text{ для всех ненулевых } v \in C(\partial\mathcal{D}). \tag{3.20}$$

При переходе к пределу при $r \to +\infty$ в неравенстве (3.20) получаем

$$\frac{\left| \sum_{q\in\mathbb{Z}} (v, \zeta^q)_{L^2(\partial\mathcal{D})} (d^{(s)}_q - d^{(0)}_q) \right|}{\|v\|_{C(\partial\mathcal{D})}} \leq \varepsilon \text{ для всех ненулевых } v \in C(\partial\mathcal{D}).$$

Следовательно, мера $d^{(0)} \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$ и система $\{d^{(s)}\}_{s\in\mathbb{N}}$ сходится к мере $d^{(0)}$ в этом пространстве.

Определим спаривание между пространствами $\mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$ и $C(\partial\mathcal{D})$, а именно, пусть

$$\langle v, d \rangle = \sum_{q\in\mathbb{Z}} (v, \zeta^q)_{L^2(\partial\mathcal{D})} d_q \tag{3.21}$$

для всех $v \in C(\partial\mathcal{D})$ и $d \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$. Согласно определению пространства $\mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$ получаем

$$|\langle v, d\rangle| \le \|v\|_{C(\partial\mathcal{D})}\,\|d\|_{-} \tag{3.22}$$

для всех $v \in C(\partial\mathcal{D})$ и всех $d \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$.

Лемма 3.3.1. *Двойственное пространство $C'(\partial\mathcal{D})$ топологически изоморфно пространству $\mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$.*

То есть для каждого фиксированного $d \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$ спаривание (3.21) определяет непрерывный линейный оператор f_d на $C(\partial\mathcal{D})$, и для любой $f \in C'(\partial\mathcal{D})$ существует единственная $d \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$, такая, что $f(v) = f_d(v)$ для любого $v \in C(\partial\mathcal{D})$. Более того, сопряженное линейное отображение $d \mapsto f_d$ будет изометрией.

Доказательство. Ср. [58, Лемма 3.3] для пространств Соболева. Из (3.22) следует, что для любой фиксированной $d \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$ формула

$$f_d(v) := \langle v, d\rangle,\ \ v \in C(\partial\mathcal{D}),$$

определяет непрерывный линейный функционал f_d на $C(\partial\mathcal{D})$, так, что

$$\|f_d\|_{C'(\partial\mathcal{D})} \le \|d\|_{-}.$$

Более того из определения нормы $\|\cdot\|_{-}$ следует равенство

$$\|f_d\|_{C'(\partial\mathcal{D})} = \sup_{\substack{v\in C(\partial\mathcal{D})\\ v\neq 0}} \frac{\Big|\sum_{q\in\mathbb{Z}}(v,\zeta^q)_{L^2(\partial\mathcal{D})}d_q\Big|}{\|v\|_{C(\partial\mathcal{D})}} = \|d\|_{-}.$$

Остается показать, что любой непрерывный линейный функционал f на $C(\partial\mathcal{D})$ представляется в виде $f(v) = \langle v, d_f\rangle$ для некоторой $d_f \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$. В соответствии с теоремой Рисса для любого $f \in C'(\partial\mathcal{D})$ существует мера $d\mu$ на $\partial\mathcal{D}$ такая, что

$$f(v) = \int_{\partial\mathcal{D}} v(\zeta)\,d\mu(\zeta) \text{ для всех } v \in C(\partial\mathcal{D}).$$

Как и ранее, для любого $v \in C(\partial\mathcal{D})$ верно, что

$$v = \sum_{q\in\mathbb{Z}}(v,\zeta^q)_{L^2(\partial\mathcal{D})}\zeta^q,$$

где ряд Фурье сходится равномерно на $\partial\mathcal{D}$. Следовательно, при $d_q = \int_{\partial\mathcal{D}}\zeta^q\,d\mu(\zeta)$ верно

$$f(v) = \sum_{q\in\mathbb{Z}}(v,\zeta^q)_{L^2(\partial\mathcal{D})}d_q.$$

Наконец, так как функционал f непрерывен, то

$$\|f\|_{C'(\partial\mathcal{D})} = \sup_{\substack{v\in C(\partial\mathcal{D})\\ v\neq 0}} \frac{\left|\sum_{q\in\mathbb{Z}}(v,\zeta^q)_{L^2(\partial\mathcal{D})}d_q\right|}{\|v\|_{C(\partial\mathcal{D})}} = \|d\|_{-};$$

в частности, норма $\|d\|_{-}$ конечна. □

Таким образом, мы пришли к следующему утверждению, ср. с (3.10).

Теорема 3.3.1. *Любая собственная функция задачи 3.1.2 в диске $\mathcal{D}$ представима в следующем виде*

$$u(z) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} (z/|z|)^q\, \mathcal{J}_q(|z|\sqrt{\lambda})\, d_q \tag{3.23}$$

с коэффициентами $\{d_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющими $\|d\|_{-} < \infty$. Более того, если $S \neq \partial\mathcal{D}$ и $S \neq \emptyset$, то число ненулевых коэффициентов d_q в сумме должно быть бесконечным.

Доказательство. Из (3.14) следует, что

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \exp[\sqrt{-\lambda}(z\bar{\zeta}+\bar{z}\zeta)/2]\,\zeta^q \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} =$$

$$= \int_{|\zeta=1|} \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{|z|\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m \sum_{j=0}^{m} \frac{(z/|z|)^{2j-m}\zeta^{m-2j+q}}{j!\,(m-j)!}\frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} =$$

$$= \sum_{\substack{(m+q)/2\in\mathbb{Z}\\ 0\le(m+q)/2\le m}} \left(\frac{|z|\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m \frac{(z/|z|)^q}{\left(\frac{m+q}{2}\right)!\left(\frac{m-q}{2}\right)!}.$$

Если $q \geq 0$, то $m \geq q$ и, заменяя переменные $(m-q)/2 = k$, получаем:

$$\sum_{\substack{(m+q)/2\in\mathbb{Z}\\ 0\le(m+q)/2\le m}} \left(|z|\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m \frac{1}{\left(\frac{m+q}{2}\right)!\left(\frac{m-q}{2}\right)!} = \sum_{k\ge 0}\left(\frac{|z|\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k+q}\frac{1}{k!\,(k+q)!} =$$

$$= \left(\sqrt{-1}\right)^q \mathcal{J}_q(|z|\sqrt{\lambda}).$$

Если $q < 0$, то $m \geq -q$ и, вновь заменяя переменные $(m+q)/2 = k$, получаем:

$$\sum_{\substack{(m+q)/2\in\mathbb{Z}\\ 0\le(m+q)/2\le m}} \left(|z|\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m \frac{1}{\left(\frac{m+q}{2}\right)!\left(\frac{m-q}{2}\right)!} = \sum_{k\ge 0}\left(\frac{|z|\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k+|q|}\frac{1}{k!\,(k+|q|)!} =$$

$$= \left(\sqrt{-1}\right)^{|q|}\mathcal{J}_{-q}(|z|\sqrt{\lambda}) = \left(\sqrt{-1}\right)^{-q}(-1)^q\mathcal{J}_q(|z|\sqrt{\lambda}) = \left(\sqrt{-1}\right)^q\mathcal{J}_q(|z|\sqrt{\lambda}).$$

Следовательно формула (3.23) из леммы 3.3.1 сохраняется. В частности, при $|z| = 1$ получаем разложение Лорана для голоморфных функций $\exp[\sqrt{-\lambda}(\zeta^{-1}+\zeta)/2]$ в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

(равенство также следует из [35, 9.44 и 9.45]):

$$\exp[\sqrt{-\lambda}(\zeta^{-1}+\zeta)/2] = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \left(\sqrt{-1}\right)^q \mathcal{J}_q(\sqrt{\lambda})\zeta^{-q}. \tag{3.24}$$

Наконец, утверждение о конечности множества ненулевых коэффициентов d_q следует из результатов примера 3.2.2. □

Рассмотрим, по крайней мере, два примера, позволяющие анализировать выражения (3.17) и (3.18), используя леммы 3.3.1.

Пример 3.3.1. Пусть $S=\emptyset$, т.е. $\alpha=2\pi$. Тогда (3.12) выполняется автоматически. Поэтому достаточно проверить лишь выполнение (3.13). С одной стороны, для всех $m,j,p\in\mathbb{Z}_+$, $2j-p-m\neq 0$ имеем

$$\mathcal{K}^{(2)}_{m,j}(p,2\pi) = \frac{\exp[\sqrt{-1}2\pi(2j-p-m)]-1}{2j-p-m} = 0.$$

Тогда (3.13) выполнено для любого $p\in\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда для любого $p\in\mathbb{Z}$ верно, что

$$0 \;=\; b_0\int_{|\zeta|=1}\sum_{\substack{0\le m+p\le 2m\\ \frac{m+p}{2}\in\mathbb{Z}_+}}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m\frac{2\pi\sqrt{-1}\,\zeta^{-p}\,d\mu(\zeta)}{(\frac{m-p}{2})!\,(\frac{m+p}{2})!}+$$

$$+b_1\int_{|\zeta|=1}\sum_{\substack{0\le m-1+p\le 2m\\ \frac{m-1+p}{2}\in\mathbb{Z}_+}}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{m+1}\frac{2\pi\sqrt{-1}\,\zeta^{-p}\,d\mu(\zeta)}{(\frac{m-1+p}{2})!\,(\frac{m+1-p}{2})!}+$$

$$+b_2\int_{|\zeta|=1}\sum_{\substack{0\le m+1+p\le 2m\\ \frac{m+1+p}{2}\in\mathbb{Z}_+}}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{m+1}\frac{2\pi\sqrt{-1}\,\zeta^{-p}\,d\mu(\zeta)}{(\frac{m+1+p}{2})!\,(\frac{m-1-p}{2})!}.$$

Далее, заменяя индексы суммирования: $(m+p)/2=k$ – в первой сумме, $(m-1+p)/2=k$ – во второй, $(m+1+p)/2=k$ – в третьей, – получаем, что утверждение выше эквивалентно следующему: для любого $p\in\mathbb{Z}$

$$0 \;=\; b_0\int_{|\zeta|=1}\sum_{k=(|p|+p)/2}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k-p}\frac{\zeta^{-p}\,d\mu(\zeta)}{k!\,(k-p)!}+$$

$$+b_1\int_{|\zeta|=1}\sum_{k=(|p-1|+p-1)/2}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k-p+2}\frac{\zeta^{-p}\,d\mu(\zeta)}{k!\,(k-p+1)!}+$$

$$+b_2\int_{|\zeta|=1}\sum_{k=(|p+1|+p+1)/2}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k-p}\frac{\zeta^{-p}\,d\mu(\zeta)}{k!\,(k-p-1)!}. \tag{3.25}$$

Если $p < 0$, то

$$\sum_{k=(|p|+p)/2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k-p} \frac{1}{k!\,(k-p)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k-p} \frac{1}{k!\,(k-p)!} =$$

$$= \left(\sqrt{-1}\right)^{|p|} \mathcal{J}_{|p|}(\sqrt{\lambda}) = \left(\sqrt{-1}\right)^{|p|} (-1)^p \mathcal{J}_p(\sqrt{\lambda}) = \left(\sqrt{-1}\right)^p \mathcal{J}_p(\sqrt{\lambda}). \qquad (3.26)$$

Если $p \geq 0$, то после повторной переиндексации $n = k - p$, получаем

$$\sum_{k=(|p|+p)/2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k-p} \frac{1}{k!\,(k-p)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2n+p} \frac{1}{n!\,(n+p)!} = \left(\sqrt{-1}\right)^p \mathcal{J}_p(\sqrt{\lambda}). \qquad (3.27)$$

По аналогии,

$$\sum_{k=(|p-1|+p-1)/2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k-(p-1)+1} \frac{1}{k!\,(k-p+1)!} = \left(\sqrt{-1}\right)^p \sqrt{\lambda}\mathcal{J}_{p-1}(\sqrt{\lambda})/2, \qquad (3.28)$$

$$\sum_{k=(|p+1|+p+1)/2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k-(p+1)+1} \frac{\zeta^{-p}\,d\mu(\zeta)}{k!\,(k-p-1)!} = \left(\sqrt{-1}\right)^p \sqrt{\lambda}\mathcal{J}_{p+1}(\sqrt{\lambda})/2. \qquad (3.29)$$

Так как $b_1 + b_2 = 2$, то применяя (3.25)–(3.29) и известное соотношение (см., например, [35, 9.1.27])

$$\mathcal{J}_{p+1}(r) + \mathcal{J}_{p-1}(r) = 2p\mathcal{J}_p(r)/r, \qquad (3.30)$$

видим, что (3.13) выполняется для любого $p \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда для любого $p \in \mathbb{Z}$ верно следующее

$$[(b_0 - pb_2)\mathcal{J}_p(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\,\mathcal{J}_{p-1}(\sqrt{\lambda})] \int_{|\zeta|=1} \zeta^{-p} d\mu(\zeta) = 0.$$

Теперь, из леммы 3.3.1 и из (3.16) следует, что для меры $d\mu \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$ равенство (3.13) выполняется для любого $p \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда для всех $p \in \mathbb{Z}$

$$[(b_0 - pb_2)\mathcal{J}_p(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\,\mathcal{J}_{p-1}(\sqrt{\lambda})]d_p = 0. \qquad (3.31)$$

Очевидно, что бесконечная система линейных уравнений (3.31) имеет ненулевое решение $d \in \mathfrak{C}(\partial D)$ тогда и только тогда, когда

$$G_q(\lambda) = (b_0 - qb_2)\mathcal{J}_p(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\,\mathcal{J}_{p-1}(\sqrt{\lambda}) = 0$$

для некоторого $q \in \mathbb{Z}$. В этом случае в качестве решения мы можем принять меру

$$d\mu_q(\zeta) = \frac{\zeta^q}{2\pi(\sqrt{-1})^{p+1}} \frac{d\zeta}{\zeta},\ q \in \mathbb{Z}$$

и тогда соответствующие собственные значения будут просто корнями функции $G_q(\lambda)$. В частности, соответствующие собственные функции задаются как

$$u_q(z) = \int_{|\zeta|=1} \exp[\sqrt{-\lambda}(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta)/2] \frac{\zeta^q}{2\pi(\sqrt{-1})^{q+1}} \frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$= \int_{|\zeta|=1} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m \sum_{j=0}^{m} \frac{z^j \bar{z}^{m-j} \zeta^{m-j+q} \bar{\zeta}^j}{j!\,(m-j)! 2\pi(\sqrt{-1})^{q+1}} \frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m \frac{z^{(m+q)/2} \bar{z}^{(m-q)/2}}{(\sqrt{-1})^q \left(\frac{m+q}{2}\right)!\, \left(\frac{m-q}{2}\right)!} = (z/|z|)^q \mathcal{J}_q(|z|\sqrt{\lambda}).$$

Таким образом, мы пришли к результатам, аналогичным результатам примера 3.2.1.

Пример 3.3.2. Пусть S – это нижний полукруг, т.е. $\alpha = \pi$. Тогда $\frac{m}{2} + \frac{p\pi}{2\pi - \alpha} = \frac{m}{2} + p$, $\lambda > 0$ и

$$\mathcal{K}^{(1)}_{m,j}(p, \pi) = \frac{\exp[\sqrt{-1}2\pi(2j - 2p - m)] - \exp[\sqrt{-1}\pi(2j - 2p\pi - m)]}{2j - 2p - m} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ четное,} \\ \frac{2}{2j-2p-m} & \text{если } m \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Следовательно, рассуждая аналогично примеру 3.3.1, получаем, что (3.12) будет верно для любого $p \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда для любого $p \in \mathbb{Z}$ выполняется

$$0 \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k-2p} \frac{\pi\sqrt{-1}}{k!\,(k-2p)!} \int_{|\zeta|=1} \zeta^{-2p}\, d\mu(\zeta) -$$

$$-2 \int_{|\zeta|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k+1} \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{1}{2k+1-2j+2p} \frac{\zeta^{2k+1-2j} d\mu(\zeta)}{j!\,(2k+1-j)!} =$$

$$= \sqrt{-1} \left[(-1)^p\, \pi \mathcal{J}_{2p}(\lambda) \int_{|\zeta|=1} \zeta^{-2p}\, d\mu(\zeta) - \right.$$

$$\left. - \int_{|\zeta|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k} \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{\sqrt{\lambda}}{2k+1-2j+2p} \frac{\zeta^{2k+1-2j} d\mu(\zeta)}{j!\,(2k+1-j)!} \right]. \tag{3.32}$$

Из (3.32) следует, что (3.12) выполняется для любого $p \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда для любого $p \in \mathbb{Z}$ верно

$$\int_{|\zeta|=1} \zeta^{-2p} \left(\pi(-1)^p \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) - 2F^{(1)}_p(\zeta, \lambda) \right) d\mu(\zeta) = 0, \tag{3.33}$$

где

$$F_p^{(1)}(\zeta,\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k}\sum_{j=0}^{2k+1}\frac{\zeta^{2k+1-2j+2p}}{(2k+1-2j+2p)j!\,(2k+1-j)!}.$$

Рассмотрим функцию голоморфную всюду, кроме начала координат,

$$\sin\Big(\sqrt{\lambda}(\zeta+1/\zeta)/2\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k[\sqrt{\lambda}(\zeta+1/\zeta)/2]^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Из биномиальной формулы легко получить, что функция

$$\zeta^{2p-1}\sin\Big(\sqrt{\lambda}(\zeta+1/\zeta)/2\Big) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k}\sum_{j=0}^{2k+1}\frac{\zeta^{2k-2j+2p}}{j!\,(2k+1-j)!}$$

также голоморфна всюду, кроме начала координат. Так как $(2k-2j+2p)! = -1$ для любых k, j, p, то интеграл

$$\int_{\gamma}\zeta^{2p-1}\sin\Big(\sqrt{\lambda}(\zeta+1/\zeta)/2\Big)d\zeta = 0$$

по любой простой, замкнутой кривой $\gamma \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Следовательно (см., например, [26, Гл. 2, §9, Следствие 3]) функция

$$f_p^{(1)}(\zeta,\lambda) = \zeta^{2p-1}\sin\Big(\sqrt{\lambda}(\zeta+1/\zeta)/2\Big)$$

имеет первообразную в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$:

$$F_p^{(1)}(\zeta,\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k}\sum_{j=0}^{2k+1}\frac{\zeta^{2k+1-2j+2p}}{(2k+1-2j+2p)j!\,(2k+1-j)!}.$$

Очевидно, что первообразной для голоморфной функции $(-2\, f_p^{(1)}(\zeta,\lambda))$ в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ будет

$$\mathcal{F}_p^{(1)}(\zeta,\lambda) = \pi(-1)^p\mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) - 2F_p^{(1)}(\zeta,\lambda).$$

С другой стороны,

$$\mathcal{K}_{m,j}^{(2)}(p,\pi) = \frac{\exp[\sqrt{-1}\pi(2j-2p-m)]-1}{2j-2p-m} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ – четно,}\\ \frac{2}{m-2j+2p} & \text{если } m \text{ – не четное.}\end{cases}$$

Следовательно (3.13) выполнено для любого $p \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда для любого $p \in \mathbb{Z}$

$$0 \;=\; b_0 \sum_{\substack{\frac{m}{2}+p\in\mathbb{Z}_+\\ 0\le\frac{m}{2}+p\le m}} \frac{\pi\sqrt{-1}}{(\frac{m}{2}-p)!\,(\frac{m}{2}+p)!}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m \int_{|\zeta|=1}\zeta^{-2p}\,d\mu(\zeta) +$$

$$+b_0 \int_{|\zeta|=1} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^m \sum_{\substack{0\le j\le m\\ m/2\notin\mathbb{Z}}} \frac{2}{m-2j+2p} \frac{\zeta^{m-2j} d\mu(\zeta)}{j!\,(m-j)!} +$$

$$+b_1 \int_{|\zeta|=1} \sum_{\substack{\frac{m-1}{2}+p\in\mathbb{Z}_+\\ 0\le\frac{m-1}{2}+p\le m}} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{m+1} \frac{\pi\sqrt{-1}\,\zeta^{-2p}\,d\mu(\zeta)}{(\frac{m}{2}-\frac{1}{2}+p)!\,(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}-p)!} +$$

$$+b_1 \int_{|\zeta|=1} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{m+1} \sum_{\substack{0\le j\le m\\ m/2\in\mathbb{Z}}} \frac{2}{m-1-2j+2p} \frac{\bar{\zeta}^{j+1}\zeta^{m-j} d\mu(\zeta)}{j!\,(m-j)!} +$$

$$+b_2 \int_{|\zeta|=1} \sum_{\substack{\frac{m+1}{2}+p\in\mathbb{Z}_+\\ 0\le\frac{m+1}{2}+p\le m}} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{m+1} \frac{\pi\sqrt{-1}\,\zeta^{-2p}\,d\mu(\zeta)}{(\frac{m+1}{2}+p)!\,(\frac{m-1}{2}-p)!} +$$

$$+b_2 \int_{|\zeta|=1} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{m+1} \sum_{\substack{0\le j\le m\\ m/2\in\mathbb{Z}}} \frac{2}{m+1-2j+2p} \frac{\bar{\zeta}^{j}\zeta^{m-j+1} d\mu(\zeta)}{j!\,(m-j)!} \qquad (3.34)$$

Из результатов примера 3.3.1 и из вычислений выше, (3.34) сводится к следующему: для любого $p\in\mathbb{Z}$ верно, что

$$\int_{|\zeta|=1} \zeta^{-2p} \left(\pi\,(-1)^p\,[(b_0-2pb_2)\,\mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\,\mathcal{J}_{2p-1}(\sqrt{\lambda})] + 2b_0 F_p^{(1)}(\zeta,\lambda)\right) d\mu(\zeta) +$$

$$+b_1\sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k} \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{2k-1-2j+2p} \frac{\zeta^{2k-2j-1} d\mu(\zeta)}{j!\,(2k-j)!} +$$

$$+b_2\sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k} \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{2k+1-2j+2p} \frac{\zeta^{2k-2j+1} d\mu(\zeta)}{j!\,(2k-j)!} = 0. \qquad (3.35)$$

Упростим немного наши вычисления. Для этого обратимся к функции

$$\cos\left(\sqrt{\lambda}(\zeta+1/\zeta)/2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k[\sqrt{\lambda}(\zeta+1/\zeta)/2]^{2k}}{(2k)!}$$

голоморфной всюду, за исключением начала координат. Из биномиальной формулы легко получить, что функция

$$\zeta^{2p}\cos\left(\sqrt{\lambda}(\zeta+1/\zeta)/2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k} \sum_{j=0}^{2k} \frac{\zeta^{2k-2j+2p}}{j!\,(2k-j)!}$$

также голоморфной всюду, за исключением начало координат. Так как $(2k-2j+2p)\neq(-1)$ для любых целых k,j,p, то интеграл

$$\int_{\gamma} \zeta^{2p}\cos\left(\sqrt{\lambda}(\zeta+1/\zeta)/2\right) d\zeta = 0$$

по любой простой, замкнутой кривой $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Следовательно, подынтегральная функция $[\zeta^{2p}\cos\left(\sqrt{\lambda}(\zeta+1/\zeta)/2\right)]$ допускает первообразную в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (см., например, [26, Гл. 2, §9, Следствие 3]):

$$F_p^{(2)}(\zeta,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k}\sum_{j=0}^{2k}\frac{\zeta^{2k+1-2j+2p}}{(2k+1-2j+2p)j!\,(2k-j)!}.$$

Тогда функция $[\zeta^{2p-2}\cos\left(\sqrt{\lambda}(\zeta+1/\zeta)/2\right)]$ также имеет первообразную в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$:

$$F_{p-1}^{(2)}(\zeta,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k}\sum_{j=0}^{2k}\frac{\zeta^{2k-1-2j+2p}}{(2k-1-2j+2p)j!\,(2k-j)!}.$$

Таким образом, по (3.35) получаем, что (3.13) выполняется всех $p\in\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда для любого $p\in\mathbb{Z}$

$$\int_{|\zeta|=1}\zeta^{-2p}\left(\pi\,(-1)^p\,[(b_0-2pb_2)\,\mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda})+\sqrt{\lambda}\,\mathcal{J}_{2p-1}(\sqrt{\lambda})]+2b_0F_p^{(1)}(\zeta,\lambda)\right)d\mu(\zeta)+$$

$$+\sqrt{\lambda}\int_{|\zeta|=1}\zeta^{-2p}\left(b_1F_{p-1}^{(2)}(\zeta,\lambda)+b_2F_p^{(2)}(\zeta,\lambda)\right)d\mu(\zeta)=0,$$

где

$$F_p^{(2)}(\zeta,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k}\sum_{j=0}^{2k}\frac{\zeta^{2k+1-2j+2p}}{(2k+1-2j+2p)j!\,(2k-j)!}.$$

Наконец, учитывая (3.33), получаем, что (3.13) выполнено для всех $p\in\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда для любого $p\in\mathbb{Z}$

$$\int_{|\zeta|=1}\zeta^{-2p}\left(\pi\,(-1)^p\,[(2(b_0-pb_2)\,\mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda})+\sqrt{\lambda}\,\mathcal{J}_{2p-1}(\sqrt{\lambda})]\right)d\mu(\zeta)+$$

$$+\sqrt{\lambda}\int_{|\zeta|=1}\zeta^{-2p}\left(b_1F_{p-1}^{(2)}(\zeta,\lambda)+b_2F_p^{(2)}(\zeta,\lambda)\right)d\mu(\zeta)=0. \tag{3.36}$$

Более того, очевидно, что $F_p^{(2)}(\zeta,\lambda)$ есть первообразная для голоморфной функции

$$\zeta^{2p}\cos\left(\sqrt{\lambda}(\zeta+1/\zeta)/2\right)$$

в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и функция $\mathcal{F}_p^{(2)}(\zeta,\lambda)$, заданная как

$$\pi\,(-1)^p\,[(2(b_0-pb_2)\,\mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda})+\sqrt{\lambda}\,\mathcal{J}_{2p-1}(\sqrt{\lambda})]+\sqrt{\lambda}\left(b_1F_{p-1}^{(2)}(\zeta,\lambda)+b_2F_p^{(2)}(\zeta,\lambda)\right),$$

есть первообразная для голоморфной функции в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$f_p^{(2)}(\zeta,\lambda)=\zeta^{2p-1}\sqrt{\lambda}(b_2\zeta+b_1\zeta^{-1})\cos\left(\sqrt{\lambda}(\zeta+1/\zeta)/2\right).$$

Теперь давайте упростим (3.33)и (3.36), используя лемму 3.3.1 и (3.16).

Лемма 3.3.2. *Мера $d\mu \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$ удовлетворяет (3.12) и (3.13) тогда и только тогда, когда для любого $p \in \mathbb{Z}$ выполнено*

$$(-1)^p \pi\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) d_{2p} + 2\sum_{q\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^q\, \mathcal{J}_{2q-1}(\sqrt{\lambda})}{2p+1-2q} d_{2q-1} = 0, \tag{3.37}$$

$$\pi(-1)^p \Big(2(b_0 - pb_2)\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\, \mathcal{J}_{2p-1}(\sqrt{\lambda}) \Big) d_{2p} +$$

$$+ \sum_{q\in\mathbb{Z}} \left(\frac{b_1 \mathcal{J}_{2q-2}(\sqrt{\lambda})}{2p+1-2q} - \frac{b_2 \mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda})}{2p+1-2q} \right) (-1)^{q-1} d_{2q-1} = 0. \tag{3.38}$$

Доказательство. В самом деле, (3.16) дает

$$(2\pi)^{-1} (\zeta^{-2p} \mathcal{F}^{(1)}_p(\zeta,\lambda), \zeta^{-2q})_{L^2(\partial\mathcal{D})} =$$

$$= \int_{|\zeta|=1} \zeta^{2q-2p} \Big((-1)^p \pi\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) - 2F^{(1)}_p(\zeta,\lambda) \Big) \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} =$$

$$= (-1)^p \pi\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) \int_{|\zeta|=1} \zeta^{2q-2p} \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} -$$

$$- \int_{|\zeta|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2} \right)^{2k} \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{\sqrt{\lambda}\, \zeta^{2k+1-2j+2q} d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta (2k+1-2j+2p) j!\, (2k+1-j)!} =$$

$$= \begin{cases} 0, & p \neq q \\ (-1)^p \pi\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}), & p = q. \end{cases}$$

так как $2k+1-2j+2q \neq 0$. Аналогично,

$$(2\pi)^{-1} (\zeta^{-2p} \mathcal{F}^{(2)}_p(\zeta,\lambda), \zeta^{-2q})_{L^2(\partial\mathcal{D})} =$$

$$= \int_{|\zeta|=1} \zeta^{2q-2p} \left(\pi\, (-1)^p\, [(2(b_0 - pb_2)\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\, \mathcal{J}_{2p-1}(\sqrt{\lambda})] \right) \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} +$$

$$+ \sqrt{\lambda} \int_{|\zeta|=1} \zeta^{2q-2p} \left(b_1 F^{(2)}_{p-1}(\zeta,\lambda) + b_2 F^{(2)}_p(\zeta,\lambda) \right) \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} =$$

$$= \begin{cases} 0, & p \neq q \\ \pi\, (-1)^p\, [(2(b_0 - pb_2)\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\, \mathcal{J}_{2p-1}(\sqrt{\lambda})], & p = q. \end{cases}$$

Кроме того, по (3.16) получаем, что

$$(2\pi)^{-1} (\zeta^{-2p} \mathcal{F}^{(1)}_p(\zeta,\lambda), \zeta^{1-2q})_{L^2(\partial\mathcal{D})} = \int_{|\zeta|=1} \zeta^{2q-1-2p} \Big((-1)^p \pi\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) - 2F^{(1)}_p(\zeta,\lambda) \Big) \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} =$$

$$= - \int_{|\zeta|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2} \right)^{2k} \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{\sqrt{\lambda}}{2k+1-2j+2p} \frac{\zeta^{2k+1-2j+2q-1}\, d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\, \zeta\, j!\, (2k+1-j)!} =$$

$$= - \sum_{\substack{k\geq 0\\ 0\leq k+q\leq 2k+1}} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k} \frac{\sqrt{\lambda}}{2p+1-2q} \frac{1}{(k+q)!\,(k-q+1)!}.$$

Если $q \geq 1$, то $k \geq q-1$, и, заменяя индексы суммирования как $m = k-q+1$, получаем, что

$$\int_{|\zeta|=1} \zeta^{2q-1-2p} \Big((-1)^p \pi\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) - 2F_p^{(1)}(\zeta,\lambda)\Big) \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} =$$

$$= \frac{-2}{2p+1-2q} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m+2q-1} \frac{(-1)^{m+q-1}}{(m+2q-1)!\,m!} = \frac{2(-1)^q\, \mathcal{J}_{2q-1}(\sqrt{\lambda})}{2p+1-2q}.$$

Если $q \leq 0$, то $k \geq -q$, и заменяя индексы суммирования как $m = k+q$, получаем, что

$$\int_{|\zeta|=1} \zeta^{2q-1-2p} \Big((-1)^p \pi\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) - 2F_p^{(1)}(\zeta,\lambda)\Big) \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} =$$

$$= \frac{-2}{2p+1-2q} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m-2q+1} \frac{(-1)^{m-q}}{m!\,(m+1-2q)!} = \frac{2(-1)^{1-q}\, \mathcal{J}_{1-2q}(\sqrt{\lambda})}{2p+1-2q} = \frac{2(-1)^q\, \mathcal{J}_{2q-1}(\sqrt{\lambda})}{2p+1-2q}.$$

В частности,

$$\zeta^{-2p} F_p^{(1)}(\zeta,\lambda) = -\sum_{q\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^q\, \mathcal{J}_{2q-1}(\sqrt{\lambda})\, \zeta^{1-2q}}{2p+1-2q}. \tag{3.39}$$

Аналогично,

$$(2\pi)^{-1} (\zeta^{-2p} \mathcal{F}_p^{(2)}(\zeta,\lambda), \zeta^{1-2q})_{L^2(\partial\mathcal{D})} =$$

$$= \int_{|\zeta|=1} \zeta^{2q-2p-1} \left(\pi\,(-1)^p \left[(2(b_0 - pb_2)\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\, \mathcal{J}_{2p-1}(\sqrt{\lambda})\right]\right) \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} +$$

$$+ \sqrt{\lambda} \int_{|\zeta|=1} \zeta^{2q-2p-1} \left(b_1 F_{p-1}^{(2)}(\zeta,\lambda) + b_2 F_p^{(2)}(\zeta,\lambda)\right) \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} =$$

$$= \sqrt{\lambda} \int_{|\zeta|=1} \zeta^{2q-2p-1} \left(b_1 F_{p-1}^{(2)}(\zeta,\lambda) + b_2 F_p^{(2)}(\zeta,\lambda)\right) \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta},$$

$$\int_{|\zeta|=1} \zeta^{2q-2p-1}\, F_p^{(2)}(\zeta,\lambda) \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} =$$

$$= \int_{|\zeta|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k} \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{2k+1-2j+2p} \frac{\zeta^{2k-2j+1+2q-1} d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta\, j!\,(2k-j)!} =$$

$$= \sum_{\substack{k\geq 0\\ 0\leq k+q\leq 2k}} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k} \frac{1}{2p+1-2q} \frac{1}{(k+q)!\,(k-q)!}.$$

Если $q \leq 0$, то $k \geq -q$, и заменяя индексы суммирования как $m = k+q$, получаем

$$\int_{|\zeta|=1} \zeta^{2q-2p-1}\, F_p^{(2)}(\zeta,\lambda) \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} = \frac{1}{2p+1-2q} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2m-2q} \frac{1}{m!\,(m-2q)!} =$$

$$= \frac{(-1)^q\, \mathcal{J}_{-2q}(\sqrt{\lambda})}{(2p+1-2q)} = \frac{(-1)^q\, \mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda})}{(2p+1-2q)}.$$

Если $q \geq 1$, то $k \geq q$ и, заменяя суммирования индексы на $m = k - q$, получаем

$$\int_{|\zeta|=1} \zeta^{2q-2p-1}\, F_p^{(2)}(\zeta,\lambda) \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} =$$

$$= \frac{1}{2p+1-2q} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2m+2q} \frac{1}{(m+2q)!\, m!} = \frac{(-1)^q\, \mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda})}{(2p+1-2q).}$$

В частности,

$$\zeta^{-2p} F_p^{(2)}(\zeta,\lambda) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^q\, \mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda})\, \zeta^{1-2q}}{2p+1-2q}. \tag{3.40}$$

Вновь, аналогично, как и при ненулевых слагаемых, соответствующих $2j = 2k + 2q - 2$,

$$\int_{|\zeta|=1} \zeta^{2q-2p-1}\, F_{p-1}^{(2)}(\zeta,\lambda) \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} =$$

$$= \int_{|\zeta|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k} \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{2k-1-2j+2p} \frac{\zeta^{2k-2j-1+2q-1} d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta\, j!\, (2k-j)!} =$$

$$= \sum_{\substack{k\geq 0\\ 0\leq k+q-1\leq 2k}} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k} \frac{1}{2p+1-2q} \frac{1}{(k+q-1)!\, (k-q+1)!} = \frac{(-1)^{q-1}\, \mathcal{J}_{2q-2}(\sqrt{\lambda})}{(2p+1-2q)}.$$

В частности,

$$\zeta^{-2p} F_{p-1}^{(2)}(\zeta,\lambda) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{q-1}\, \mathcal{J}_{2q-2}(\sqrt{\lambda})\, \zeta^{1-2q}}{2p+1-2q}.$$

Наконец, (3.12) и (3.13) следуют из (3.33), (3.36) и из вида меры $d\mu \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$. $\square$

Таким образом, бесконечная система линейных уравнений (3.37), (3.38) является аналогом бесконечной системы линейных уравнений (3.31), полученной в примере 3.3.1 для случая $S = \emptyset$. Пусть теперь

$$\varrho_{p,q} = \alpha_p^{(1)} \beta_{p,q}^{(2)} - \alpha_p^{(2)} \beta_{p,q}^{(1)},$$

$$\alpha_p^{(1)}(\lambda) = \pi(-1)^p \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}), \quad \alpha_p^{(2)}(\lambda) = \pi(-1)^p \Big(2(b_0 - pb_2)\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\, \mathcal{J}_{2p-1}(\sqrt{\lambda})\Big),$$

$$\beta_{p,q}^{(1)}(\lambda) = \frac{2(-1)^q\, \mathcal{J}_{2q-1}(\sqrt{\lambda})}{2p+1-2q} = \frac{\beta_{q,q}^{(1)}(\lambda)}{2p+1-2q},$$

$$\beta_{p,q}^{(2)}(\lambda) = \Big(b_2 \mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda}) - b_1 \mathcal{J}_{2q-2}(\sqrt{\lambda})\Big) \frac{(-1)^q}{2p+1-2q} = \frac{\beta_{q,q}^{(2)}(\lambda)}{2p+1-2q}.$$

Зафиксируем порядок коэффициентов d_q, $q \in \mathbb{Z}$ следующим образом:

$$D^T = (d_{-1},\, d_0,\, d_1\, d_2\, d_{-3},\, d_{-2}\, \ldots d_{2p-1},\, d_{2p},\, d_{-2p-1},\, d_{-2p}\, \ldots),\ p \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что можно сохранить обычный порядок, если начнем с большого числа $N(p,s)$. Тогда (3.37) и (3.38) соответствуют бесконечной системе уравнений

$$A(\lambda)D = 0$$

со множеством коэффициентов $\{d_q\}$ с конечной нормой $\|d\|_-$, и с бесконечной "матрицей" $A(\lambda)$:

$$\begin{pmatrix}
\beta^{(1)}_{0,0}(\lambda) & \alpha^{(1)}_0(\lambda) & \beta^{(1)}_{0,1}(\lambda) & 0 & \beta^{(1)}_{0,-1}(\lambda) & 0 & \beta^{(1)}_{0,2}(\lambda) & \dots \\
\beta^{(2)}_{0,0}(\lambda) & \alpha^{(2)}_0(\lambda) & \beta^{(2)}_{0,1}(\lambda) & 0 & \beta^{(2)}_{0,-1}(\lambda) & 0 & \beta^{(2)}_{0,2}(\lambda) & \dots \\
\beta^{(1)}_{1,0}(\lambda) & 0 & \beta^{(1)}_{1,1}(\lambda) & \alpha^{(1)}_1(\lambda) & \beta^{(1)}_{1,-1}(\lambda) & 0 & \beta^{(1)}_{1,2}(\lambda) & \dots \\
\beta^{(2)}_{1,0}(\lambda) & 0 & \beta^{(2)}_{1,1}(\lambda) & \alpha^{(2)}_1(\lambda) & \beta^{(2)}_{1,-1}(\lambda) & 0 & \beta^{(2)}_{1,2}(\lambda) & \dots \\
\beta^{(1)}_{-1,0}(\lambda) & 0 & \beta^{(1)}_{-1,1}(\lambda) & 0 & \beta^{(1)}_{-1,-1}(\lambda) & \alpha^{(1)}_{-1}(\lambda) & \beta^{(1)}_{-1,2}(\lambda) & \dots \\
\beta^{(2)}_{-1,0}(\lambda) & 0 & \beta^{(2)}_{-1,1}(\lambda) & 0 & \beta^{(2)}_{-1,-1}(\lambda) & \alpha^{(2)}_{-1}(\lambda) & \beta^{(2)}_{-1,2}(\lambda) & \dots \\
\beta^{(1)}_{2,0}(\lambda) & 0 & \beta^{(1)}_{2,1}(\lambda) & 0 & \beta^{(1)}_{2,-1}(\lambda) & 0 & \beta^{(1)}_{2,2}(\lambda) & \dots \\
\beta^{(2)}_{2,0}(\lambda) & 0 & \beta^{(2)}_{2,1}(\lambda) & 0 & \beta^{(2)}_{2,-1}(\lambda) & 0 & \beta^{(2)}_{2,2}(\lambda) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}.$$

Тогда отметим, что для любого фиксированного $p \in \mathbb{Z}$ числа $\alpha^{(1)}_p(\lambda)$ и $\alpha^{(2)}_p(\lambda)$ по теореме Зигеля об общих нулях функций Бесселя не зануляются одновременно, см. [71, стр. 484-485]. Далее, так как для каждого $p \in \mathbb{Z}$ существуют $i_p = 1$, $i_p = 2$: $\alpha^{(i_p)}_p(\lambda) \neq 0$, то верна эквивалентная бесконечная система линейных уравнений

$$\tilde{A}(\lambda)D = 0,$$

$$\tilde{A}(\lambda) = \begin{pmatrix}
\beta^{(i_0)}_{0,0}/\alpha^{(i_0)}_0 & 1 & \beta^{(i_0)}_{0,1}/\alpha^{(i_0)}_0 & 0 & \beta^{(i_0)}_{0,-1}/\alpha^{(i_0)}_0 & 0 & \beta^{(i_0)}_{0,2}/\alpha^{(i_0)}_0 & 0 & \dots \\
\varrho_{0,0} & 0 & \varrho_{0,1} & 0 & \varrho_{0,-1} & 0 & \varrho_{0,2} & 0 & \dots \\
\beta^{(i_1)}_{1,0}/\alpha^{(i_1)}_0 & 0 & \beta^{(i_1)}_{1,1}/\alpha^{(i_1)}_0 & 1 & \beta^{(i_1)}_{1,-1}/\alpha^{(i_1)}_0 & 0 & \beta^{(i_1)}_{1,2}/\alpha^{(i_1)}_0 & 0 & \dots \\
\varrho_{1,0} & 0 & \varrho_{1,1} & 0 & \varrho_{1,-1} & 0 & \varrho_{1,2} & 0 & \dots \\
\beta^{(i_{-1})}_{-1,0}/\alpha^{(i_{-1})}_0 & 0 & \beta^{(i_{-1})}_{-1,1}/\alpha^{(i_{-1})}_0 & 0 & \beta^{(i_{-1})}_{-1,-1}/\alpha^{(i_{-1})}_0 & 1 & \beta^{(i_{-1})}_{-1,2}/\alpha^{(i_{-1})}_0 & 0 & \dots \\
\varrho_{-1,0} & 0 & \varrho_{-1,1} & 0 & \varrho_{-1,-1} & 0 & \varrho_{-1,2} & 0 & \dots \\
\beta^{(i_2)}_{2,0}/\alpha^{(i_2)}_0 & 0 & \beta^{(i_2)}_{2,1}/\alpha^{(i_2)}_0 & 0 & \beta^{(i_2)}_{2,-1}/\alpha^{(i_2)}_0 & 0 & \beta^{(i_2)}_{2,2}/\alpha^{(i_2)}_0 & 1 & \dots \\
\varrho_{2,0} & 0 & \varrho_{2,1} & 0 & \varrho_{2,-1} & 0 & \varrho_{2,2} & 0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}$$

Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема 3.3.2. *Пусть $S \neq \emptyset$. Число $\lambda > 0$ будет собственным значение задачи типа Заремба (3.3) при $a_0 = 0$, тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор D с коэффициентами $\{d_q\}$ с конечной нормой $\|d\|_-$, такой, что его ненулевая нечетная часть*

$$D^T_{\mathrm{odd}} = (d_{-1},\ d_1\ d_{-3}, \dots d_{2p-1}, d_{-2p-1}, \dots),\ p \in \mathbb{N},$$

удовлетворяет матричному уравнению

$$\tilde{A}_{\text{odd}} D_{\text{odd}}(\lambda) = 0, \tag{3.41}$$

где

$$\tilde{A}_{\text{odd}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \varrho_{0,0}(\lambda) & \varrho_{0,1}(\lambda) & \varrho_{0,-1}(\lambda) & \dots & \varrho_{0,p}(\lambda) & \varrho_{0,-p}(\lambda) & \dots \\ \varrho_{1,0}(\lambda) & \varrho_{1,1}(\lambda) & \varrho_{1,-1}(\lambda) & \dots & \varrho_{1,p}(\lambda) & \varrho_{1,-p}(\lambda) & \dots \\ \varrho_{-1,0}(\lambda) & \varrho_{-1,1}(\lambda) & \varrho_{-1,-1}(\lambda) & \dots & \varrho_{-1,p}(\lambda) & \varrho_{-1,-p}(\lambda) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varrho_{p,0}(\lambda) & \varrho_{p,1}(\lambda) & \varrho_{p,-1}(\lambda) & \dots & \varrho_{p,p}(\lambda) & \varrho_{p,-p}(\lambda) & \dots \\ \varrho_{-p,0}(\lambda) & \varrho_{-p,1}(\lambda) & \varrho_{-p,-1}(\lambda) & \dots & \varrho_{-p,p}(\lambda) & \varrho_{-p,-p}(\lambda) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Кроме того, соответствующая мера $d\mu \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$ не имеет конечное число ненулевых коэффициентов d_q.

Дополним эту теорему тем фактом, что теорема Зигеля об общих нулях функций Бесселя задает некоторые ограничения на одновременное обращения в нуль детерминант $\varrho_{p,q}(\lambda)$. Однако, недостатком теоремы 3.3.2 является необходимость контроля роста коэффициентов $\{d_q\}$. При этом мы можем исправить ситуацию, используя теорему Хана-Банаха. Для этого расщепим произвольную функцию $v \in C(\partial\mathcal{D})$ на сумму четной и нечетной ее частей:

$$v(\zeta) = v_{\text{odd}}(\zeta) + v_{\text{even}}(\zeta),\ v_{\text{odd}}(\zeta) = [v(\zeta) - v(-\zeta)]/2,\ v_{\text{even}}(\zeta) = [v(\zeta) + v(-\zeta)]/2.$$

Для $v_{\text{odd}}, v_{\text{even}} \in C(\partial\mathcal{D})$ соответствующий ряд Фурье сходится равномерно на $\partial\mathcal{D}$:

$$v(\zeta) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (v, \zeta^p)_{L^2(\partial\mathcal{D})} \zeta^p,\ v_{\text{even}}(\zeta) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (v, \zeta^{2p})_{L^2(\partial\mathcal{D})} \zeta^{2p},\ v_{\text{odd}}(\zeta) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (v, \zeta^{2p-1})_{L^2(\partial\mathcal{D})} \zeta^{2p-1}.$$

В частности, пространство $C(\partial\mathcal{D})$ распадается на прямую сумму

$$C(\partial\mathcal{D}) = C_{\text{odd}}(\partial\mathcal{D}) \oplus C_{\text{even}}(\partial\mathcal{D})$$

с непрерывными естественными проекторами.

Следствие 3.3.1. *Следующие условия эквиваленты:*

1) *число $\lambda > 0$ – это собственное число задачи типа Зарембы (3.3) при $a_0 = 0$;*

2) *система $\{\zeta^{-2p}\mathcal{F}_p^{(1)}(\zeta, \lambda), \zeta^{-2p}\mathcal{F}_p^{(2)}(\zeta, \lambda)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ не полна в $C(\partial\mathcal{D})$;*

3) *следующая система не полна в $C_{\text{odd}}(\partial\mathcal{D})$*

$$\Big\{\Phi_p(\zeta, \lambda) = \zeta^{-2p}\Big(\alpha_p^{(1)}(\lambda)\mathcal{F}_p^{(2)}(\zeta, \lambda) - \alpha_p^{(2)}(\lambda)\mathcal{F}_p^{(1)}(\zeta, \lambda)\Big)\Big\}_{p\in\mathbb{Z}}. \tag{3.42}$$

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) есть следствие из теоремы Хана-Банаха и формул (3.33), (3.36).

Чтобы доказать эквивалентность условий 2) и 3), отметим, что мера $d\mu \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$ расщепляется естественным образом на $d\mu = d\mu_{\text{even}} + d\mu_{\text{odd}}$, где

$$d\mu_{\text{even}} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} d_{2p}\zeta^{2p},\ d\mu_{\text{odd}} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} d_{2p-1}\zeta^{2p}, \quad d\mu_{\text{odd}} = d\mu_{|C_{\text{odd}}(\partial\mathcal{D})},\ d\mu_{\text{even}} = d\mu_{|C_{\text{even}}(\partial\mathcal{D})}.$$

Из доказательства леммы 3.3.2 для любого $p \in \mathbb{Z}$ существует $i_p = 1$ или $i_p = 2$ такая, что $\alpha_p^{(i_p)}(\lambda) \neq 0$. Следовательно, линейная оболочка системы $\{\zeta^{-2p}\mathcal{F}_p^{(1)}(\zeta,\lambda), \zeta^{-2p}\mathcal{F}_p^{(2)}(\zeta,\lambda)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ совпадает с линейной оболочкой системы

$$\left\{\zeta^{-2p}\mathcal{F}_p^{(i_p)}(\zeta,\lambda)/\alpha_p^{(i_p)}(\lambda), \zeta^{-2p}\Big(\alpha_p^{(2)}(\lambda)\mathcal{F}_p^{(1)}(\zeta,\lambda) - \alpha_p^{(1)}(\lambda)\mathcal{F}_p^{(2)}(\zeta,\lambda)\Big)\right\}_{p\in\mathbb{Z}}.$$

Теперь, рассуждая аналогично вычислениям из леммы 3.3.2, получаем

$$\zeta^{-2p}\mathcal{F}_p^{(i)}(\zeta,\lambda) = \zeta^{2p}\alpha_p^{(i)}(\lambda) + \sum_{q\in\mathbb{Z}} \beta_{p,q}^{(i)}(\lambda)\zeta^{1-2q}$$

и поэтому

$$\Phi_p(\zeta,\lambda) = \zeta^{-2p}\Big(\alpha_p^{(1)}(\lambda)\mathcal{F}_p^{(2)}(\zeta,\lambda) - \alpha_p^{(2)}(\lambda)\mathcal{F}_p^{(1)}(\zeta,\lambda)\Big) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \varrho_{p,q}(\lambda)\zeta^{1-2q}. \tag{3.43}$$

По определению, элементы системы (3.42) принадлежат пространству $C_{\text{odd}}(\partial\mathcal{D})$. Следовательно, теорема 3.3.2 означает, что число λ будет собственным значением задачи типа Зарембы (3.3) при $a_0 = 0$ тогда и только тогда, когда существует ненулевая мера $d\mu \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$ с ненулевой нечетной частью $d\mu_{\text{odd}}$ такая, что

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \zeta^{-2p}\Big(\alpha_p^{(1)}(\lambda)\mathcal{F}_p^{(2)}(\zeta,\lambda) - \alpha_p^{(2)}(\lambda)\mathcal{F}_p^{(1)}(\zeta,\lambda)\Big)d\mu_{\text{odd}}(\zeta) = 0$$

для всех $p \in \mathbb{Z}$. Наконец, по теореме Хана-Банаха это утверждение эквивалентно условию 3) данного следствия. □

Предложение 3.3.1. *Число $\lambda > 0$ будет собственным значением задачи типа Зарембы (3.3) при $a_0 = 0$ тогда и только тогда, когда существует ненулевое множество коэффициентов $\{c_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ такое, что*

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p\zeta^{-2p}\Big(\alpha_p^{(1)}(\lambda)\mathcal{F}_p^{(2)}(\zeta,\lambda) - \alpha_p^{(2)}(\lambda)\mathcal{F}_p^{(1)}(\zeta,\lambda)\Big) = 0 \text{ для всех } \zeta \in \partial\mathcal{D}.$$

Доказательство. Доказательство следствия 3.3.1 демонстрирует нам, что строки $p_1, \dots p_N$ матрицы $A_{\text{odd}}(\lambda)$ будут линейно зависимы тогда и только тогда, когда система

$$\left\{\zeta^{-2p}\Big(\alpha_{p_j}^{(1)}(\lambda)\mathcal{F}_{p_j}^{(2)}(\zeta,\lambda) - \alpha_{p_j}^{(2)}(\lambda)\mathcal{F}_{p_j}^{(1)}(\zeta,\lambda)\Big)\right\}_{1\le j\le N}$$

линейно зависима. С другой стороны, конечное число столбцов $q_1, \dots q_N$ матрицы $A_{\mathrm{odd}}(\lambda)$ будут линейно зависимы тогда и только тогда, когда система (3.42) будет ортогональна многочлену $P(\zeta) = \sum_{j=1}^{N} c_{q_j} \zeta^{2q_j - 1}$, т.е. для всех $p \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{j=1}^{N} \Big(c_{q_j} \zeta^{2q_j-1}, \alpha^{(1)}_{p_j}(\lambda) \overline{\mathcal{F}}^{(2)}_{p_j}(\zeta,\lambda) - \alpha^{(2)}_{p_j}(\lambda) \overline{\mathcal{F}}^{(1)}_{p_j}(\zeta,\lambda) \Big)_{L^2(\partial\mathcal{D})} = 0.$$

□

В соответствии с теоремой 3.3.2, число $\lambda > 0$ будет собственным значением задачи типа Зарембы (3.3) при $a_0 = 0$ тогда и только тогда, когда существует мера $d \in \mathfrak{C}(\partial D)$, такая, что

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \Big(\sum_{q \in \mathbb{Z}} \varrho_{p,q}(\lambda) d_{2q-1} \Big) z^{1-2p} = 0 \text{ для всех } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{3.44}$$

С другой стороны, функции $\Phi_p(\zeta,\lambda)$ голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Следовательно, их ряд Лорана сходится равномерно по ζ на любом компакте $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Таким образом, т.к. последовательность $\{\varrho_{p,q}(\lambda)\}_{q\in\mathbb{Z}}$ состоит из коэффициентов ряда Лорана функции $\Phi_p(\zeta,\lambda)$ (см. (3.43)), мы можем изменить порядок суммирования в (3.44) и получить эквивалентность между (3.44) и следующим равенством

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}} d_{2q-1} \Big(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \varrho_{p,q}(\lambda) z^{1-2p} \Big) = 0 \text{ для всех } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Так как

$$\alpha^{(1)}_p(\lambda) \beta^{(2)}_{p,q}(\lambda) = \pi(-1)^q \left(b_2 \mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda}) - b_1 \mathcal{J}_{2q-2}(\sqrt{\lambda}) \right) \frac{(-1)^p \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda})}{2p+1-2q} =$$

$$= -\pi(-1)^q \left(b_2 \mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda}) - b_1 \mathcal{J}_{2q-2}(\sqrt{\lambda}) \right) \frac{(-1)^p \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda})}{2(q-1)+1-2p},$$

то формула (3.40) означает, что

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha^{(1)}_p(\lambda) \beta^{(2)}_{p,q}(\lambda) z^{1-2p} = \pi(-1)^{q+1} \left(b_2 \mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda}) - b_1 \mathcal{J}_{2q-2}(\sqrt{\lambda}) \right) z^{-2(q-1)} F^{(2)}_{q-1}(z,\lambda) =$$

$$= -\pi \beta^{(2)}_{q,q} z^{-2(q-1)} F^{(2)}_{q-1}(z,\lambda).$$

Аналогично, так как

$$\frac{\alpha^{(2)}_p(\lambda) \beta^{(1)}_{p,q}(\lambda)}{2\pi(-1)^q \mathcal{J}_{2q-1}(\sqrt{\lambda})} = \frac{(-1)^p \Big((2(b_0 - p b_2)\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\, \mathcal{J}_{2p-1}(\sqrt{\lambda}) \Big)}{2p+1-2q} =$$

$$= -\frac{(-1)^p \Big((2b_0 - (2q-1)b_1 + (2(q-1)+1-2p) b_2\, \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\, \mathcal{J}_{2p-1}(\sqrt{\lambda}) \Big)}{2(q-1)+1-2p},$$

то формулы (3.39), (3.40) означают, что

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha_p^{(2)}(\lambda)\beta_{p,q}^{(1)}(\lambda)\, z^{1-2p}}{2\pi(-1)^q\, \mathcal{J}_{2q-1}(\sqrt{\lambda})} = -b_2 \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda})\, z^{1-2p} -$$

$$-z^{-2(q-1)}\Big((2b_0-(2q-1)b_1)F_{q-1}^{(2)}(z,\lambda) - \sqrt{\lambda}\, F_{q-1}^{(1)}(z,\lambda)\Big).$$

Наконец, отметим, что по (3.24) и по формуле Эйлера $z\neq 0$,

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda})\, z^{-2p} = \cos\left[\frac{\sqrt{\lambda}(z+z^{-1})}{2}\right],\ \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \mathcal{J}_{2p+1}(\sqrt{\lambda})\, z^{-1-2p} = \sin\left[\frac{\sqrt{\lambda}(z+z^{-1})}{2}\right].$$

По тейлоровскому разложению и биномиальной формуле

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \cos\,[\sqrt{\lambda}(\zeta^{-1}+\zeta)/2]\,\zeta^q \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} = \int_{|\zeta=1|} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2m} \sum_{j=0}^{2m} \frac{\zeta^{2m-2j+q}}{j!\,(2m-j)!} \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} =$$

$$= \sum_{\substack{(2m+q)/2\in\mathbb{Z}\\ 0\le(2m+q)/2\le 2m}} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2m} \frac{1}{\left(\frac{2m+q}{2}\right)!\left(\frac{2m-q}{2}\right)!}.$$

При нечетных $q\in\mathbb{Z}$ в сумме не будет слагаемых. Далее, если $2q\ge 0$, то $2m\ge 2q$ и, заменяя индекс суммирования $(m-q)=k$, получим

$$\sum_{\substack{(m+q)\in\mathbb{Z}\\ 0\le(m+q)\le 2m}} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2m} \frac{1}{(m+q)!\,(m-q)!} = \sum_{k\ge 0} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k+2q} \frac{1}{k!\,(k+2q)!} = (-1)^q\, \mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda}).$$

Если $2q<0$, то $2m\ge -2q$ и, заменяя индекс суммирования $m+q=k$,:

$$\sum_{\substack{(m+q)\in\mathbb{Z}\\ 0\le(m+q)\le 2m}} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2m} \frac{1}{(m+q)!\,(m-q)!} = \sum_{k\ge 0} \left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}\right)^{2k+2|q|} \frac{1}{k!\,(k+2|q|)!} =$$

$$= \left(\sqrt{-1}\right)^{2|q|} \mathcal{J}_{-2q}(\sqrt{\lambda}) = (-1)^{-q}\,(-1)^{2q}\mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda}) = \left(\sqrt{-1}\right)^{q} \mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda}).$$

Аналогично,

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \sin\,[\sqrt{\lambda}(\zeta^{-1}+\zeta)/2]\,\zeta^q \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} = \int_{|\zeta=1|} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m+1} \sum_{j=0}^{2m+1} \frac{(-1)^m\zeta^{2m+1-2j+q}}{j!\,(2m+1-j)!} \frac{d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta} =$$

$$= \sum_{\substack{(2m+q+1)/2\in\mathbb{Z}\\ 0\le(2m+q+1)/2\le 2m+1}} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m+1} \frac{(-1)^m}{\left(\frac{2m+q+1}{2}\right)!\left(\frac{2m+1-q}{2}\right)!}.$$

Для четного $q\in\mathbb{Z}$ сумма не содержит слагаемых. Если $2q+1\ge 0$, то $2m+1\ge 2q+1$, и, заменяя индекс суммирования $(m-q)=k$, получим

$$\sum_{\substack{(m+q+1)\in\mathbb{Z}\\ 0\le(m+q+1)\le 2m+1}} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m+1} \frac{(-1)^m}{(m+q+1)!\,(m-q)!} =$$

$$= \sum_{k\ge 0} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2k+2q+1} \frac{(-1)^{k+q}}{k!\,(k+2q+1)!} = (-1)^q\,\mathcal{J}_{2q+1}(\sqrt{\lambda}).$$

Если $2q+1<0$, то $2m+1\ge -2q-1$ и, заменяя индекса суммирования $m+q+1=k$:

$$\sum_{\substack{(m+q+1)\in\mathbb{Z}\\ 0\le(m+q+1)\le 2m+1}} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m+1} \frac{(-1)^m}{(m+q+1)!\,(m-q)!} = \sum_{k\ge 0} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2k+|2q+1|} \frac{(-1)^{k-q-1}}{k!\,(k+|2q+1|)!} =$$

$$= (-1)^{-q-1}\,\mathcal{J}_{-(2q+1)}(\sqrt{\lambda}) = (-1)^{-q-1}\,(-1)^{2q+1}\mathcal{J}_{2q+1}(\sqrt{\lambda}) = (-1)^q\,\mathcal{J}_{2q+1}(\sqrt{\lambda}).$$

Таким образом, мы получили функцию, голоморфную в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$:

$$\Psi_q(z,\lambda) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \varrho_{p,q}(\lambda) z^{1-2p} = 2b_2\pi(-1)^q\,\mathcal{J}_{2q-1}(\sqrt{\lambda})\,z\cos\left[\sqrt{\lambda}(z+z^{-1})/2\right]+$$

$$+2\pi(-1)^q\,\mathcal{J}_{2q-1}(\sqrt{\lambda})\,z^{-2(q-1)}\Big((2b_0-(2q-1)b_1)F^{(2)}_{q-1}(z,\lambda) - \sqrt{\lambda}\,F^{(1)}_{q-1}(z,\lambda)\Big)+$$

$$+\pi(-1)^q\left(b_1\mathcal{J}_{2q-2}(\sqrt{\lambda}) - b_2\mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda})\right) z^{-2(q-1)}F^{(2)}_{q-1}(z,\lambda) =$$

$$= 2b_2\pi(-1)^q\,\mathcal{J}_{2q-1}(\sqrt{\lambda})\,z\cos\left[\sqrt{\lambda}(z+z^{-1})/2\right] + \pi(-1)^q z^{-2(q-1)}\Big(-2\sqrt{\lambda}\,\mathcal{J}_{2q-1}(\sqrt{\lambda})\,F^{(1)}_{q-1}(z,\lambda)+$$

$$+\left(2\mathcal{J}_{2q-1}(\sqrt{\lambda})\,(2b_0-(2q-1)b_1) + b_1\mathcal{J}_{2q-2}(\sqrt{\lambda}) - b_2\mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda})\right) F^{(2)}_{q-1}(z,\lambda)\Big).$$

Таким образом, мы доказали следующее:

Следствие 3.3.2. *Число $\lambda>0$ будет собственным значением задачи типа Зарембы (3.3) при $a_0=0$ тогда и только тогда, когда существует ненулевое множество коэффициентов $\{d_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ такое, что*

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} d_{2p-1}\Psi_p(z,\lambda) = 0 \text{ для всех } z\in\partial\mathcal{D}$$

для аналитической функции $\Psi_p(z,\lambda)$ в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\|d\|_- < \infty$ и

$$d_{2p} = -\sum_{q\in\mathbb{Z}} d_{2q-1}\frac{\beta^{(i_p)}_{p,q}(\lambda)}{\alpha^{(i_p)}_p(\lambda)}.$$

Заключение

В диссертации были рассмотрены и решены следующие вопросы:

1. Доказаны теоремы вложения для (весовых) пространств соболевского типа, порожденных некоэрцитивными (и коэрцитивными) эрмитовыми формами, в шкалу пространств Соболева-Слободецкого. Как следствие, описаны условия разрешимости и фредгольмовости для широкого класса соответствующих этим формам смешанных задач, а также доказаны теоремы о полноте их корневых функций.

2. В весовых пространствах соболевского типа получены условия разрешимости и фредгольмовости для трех задач Штурма-Лиувилля (двух коэрцитивных и одной некоэрцитивной) для возмущенного оператора Ламе в $\mathbb{R}^n$ с граничными условиями робеновского типа, а также доказаны теоремы о полноте соответствующих систем корневых функций.

3. Указан один способ нахождения собственных значений некоэрцитивной задачи типа Зарембы для оператора Лапласа в единичном круге на комплексной плоскости и построения ее собственных функций.

4. Получены условия разрешимости некорректной задачи Коши для матричного эллиптического дифференциального оператора первого порядка A, а также найдены формулы точных и приближенных решений для данной задачи.

Список литературы

[1] М.С. Агранович, *Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка,* Функ. анализ и его прил., **45**(2011), №. 2, 1-22.

[2] М.С. Агранович, *Спектральные задачи в липшицевых областях,* Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 2011, №. 39, 11-35.

[3] М.С. Агранович, *Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **63**(1990), 5-129.

[4] М.С. Агранович, *Сильно эллиптические системы 2-го порядка с граничными условиями на незамкнутой липшицевой поверхности*, Функц. анализ и его прил., **45**:1(2011), 1-15

[5] Л.А. Айзенберг, *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения.*, Наука, Новосибирск, 1990, 248 с.

[6] Л.А. Айзенберг и А.М. Кытманов, *О возможности голоморфного продолжения в область определения функции, заданных на связном куске ее границы*, Мат. сборник, Т. 182, №4 (1991), 490-507.

[7] Б.Л. Ван-дер-Варден, *Алгебра*, Москва, Мир, 1976, 649 с.

[8] М.И. Вишик, *О строго эллиптических системах дифференциальных уравнений,* Мат. сб., 1951, Т. 29(71), №3.

[9] И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Москва, Наука, 1965, 448 с.

[10] К. Иосида *Функциональный анализ*, Москва, Мир, 1967, 624 с.

[11] М.В. Келдыш, *О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов*, УМН, **26**:4(160) (1971), 15–41; Russian Math. Surveys, **26**:4 (1971), 15–44.

[12] М.В. Келдыш, *О характеристических значениях и характеристических функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений*, Докл. АН СССР, **77**(1951), 11-14.

[13] В.А. Козлов, В.Г. Мазья, А.В. Фомин, *Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **31**:1(1991), 64-74.

[14] А.Н. Колмогоров *Элементы теории функций и функционального анализа*, Москва, ФИЗМАЛИТ, Изд. 4-е, перераб., 2006, 543 с.

[15] В.А. Кондратьев, *Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях*, Тр. ММО, **15**(1966), 400–451.

[16] В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башелешвили и Т.В. Бурчуладзе, *Трехмерные задачи математической теории упругости*, Москва, Наука, 1976, 664 с.

[17] А.Г. Курош *Курс высшей алгебры: учебник*, Москва, Наука, 1968, 431 с.

[18] М.М. Лаврентьев, *О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка*, Докл. АН СССР, **112**:2(1957), 195–197.

[19] М.М. Лаврентьев, *О некотроых некорректных задачах математической физики*, Новосибирск, СО АН СССР, Вычислительный центр, 1962, 92р.

[20] О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, Москва, 1967, 736 с.

[21] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, Москва, 1973.

[22] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Гидродинамика.*, Москва, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., т. VI, 3-е изд., испр., 1986, 736 с.

[23] В.П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, Москва, 1976.

[24] В. Паламодов, *Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами*, Наука, Москва, 1967.

[25] А.Н. Полковников, А.А. Шлапунов, *О построении формул Карлемана с помощью смешанных задач с граничными условиями, содержащими параметр*, Сиб. матем. журн. Том 58 (2017), N. 4 (344), с. 870–884.

[26] Ю. Сидоров, М. Федорюк, М. Шабунин, *Лекции по теории функций комплексных переменных*, Наука, Москва, 1982.

[27] Л.Н. Слободецкий, *Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных*, Науч. зап. Ленигр. пед. института, **197**(1958), 54-112.

[28] С.Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Москва, Наука, 1988, 333 с.

[29] Н.Н. Тарханов *Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов*, Новосибирск: Наука, 1990, 248 с.

[30] Н. Тарханов, А.А. Шлапунов, *Задачи Штурма-Лиувилля в весовых пространствах в областях с негладкими ребрами. I.* Математические труды, 2015, Т. 18, №1, 118–189.

[31] Н. Тарханов, А.А. Шлапунов, *Задачи Штурма-Лиувилля в весовых пространствах в областях с негладкими ребрами. II.* Математические труды, 2015, Т. 18, №2, 118–189.

[32] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1972.

[33] В.А. Треногин, *Функциональный анализ: учеб. пособие для вузов*, Москва: Наука, 1980, 496 с.

[34] Г.И. Эскин, *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных операторов*, Наука, Москва, 1973, 232 с.

[35] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs and mathematical tables*, Washington, 1972.

[36] S. Agmon, *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math., **15**(1962), 119-147.

[37] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, P. 1.*, Comm. Pure Appl. Math. **12**(1959), 623-727.

[38] M. Borsuk, V.A. Kondrat'ev, *Elliptic Boundary Value Problems of Second Order in Piecewise Smooth Domains*, Elsevier, Amsterdam-London, 2006.

[39] F.E. Browder, *On the eigenfunctions and eigenvalues of the general elliptic differential operator*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **39**(1953), 433-439.

[40] F.E. Browder, *On the spectral theory of strongly elliptic differential operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **45**(1959), 1423-1431 .

[41] S. Campanato, *Proprietá di taluni spazi di distribuzioni e loro applicazione*, Ann. della Scuola Norm. Superiore, Cl. di Sci, Ser. III **14:4**(1960), 363-376 .

[42] S. Campanato, *Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziale lineari del tipo dell'elasticitá*, Ann. della Scuola Norm. Superiore, Cl. di Sci, Ser. III **13:2**(1959), 223-258.

[43] T. Carleman, *Les fonctions quasianalytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[44] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators, Vol. II, Selfadjoint Operators in Hilbert Space*, Intersci. Publ., New York, 1963.

[45] Yu. Egorov, V. Kondratiev, B.-W. Schulze, *Completeness of eigenfunctions of an elliptic operator on a manifold with conical points*, Russ. J. Math. Phys. **8:3**(2001), 267-274.

[46] G. Harutjunjan, B.W. Schulze, *Mixed Problems and Edge Calculus: symbolic structure*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, Vol. 64, **2**(2006).

[47] G. Fichera, *Existence Theorems in Elasticity*, Festkörpermechanik/Mechanics of Solids: Handbuch der Physi, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1972, 347-389.

[48] P. Hartman, *Ordinary Differential Equation*, John Wiley and Sons, New York, 1964.

[49] J.J. Kohn, *Subellipticity of the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem on pseudoconvex domains: sufficient conditions*, Acta Math., **142**(1979), №1-2, 79-122.

[50] V.A. Kondrat'ev, *Completeness of the systems of root functions of elliptic operators in Banach spaces*, Russ. J. Math. Phys., **6:10**(1999), 194-201.

[51] J.J. Kohn, L. Nirenberg, *Non-coercive boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math., **18**(1965), 443-492.

[52] J.L. Lions, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol. 1,* Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1972, 357 p.

[53] C.B. Morrey and L. Nirenberg, *On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations*, Comm. Pure and Appl. Math. **10**(1957), 271-290.

[54] M. Nacinovich, A.A. Shlapunov *On iterations of Green integrals and their applications to elliptic differential complexes*, Mathematische Nachrichten, **180**(1996), 243-284.

[55] A. Plis, *On non-uniqueness in Cauchy problem for an elliptic second order differential equation*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. **11**(1963), 95–100.

[56] A. Polkovnikov, A. Shapunov, *On non-coercive mixed problems for parameter-dependent elliptic operators*, Math. Commun., **15**(2015), 1-20.

[57] A.N. Polkovnikov, A.A. Shlapunov, *On spectral properties of a non-coercive mixed problem associated with the* $\overline{\partial}$*-operator*, Journal of Siberian Federal University, Math. and Phys., №6, 2013(2), 247-261.

[58] M.Schechter, *Negative norms and boundary problems*, Ann. Math. **72**(1960), №3, 581-593.

[59] A.A. Shlapunov *Spectral decomposition of Green's integrals and existence of* $W^{s,2}$*-solutions of matrix factorizations of the Laplace operator in a ball*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1996, №96, 237-256.

[60] A.A. Shlapunov, N.N. Tarkhanov, *Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols*, Proc. London Math. Soc. **71:3**(1995), 1-52.

[61] A.A. Shlapunov, N.N. Tarkhanov, *Duality by reproducing kernels*, Int. J. of Math. and Math. Sc. **6**(2003), 327-395.

[62] A.A. Shlapunov, N. Tarkhanov, *Mixed problems with a parameter*, Russ. J. Math. Phys., **12**(2005), №1, 97-124.

[63] A. Shlapunov, N. Tarkhanov, *On completeness of root functions of Sturm-Liouville problems with discontinuous boundary operators*, Journal of Differential Equations **255**(2013), 3305-3337.

[64] A.A. Shlapunov, N. Tarkhanov, *On the Cauchy problem for holomorphic functions of Lebesgue class L^2 in domain*, Siberian Math. Journal, V. 33 №5, 1992, 914-922.

[65] A.A. Shlapunov, N.N. Tarkhanov, B.W. Schulze, *Green integrals on manifolds with cracks*, Annals of Global Analysis and Geometry Vol. **24**(2003), 131-160.

[66] S. Simanca, *Mixed elliptic boundary value problems*, Comm. in PDE, **12**(1987), 123-200.

[67] N. Tarkhanov, *Analysis of Solutions of Elliptic Equations,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL, 1997.

[68] N. Tarkhanov, *On the root functions of general elliptic boundary value problems*, Compl. Anal. Oper. Theory, **1**(2006), 115-141.

[69] N.N. Tarkhanov, *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations*, Berlin: Acad. Verl., 1995, Vol. 7.

[70] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin, *Solution of Ill-posed Problems*, Washington: Winston & Sons, 1977.

[71] G.N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions. Second Edition.* Oxford Univrsity Press, London, 1944.

[72] S. Zaremba, *Sur un problème mixte relatif à l'équation de Laplace*, Bull. Acad. Sci. Cracovie (1910), 314-344.

Публикации автора диссертации:

[73] А.С. Пейчева, *О полноте корневых функций одной задачи Штурма-Лиувилля для оператора Ламе,* Материалы 52-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2014: Математика/Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2014, 257 с. ISBN 978-5-4437-0247-6.

[74] А.С. Пейчева, *Об одной некоэрцитивной задаче Штурма-Лиувилля для оператора Ламе,* М754 Молодежь и наука: в 3 т.: материалы конф. Т. 2/отв. за выпуск А. Н. Тамаровская. - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2014, 280 с. Электронный доступ: М75 Молодежь и наука: сборник материалов X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края, [Электронный ресурс], № заказа 1644/отв. ред. О. А. Краев - Красноярск: Сиб. федер. ун-т., 2014.

[75] А.С. Пейчева, *О полноте корневых функций задачи Штурма-Лиувилля для оператора Ламе в весовых пространствах,* Проспект Свободный-2015: материалы науч. конф., посвященной 70-летию Великой Победы (15-25 апреля 2015 г.) [Электронный ресурс]/отв. ред. Е. И. Костоглодова. - Электрон. дан. - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2015. - Систем. требования: PC не ниже класса PentiumI; 128 RAM; Windows 98/XP/7; Adobe Reader V8.0 и выше. - Загл. с экрана.

[76] А.С. Пейчева, *Поиск собственных значений и функций задачи Зарембы для круга,* Проспект Свободный-2016: материалы науч. конф., посвященной Году образования в Содружестве Независимых Государств (15-25 апреля 2016 г.) [Электронный ресурс]/отв. ред. А.Н. Тамаровская. - Электрон. дан. - Красноярск: Сиб. фе-дер. ун-т, 2016. - Систем. требования: PC не ниже класса PentiumI; 128 Mb RAM; Windows 98/XP/7; Adobe Reader V8.0 и выше. - Загл. с экрана.

[77] A.S. Peicheva, *On a non-coercive Sturm-Liouville problem for the Lame system,* [Электронный ресурс]: материалы VI Российско-Армянского совещания по математическому анализу, математической физике и аналитической механике (г. Ростов-на-Дону, 11 - 16 сентября 2016 г.)/под общ. ред. А.Н. Карапетянца; Дон. гос. техн. ун-т. - Электрон. текстовые дан. - Ростов н/Д: ДГТУ, 2016, 43 с. - Режим доступа: http://rusarm.sfedu.ru/thethis.pdf.ISBN 978-5-7890-1160-7.

[78] A.S. Peicheva, *Regularization of the Cauchy problem for elliptic operators*, Журнал Сибирского фед. университета. Математика и Физика., 2018, Т. 11, N. 2, 191-193.

[79] A.S. Peicheva, *Embedding Theorems for Functional Spaces Associated with a Class of Hermitian Forms*, Журнал Сиб. фед. университета. Математика и Физика., 2017, Т. 10, N. 1, 83-95.

[80] Ari Laptev, A. Peicheva, A. Shlapunov, *Finding Eigenvalues and Eigenfunctions of the Zaremba Problem for the Circle*, Complex Anal. Oper. Theory, 11(4), 2017, 895-926.

[81] A.S. Peycheva, A.A. Shapunov, *On the completeness of root functions of Sturm-Liouville problems for the Lame system in weighted spaces,* ZAMM (Z. Angew. Math. Mech.), 2015, V. 95, no. 11, 1202-1214.