

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Иркутский национальный исследовательский технический
университет»

На правах рукописи



Нгуен Дык Банг

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
Чистяков В.Ф.

Иркутск — 2016

Оглавление

	Стр.
Обозначения и соглашения	4
Введение	6
1. Разрешимость начально-краевых задач для вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений	16
1.1 Вспомогательные понятия	16
1.2 Линейные системы ИДУ	24
1.3 Краевые задачи для систем ИДУ индекса 1	34
1.4 Квазилинейные системы ДАУ и ИДУ	41
2. Численные методы решения начально-краевых задач для вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений . . .	47
2.1 Решение начально-краевых задач методом наименьших квадратов .	47
2.2 Программа для реализации метода наименьших квадратов	52
2.3 Разностные схемы для решения вырожденных систем ИДУ	60
2.4 Численные эксперименты	62
3. Моделирование гидравлических и электрических цепей, записанных в виде вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений	66
3.1 Моделирование гидравлических цепей	66
3.1.1 Модель потокораспределения при расчетах статических гидравлических цепей	66
3.1.2 Представление динамической модели гидравлических цепей в виде вырожденной системы ИДУ	71

3.1.3	Характеристика объекта моделирования	72
3.1.4	Математическая модель гидравлической цепи связки «Прямоточный котел-турбина»	77
3.2	Моделирование электрических цепей	81
3.2.1	Основные элементы цепи	81
3.2.2	Общие принципы формирования моделей электрических цепей	84
3.2.3	Представление электрических цепей в виде вырожденных систем ИДУ	87
3.3	Исследование моделей гидравлических и электрических цепей . . .	91
3.3.1	Исследование моделей гидравлических цепей	91
3.3.2	Исследование моделей электрических цепей	94
4.	Программный комплекс для исследования систем	96
4.1	Программа для решения гидравлических цепей	96
4.1.1	Описание структуры программы	96
4.1.2	Результаты расчетов	104
4.2	Программа для решения электрических цепей	108
4.2.1	Описание структуры программы	108
4.2.2	Результаты расчетов	112
	Заключение	117
	Список литературы	118
	Приложения	131

Обозначения и соглашения

При выборе обозначений автор старался использовать стандартные символы. Буквы i, j, k, m, n, r во всех разделах всегда соответствуют целым числам, причем за некоторыми буквами закреплены определенные значения. Например, k равно индексу пучка матриц или порядку дифференциального оператора, r равно рангу или максимуму ранга какой-либо матрицы. Символ \top используется для обозначения транспонирования матрицы. Символ \square лежит в конце доказательства. Строчные греческие буквы $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa$ используются для обозначения скалярных величин из множества вещественных чисел \mathbf{R}^1 . Символ Λ_l соответствует дифференциальному оператору порядка l , а символы V, W используются для обозначения оператора Вольтерра.

Далее:

\mathbf{R}^m – m -мерное векторное пространство, элементами которого являются m -мерные векторы с компонентами из \mathbf{R}^1 ;

$C^p(T)$ – пространство дифференцируемых p раз функций в области определения, $T \subseteq \mathbf{R}^m$, $p = 1, 2, \dots$;

$C(T) = C^0(T)$ – пространство непрерывных функций в области определения T ;

запись $A(t) \in C^p(I_t)$, $t \in I_t$, где $A(t)$ – матрица или вектор-функция, означает, что каждый элемент матрицы или вектор-функции дифференцируем p раз в области I_t ;

запись $A(t) \in C^A(T)$ означает, что все элементы $A(t)$ являются вещественно-аналитическими функциями на T ;

запись $A(t) \in L_2(T)$ означает, что все элементы $A(t)$ являются функциями, суммируемыми с квадратом на T ;

$\ker L$ – ядро оператора L , т.е. множество решений системы $Lx = 0$;

$\dim \ker L$ – размерность ядра оператора L ;

$\sup_{t \in T} K(t)$ – верхняя грань функции $K(t)$ на T ;

$\deg P(\lambda)$ – степень многочлена $P(\lambda) = a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k$;

$\det A$ – определитель матрицы A ;

$\text{rank } A$ – ранг матрицы A ;

diag – обозначение диагональной матрицы;

$(d/dt)x = \dot{x}$ – производная первого порядка вектор-функции x ;

$(d/dt)^i x = x^{(i)}$ – производная i -го порядка вектор-функции x .

В диссертации используются нормы q -мерного вектора $b = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_q)^\top \in \mathbf{R}^q$ и вектор-функции $b(t) = (b_1(t) \ b_2(t) \ \dots \ b_q(t))^\top$, $t \in T$, вычисляемые по правилам:

$\|b\|_{\mathbf{E}}^2 = \sum_{j=1}^q b_j^2$ – евклидова норма вектора b ;

$\|b\|_{\mathbf{I}} = \max \{|b_j|, j = 1, 2, \dots, q\}$ – равномерная норма вектора b ;

$\|b(t)\|_{\mathbf{L}_2(T)}^2 = \int_{\alpha}^{\beta} \|b(s)\|_{\mathbf{E}}^2 ds$ – норма в пространстве \mathbf{L}_2 ;

$\|b(t)\|_{\mathbf{C}(T)} = \max_{\alpha}^{\beta} \{\|b(t)\|_{\mathbf{I}}, t \in T\}$ – равномерная норма в пространстве $\mathbf{C}(T)$.

Норма $(q \times q)$ -матрицы $B = \{b_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, q\}$:

$\|B\| = \max \left\{ \sum_{j=1}^q |b_{ij}|, i = 1, 2, \dots, q \right\}$.

Кроме того, в доказательствах утверждений (лемм, теорем и следствий) для упрощения записи зависимость от независимых переменных будет обычно опускаться, если это не вызывает путаницы.

В диссертации также используются следующие сокращения:

ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение;

ДАУ – дифференциально-алгебраическое уравнение;

ГД – гидравлическая цепь;

ЭЦ – электрическая цепь.

Введение

Актуальность исследования. В настоящее время многие экспериментальные исследования можно заменить на исследование математических моделей физических процессов или технических устройств. Особенно это актуально при создании тренажеров рабочих мест энергетических и химических установок. Многие модели в технических системах (на современном уровне моделирования) описываются взаимосвязанными системами дифференциальных, интегральных и алгебраических уравнений, которые можно записать в виде систем интегро-дифференциальных уравнений с матрицей неполного ранга перед старшей производной искомой вектор-функции. Алгебраические уравнения отвечают за наличие в моделях балансовых соотношений, в частности, законов сохранения или уравнений состояния, системы дифференциальных уравнений описывают динамику процесса. Если процесс обладает последействием, то математическая модель может включать и интегральные уравнения. Такие системы принято называть вырожденными системами интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ).

Численное решение краевых и начальных задач для вырожденных систем ИДУ сопряжено с большими трудностями: не существует достаточно развитой теории вырожденных систем ИДУ (недостаточно исследованы свойства разрешимости, устойчивости решения к малым возмущениям, устойчивости в смысле Ляпунова и т.д.); при переходе к дискретному аналогу вырожденных систем ИДУ существенно меняются свойства разрешимости (исходная задача может иметь решение, а ее дискретный аналог при сколь угодно малом шаге дискретизации нет; может иметь место и обратная ситуация); начальные или краевые условия должны принадлежать определенным многообразиям в пространстве фазовых переменных; сколь угодно малое возмущение входных данных может повлечь сколь угодно большое изменение решений.

В частности, модели гидравлических и электрических цепей (ГЦ и ЭЦ) описываются вырожденными системами ИДУ. С практической точки зрения актуальность обусловлена тем, что *модели гидравлических и электрических цепей являются составной частью моделей сложных энергетических установок (паровых котлов, турбин, систем регенераций либо всего комплекса энергоблока тепловых электростаций)*. От качества моделирования гидравлических и электрических цепей существенно зависит качество комплексной модели всей энергоустановки.

Обзор литературы по теме диссертации. В течение последних сорока лет большое внимание уделяется системам дифференциальных уравнений с матрицей неполного ранга или вырожденными оператором в области определения при старшей производной искомой вектор-функции и численным методам их решения [9;17;41;74–76]. Вырожденные системы ИДУ и особенно численные методы решения краевых задач для них в прошлое тридцатилетие исследовались фрагментарно. Сейчас это быстро растущая область исследования. Ранее изучались только постановки начальных задач. Краевые задачи практически не рассматривались. Методы, применяемые в других работах (см., например, [4; 7]) при решении краевых задач для дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), сложно адаптировать к нашим задачам. А для систем с прямоугольными матрицами коэффициентов это сделать и вовсе невозможно. Для вырожденных систем ИДУ, если число уравнений больше размерности искомой вектор-функции, то системы принято называть *переопределенными*. Если число уравнений меньше размерности искомой вектор-функции, то такие системы называются *недоопределенными*. Переопределенным и недоопределенным системам соответствуют системы ИДУ с прямоугольными матрицами коэффициентов при старших производных искомой вектор-функции. Если число уравнений совпадает с размерностью искомой вектор-функции, то будем их называть *замкнутыми* системами. Для замкнутых систем неполнота ранга матрицы перед старшей производной искомой вектор-функции эквивалентна тому, что определитель матрицы равен

нулю. Замкнутые системы рассматривались в работах В.Ф. Чистякова [98; 100], М.В. Булатова [19–24], Е.В. Чистяковой [90–95], С.С. Орлова, М.В. Фалалеева [85–88], В.К. Горбунова [30; 31], Е.Б. Кузнецова [40], С.С. Дмитриева [36], и т.д. Незамкнутые системы рассматриваются в диссертации впервые.

Диссертационная работа посвящена разработке теории начальных и краевых задач для вырожденных систем ИДУ. На основе этих разработок построены и исследованы модели, возникающие в теории нелинейных гидравлических и электрических цепей (ГЦ и ЭЦ). В таких моделях физические принципы моделирования взяты из работ О.А. Балышева, Э.А. Таирова [12] и Е.И. Ушакова [84].

В предыдущих поколениях моделей ГЦ для расчета использовали системы алгебраических или дифференциально-алгебраических уравнений (АУ или ДАУ). Такие модели разрабатывались и исследовались в трудах А.П. Меренкова, В.Я. Хасилева [51], Н.Н. Новицкого [53], Е.В. Сенновой [68–71], Б.М. Кагановича [38; 39], М.Г. Сухарева [77–79], Ф.А. Вульмана [25], Д.Ф. Петерсона [66], К.Р. Айда-Заде [10], А.А. Логинова [47; 48], А.А. Левина [43–46], Э.А. Таирова [81; 82], Е.В. Чистяковой [5] и т.д. В диссертации описываются модели ГЦ с автоматическими регуляторами в виде вырожденных систем ИДУ.

Итак, исследуемые в диссертации математические модели можно записать в виде вырожденных систем ИДУ

$$\mathcal{S}(t)\dot{x} + \Gamma(x, \mathcal{W}x, t) = 0, \quad t \in T = [\alpha, \beta], \quad (B1)$$

где $\mathcal{S}(t)$ – $(m \times n)$ -матрица, $\Gamma(x, w, t)$ – вектор-функция соответствующей размерности, $x \in \mathbf{R}^n$, $w \in \mathbf{R}^l$, $\mathcal{W}x = \int_{\alpha}^t \tilde{K}(t, \tau, x(\tau)) d\tau$ – оператор Вольтерра, точнее говоря, $\Gamma : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l \times T \rightarrow \mathbf{R}^m$, $\tilde{K} : T \times T \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^l$. Предполагается, что входные данные достаточно гладкие и выполнено условие

$$\text{rank } \mathcal{S}(t) < \min\{m, n\} \quad \forall t \in T. \quad (B2)$$

Если $m = n$, то условие (B2) эквивалентно равенству $\det \mathcal{S}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in T$.

Для системы (B1) обычно задаются либо начальные $x(\alpha) = a$, a – заданный вектор из \mathbf{R}^n , либо краевые условия

$$\varphi(x(\alpha), x(\beta)) = 0, \quad \varphi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^\mu. \quad (B3)$$

В работе рассматривается только классические решения. Под решением задачи (B1), (B3) будем понимать любую вектор-функцию $x(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, которая обращает равенства (B1), (B3) в тождества при подстановке.

Для существования классических решений начальных задач $x(\alpha) = a$, где a – заданный вектор, для системы (B1) необходимо выполнение условия Кронекера-Капелли в начальной точке

$$\text{rank } S(\alpha) = \text{rank}(S(\alpha)| - \Gamma(a, 0, \alpha)).$$

Иначе $\dot{x}(\alpha)$ в (B1) не существует. Следовательно, не существует $x(t) \in \mathbf{C}^1(T)$.

Пример. Пусть задана система

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \int_0^t K(t,s)x(s)ds - \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = 0, \quad x(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Для существования классических решений этой системы необходимо условие Кронекера-Капелли. Из него вытекает, что $a_1 + a_2 - f_2(0) = 0$.

Мы знаем, что решения линейных систем ИДУ в нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{x} + B(t)x + \int_{\alpha}^t K(t,s)x(s)ds &= \phi, \quad t \in T, \quad x(\alpha) = a, \\ \dot{x}_\epsilon + B_\epsilon(t)x_\epsilon + \int_{\alpha}^t K_\epsilon(t,s)x_\epsilon(s)ds &= \phi_\epsilon, \quad t \in T, \quad x_\epsilon(\alpha) = a_\epsilon, \end{aligned}$$

удовлетворяют неравенству

$$\|x - x_\epsilon\|_{\mathbf{C}(T)} \leq \kappa\epsilon, \quad \kappa = \text{const},$$

если справедливы оценки

$$\|B(t) - B_\epsilon(t)\|_{\mathbf{C}(T)} \leq \epsilon, \quad \|K(t,s) - K_\epsilon(t,s)\|_{\mathbf{C}(T)(T \times T)} \leq \epsilon,$$

$$\|\phi - \phi_\epsilon\|_{\mathbf{C}(T)} \leq \epsilon, \quad \|a - a_\epsilon\|_{\mathbf{C}(T)} \leq \epsilon.$$

Здесь $B(t)$, $B_\epsilon(t)$, $K(t,s)$, $K_\epsilon(t,s)$ — $(n \times n)$ — непрерывные матрицы, $\phi \equiv \phi(t)$, $\phi_\epsilon \equiv \phi_\epsilon(t)$ — известные непрерывные вектор-функции, a , a_ϵ — известные вектора из \mathbf{R}^n . Выпишем систему ИДУ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(s) ds = \phi, \quad t \in T = [0,1], \quad (B4)$$

которая на отрезке T имеет единственное решение для любой $\phi \in \mathbf{C}^2(T)$

$$x = \phi(t) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\dot{\phi}(t) + \int_0^t \phi(s) ds \right].$$

Если правые части системы (B4) взять в виде вектор-функций

$$\phi(t) = (0 \ 1)^\top, \quad \phi_\epsilon(t) = (0 \ 1 + \sqrt{\epsilon} \sin t/\epsilon)^\top,$$

то для соответствующих им решений x , x_ϵ имеем

$$\|x - x_\epsilon\|_{\mathbf{C}(T)} = \left\| \begin{pmatrix} (1/\sqrt{\epsilon} + \epsilon\sqrt{\epsilon}) \cos \frac{t}{\epsilon} \\ \sqrt{\epsilon} \sin \frac{t}{\epsilon} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbf{C}(T)} \rightarrow \infty,$$

хотя $\|\phi - \phi_\epsilon\|_{\mathbf{C}(T)} \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$. В примере (B4) мы можем потребовать малость отклонения $\phi - \phi_\epsilon$ не в пространстве $\mathbf{C}(T)$, а в пространстве $\mathbf{C}^1(T)$, и таким образом восстановить в некотором смысле непрерывность решений по $\phi(t)$.

К сожалению выбор метрики, в которой малы возмущения, не всегда дает такой эффект: произвольно малые и сколь угодно гладкие возмущения матриц коэффициентов могут менять размерность пространства решения ИДУ даже в линейном случае. Рассмотрим систему (B4) в случае, когда $K(t,s) \equiv 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x}_\epsilon + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} x_\epsilon = \phi(t), \quad \epsilon > 0$$

в отличие от исходной ИДУ имеет однопараметрическое семейство решений

$$x_\epsilon(t,c) = e^{t/\epsilon} \begin{pmatrix} 1 \\ -\epsilon \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где c – произвольное число из \mathbf{R}^1 . Очевидно, что если $c \neq 0$, то

$$\|x_\epsilon - x\|_{C(T)} \rightarrow \infty \text{ при } \epsilon \rightarrow 0.$$

Для примера (В4) условие Кронекера-Капелли необходимо, но недостаточно. Для вектора $a = (3 \ 1)^\top$ выполнено это условие, но $x_1(0) \equiv 0$.

Целью диссертационной работы является исследование разрешимости вырожденных систем ИДУ и начальных, краевых задач для них, конструирование численных методов решения таких систем и применение для расчета динамики сложных ГЦ, ЭЦ.

При написании диссертации решались следующие конкретные **задачи**:

1. Получение критериев разрешимости вырожденных систем ИДУ и начальных, краевых задач для них;
2. Разработка численных методов и создание комплекса программ, реализующих эти методы;
3. Разработка моделей ГЦ, ЭЦ с автоматическими регуляторами на основе теории вырожденных систем ИДУ;
4. Применение полученных результатов к исследованию математических моделей.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются вырожденные системы ИДУ; модели ГЦ и ЭЦ с автоматическими регуляторами, записанные в виде вырожденных систем ИДУ. Предметом исследования являются поиск критериев разрешимости начально-краевых задач для вырожденных систем ИДУ; разработка методов численного решения систем ИДУ с матрицей неполного ранга перед старшей производной искомой вектор-функции; исследование свойств математических моделей ГЦ и ЭЦ, записанных в виде вырожденных систем ИДУ.

Методы исследования. В работе использованы результаты из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений типа Вольтерра, теории дифференциальных, интегральных операторов, теории мат-

риц, а также сведения из теории ГЦ и ЭЦ. При исследовании численного решения вырожденных систем ИДУ использованы основы метода наименьших квадратов и теории конечно-разностных схем. Для создания программ, реализующих численные методы решения начальных, краевых задач для вырожденных систем ИДУ и комплекса программ, моделирующих ГЦ и ЭЦ, использована среда разработки Matlab версии 7.11.0.584 (R2010b) в операционной системе Window 7x32 бита.

Достоверность полученных результатов подтверждается строгими доказательствами теорем существования решений вырожденных систем ИДУ и начально-краевых задач для них, доказательствами сходимости предлагаемых численных методов и расчетами тестовых примеров. Достоверность математических моделей ГЦ и ЭЦ базируется на наблюдениях прошлых лет за функционированием реального оборудования.

Тематика работы соответствует следующим пунктам паспорта специальности 05.13.18: п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений»; п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей»; п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»; п. 5 «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Научная новизна

1. Создана теоретическая основа для численного исследования вырожденных систем ИДУ: доказаны теоремы существования и единственности решений начальных и краевых задач для вырожденных систем ИДУ, включая системы с прямоугольными матрицами коэффициентов. Системы с прямоугольными матрицами коэффициентов исследованы впервые. Разработаны новые численные методы на основе методов наименьших квадратов и разностных схем, позволяющие находить приближен-

ные решения начальных, краевых задач для вырожденных систем ИДУ. Получены оценки скорости сходимости этих методов к точным решениям таких задач.

2. Впервые проведены аналитическое и численное исследования математических моделей ГЦ и ЭЦ с автоматическими регуляторами в виде вырожденных систем ИДУ и учетом состояния среды на ветвях: пар, вода, пароводяная смесь.
3. Разработан комплекс программ нахождения приближенного решения краевых задач для вырожденных систем ИДУ, и начальных задач, описывающих модели ГЦ и ЭЦ с автоматическими регуляторами. Разработанный комплекс программ позволяет проводить вычислительные эксперименты для модельных и реальных задач, исследовать свойства предложенных алгоритмов (в частности, оценивать обусловленность линейных алгебраических систем, к решению которых сводится реализация алгоритмов).

Теоретическая значимость

1. Предложен метод формирования вырожденных систем ИДУ, описывающих ГЦ и ЭЦ при наличии автоматических регуляторов и различных законов падения давлений на ветвях ГЦ.
2. Доказаны теоремы существования и единственности решений вырожденных систем ИДУ.
3. Построены численные методы решения для таких систем.

Практическая значимость результатов исследования заключается в следующем:

1. Модель, рассматриваемая в работе, представляет составную часть модели проточного котла и турбины, которые являются частью оборудования тепловой электростанции. Полные модели включают в себя системы, состоящие из сотен алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений. Полное теоретическое исследование таких боль-

ших систем не представляется возможным. На компактных моделях, рассматриваемых в данной диссертации, предполагается отрабатывать принципиальные вопросы построения полных моделей;

2. Разработанная программная система позволяет реализовать модели ГЦ и ЭЦ и рассчитывать режимы работы этих моделей.

Апробация. Основные результаты и положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Всероссийская молодёжная научно-практическая конференция «Малые Винеровские чтения», г. Иркутск, 2013 г.;
- Ляпуновские чтения, ИДСТУ СО РАН, 2013 г.;
- Всероссийская молодежная научно-практическая конференция «Малые Винеровские чтения», г. Иркутск, 2014 г.;
- IV международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи», г. Иркутск, 2014 г.;
- XIX Байкальская Всероссийская конференция «Информационные и математические технологии в науке и управлении», г. Иркутск, 2014 г.;
- XV Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. г. Тюмень, 2014 г.;
- Международная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование». г. Улан-Удэ, 2015 г.

Результаты диссертационного исследования неоднократно сообщались на научных семинарах кафедры Вычислительной техники Иркутского национального исследовательского технического университета (рук. – к.т.н., доцент Дорофеев А.С.).

Материалы диссертации опубликованы в журналах, трудах и тезисах научных конференций [56–64]. Статьи [3; 61; 62] опубликованы в журналах, включенных в список ВАК и SCOPUS: Вестник ЮУрГУ, серия «Математическое моделирование и программирование», Известия ИГУ, серия «Математика». По-

лучены свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014615157 от 20 мая 2014 г. [54] и № 2015660014 от 21 сентября 2015 г. [55].

Личный вклад. Все результаты получены лично соискателем. Руководителю и соавтору принадлежат некоторые постановки задач, рассматриваемых в диссертации. Все необходимые заимствования отмечены ссылками на соответствующие литературные источники.

Структура и объём диссертации. Диссертация включает в себя следующие разделы: введение, 4 глав, заключения, список литературы и приложения.

Во введении обоснована актуальность направления исследований, обрисован класс задач, которые приводят к необходимости решать системы, содержащие алгебраические дифференциальные и интегральные уравнения, а также дан обзор текущей литературы по теме диссертации.

Глава 1 посвящена разрешимости вырожденных систем ИДУ, включая подходы к определению индекса. В ней получены теоремы разрешимости начальных и краевых задач для линейных и квазилинейных систем ИДУ.

В главе 2 рассматриваются численные методы решения начальных и краевых задач для вырожденных систем ИДУ.

Глава 3 посвящена описанию и исследованию математической модели ГЦ и ЭЦ с автоматическими регуляторами на основе вырожденных систем ИДУ.

Глава 4 посвящена описанию комплекса программ для решения исследуемых задач на языке Matlab.

В заключении подведены итоги проделанной работы и перечислены основные научные результаты диссертации.

Список использованной литературы составлен в алфавитном порядке, включает в себя 100 ссылок.

В приложении прилагаются полученные свидетельства регистрации программ для ЭВМ.

Глава 1. Разрешимость начально-краевых задач для вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений

Результаты, полученные в данной главе, являются базовыми при изучении моделей ГЦ и ЭЦ, рассматриваемых в диссертации.

1.1 Вспомогательные понятия

В диссертации используются математические понятия теории матриц, теории интегральных, дифференциальных уравнений и т.д., поэтому введем основные понятия, которые лежат в основе теоретических исследований и доказательств разрешимости вырожденных систем ИДУ и сходимости численных процессов для них.

Свойства переменных матриц и их пучков

Определение 1.1.1. [17] Полуобратной матрицей к $(m \times n)$ -матрице $A(t)$, $t \in T$, называется $(n \times m)$ -матрица $A^-(t)$, удовлетворяющая для любых $t \in T$ уравнению $A(t)A^-(t)A(t) = A(t)$.

Определение 1.1.2. [17] Матрица $A^+(t)$ размерности $(n \times m)$ называется псевдообратной к $(m \times n)$ -матрице $A(t)$, если для всех $t \in T$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} A^+(t)A(t)A^+(t) &= A^+(t), & A(t)A^+(t)A(t) &= A(t), \\ [A(t)A^+(t)]^\top &= A(t)A^+(t), & [A^+(t)A(t)]^\top &= A^+(t)A(t). \end{aligned}$$

Полуобратная и псевдообратная матрицы определены поточечно для любого $t \in T$ и любой $(m \times n)$ -матрицы $A(t)$. Псевдообратная матрица единственна. Если матрица $A(t)$ квадратная и неособенная, то $A^{-1}(t) = A^+(t) = A^-(t)$.

Лемма 1.1.1. [97, с. 39] Пусть

$$1) \ (m \times n)\text{-матрица } A(t) \in \mathbf{C}^q(T);$$

2) $\text{rank } A(t) = \text{const}$ на T .

Тогда существует полуобратная матрица $A^-(t) \in \mathbf{C}^q(T)$, $q = 0, 1, 2, \dots$, в частности, $A^+(t) \in \mathbf{C}^q(T)$.

Лемма 1.1.2. [17, с. 33] *Линейная алгебраическая система*

$$A(t)x(t) = f(t)$$

разрешима в том и только в том случае, если

$$[E_m - A(t)A^-(t)]f(t) = 0,$$

и если она разрешима, то ее общее решение представляется в виде

$$x(t) = A^-(t)f(t) + [E_n - A^-(t)A(t)]u(t),$$

где $A^-(t)$ – любая полуобратная матрица к $(m \times n)$ -матрице $A(t)$, $t \in T$, а u – произвольная вектор-функция.

Лемма 1.1.3. [17, с. 34] *Пусть в матричной системе*

$$A(t)x(t) = \phi(t), \quad t \in T = [\alpha, \beta], \quad (1.1)$$

в которой равенство понимается как равенство почти всюду на T , для матриц A и ϕ выполнены включения $A(t) \in \mathbf{C}^p(T)$, $\phi(t) \in \mathbf{C}^l(T)$. Тогда система (1.1) имеет не зависящее от $t \in T$ решение в том и только в том случае, если почти всюду на T

$$\phi(t) = A(t) \left[\int_{\alpha}^{\beta} A^{\top}(s)A(s)ds \right]^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} A^{\top}(s)\phi(s)ds.$$

Определение 1.1.3. [97] Пусть заданы $(m \times n)$ -матрицы $A(t)$, $B(t)$, $t \in T$. Выражение $\lambda A(t) + B(t)$, где λ – скалярный параметр (в общем случае комплексный), будем называть пучком матриц $A(t)$, $B(t)$.

Определение 1.1.4. [97] Пусть заданы $(n \times n)$ -матрицы $A(t)$, $B(t)$, $t \in T$. Выражение

$$\xi(\lambda) = \det[\lambda A(t) + B(t)]$$

будем называть характеристическим многочленом пучка $\lambda A(t) + B(t)$.

Определение 1.1.5. [97] Если для пучка $(m \times n)$ -матриц $\lambda A(t) + B(t)$ существует $(m \times m)$ -матрица $P(t)$ со свойствами $\det P(t) \neq 0 \forall t \in T$,

$$P(t)[\lambda A(t) + B(t)] = \lambda \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix}, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} A_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix} = \min\{m, n\} \forall t \in T,$$

то будем говорить, что пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ имеет индекс один на отрезке T .

Определение 1.1.6. [97] Говорят, что пучок квадратных матриц $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет критерию «ранг-степень», если выполнены условия

- 1) $\text{rank } A(t) = r = \text{const} \forall t \in T$;
- 2) $\det[\lambda A(t) + B(t)] = \lambda^r a_0(t) + \dots$, где $a_0(t) \neq 0 \forall t \in T$.

Определение 1.1.7. [97] Пучок $(n \times n)$ -матриц $\lambda A(t) + B(t)$ имеет индекс один на отрезке T тогда и только тогда, когда выполнен критерий «ранг-степень»:

$$\text{rank } A(t) = \deg \det[\lambda A(t) + B(t)] = \text{const} = r \forall t \in T.$$

Лемма 1.1.4. [97] Пусть $(m \times n)$ -матрица $A(t) \in \mathbf{C}^i(T)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, имеет постоянный ранг r на T . Тогда существуют квадратные матрицы $P(t), Q(t) \in \mathbf{C}^i(T)$ соответствующей размерности со свойствами

$$\det P(t) \neq 0, \quad \det Q(t) \neq 0 \forall t \in T, \quad P(t)A(t)Q(t) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где E_r – единичная матрица размерности r .

Следствие 1.1.1. Для $(m \times n)$ -матриц $A(t)$ полного ранга, когда $\text{rank } A(t) = \min\{m, n\} \forall t \in T$, существуют матрицы $P(t), Q(t)$ из леммы 1.1.4 со свойствами

$$A(t)Q(t) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \end{pmatrix}, \quad m < n, \quad P(t)A(t) = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n < m, \quad t \in T.$$

Лемма 1.1.5. [8] Пусть $(n \times n)$ -матрица $A(t) \in \mathbf{C}^A(T)$; $\text{rank } A(t) \leq r$. Тогда существуют $(n \times n)$ -матрицы $L(t), R(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, неособенные для любого

$t \in T$, такие, что

$$L(t)A(t)R(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $A_{11}(t)$ – $(r \times r)$ -блок, $\det A_{11}(t) \neq 0$ на T .

Следствие 1.1.2. Пусть $(m \times n)$ -матрица $A(t) \in \mathbf{C}^A(T)$; $\text{rank } A(t) \leq r$. Тогда существуют $(m \times m)$ -матрица $L(t)$ и $(n \times n)$ -матрица $R(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, неособенные для любого $t \in T$, такие, что

$$L(t)A(t)R(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $A_{11}(t)$ – $(r \times r)$ -блок, $\det A_{11}(t) \neq 0$ на T .

Необходимые сведения об интегральных и дифференциальных операторах

В диссертации используются следующие операторы:

– дифференциальный оператор

$$\Lambda_l x = \sum_{j=0}^l A_j(t) (d/dt)^j x, \quad l \geq 0, \quad t \in T,$$

в частности, положим $\Lambda_1 x = A(t)\dot{x} + B(t)x$;

– интегральный оператор Вольтерра

$$Vx = \int_{\alpha}^t K(t,s)x(s)ds, \quad t \in T,$$

где $T = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}^1$, $A_j(t)$, $B(t)$, $K(t,s)$ – $(m \times n)$ -матрицы, определенные на T и $T \times T$, соответственно, $x \equiv x(t)$ – n -мерная вектор-функция из пространства бесконечно дифференцируемых функций \mathbf{C}^∞ , $A_l(t) \neq 0$ на T .

Согласно [97] при достаточной гладкости матриц, задающих коэффициенты операторов и их ядра, можно утверждать следующее.

1. Суперпозиция (произведение) дифференциальных операторов – дифференциальный оператор

$$\Lambda_\mu \circ \Lambda_\nu = \Lambda_m, \quad m \leq \mu + \nu.$$

2. Суперпозиция интегральных операторов – интегральный оператор

$$V_1 \circ V_2 = V.$$

3. Суперпозиция дифференциальных и интегральных операторов – интегро-дифференциальный оператор

$$\Lambda_m \circ V = \Lambda_\mu + V_l, \quad \mu \leq m - l.$$

4. Суммы операторов

$$\Lambda_m + \Lambda_\mu = \Lambda_\nu, \quad \nu \leq \max\{m, \mu\}, \quad V_1 + V_2 = V.$$

Лемма 1.1.6. [27, с. 433] Пусть в системе

$$\dot{x} = B(t)x + \phi, \quad t \in T, \quad (1.2)$$

где $x \equiv x(t)$ – n -мерная искомая вектор-функция из $\mathbf{C}^1(T)$, $B(t)$ – $(n \times n)$ -матрица, $\phi \equiv \phi(t)$ – заданная n -мерная вектор-функция, $B(t), \phi \in \mathbf{C}^p(T)$, $p = 0, 1, 2, \dots$. Тогда система (1.2) разрешима и ее общее решение имеет вид

$$x(t, c) = X(t)c + V\phi \in \mathbf{C}^{p+1}(T), \quad (1.3)$$

где $X(t)$ – матрицант системы, $V\phi = \int_{\alpha}^t X(t)X^{-1}(s)\phi(s)ds$, c – произвольный вектор из \mathbf{R}^n . Если же в (1.2) $B(t), \phi \in \mathbf{C}^A(t)$, то в равенстве (1.3) $x(t, c) \in \mathbf{C}^A(T)$.

Под матрицантом системы (1.2) понимаем матрицу $X(t)$ размерности $(n \times n)$, удовлетворяющую начальной задаче

$$\dot{x}(t) = B(t)x(t), \quad t \in T, \quad x(\alpha) = E_n.$$

Матрицант имеет представление в виде равномерно сходящегося ряда

$$X(t) = E_n + \int_{\alpha}^t B(s)ds + \int_{\alpha}^t B(s) \int_{\alpha}^s B(s_1)ds_1ds + \dots$$

и удовлетворяет неравенству $\det X(t) \neq 0 \forall t \in T$.

Определение 1.1.8. Пространство решений (ПР) системы $(\Lambda_1 + V)x = 0$ конечномерно на T , если существует $(n \times \nu)$ -матрица $X_\nu(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ с минимально

возможным ν такая, что любая линейная комбинация $x(t,c) = X_\nu(t)c$, где вектор c пробегает \mathbf{R}^ν , удовлетворяет тождеству $(\Lambda_1 + V)x(t,c) = 0$ и на T нет решений системы $(\Lambda_1 + V)x = 0$, отличных от $x(t,c)$. Ядро оператора $\Lambda_1 + V$ конечномерно $\dim \ker (\Lambda_1 + V) < \infty$, если ПР системы $(\Lambda_1 + V)x = 0$ конечномерно. Число ν будем называть размерностью ПР или размерностью ядра.

Пример 1.1.1. Рассмотрим одно уравнение

$$\Lambda_1 x := t\dot{x} - 2x = 0, \quad t \in T = [-1,1],$$

где

$$x(t,c) = h_1(t)c_1 + h_2(t)c_2 \in \mathbf{C}^1(T), \quad h_1(t) = \{0, t \in T_1; t^2, t \in T_2\},$$

$$h_2(t) = \{t^2, t \in T_1; 0, t \in T_2\}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}, T_1 = [-1,0], T_2 = (0,1].$$

Чтобы выделить одно решение из семейства $x(t,c)$, надо определить две константы c_1, c_2 . Таким образом, здесь $\dim \ker \Lambda_1 = 2$. Более того, можно строить одномерные уравнения $\zeta(t)\dot{x} - x = 0, t \in T$, где $\zeta(t)$ – аналитическая функция с нулями на T с наперед заданной размерностью ПР в нашем смысле.

Пример 1.1.2. Пусть задана система

$$(\Lambda_1 + V)x = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x = 0, \quad t \in [0,1], \quad (1.4)$$

где γ – вещественный параметр, $(x_1 \ x_2)^\top = x$.

Здесь из второго уравнения следует, что $x_2 = -tx_1$. Тогда из первого уравнения следует, что $(\gamma - 1)x_1 = 0 \Leftrightarrow \dim \ker \Lambda_1 = 0$ при $\gamma \neq 1$, включая значение $\gamma = 0$. При $\gamma = 1$ подстановкой проверяется, что любая вектор-функция вида $(-u(t) \ tu(t))^\top$, где $u(t)$ – произвольная функция из $\mathbf{C}^1[0,1]$ является решением системы, а вектор-функции $\phi_j = (-t^j \ t^{j+1})^\top, j = 0,1, \dots$, образуют базис в пространстве решений $\dim \ker(\Lambda_1 + V) = \infty$.

Определение 1.1.9. [97] Если существует оператор

$$\Lambda_l = \sum_{j=0}^l L_j(t)(d/dt)^j,$$

где $L_j(t)$ – $(m \times m)$ -матрицы из $\mathbf{C}(T)$ со свойством

$$\Lambda_l \circ (\Lambda_1 + V)x = \tilde{A}(t)\dot{x} + \tilde{B}(t)x + \int_{\alpha}^t \tilde{K}(t,s)x(s)ds \quad \forall x \in \mathbf{C}^{l+1}(T),$$

где $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t)$, $\tilde{K}(t,s)$ – $(m \times n)$ -матрицы, непрерывные в своих областях определения, $\text{rank } \tilde{A}(t) = \min\{m, n\} \quad \forall t \in T$, то будем говорить, что для системы $(\Lambda_1 + V)x = f$ определен *левый регуляризирующий оператор* (ЛРО). Минимально возможное число l называется *индексом* системы $(\Lambda_1 + V)x = f$.

Пример 1.1.3. Рассмотрим вырожденную систему ИДУ

$$(\Lambda_1 + V)x := \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x(s)ds = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0,1].$$

Эта система имеет индекс 1, так как существует дифференциальный оператор первого порядка $\tilde{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (d/dt)$, что

$$\tilde{\Lambda}_1 \circ (\Lambda_1 + V)x = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix} x.$$

Здесь $\det \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$, $\text{rank} \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \forall t \in T$.

Пример 1.1.4. Рассмотрим вырожденную систему ИДУ

$$(\Lambda_1 + V)x := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(s)ds = f(t).$$

Эта система имеет индекс 2, так как существует дифференциальный оператор второго порядка $\tilde{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (d/dt) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (d^2/dt^2)$, что

$$\tilde{\Lambda}_2 \circ (\Lambda_1 + V)x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Здесь $\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \quad \forall t \in (-\infty, +\infty)$.

Пример 1.1.5. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g(t)s & g(t) \end{pmatrix} x(s) ds = 0, \quad t \in [0,1].$$

Если $\gamma \neq 1$, система имеет индекс 2, так как в определении 1.1.9 можно принять

$$\Lambda_l = \mathbf{d}L\mathbf{d}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d/dt) \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\det \tilde{A}(t) = 1 - \gamma$, $l = 2$.

Если $\gamma = 1$, $g(t) = e^t$, то индекс $l = 4$ и можно принять $\Lambda_l = \mathbf{d}L\mathbf{d}L\mathbf{d}L\mathbf{d}$.

Очевидно, что для замкнутых систем достаточным условием конечномерности ПР является условие $l = n$.

Понятие ЛРО тесно связано с понятием i -продолженной системы.

Определение 1.1.10. [97, с. 81] Совокупность системы

$$(\Lambda_1 + V)x = f \tag{1.5}$$

и ее i производных будем называть i -продолженной системой (1.5).

Лемма 1.1.7. [97, с. 31] Пусть матрицы $A(t)$, $B(t) \in \mathbf{C}^p(T)$ имеют размерность $(m \times n)$ и $(n \times \nu)$, соответственно. Тогда справедливо равенство

$$d_i[AB](t) = \mathcal{M}_i[A(t)]d_i[B(t)], \quad t \in T, \quad 0 \leq i \leq p, \tag{1.6}$$

где $d_i[M(t)] = (M^\top(t) \quad (d/dt)M^\top(t) \quad \dots \quad (d/dt)^i M^\top(t))^\top$,

$$\mathcal{M}_i[M(t)] = \begin{pmatrix} C_0^0 M(t) & 0 & \dots & 0 \\ C_1^0 M^{(1)}(t) & C_1^1 M(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_i^0 M^{(i)}(t) & C_i^1 M^{(i-1)}(t) & \dots & C_i^i M(t) \end{pmatrix}, \quad M(t) \in \mathbf{C}^p(T).$$

Замечание 1.1.1. Равенство (1.6) вытекает из формулы Лейбница (см., например [28]) для дифференцирования произведений

$$[A(t)B(t)]^{(i)} = \sum_{j=0}^i C_i^j A^{(i-j)}(t)B^{(j)}(t),$$

где $C_i^j = i!/(i-j)!j!$ – биномиальные коэффициенты.

Выражение

$$d_i[(\Lambda_1 + V)x] = d_i[f] \quad (1.7)$$

является i -продолженной системой $(\Lambda_1 + V)x = f$.

С использованием формулы (1.6) систему (1.7) можно записать в виде соотношения

$$D_i[A, B, K](t)d_{i+1}[x] + \int_{\alpha}^t d_i[K(t, s)]x(s)ds = d_i[f],$$

где

$$D_i[A, B, K](t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}_i[A(t)] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{M}_i[B(t)] & 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^i \mathcal{M}_i[\bar{K}_j(t)]\mathcal{E}_j,$$

нулевые блоки имеют размерность $(m(i+1) \times n)$, $\bar{K}_j(t) = \partial K^j(t, s)/\partial t^j|_{t=s}$,

$\mathcal{E}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{n(i+1-j)} & 0 \end{pmatrix}$ – $(m_i \times n_i)$ -матрицы, $m_i = m(i+1)$, $n_i = n(i+2)$. Ниже мы будем использовать разбиение $D_i[A, B, K](t) = \begin{pmatrix} \tilde{B}_i & \Gamma_i[A, B, K](t) \end{pmatrix}$, где

$\Gamma_i[A, B, K](t)$ – блочно-треугольная квадратная матрица с блоками $A(t)$ на диагонали, \tilde{B}_i – некоторый блок подходящей размерности. Для примера

$$D_1[A, B, K] = \begin{pmatrix} B & A & 0 \\ \dot{B} + K(t, t) & B + \dot{A} & A \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1[A, B, K] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B + \dot{A} & A \end{pmatrix}.$$

1.2 Линейные системы ИДУ

В данном параграфе рассматриваются условия разрешимости и структуры общих решений систем вида

$$(\Lambda_1 + V)x := A(t)\dot{x} + B(t)x + \int_{\alpha}^t K(t, s)x(s)ds = f, \quad t \in T = [\alpha, \beta], \quad (1.8)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $K(t, s)$ – $(m \times n)$ -матрицы, $x \equiv x(t)$ – искомая, $f \equiv f(t)$ – заданная вектор-функция. Предполагается, что входные данные достаточно гладкие и

характер вырождения задается условием

$$\text{rank } A(t) < \min\{m, n\} \quad \forall t \in T.$$

Частный случай таких систем $\Lambda_1 x = f, t \in T$, называемых дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ), исследуется уже около 40 лет. Данная тематика является относительно новой. В фундаментальной монографии [2] изучены только частные случаи полуявных систем, когда $A(t) = \text{diag}\{E_r, 0\}$. Некоторые классы уравнений в банаховых пространствах с ядром типа свертки изучались в работах [6; 89]. При переходе к конечномерным пространствам операторы, задающие уравнения, являются постоянными матрицами.

Нашей задачей является получение условий разрешимости систем вида (1.8) и выяснение структуры общих решений таких систем. Сначала изучим структуры общих решений систем вида (1.8) в случае $A(t) \in \mathbf{C}^q(T)$, $q = 0, 1, 2, \dots$, и $\text{rank } A(t) = \min\{m, n\} \quad \forall t \in T$. Тогда согласно лемме 1.1.1, для матрицы $A(t)$ существуют матрицы $A^-(t) \in \mathbf{C}^q(T)$, в частности, $A^+(t) \in \mathbf{C}^q(T)$. Можно переписать систему (1.8) в виде

$$A(t)\dot{x} = -B(t)x - \int_{\alpha}^t K(t,s)x(s)ds + f.$$

Тогда, используя свойства полуобратных матриц из леммы 1.1.2 перепишем систему (1.8) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -A^+(t)B(t)x - A^+(t) \int_{\alpha}^t K(t,s)x(s)ds + A^+(t)f(t) + [E_n - A^+(t)A(t)]u(t), \\ [E_m - A(t)A^+(t)][-B(t)x - \int_{\alpha}^t K(t,s)x(s)ds + f(t)] &= 0, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $u(t)$ – произвольная вектор-функция. Второе равенство (1.9) является условием совместности.

Пусть система (1.8) совместна. Согласно [42], что для уравнения вида

$$x(t) = g(t) + \int_{\alpha}^t K(t,s)x(s)ds,$$

можно представить решение в виде

$$x(t) = g(t) + \int_{\alpha}^t \tilde{K}(t,s)g(s)ds,$$

где $\tilde{K}(t,s)$ – некоторая матрица подходящей размерности. Тогда из леммы 1.1.6 и согласно принципам произведения операторов, через несложные выкладки можно записать

$$x(t,c) = Z(t)c + \varphi(t), \quad t \in T, \quad (1.10)$$

где

$$Z(t) = X(t) + \int_{\alpha}^t \mathbf{K}(t,s)X(s)ds, \quad \varphi(t) = \phi(t) + \int_{\alpha}^t \mathbf{K}(t,s)\phi(s)ds,$$

$$\phi(t) = \int_{\alpha}^t X(t)X^{-1}(s) [A^+(s)f(s) + [E_n - A^+(s)A(s)]u(s)] ds,$$

$X(t)$ – матрицант системы $\dot{x} = -A^+(t)B(t)x$, c – произвольный вектор, $\mathbf{K}(t,s)$ – ядро произведения $-A^+(t)V$ и оператора Вольтерра с ядром $X(t)X^{-1}(s)$. Если $A(t), B(t), f(t), u(t) \in \mathbf{C}^l(T)$, то $A^+(t) \in \mathbf{C}^l(T)$ и $x(t,c) \in \mathbf{C}^l(T)$.

Рассмотрим случай, когда $m \leq n$. Тогда в (1.9) имеем $E_m - A(t)A^+(t) = 0 \forall t \in T$, система (1.8) совместна.

Рассмотрим теперь случай $m > n$. Здесь $E_n - A^+(t)A(t) = 0$. Тогда для существования решений системы (1.8) необходимо условие того, что решение $x(t,c)$ из равенства (1.10) удовлетворяет условию (1.9). Это соответствует существованию постоянных решений системы

$$\mathcal{L}(t)c = \psi(t), \quad (1.11)$$

где

$$\mathcal{L}(t) = - [E_m - A(t)A^+(t)] \left[B(t)Z(t) + \int_{\alpha}^t K(t,s)Z(s)ds \right],$$

$$\psi(t) = [E_m - A(t)A^+(t)] \left[B(t)\varphi(t) + \int_{\alpha}^t K(t,s)\varphi(s)ds - f(t) \right].$$

Из леммы 1.1.3 известно, что система (1.11) имеет постоянные решения c тогда и только тогда, когда

$$\psi(t) = \mathcal{L}(t)\mathcal{C}^{-1}c,$$

где \mathcal{C}^{-1} – полуобратная матрица к матрице \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{L}^{\top}(s)\mathcal{L}(s)ds, \quad \theta = \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{L}^{\top}(s)\psi(s)ds, \quad c = \mathcal{C}^{-1}\theta + [E_n - \mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}]w,$$

w – произвольный вектор из \mathbf{R}^n . Тогда множество решений системы (1.8) имеет вид

$$x(t,w) = Z(t)(\mathcal{C}^{-1}\theta + [E_n - \mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}]w) + \varphi(t).$$

Далее, приведем теоремы о разрешимости систем ИДУ вида (1.8).

Теорема 1.2.1. Пусть для системы (1.8), у которой $m \leq n$, выполнены условия:

- 1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^A(T), K(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$;
- 2) существует ЛРО, и индекс оператора $\Lambda_1 + V$ равен $l < \infty$;
- 3) $f \in \mathbf{C}^{l+1}(T)$;
- 4) $\text{rank } \Upsilon_{l-1} = \text{rank} \left(\Upsilon_{l-1} \quad d_{l-1}[f](\alpha) \right), \quad \Upsilon_{l-1} = D_{l-1}[A,B,K](\alpha)$.

Тогда найдутся $(n \times \rho)$ -матрица $X_{\rho}(t) \in \mathbf{C}^1(T), \text{rank } X_{\rho}(\alpha) = \rho$ и $(n \times m)$ -матрицы $K_0(t,s), K_1(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T), \tilde{C}_0(t), C_j(t) \in \mathbf{C}^A(T), j = 0,1,\dots,l$, такие, что любая линейная комбинация

$$x(t,c) = X_{\rho}(t)c + \psi(t), \quad t \in T,$$

$$\psi(t) = \int_{\alpha}^t K_0(t,s)f(s)ds + \sum_{j=0}^l C_j(t)(d/dt)^j f(t) + \tilde{C}_0(t)w(t) + \int_{\alpha}^t K_1(t,s)w(s)ds,$$

где c – произвольный вектор из \mathbf{R}^p , $w(t)$ – произвольная гладкая вектор-функция, является решением системы (1.8), и на отрезке T нет других решений.

Доказательство. Первое и третье условия теоремы гарантируют, что входные матрицы достаточно гладкие. В втором условии теоремы справедлива альтернатива

$$\text{rank } A = m \quad \forall t \in T \quad \text{либо} \quad \text{rank } A < m \quad \forall t \in T.$$

Действительно, по определению 1.1.9 следует

$$\Lambda_l \circ (\Lambda_1 + V)x = L_l A x^{(l+1)} + \dots = \tilde{A} \dot{x} + \dots$$

Если $l = 0$, то $L_l A = \tilde{A} \quad \forall t \in T$. Если $l > 0$, то $L_l A \equiv 0 \quad \forall t \in T$. Пусть R – $(n \times n)$ – матрица из леммы 1.1.5, применительно к $(n \times n)$ – матрице $(A \ 0)^\top$ обладает свойством $AR = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где блок A_{11} имеет размерность $(m \times m)$. Если $\det A_{11}(\gamma) \neq 0$, $\gamma \in T$, то существует окрестность $\mathcal{O} = (\gamma - \delta, \gamma + \delta) \subset T$: $\det A_{11}(t) \neq 0$, $t \in \mathcal{O}$ (или полуинтервалы $[\alpha, \alpha + \delta)$, $(\beta - \delta, \beta]$), и невозможно равенство $L_l A \equiv 0 \quad \forall t \in \mathcal{O}$ при любой матрице L_l .

Выпишем с использованием следствия 1.1.2 нужные в последующем равенства

$$LAR = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad LA = \begin{pmatrix} A_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in T, \quad L, R \in \mathbf{C}^A(T), \quad (1.12)$$

где A_{11} – $(r \times r)$ -блок, $\det A_{11}(t) \neq 0$ на T , $r = \max\{\text{rank } A(t), t \in T\}$.

Далее, из формулы (1.6) следует

$$M\Gamma_l[A, B, K] = \Gamma_l[LA, LB, LK], \quad Md_l[K] = d_l[LK], \quad Md_l[f] = d_l[Lf], \quad (1.13)$$

где $M = \mathcal{M}_l[L]$. Первое из равенств (1.13) позволяет выписать соотношение

$$P\Gamma_l[A, B, K] = P(SM)^{-1}(SM)\Gamma_l[A, B, K] = U\Gamma_l^1[A, B, K],$$

где $P = \begin{pmatrix} L_0 & L_1 & \dots & L_l \end{pmatrix}$ – матрица из коэффициентов ЛРО, S – матрица перестановок блочных строк по правилу: на место второй-четвертую, четвертой-шестую и так далее. Вторую строку поставим последней. В результате этих

преобразований получим новую матрицу

$$\Gamma_l^1[A, B, K] = \begin{pmatrix} \Gamma_{l-1}[A_1, B_1, K_1] & 0 \\ W^0 & A_1^0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in T, \quad (1.14)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_1^0 \\ B_2^0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} B_1^0 \\ B_2^0 + K_2^0(t, t) \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} K_1^0(t, s) \\ \partial K_2^0(t, s) / \partial t \end{pmatrix},$$

$$LB = \begin{pmatrix} B_1^0 \\ B_2^0 \end{pmatrix}, \quad LK = \begin{pmatrix} K_1^0 \\ K_2^0 \end{pmatrix},$$

где W^0 – некоторый блок подходящей размерности. Число нулевых строк в матрице из (1.14) равно r .

По матрицам A_1, B_1, K_1 построим оператор

$$(\Lambda_{0,1} + V_1)x = [\Omega_0 \circ (\Lambda_1 + V)]x = A_1 \dot{x} + B_1 x + \int_{\alpha}^t K_1(t, s)x(s)ds, \quad t \in T, \quad (1.15)$$

который можно получить действием на исходную систему оператором

$$\Omega_0 = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ L_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_1^0 \\ L_2^0 \end{pmatrix} = L,$$

где число строк в блоке L_1^0 равно r .

Введем обозначение $U = P(SM)^{-1} = \begin{pmatrix} U_0 & U_1 & \dots & U_l \end{pmatrix}$. По условию $P_l A \equiv 0$ на T и из равенств (1.12) следует, что

$$P_l L^{-1} L A = U_l \begin{pmatrix} A_1^0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$U_l \begin{pmatrix} A_1^0 \\ 0 \end{pmatrix} R = U_l \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (1.16)$$

Введем разбиение на блоки

$$U_l = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix},$$

где $V_{11} - (r \times r)$ -блок. Согласно равенствам (1.12) из равенства (1.16) получаем $V_{11}A_{11} \equiv 0$, $V_{21}A_{11} \equiv 0$, где $\det A_{11} \neq 0$, $t \in T$. Таким образом, с учетом аналитичности сомножителей видим, что $V_{11} \equiv 0$, $V_{21} \equiv 0$. Отсюда имеем равенство

$$\begin{pmatrix} U_0 & U_1 & \cdots & U_{l-1} \end{pmatrix} \Gamma_{l-1}[A_1, B_1, K_1] = \begin{pmatrix} A_l & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Следовательно, оператор $\sum_{j=0}^{l-1} U_j (d/dt)^j$ является ЛРО для оператора (1.15).

Матрицу Υ_{l-1} и вектор $\mathbf{d}_{l-1}[f](\alpha)$ умножим на матрицу $\mathcal{M}_{l-1}[L](\alpha)$ и переставим блочные строки. Таким образом, мы выделим из условия 4 теоремы новые условия разрешимости

$$\text{rank } \Upsilon_{l-2}^1 = \text{rank} \begin{pmatrix} \Upsilon_{l-2}^1 & \mathbf{d}_{l-2}[f_1](\alpha) \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

где $\Upsilon_{l-2}^1 = D_{l-2}[A_1, B_1, K_1](\alpha)$, $f_1 = \Omega_0 f$.

Для матрицы A_1 из формулы (1.15) в силу существования ЛРО с коэффициентами из формулы (1.17) справедлива альтернатива $\text{rank } A_1 = m \forall t \in T$ либо $\text{rank } A_1 < m \forall t \in T$.

Проводя аналогичные рассуждения, получим систему интегральных уравнений, определяемую матрицами A_2 , B_2 , K_2 , и новые условия совместности. В силу условия 2) теоремы мы за конечное число шагов получим систему с матрицей A_l полного ранга для всех $t \in T$, для которой можно выписать общее решение по формуле (1.10).

Рассмотрим системы на шагах процесса понижения индекса с номерами l и $l-1$,

$$[\Lambda_{0,l} + V_l]x = f_l, \quad [\Lambda_{0,l-1} + V_{l-1}]x = f_{l-1}, \quad (1.19)$$

где $f_i = \Omega_{l-1}\Omega_{l-2}\cdots\Omega_0 f$, $i = l-1, l$.

Пусть $x \equiv x(t)$ – решение первой из систем. Первые r_{l-1} уравнений у обеих систем совпадают, где $r_{l-1} = \max \{\text{rank } A_{l-1}(t), t \in T\}$. Условие (1.18) здесь имеет вид

$$\text{rank } A_{l-1}(\alpha) = \text{rank} \begin{pmatrix} A_{l-1}(\alpha) & B_{l-1}(\alpha) & f_{l-1}(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Напомним, что первая из систем (1.19) получена умножением второй системы на оператор Ω_{l-1} . При этом система умножается на неособенную матрицу L_{l-1} из следствия 1.1.2 и последние $n - r_{l-1}$ уравнений дифференцируются. Проинтегрируем последние $n - r_{l-1}$ уравнений системы (1.19), которые имеют вид

$$(d/dt) \left[B_{l-1,2} + \int_{\alpha}^t K_{l-1,2}(t,s)x(s)ds - f_{l-1,2} \right] = 0,$$

получим выражение стоящее в квадратных скобках и в силу равенства (1.20) это выражение в точке α равно нулю. Итак, вектор-функция $x(t)$ является решением второй системы (1.19). Продолжая этот процесс, убеждаемся в справедливости утверждения. \square

Замечание 1.2.1. В случае замкнутой системы (1.8) произвольные функции в решении отсутствуют. Общее решение имеет вид

$$x(t,c) = X_d(t)c + \int_{\alpha}^t K_0(t,s)f(s)ds + \sum_{j=0}^l C_j(t)(d/dt)^j f(t), \quad t \in T.$$

Лемма 1.2.1. Если в условии 4 теоремы 1.2.1 ранг матрицы Υ_{l-1} полный, система (1.8) разрешима при любой вектор-функции $f \in C^l(T)$.

Доказательство. Доказательство вытекает из того факта, что в этом случае гарантирована разрешимость алгебраической системы $\Upsilon_{l-1}z = d_{l-1}[f](\alpha)$ при любой правой части $d_{l-1}[f](\alpha)$. Условие теоремы 1.2.1 под номером 4 автоматически выполняется. \square

Для иллюстрации теоремы приведем следующий пример.

Пример 1.2.1. Рассмотрим недоопределенную систему

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 & t \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \int_{\alpha}^t \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

где γ – вещественный параметр, $t \in T = [\alpha, \beta]$. Здесь система разрешима при любом $\gamma \neq 1$:

$$x_1(t) = \frac{\varphi(t)}{\gamma - 1}, \quad x_2 = -t \frac{\varphi(t)}{\gamma - 1} + f_2(t), \quad x_3 = u(t),$$

где $u(t)$ – произвольная функция из $C^1(T)$, $\varphi(t) = f_1(t) - \dot{f}_2(t) - tu(t) - \int_{\alpha}^t f_2(s) ds$.

При $\gamma \neq 1$ индекс системы равен 2, так как в определении 1.1.9 можно принять

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (d/dt) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (d^2/dt^2), \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 - \gamma & 0 & -t \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы Υ_1 полный для всех $t \in T$ при $\gamma \neq 1$, поэтому автоматически выполнено условие 4 теоремы 1.2.1. Здесь можно указать структуру решения

$$X_d(t) = 0, \quad C_0(t) = \begin{pmatrix} 1/(\gamma - 1) & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1/(1 - \gamma) \\ 1/(\gamma - 1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2(t) = 0, \quad \tilde{C}_0(t) = \begin{pmatrix} -t/(\gamma - 1) \\ t^2/(\gamma - 1) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_0(t, s) = \begin{pmatrix} 0 & 1/(\gamma - 1) \\ 0 & t/(\gamma - 1) \end{pmatrix}, \quad K_1(t, s) = 0.$$

Если $\gamma = 1$, то индекс системы (1.21) не определен, и можно записать

$$x_1(t) = w(t), \quad x_2(t) = -tw(t) + f_2(t), \quad tx_3(t) = f_1(t) - \dot{f}_2(t) - \int_{\alpha}^t f_2(s) ds,$$

где $w(t)$ – произвольная функция из $C^1(T)$. Условие совместности системы в этом случае в отличие от условия 4 теоремы 1.2.1 имеет вид: $0 \notin T$.

Замечание 1.2.2. В качестве ЛРО в условиях теоремы можно принять произведение операторов

$$\Lambda_l = \prod_{j=0}^{l-1} \Omega_j = \prod_{j=0}^{l-1} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ L_{2,j}^0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} L_{1,j}^0 \\ L_{2,j}^0 \end{pmatrix} \right] x, \quad \begin{pmatrix} L_{1,j}^0 \\ L_{2,j}^0 \end{pmatrix} = L_j^0.$$

Сложность задачи существенно возрастает, если входные данные не являются аналитическими. Применение леммы 1.1.5 невозможно, так как для глад-

ких матриц $A(t)$ в случае переменного ранга она не верна. Например, для матрицы из [1] вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & v(t) \\ w(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad v(t), w(t) \in \mathbf{C}^\infty(T), \quad v(t)w(t) = 0,$$

не существует неособенной матрицы $L(t) \in \mathbf{C}(T)$ такой, что

$$L(t)A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нужно менять всю технику доказательства. И в настоящее время непонятно как.

При исследовании вырожденных систем полезны теоремы о частных случаях системы (1.8).

Теорема 1.2.2. [18] Пусть в замкнутой системе (1.8)

1) $A(t), B(t), f(t) \in \mathbf{C}^1(T), K(t,s) \in \mathbf{C}^1(T \times T);$

2) характеристический многочлен имеет вид

$$\det[\lambda A(t) + B(t)] = a_r(t)\lambda^r + \dots, \quad a_r(t) \neq 0 \quad \forall t \in T, \quad (1.22)$$

где $r = \max\{\text{rank } A(t), t \in T\}$.

Тогда система (1.8) разрешима при любой $f(t)$ и ее общее решение имеет вид

$$x(t,c) = X_r(t)c + C_0(t)f(t) + \int_{\alpha}^t K_0(t,s)f(s)ds, \quad t \in T.$$

Более, того замкнутая система (1.8) с конечномерным ПР имеет индекс $l = 1$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.22).

Лемма 1.2.2. [93] Если входные данные системы (1.8) удовлетворяют условиям теоремы 1.2.2, то любая система $(\Lambda_1 + V + V_1)x = f$, где V_1 – произвольный оператор Вольтерра с гладким ядром, разрешима и структура общего решения не меняется.

Теорема 1.2.3. [91] Пусть в замкнутой системе (1.8)

1) $A(t), B(t), f(t) \in \mathbf{C}^2(T), K(t,s) \in \mathbf{C}^2(T \times T)$;

2) многочлен $\det[\lambda A(t) + \mu B(t) + K(t,t)] = b_0(t)\lambda^r \mu^k + \dots$, $b_0(t) \neq 0 \forall t \in T$,
 где $r = \max\{\text{rank } A(t), t \in T\}$, $r + k = \max\{\text{rank}(A(t)|B(t)), t \in T\}$;

3) $\text{rank}(A(\alpha)|B(\alpha)) = \text{rank}(A(\alpha)|B(\alpha)|f(\alpha))$.

Тогда система (1.8) разрешима и ее общее решение имеет вид

$$x(t,c) = X_r(t)c + C_0(t)f(t) + C_1(t)\dot{f}(t) + \int_{\alpha}^t K_0(t,s)f(s)ds, \quad t \in T.$$

1.3 Краевые задачи для систем ИДУ индекса 1

В данном параграфе рассматриваются краевые задачи

$$(\Lambda_1 + V)x := A(t)\dot{x} + B(t)x + \int_{\alpha}^t K(t,s)x(s)ds = f, \quad t \in T = [\alpha, \beta], \quad (1.23)$$

$$Cx(\alpha) + Dx(\beta) = a, \quad (1.24)$$

где $A(t), B(t), K(t,s)$ – $(m \times n)$ -матрицы, $x \equiv x(t)$ – искомая, $f \equiv f(t)$ – заданная вектор-функция, C, D – $(\mu \times n)$ -матрицы, a – заданный вектор. Предполагается, что входные данные достаточно гладкие, и выполнено условие

$$\text{rank } A(t) < \min\{m, n\} \quad \forall t \in T.$$

Свойства систем (1.23), имеющих индекс 1, определяются следующим утверждением.

Теорема 1.3.1. Пусть для системы (1.23) выполнены условия

1) $A(t), B(t), f(t) \in \mathbf{C}^1(T), K(t,s) \in \mathbf{C}^1(T \times T)$;

2) пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ имеет индекс один на отрезке T .

Тогда:

1) система (1.23) имеет индекс один;

2) существуют квадратные матрицы $P(t), Q(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ подходящей размерности со свойствами $\det P(t) \neq 0, \det Q(t) \neq 0 \forall t \in T$ такие, что

система

$$\mathcal{P}(t)(\Lambda_1 + V)\mathcal{Q}(t)u = \mathcal{P}(t)f$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 & B_{13} \\ 0 & E_{m-r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \\ = \mathcal{P}(t)f = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix}, \quad m < n, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathcal{P}(t)f = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

где $m = n$, $J(t)$ – некоторый $(r \times r)$ -блок,

$$V_{ij}z = \int_{\alpha}^t K_{ij}(t,s)z(s)ds,$$

$K_{ij}(t,s)$ – блоки подходящей размерности произведения $\mathcal{P}(t)K(t,s)\mathcal{Q}(t)$, u_j – компоненты вектор-функции u , соответствующие блочной структуре матриц коэффициентов.

Более того, если $m > n$, $\text{rank}(A(t)|B(t)) = n \forall t \in T$, то существуют квадратные матрицы $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ подходящей размерности со свойствами $\det \mathcal{P}(t) \neq 0$, $\det \mathcal{Q}(t) \neq 0 \forall t \in T$ такие, что система

$$\mathcal{P}(t)(\Lambda_1 + V)\mathcal{Q}(t)u = \mathcal{P}(t)f$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \\ V_{31} & V_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathcal{P}(t)f = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Доказательство. В качестве ЛРО можно принять оператор

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (d/dt)P_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} = P(t), \quad (1.28)$$

где $P(t)$ – матрица из определения 1.1.5.

Далее, умножим систему (1.23) на матрицу $P(t)$ и произведем замену $x(t) = Q(t)y(t)$, где $P(t)$, $Q(t)$ – матрицы из леммы 1.1.4. Для определенности будем считать, что $m < n$. Получим

$$\begin{aligned} P(t)(\Lambda_1 + V)Q(t)y &= \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P(t)f = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

Блочная структура в равенстве (1.29) выписана с учетом разбиения на блоки произведения $P(t)A(t)Q(t)$, $y = (y_1 \ y_2)^\top$, $W_{ij}z = \int_\alpha^t \tilde{K}_{ij}(t,s)z(s)ds$, $\tilde{K}_{ij}(t,s)$ – блоки подходящей размерности произведения $P(t)K(t,s)Q(t)$. В силу условия 2 теоремы $\text{rank} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \min\{m, n\} \ \forall t \in T$. В силу этого $\text{rank} B_{22} = m - r \ \forall t \in T$.

Согласно следствию 1.1.1 найдется невырожденная матрица \tilde{Q} со свойством $B_{22}\tilde{Q} = \begin{pmatrix} E_{m-r} & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$. После замены переменных $y = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix} v$ система (1.29) преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & \tilde{B}_{12} & \tilde{B}_{13} \\ B_{21} & E_{m-r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & \tilde{V}_{12} & \tilde{V}_{13} \\ W_{21} & \tilde{V}_{22} & \tilde{V}_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

где $y_1 = v_1$, $y_2 = \tilde{Q} \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Умножая систему (1.30) на матрицу $\begin{pmatrix} E_r & -\tilde{B}_{13} \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix}$ и производя замену $u_3 =$

$v_3, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -B_{21} & E_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, мы приведем систему (1.30) к виду (1.25), где $J(t) = B_{11} - \tilde{B}_{12}B_{21}$, $B_{13} = \tilde{B}_{13}$.

Суперпозиции этих действий дадут нам матрицы $P(t)$, $Q(t)$. Существование форм (1.26), (1.27) доказывается аналогично. \square

Следствие 1.3.1. Пусть выполнены условия теоремы 1.3.1 и $m \leq n$. Тогда системы (1.23) разрешимы при любой вектор-функции $f(t)$ и их общее решение имеет вид

$$x(t,c) = X_r(t)c + \zeta(t), \quad m < n, \quad (1.31)$$

$$\zeta(t) = \int_{\alpha}^t \tilde{K}(t,s)f(s)ds + C_0(t)f(t) + \int_{\alpha}^t \tilde{K}(t,s)w(s)ds + \bar{C}_0(t)w(t),$$

$$x(t,c) = \bar{X}_r(t)c + \bar{\zeta}(t), \quad m = n, \quad (1.32)$$

$$\bar{\zeta}(t) = \int_{\alpha}^t \bar{K}(t,s)f(s)ds + \bar{C}_0(t)f(t),$$

где $X_r(t)$, $\bar{X}_r(t)$ – $(n \times r)$ -матрицы, $\tilde{K}(t,s)$, $C_0(t)$, $\bar{K}(t,s)$, $\bar{C}_0(t)$ – $(n \times n)$ -матрицы, гладкие в областях определения, $w(t)$ – произвольная гладкая вектор-функция, c – вектор произвольных постоянных, и других решений на T нет.

Доказательство. Рассмотрим случай замкнутой системы. Из второго блочного уравнения (1.26) получим

$$u_2 = (E_{n-r} + V_{22})^{-1}[-V_{21}u_1 + \tilde{f}_2]. \quad (1.33)$$

Подставим u_2 из (1.33) в первое уравнение. В результате получим:

$$\dot{u}_1 + Ju_1 + \tilde{V}u_1 = F, \quad (1.34)$$

где \tilde{V} – оператор Вольтерра с некоторым ядром $\tilde{K}(t,s)$, F – некоторое алгебраическое выражение относительно $\tilde{f}_1(t)$, $\tilde{f}_2(t)$ и соответствующих операторов Вольтерра, действующих на перечисленные функции. Здесь учтено, что произведение операторов Вольтерра является оператором Вольтерра и $(E_{n-r} - V_{22})^{-1} = E_{n-r} + \tilde{V}_{22}$, где \tilde{V}_{22} – некоторый оператор Вольтерра.

Далее, разрешив (1.34) как обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\dot{u}_1 = -Ju_1 + \Psi, \quad \Psi = F - \tilde{V}u_1,$$

получим интегральное уравнение Вольтерра

$$u_1 = U(t)c - Wu_1 + \tilde{\Psi},$$

где $U(t)$ – матрицант системы $\dot{u}_1 = -Ju_1$, $W = \tilde{W}\tilde{V}$, c – вектор произвольных постоянных,

$$\tilde{W}g = \int_{\alpha}^t U(t)U^{-1}(s)g(s)ds, \quad \tilde{\Psi} = \tilde{W}F, \quad u_1 = (E_r + W)^{-1}[U(t)c + \tilde{\Psi}]. \quad (1.35)$$

Подставляя u_1 в (1.33), найдем выражение для u_2 и после умножения на $Q(t)$ получим вид общего решения системы (1.32). Полагая в (1.25) компоненту u_3 произвольной функцией и повторяя вышеприведенные выкладки, получим (1.31).

В случае *переопределенной* системы для первых двух блочных уравнений из (1.27) мы можем повторить рассуждения из следствия и получим формулу (1.32). Из формулы (1.27) мы видим, что вектор произвольных постоянных должен удовлетворять еще такому уравнению

$$\mathcal{L}(t)c = \psi(t), \quad (1.36)$$

где

$$\mathcal{L}(t) = (V_{31} \ V_{32}) \begin{pmatrix} (E_r + W)^{-1}U(t) \\ -(E_{n-r} + V_{22})^{-1}V_{21}(E_r + W)^{-1}U(t) \end{pmatrix},$$

$$\psi(t) = -(V_{31} \ V_{32}) \begin{pmatrix} (E_r + W)^{-1}\tilde{\Psi} \\ -(E_{n-r} + V_{22})^{-1}V_{21}(E_r + W)^{-1}\tilde{\Psi} \end{pmatrix},$$

где обозначения в формуле (1.36) соответствуют обозначениям из формул (1.25) – (1.35). Согласно с леммой 1.1.3, что система (1.36) разрешима относительно c тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\psi(t) = \mathcal{L}(t)\mathcal{C}^{-1}\theta, \quad (1.37)$$

где \mathcal{C}^- – полуобратная матрица \mathcal{C} : $\mathcal{C}\mathcal{C}^-\mathcal{C} = \mathcal{C}$,

$$\mathcal{C} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{L}^{\top}(s)\mathcal{L}(s)ds, \quad \theta = \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{L}^{\top}(s)\psi(s)ds.$$

Все решения описываются формулой

$$c = \mathcal{C}^-\theta + [E_r - \mathcal{C}^-\mathcal{C}]\bar{c}, \quad (1.38)$$

где \bar{c} – произвольный вектор \mathbf{R}^r .

При выполнении условия (1.37), а ему удовлетворяют все функции из образа оператора системы (1.23) $(\Lambda_1 + V)z$, $z \in \mathbf{C}^1(T)$, общее решение переопределенной системы имеет вид

$$x(t, \bar{c}) = X_d(t)\bar{c} + \tilde{\zeta}(t),$$

где

$$X_d(t) = Q \begin{pmatrix} (E_r + W)^{-1}U(t) \\ -(E_{n-r} + V_{22})^{-1}V_{21}(E_r + W)^{-1}U(t) \end{pmatrix} [E_n - \mathcal{C}^-\mathcal{C}],$$

$$\tilde{\zeta}(t) = X_d(t)\mathcal{C}^-\theta + \int_{\alpha}^t \mathbf{K}(t,s)f(s)ds + \mathbf{C}_0(t)f(t),$$

где $X_d(t)$ – $(n \times d)$ -матрицы, $d = \text{rank}[E_r - \mathcal{C}^-\mathcal{C}]$, $\mathbf{K}(t,s)$, $\mathbf{C}_0(t)$ – $(n \times m)$ -матрицы, гладкие в областях определения.

Из (1.38) следует, что размерность многообразия переопределенных систем не зависит в наших условиях от свободного члена $f(t)$. \square

Пример 1.3.1. Рассмотрим систему

$$(\Lambda_1 + V)x := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \int_{\alpha}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

где γ – вещественный параметр, $t \in T = [\alpha, \beta]$. Здесь система разрешима при любом $\gamma \neq 0$:

$$x_2(t) = \dot{f}_2(t)/\gamma, \quad x_1(t) = ce^{-t} + \int_{\alpha}^t e^{-t+s}\varphi(s)ds,$$

$$\varphi(t) = f_1(t) - \frac{t}{\gamma}(\dot{f}_2 + f_2) - \int_{\alpha}^t \frac{f_2(s)}{\gamma} ds.$$

При $\gamma \neq 0$ индекс системы равен 1, так как в определении 1.1.9 можно принять

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (d/dt), \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \det \tilde{A} = \gamma \forall t \in T.$$

Если $\gamma = 0$, то индекс системы (1.39) не определен, и можно записать

$$x_2(t) = u(t), \quad x_1(t) = ce^{-t} + \int_{\alpha}^t e^{-t+s} \varphi(s) ds,$$

$$\varphi(t) = f_1(t) - t(\dot{u}(t) + u(t)) - \int_{\alpha}^t u(s) ds.$$

где $u(t)$ – произвольная функция из C^1 , c – произвольный констант. Условие совместности системы в этом случае в отличие от условия 2 теоремы 1.3.1 имеет вид: $f_2(t) = 0 \forall t \in T$.

Следствие 1.3.2. *Если выполнены условия теоремы 1.3.1 и условие (1.38), то краевая задача (1.23), (1.24) разрешима тогда и только тогда, когда разрешимы относительно векторов c, \bar{c} системы алгебраических уравнений*

$$Z_1 c = a - C\zeta(\alpha) - D\zeta(\beta), \quad Z_1 = CX_r(\alpha) + DX_r(\beta), \quad m < n, \quad (1.40)$$

$$Z_2 c = a - C\bar{\zeta}(\alpha) - D\bar{\zeta}(\beta), \quad Z_2 = C\bar{X}_r(\alpha) + D\bar{X}_r(\beta), \quad m = n, \quad (1.41)$$

$$Z_3 \bar{c} = a - C\tilde{\zeta}(\alpha) - D\tilde{\zeta}(\beta), \quad Z_3 = CX_d(\alpha) + DX_d(\beta), \quad m > n. \quad (1.42)$$

Если решение c, \bar{c} системы единственно, то единственно решение задачи (1.23), (1.24).

Пусть имеет место не краевая, а начальная задача $x(\alpha) = a$. Здесь ($C = E_n, D = 0$). При $m \leq n$, условия (1.40) и (1.41) эквивалентны условию Кронекера-Капелли

$$\text{rank } A(\alpha) = \text{rank}(A(\alpha)| - B(\alpha)a + f(\alpha)).$$

Замечание 1.3.1. Случай $n < m$, $\text{rank}(A(t)|B(t)) > n \forall t \in T$, в работе не рассматривается.

Лемма 1.3.1. Пусть в системе (1.23) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $K(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$, где $\mathbf{C}^A(T)$, $\mathbf{C}^A(T \times T)$ – пространства вещественно-аналитических функций, и индекс системы равен k . Тогда существуют матрицы $P^i(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $i = 1, 2, \dots, k$, $\det P^i(t) \neq 0 \forall t \in T$, соответствующей размерности со свойствами: произведение операторов, построенных по формуле (1.28) является ЛРО. Иначе говоря, можно принять

$$\Lambda_k = \prod_{i=1}^k \Omega_i, \quad \Omega_i = \begin{pmatrix} P_1^i(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (d/dt)P_2^i(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_1^i(t) \\ P_2^i(t) \end{pmatrix} = P^i(t).$$

Для замкнутых систем доказательство приведено в [91]. Для незамкнутых систем алгоритм доказательства почти не меняется. Если для системы (1.23) определен ЛРО и $m \geq n$, то многообразие ее решений конечномерно. В обратном случае мы этого не можем гарантировать.

1.4 Квазилинейные системы ДАУ и ИДУ

В этом параграфе рассматриваются квазилинейные системы ИДУ вида

$$W(x) := \mathcal{S}(t)\dot{x} + \Gamma(x, \mathcal{W}x, t) = 0, \quad t \in T = [\alpha, \beta], \quad (1.43)$$

где $\mathcal{S}(t)$ – $(n \times n)$ -матрица, $\Gamma(x, w, t)$ – вектор-функции соответствующей размерности, $x \in \mathbf{R}^n$, $w \in \mathbf{R}^l$, $\mathcal{W}x = \int_{\alpha}^t \tilde{K}(t, \tau, x(\tau)) d\tau$ – оператор Вольтерра. Предполагается, что входные данные достаточно гладкие и выполнено условие

$$\det \mathcal{S}(t) \neq 0 \forall t \in T.$$

Определение 1.4.1. Будем говорить, что для системы (1.43) на решении $x^*(t)$ выполнен критерий «ранг-степень», если выполнено условие

$$\text{rank } \mathcal{S}(t) = \text{deg det} \left(\lambda \mathcal{S}(t) + U(x^*(t), \mathcal{W}x^*(t)) \right) = \text{const}, \quad U(x, w, t) = \frac{\partial \Gamma(x, w, t)}{\partial x}.$$

Теорема 1.4.1. Пусть для системы (1.43) выполнены условия

- 1) $\mathcal{S}(t) \in \mathbf{C}^2(T)$, $\Gamma(x, z, t) \in \mathbf{C}^2(\{x : \|a - x\|_{\mathbf{I}} \leq \rho_1\} \times \{z : \|z\|_{\mathbf{I}} \leq \rho_2\} \times T, \rho_1, \rho_2 > 0)$, $a \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{K}(t, \tau, x) \in \mathbf{C}^1(T \times T \times \{x : \|a - x\|_{\mathbf{I}} \leq \rho_1\})$;
- 2) $\text{rank } \mathcal{S}(t) = \text{const } \forall t \in [\alpha, \alpha + \rho_1]$;
- 3) $\text{rank } \mathcal{S}(\alpha) = \text{rank } \left(\mathcal{S}(\alpha) \quad \Gamma(a, 0, \alpha) \right)$;
- 4) многочлен $\lambda \mathcal{S}(\alpha) + \mathcal{D}(a, 0, \alpha)$, где $\mathcal{D}(x, z, t) = \partial \Gamma(x, z, t) / \partial x$, удовлетворяет критерию «ранг-степень»

$$\text{rank } \mathcal{S}(\alpha) = \text{deg det}[\lambda \mathcal{S}(\alpha) + \mathcal{D}(a, 0, \alpha)].$$

Тогда на некотором отрезке $[\alpha, \alpha + \epsilon]$, $\epsilon > 0$ определено решение $x(t) \in \mathbf{C}^1[\alpha, \alpha + \epsilon]$ системы (1.43) с начальным условием $x(\alpha) = a$.

Теорема является частным случаем утверждений, доказанных в работе [95]. При доказательстве существования решения требования на гладкость входных данных можно понизить на единицу.

Наряду системой (1.43) рассматривается ее частный случай

$$A\dot{x} + F(x, t, \nu) = 0, \quad t \in I_t = (-\infty, +\infty), \quad (1.44)$$

где A — $(n \times n)$ -матрица с постоянными элементами, $F(x, t, \nu)$ — n -мерная заданная вектор-функция, $x \equiv x(t)$ — искомая вектор-функция, $\nu \in \mathcal{N} = (-\nu_0, \nu_0)$ — числовой параметр. При этом для простоты предполагается, что $F(x, t, \nu) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times I_t \times \mathcal{N})$ и

$$\det A = 0. \quad (1.45)$$

Системы (1.44), удовлетворяющие условию (1.45), называются дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ).

Определение 1.4.2. [32] Пусть множество решений системы

$$\Lambda_1(x) := A\dot{x} + \Phi(x, t) = 0, \quad \Phi(x, t) = F(x, t, \nu_*), \quad t \in I_t = (-\infty, +\infty), \quad (1.46)$$

где $\Phi(x, t) \in \mathbf{C}_{x,t}^{(2,2)}(\mathbf{R}^n \times I_t)$, $\nu_* \in \mathcal{N} = (-\nu_0, \nu_0)$ — фиксированное значение параметра, непусто и аналогично [32] выполнены условия

1) все решения $x(t, t_0, x_0)$, где $x_0 \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \subseteq \mathbf{R}^n$ – некоторое многообразие, определены при $t_0 \leq t < \infty$;

2) существует единственное решение $\eta(t)$, $t \in I_t$ ограниченное на всей числовой оси $\sup \{\|\eta(t)\|_{\mathbf{I}}, t \in I_t\} = \mu < \infty$;

3) для любого решения $x(t, t_0, x_0)$ выполнены соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t, t_0, x_0) - \eta(t)] = 0.$$

Тогда будем говорить, что система (1.46) обладает *свойством конвергенции*.

Пример 1.4.1. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

где $t \in I_t = (-\infty, +\infty)$.

Общее решение системы имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t, c) \\ x_2(t, d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ce^{-t} + \sin(t)/2 - \cos(t)/2 \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad c, d = \text{const}.$$

Частное решение системы при $c = 0$

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \sin(t)/2 - \cos(t)/2 \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \sup \{\|\eta(t)\|_{\mathbf{I}}, t \in I_t\} = 1 < \infty,$$

так как $\sin(t)/2 - \cos(t)/2 = \cos(\pi/4) \sin(t - \pi/4) \leq \sqrt{2}/2$; $\cos(t) \leq 1 \forall t \in I_t$.

При задании начальных условий $x(t_0) = x_0 = (x_{01} \ x_{02})^\top$, имеем

$$c = c_0 = \frac{x_{01} + \cos(t_0)/2 - \sin(t_0)/2}{e^{-t_0}} < \infty.$$

Тогда решение имеет вид

$$x(t, t_0, x_0) = \begin{pmatrix} c_0 e^{-t} + \sin(t)/2 - \cos(t)/2 \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t, t_0, x_0) - \eta(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} c_0 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

т.е. заданная система обладает свойством конвергенции.

Лемма 1.4.1. Если система (1.46) обладает свойством конвергенции и $\Phi(x, t) \equiv \Phi(x, t + \omega)$, то ограниченное решение $\eta(t)$ также ω -периодично по t .

Доказательство. Действительно, пусть $\Phi(x, t) \equiv \Phi(x, t + \omega)$. Имеем

$$A(d/dt)\eta(t + \omega) = A\eta(t + \omega) = \Phi(\eta(t + \omega), t + \omega) = \Phi(\eta(t + \omega), t).$$

Таким образом, $\eta(t + \omega)$ является ограниченным решением на I_t . По определению $\eta(t)$ единственно. Следовательно, $\eta(t + \omega) = \eta(t)$. \square

ДАУ обладают сложной внутренней структурой. Мерой сложности является целочисленная величина, называемая индексом. У разных авторов индекс нелинейных ДАУ определяется по разному (см., например, [1; 97; 99]). Ниже мы следуем работе [99].

Определение 1.4.3. Пусть существует дифференциальный оператор

$$\tilde{\Lambda}_l(x) := \sum_{j=0}^l L_j(t, x, \dots, x^{(l+1)})(d/dt)^j, \quad L_j \in \mathbf{C}(T \times \mathbf{R}^{n(l+2)})$$

со свойством

$$\tilde{\Lambda}_l(x) \circ \Lambda_1(x) = \tilde{A}(x, t)\dot{x} + \tilde{\Phi}(x, t) \quad \forall x \equiv x(t) \in \mathbf{C}^{l+1}(T),$$

где $\det \tilde{A}(v, t) \neq 0 \quad \forall (v, t) \in \mathbf{R}^n \times T$. Минимально возможное l называется индексом системы (1.46) на T . При $l - 2 < 0$ матрицы L_j не зависят от t и x .

Определение 1.4.4. Пусть существует интегро-дифференциальный оператор

$$\tilde{\Lambda}_l(x) := \sum_{j=0}^l L_j(t, x, \dots, x^{(l-2)}, \mathcal{W}, \mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_{l-2})(d/dt)^j,$$

где $L_j \in \mathbf{C}(T \times \mathbf{R}^{\varrho(2l-2)})$ – $(\varrho \times \varrho)$ -матрицы, \mathcal{W}_j – операторы Вольтерра, со свойством

$$\tilde{\Lambda}_l(x) \circ W(x) = \tilde{\mathcal{R}}(x, t, \mathcal{W}, \mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_{l-2})\dot{x} + \tilde{\Psi}(x, t, \mathcal{W}, \mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_{l-1}),$$

где $x \in \mathbf{C}^{l+1}(T)$, $\det \tilde{\mathcal{R}}(v, t, w, w_1, \dots, w_{l-2}) \neq 0$, $(v, t, w, w_1, \dots, w_{l-2}) \in \mathbf{R}^{n(2l-2)} \times T$. Минимально возможное l называется индексом системы (1.43) на T . При $l - 2 < 0$ матрицы L_j зависят только от t . В ряде случаев можно принять $\mathcal{W}_j z = \int_0^t [\partial^j K(t, \tau, x(\tau)) / \partial t^j] d\tau$.

Лемма 1.4.2. Пусть в системе (1.46) $\Phi(x,t) \in \mathbf{C}_{x,t}^{(2,2)}(\mathbf{R}^n \times I_t)$. Тогда система имеет индекс 1 тогда и только тогда, когда в многочлене

$$\det [\lambda A + \Phi_x(x,t)] = a_r(x,t)\lambda^r + \dots,$$

где $r = \text{rank } A$, $\Phi_x = \partial\Phi/\partial x$, старший коэффициент $a_r(x,t) \neq 0 \forall (x,t) \in \mathbf{R}^n \times I_t$.

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$P [A + SP^{-1}P\Phi_x(Qy,t)] Q\dot{y} + P\Phi(Qy,t) + P\Phi_t(Qy,t) = 0,$$

где $\Phi_t = \partial\Phi/\partial t$, $x = Qy$, $PAQ = \text{diag}\{E_r, 0\}$, $\det(PQ) \neq 0$, $S = E_n - AA^-$.

Здесь очевидно равенство

$$\det \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ B_{21}(y,t) & B_{21}(y,t) \end{pmatrix} = \det P [A + SP^{-1}P\Phi_x(Qy,t)] Q,$$

где $\begin{pmatrix} B_{11}(y,t) & B_{12}(y,t) \\ B_{21}(y,t) & B_{22}(y,t) \end{pmatrix} = P\Phi_x(Qy,t)Q$, так как матрица $S = E_n - AA^-$ является проектором: $S^2 = S$ в силу определения полуобратной матрицы, и мы можем выбрать P так, что $PSQ = \text{diag}\{0, E_{n-r}\}$. Отсюда следует, что $a_r(x,t) = \det B_{22}(Q^{-1}x,t) / \det(PQ)$. Таким образом, действием на систему (1.46) оператором $E_n + S(d/dt)$ и умножением на матрицу $[A + S\Phi_x(x,t)]^{-1}$ мы получаем систему в нормальной форме

$$\dot{x} = F(x,t) = - [A + S\Phi_x(x,t)]^{-1} [\Phi(x,t) + \Phi_t(x,t)]. \quad (1.47)$$

□

Основные результаты первой главы

1. Получены условия разрешимости недоопределенных, переопределенных и замкнутых вырожденных систем ИДУ вида (1.8), включающих как частный случай ДАУ.
2. Получены достаточные условия существования и единственности решения краевых задач (в частности начальных) для линейных вырожденных систем ИДУ индекса 1.
3. Получены достаточные условия существования и единственности решения начальных задач для квазилинейных систем ДАУ и ИДУ.

Глава 2. Численные методы решения начально-краевых задач для вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений

2.1 Решение начально-краевых задач методом наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (МНК) – математический метод, применяемый для решения различных задач, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомым переменных. Он может использоваться для решения переопределенных систем уравнений (когда количество уравнений превышает количество неизвестных), для поиска решения в случае обычных (не переопределенных) линейных систем уравнений, для аппроксимации точечных значений некоторой функции. МНК является одним из базовых методов регрессионного анализа для оценки неизвестных параметров регрессионных моделей по выборочным данным. Теории численного решения метода наименьших квадратов можно найти в книгах [16; 34; 49].

Метод наименьших квадратов базируется на следующем утверждении.

Теорема 2.1.1. Пусть выполнены условия теоремы 1.3.1, краевая задача (1.23), (1.24) разрешима и для некоторой вектор-функции $x_\epsilon(t) \in C^1(T)$ выполнены условия

$$\|\phi_\epsilon(t)\|_{C(T)} < \epsilon, \quad \|h_\epsilon\|_{\mathbf{I}} < \epsilon, \quad (2.1)$$

где $\phi_\epsilon(t) = (\Lambda_1 + V)x_\epsilon(t) - f(t)$, $h_\epsilon = Cx_\epsilon(\alpha) + Dx_\epsilon(\beta) - a$.

Тогда найдутся решение задачи $x(t)$ и положительные числа ϵ_0 , κ такие, что

$$\|x_\epsilon(t) - x(t)\|_{C(T)} < \kappa\epsilon, \quad \epsilon < \epsilon_0.$$

Более того, если в краевых условиях (1.24) $C = E_n$, $D = 0$ (краевая задача является задачей Коши) и для некоторой вектор-функции $x_\epsilon(t) \in C^1(T)$,

выполнены условия

$$\|\phi_\epsilon(t)\|_{\mathbf{L}_2(T)}^2 < \epsilon, \quad x_\epsilon(\alpha) - x(\alpha) = h_\epsilon = 0, \quad (2.2)$$

тогда найдутся решение задачи $x(t)$ и положительные числа ϵ_1, κ_1 такие, что

$$\|x_\epsilon(t) - x(t)\|_{\mathbf{L}_2(T)}^2 < \kappa_1 \epsilon, \quad \epsilon < \epsilon_1.$$

Доказательство. Выпишем для невязки $y(t) = x_\epsilon(t) - x(t)$ краевую задачу

$$(\Lambda_1 + V)y(t) = \phi_\epsilon(t), \quad Cy(\alpha) + Dy(\beta) = h_\epsilon. \quad (2.3)$$

Пусть $m < n$, полагаем в формуле (1.31) произвольную вектор-функцию $w(t) \equiv 0$ и $f(t) = \phi_\epsilon(t)$. Выписываем систему (1.40) применительно к задаче (2.3). $Z_1 c = b$, $b = h_\epsilon - C\zeta(\alpha) - D\zeta(\beta)$. Система совместна.

Из условий (2.1) и формулы (1.31) в результате простых оценок (с учетом гладкости) вытекает, что справедливо неравенство $\|b\|_{\mathbf{I}} < \tilde{\kappa}\epsilon$, где $\tilde{\kappa}$ – некоторая константа.

Согласно формуле (1.38) общее решение $c = Z_1^{-1}b + [E_r - Z_1^{-1}Z_1]v$, где v – произвольный вектор. Полагая $v = 0$, видим, что вектор констант в этом случае имеет оценку $\|c\|_{\mathbf{I}} < \tilde{\kappa}_1\epsilon$. Подставляя этот вектор в (1.31), мы находим вектор функцию $y(t)$ и нужное нам решение $x(t) = y(t) + x_\epsilon(t)$. Для случаев $m = n$, $n < m$ утверждение доказывается аналогично. Не нужно только оговаривать условие $w(t) \equiv 0$.

Во второй части утверждения мы имеем дело с задачей Коши. Пусть $m < n$. Из формулы (1.35) мы видим, что при нулевых начальных данных $c = 0$, так как $U(\alpha) = E_r$. Следовательно, полагая в формуле (1.31) $w(t) \equiv 0$ и подставляя в нее $f(t) = \phi_\epsilon(t)$, после несложных оценок получаем нужное нам неравенство. Следует только учесть, что если $\xi(t) \in \mathbf{C}(T)$, $\varepsilon(t) \in \mathbf{L}_2(T)$, то $\xi(t)\varepsilon(t) \in \mathbf{L}_2(T)$, $\|\xi(t)\varepsilon(t)\|_{\mathbf{L}_2(T)} \leq \|\xi(t)\|_{\mathbf{C}(T)} \|\varepsilon(t)\|_{\mathbf{L}_2(T)}$ [50]. \square

Итак, для краевых задач (1.23), (1.24), где система имеет индекс 1, существует гарантированная оценка отклонения приближающей вектор-функции от множества решений краевой задачи.

Будем искать приближения к решению краевой задачи (1.23), (1.24) в виде полинома

$$p_i(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_i t^i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где c_0, c_1, \dots, c_i – векторные коэффициенты, подлежащие определению.

По методу множителей Лагранжа [14] при условной минимизации построим функцию

$$S(c_0, c_1, \dots, c_i, \lambda) = \|\delta(t)\|_{\mathbf{L}_2(T)}^2 + (\lambda, \Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \|F(t)c - f(t)\|_{\mathbf{E}}^2 dt + (\lambda, \Omega), \quad (2.4)$$

$$\delta(t) = A(t)\dot{p}_i(t) + B(t)p_i(t) + \int_{\alpha}^t K(t,s)p_i(s)ds - f(t),$$

$$\|\delta(t)\|_{\mathbf{L}_2(T)}^2 = \int_{\alpha}^{\beta} \|\delta(t)\|_{\mathbf{E}}^2 dt,$$

где (λ, Ω) – скалярное произведение в пространстве \mathbf{R}^m , $c = (c_0 \ c_1 \ \dots \ c_i)^\top$,

$$\lambda = (\lambda_0 \ \lambda_1 \ \dots \ \lambda_m)^\top, \quad F(t) = A(t)\dot{P}_i(t) + B(t)P_i(t) + \int_{\alpha}^t K(t,s)P_i(s)ds,$$

$$P_i(t) = (E_n \ tE_n \ \dots \ t^i E_n),$$

$$\Omega = Cx(\alpha) + Dx(\beta) - a = C[c_0 + c_1\alpha + \dots + c_i\alpha^i] + D[c_0 + c_1\beta + \dots + c_i\beta^i] - a.$$

Будем искать коэффициенты c_0, c_1, \dots, c_i , доставляющие минимум функции (2.4). Необходимым условием минимума функции многих переменных является равенство нулю ее частных производных первого порядка по независимым переменным. В функции (2.4) такими независимыми переменными являются коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_i, \lambda$. Выпишем систему линейных алгебраических уравнений порядка $n(i+1) + m$ относительно неизвестных $c_0, c_1, \dots, c_i, \lambda$. Имеем

$$\begin{cases} \partial S / \partial c_0 = 0, \\ \partial S / \partial c_1 = 0, \\ \dots, \\ \partial S / \partial c_i = 0, \\ \partial S / \partial \lambda = 0, \end{cases}$$

С учетом вида функции (2.4) система выглядит таким образом:

$$\begin{cases} \left(2 \int_{\alpha}^{\beta} F^{\top}(t)F(t)dt \right) c + (\partial\Omega/\partial c)\lambda = 2 \int_{\alpha}^{\beta} F^{\top}(t)f(t)dt, \\ (\partial\Omega/\partial c)^{\top}c = a. \end{cases} \quad (2.5)$$

В векторном виде система (2.5) имеет вид:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} c \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & L \\ L^{\top} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta \\ a \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где

$$\Lambda = 2 \int_{\alpha}^{\beta} F^{\top}(t)F(t)dt, \quad L = \partial\Omega/\partial c, \quad \Theta = 2 \int_{\alpha}^{\beta} F^{\top}(t)f(t)dt.$$

Решение системы (2.6) может быть получено любым из известных методов (например, методом Гаусса [73]). Подставляя найденные значения $c = (c_0, c_1, \dots, c_i)$, λ , получим функции $p_i(t) = c_0 + c_1t + \dots + c_it^i$ — приближения к точным решениям задачи (1.23), (1.24).

Замечание 2.1.1. При больших i система (2.6) имеет плохую обусловленность. Для преодоления этого эффекта можно выбирать либо другие координатные функции (например, многочлены Лежандра [72]), либо применить следующий прием: в задаче (1.23) с начальным условием $x(\alpha) = a$ вводим сетку $\Delta = \{t_j : t_j = \alpha + \tau j, j = 0, 1, \dots, N1, \tau = (\beta - \alpha)/N1\}$ и ищем минимум на подотрезках $[t_j, t_{j+1}]$.

Лемма 2.1.1. Пусть $m \geq n$ и задача (1.23), (1.24) имеет единственное решение. Тогда существует единственное решение системы линейных алгебраических уравнений (2.6). Иначе говоря,

$$\det \mathbf{A} \neq 0. \quad (2.7)$$

Доказательство. Подставим в задачу (1.23), (1.24) полином $p_i(t) = c_0 + c_1t + \dots + c_it^i$, $i = 1, 2, \dots$, и вычислим соответствующие ему $f(t) = f_i(t)$, $a = a_i$. В силу единственности решения исходной задачи в системах (1.41), (1.42) решения единственны. Следовательно, решения краевых задач с входными данными

$f(t) = f_i(t)$, $a = a_i$ единственны. Это возможно тогда и только тогда, когда справедливо неравенство (2.7). \square

Замечание 2.1.2. В случае $m < n$ единственность решения задачи (1.23), (1.24) невозможна из-за того, что решение зависит от произвольных функций.

Оценим отклонение приближающего полинома от решения задачи Коши. В основу доказательства положим поиск многочлена, отклонение которого от решения мы можем оценить.

Теорема 2.1.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1.1, краевая задача (1.23), (1.24) является задачей Коши и решение $x(t)$ единственно. Тогда найдутся решение системы (2.6) и соответствующий ей многочлен задачи p_i такой, что

$$S(c_0, c_1, \dots, c_i, \lambda) \leq \frac{\kappa_1}{i^2 \cdot (\ln i)^2}, \quad \|p_i(t) - x(t)\|_{L_2(T)}^2 \leq \frac{\kappa_2}{i^2 \cdot (\ln i)^2},$$

где $\kappa_1 = \text{const}$, $\kappa_2 = \text{const}$.

Доказательство. Рассмотрим функционал (2.4) на многочлене $\mu_i(t)$, у которого $\dot{\mu}_i(t)$ есть многочлен Чебышева для производной решения системы (1.23) $x(t)$. Согласно [11] имеем

$$\|\dot{\mu}_i(t) - \dot{x}(t)\|_{C(T)} = O(1/(i \cdot \ln i)), \quad S(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_i, \lambda) = O(1/(i^2 \cdot (\ln i)^2)),$$

где $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_i$ – коэффициенты полинома $\mu_i(t)$. Так как на полиноме $p_i(t)$ достигается минимум, то

$$S(c_0, c_1, \dots, c_i, \lambda) \leq S(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_i, \lambda),$$

где c_0, c_1, \dots, c_i – коэффициенты полинома $p_i(t)$. Из второго утверждения теоремы 2.1.1 следует справедливость второй оценки утверждения. \square

2.2 Программа для реализации метода наименьших квадратов

На основе полученных теоретических результатов были разработаны алгоритм и программа нахождения численного решения начально-краевых задач (1.23), (1.24) методом наименьших квадратов.

Функциональное назначение. Программа автоматизированного решения краевой задачи для вырожденных линейных систем ИДУ методом наименьших квадратов предназначена для решения краевой задачи для вырожденных систем линейных ИДУ индекса 1. Программа позволяет вычислять приближенное решение начально-краевых задач для некоторой вырожденной системы линейных ИДУ в области определения переменными матрицами коэффициентов при производных искомой вектор-функции и позволяет оценить ошибку приближенного решения по сравнению с точным. Эта программа может применяться при решении задач, возникающих при анализе сложных электрических схем. Возможно использование при преподавании таких дисциплин, как «Численные методы решения краевых задач». Программный комплекс зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ (приложение 1).

Используемые технические средства. Программа написана на языке Matlab и реализована в системе компьютерной математики Matlab 7.11.0.584. Язык программирования Matlab (см., например, [52]) и его пакеты позволяют работать со специальными функциями и с формовыми интерфейсами. В данной программе использовались следующие основные компоненты: *uitable* – для ввода и редактирования элементов таблиц или матриц. Каждый элемент входной матрицы будет иметь тип ячейки *cell*; *Edit* – для ввода и редактирования входных данных в текстовом формате *string*; *axes* – для вывода на экран графика какой-то функции. Основные функции и процедуры языка Matlab, которые использовались в программе: *char()* – для преобразования элементов входных матриц, имеющих тип *cell* в текстовой; *inline()* – для преобразования тексто-

го выражения в функцию переменных, например, команда $g = inline('t+s','t','s')$ формирует текстовое выражение $'t + s'$ в функцию $g(t,s) = t + s$ от переменных t, s ; $feval()$ – для вычисления значения функции в некоторой точке, например, команда $feval(g, t0, s0)$ вычисляет значение функции $g(t,s)$ в точке $(t0,s0)$; $str2int()$ – для преобразования текстовой цифры в число.

Логическая структура программы:

- ввод данных;
- построение матриц $F(t), F^T(t)$;
- нахождение матрицы $\partial\Omega/\partial c$;
- формирование системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов c, λ ;
- проверка числа обусловленности матрицы A СЛАУ;
- решение СЛАУ и нахождение коэффициентов c ;
- нахождение приближенного решения $x(t)$ и вывод его графика.

На рис. 2.1 представлена обобщенная схема алгоритма работы модулей программы. Пользовательский интерфейс программы показан на рис. 2.2.

Алгоритм и описание программы нахождения численного решения сводится к следующим этапам:

Шаг 1. Ввод данных осуществляется пользователем в диалоговом окне. Вводятся параметры размерностей m, n, μ входных матриц; вводятся элементы матриц $A(t), B(t), K(t,s), f(t), C, D, a$; отрезок интегрирования $[\alpha; \beta]$; степень приближенного полинома k ; число итераций $2N$ для вычисления шага интегрирования $h = (\beta - \alpha)/(2N)$ (число итераций всегда задается четным для вычисления интегралов методом Симпсона); точное решение x_1 (для оценки погрешности приближенного решения).

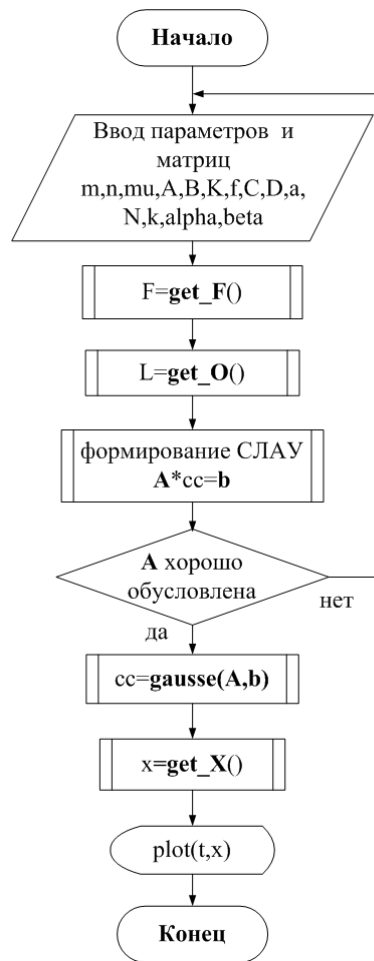


Рис. 2.1. Обобщенная схема алгоритма работы модулей программы

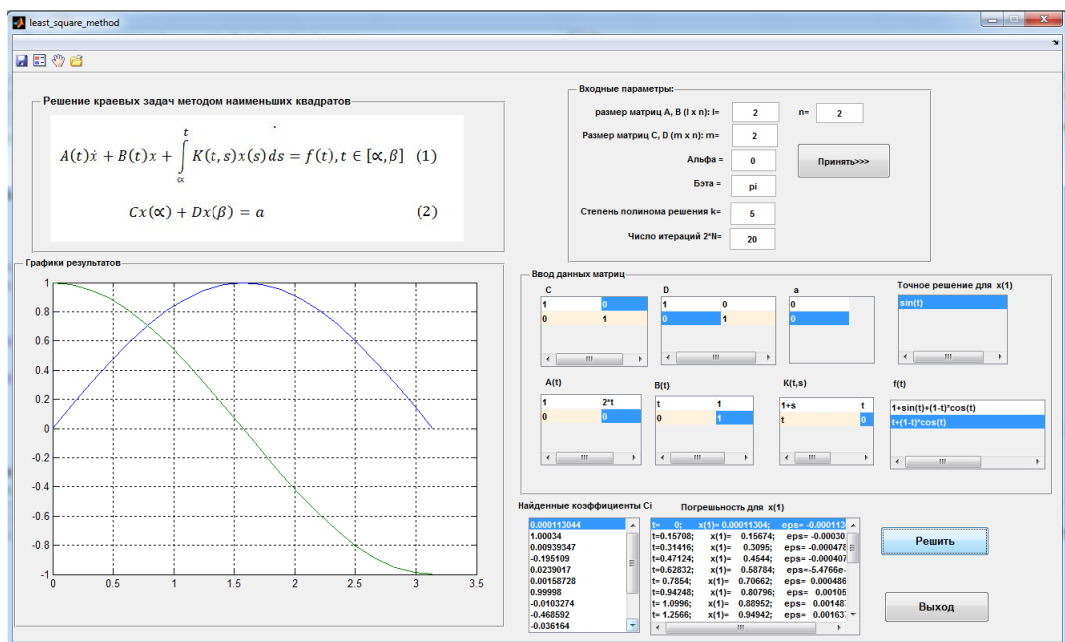


Рис. 2.2. Программа решения краевых задач методом наименьших квадратов

Шаг 2. Построение матрицы F осуществляется с помощью функции $get_F(t)$. В функции $get_F(t)$ построена функция $simsona()$ для вычисления интеграла от α до t некоторой функции переменных $g(t,s)$ методом Симпсона, например, функция $simsona(g,0,1,h,t0)$ вычисляет значение интеграла от 0 до 1 функции $g(t,s)$ по переменной s при $t = t0$, h – шаг интегрирования.

Формула Симпсона (см., например, [67]) для приближенного вычисления определенного интеграла имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + f(x_{2n}) + 2f_1 + 4f_2],$$

где $f_1 = (f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2}))$, $f_2 = 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1}))$, $h = \frac{b-a}{2n}$ – шаг; $f(x_i)$ – значения подынтегральной функции в точках x_1, x_2, \dots, x_{2n} .

Элементы матрицы F вычисляются с помощью циклов $for()$, $i_1 = \overline{1, m}$, $i_2 = \overline{1, n(k+1)}$, $j = \overline{1, n}$:

$$F(i_1, i_2)(t) = \sum_{j=1}^n A(i_1, j)(t) \dot{P}(j, i_2)(t) + \sum_{j=1}^n B(i_1, j)(t) P(j, i_2)(t) + \sum_{j=1}^n \int_{\alpha}^t K(i_1, j)(t, s) P(j, i_2)(s) ds.$$

Транспонированная матрица F^T построена с помощью команды F' .

Шаг 3. Нахождение матрицы $\partial\Omega/\partial c$ осуществляется с помощью функции get_O по формуле

$$L = \partial\Omega/\partial c = C(1 \quad \alpha \quad \dots \quad \alpha^k)^T + D(1 \quad \beta \quad \dots \quad \beta^k)^T = (C + D \quad \alpha C + \beta D \quad \dots \quad \alpha^k C + \beta^k D)^T = (L_0 \quad L_1 \quad \dots \quad L_k)^T.$$

Элементы матрицы L_j вычисляются с помощью циклов $for()$, $i_1 = \overline{1, \mu}$, $i_2 = \overline{1, n}$:

$$L_j(i_1, i_2)(t) = \alpha^j C(i_1, i_2) + \beta^j D(i_1, i_2),$$

здесь $j = \overline{1, k}$.

Шаг 4. При формировании СЛАУ относительно коэффициентов c , λ использовались следующие функции: функция *simsona1()* – для вычисления интеграла от 0 до t_0 произведения $F^\top(t)F(t)$ методом Симпсона, функция *simsona2()* – для вычисления интеграла от 0 до t_0 произведения $F^\top(t)f(t)$ методом Симпсона.

Имеем СЛАУ

$$\mathbf{A} * cc = \mathbf{b}, \quad cc = \begin{pmatrix} c \\ \lambda \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 * \text{simsona1}(F^\top(t)F(t)) & L \\ L^\top & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 * \text{simsona2}(F^\top(t)f(t)) \\ a \end{pmatrix}.$$

Шаг 5. Проверка числа обусловленности матрицы СЛАУ осуществляется с помощью команды *cond(A)*. Если число обусловленности матрицы A большое (система плохо обусловлена), то возникает сообщение об ошибке. Нужно выбрать другие параметры, например, снижение степени полинома решения.

Шаг 6. Решение СЛАУ методом Гаусса (см. [52]) осуществляется с помощью функции *gausse()*, $cc = \text{gausse}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Шаг 7. Нахождение приближенного решения $x(t)$ осуществляется при помощи функции *get_X*. В функции *get_X* значение приближенного решения вычисляется по следующим командам:

```
t = alpha : h : beta;
for(ii = 1 : length(t))
for(i = 1 : n)
x(i,ii) = cc((i - 1) * k + i);
end;
for(i = 1 : n)
for(j = (i - 1) * k + i + 1 : i * (k + 1))
x(i,ii) = x(i,ii) + cc(j) * t(ii)^(j - ((i - 1) * k + i));
end end end
```


Вывод графика решения осуществляется с помощью процедуры $plot()$.

При использовании программы решения краевых задач методом наименьших квадратов, приближенные решения которых ищутся в виде полиномов степени k , если увеличивается отрезок интегрирования, то число обусловленности СЛАУ очень большое при увеличении степени аппроксимирующего полинома. Для снижения степени аппроксимирующего полинома и числа обусловленности применим прием. Пусть имеем задачу (1.23) с начальным условием $x(\alpha) = a$. Вводим сетку $\Delta = \{t_j : t_j = \alpha + \tau j, j = 0, 1, \dots, N, \tau = (\beta - \alpha)/N\}$ и ищем минимум на подотрезках $[t_j, t_{j+1}]$ методом наименьших квадратов. Здесь добавляется ещё функция get_newF для вычисления новых значений вектор-функции f на каждом подотрезке.

Численные эксперименты

В качестве иллюстрации приведем несколько примеров.

Пример 2.2.1. Пусть задана краевая задача

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \int_0^t \begin{pmatrix} 1+s & t \\ t & 0 \end{pmatrix} x(s) ds = \begin{pmatrix} 1 + \sin t + (1-t) \cos t \\ t + \cos t - t \cos t \end{pmatrix},$$

$$t \in T = [0, \pi]; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Индекс системы равен 1, так как система удовлетворяет критерию «ранг-степень»:

$$\text{rank } A = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \forall t \in T,$$

$$\text{deg det} \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{deg} (\lambda + t) = 1 \quad \forall t \in T.$$

В этой системе выполнены условия теоремы 1.3.1, поэтому можем применить метод наименьших квадратов для нахождения приближенного решения. Точное решение этой краевой задачи $x(t) = (x_1(t) \quad x_2(t))^T = (\sin t \quad \cos t)^T$.

Результаты расчетов примера МНК приведены в табл. 2.1. Здесь число итераций $2N = 20$ и $Err = \max\{|\sin(t_j) - x_{1,j}|, |\cos(t_j) - x_{2,j}|\}$.

Таблица 2.1

Результаты и погрешности расчетов для примера 2.2.1 в некоторых заданных точках МНК

$k = 3$				$k = 5$			
t_j	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$	Err	t_j	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$	Err
0	0.0624	0.9758	0.0624	0	0.0001	0.9999	0.0001
0.3142	0.3669	0.9533	0.0579	0.3142	0.3095	0.9500	0.0011
0.6283	0.6117	0.8193	0.0239	0.6283	0.5878	0.8088	0.0003
0.9425	0.7928	0.6011	0.0162	0.9425	0.8080	0.5884	0.0010
3.1416	-0.0624	-0.9758	0.0624	3.1416	-0.0001	-0.9999	0.0001
$cond(\mathbf{A}) = 7.4592e + 005$				$cond(\mathbf{A}) = 2.5017e + 009$			

Из табл. 2.1 мы видим, что при увеличении степени i полинома $p_i(t)$ погрешности расчетов уменьшаются, и число обусловленности матрицы \mathbf{A} увеличивается.

Пример 2.2.2. Рассмотрим систему

$$\Lambda_1 x := \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} te^t + 2e^{2t} + 2e^t \\ te^t + e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0,1].$$

Согласно примеру 1.1.5 заданная система имеет индекс 2, здесь $\gamma = 2$. Действительно, существует дифференциальный оператор второго порядка $\tilde{\Lambda}_2 = \mathbf{d}L\mathbf{d}$, где

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d/dt) \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{такой, что}$$

$$\tilde{\Lambda}_2 \circ \Lambda_1 x = \mathbf{d} \circ (L(\mathbf{d} \circ \Lambda_1 x)) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x,$$

$$\text{где } \text{rank} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \forall t \in T.$$

Исходную систему заменяем системой, получаемой после действия дифференциального оператора первого порядка Ld :

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} te^t + 2e^{2t} + 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Эта система имеет индекс 1 и удовлетворяет теореме 1.3.1. Решение системы единственно и краевые условия не нужны. Результаты расчетов для примера 2.2.2 МНК приведены в табл. 2.2. Здесь число итераций $2N = 20$ и $Err = \max\{|e^{t_j} - x_{1,j}|, |e^{2t_j} - x_{2,j}|\}$.

Таблица 2.2

Результаты и погрешности расчетов для примера 2.2.2 в некоторых заданных точках МНК

$k = 3$				$k = 5$			
t_j	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$	Err	t_j	$x_{1,j}$	$x_{2,j}$	Err
0	0.9795	1.0100	0.0205	0	0.9999	1.0000	0.1029×10^{-3}
0.1	1.1456	1.2245	0.0405	0.1	1.1057	1.2214	0.5105×10^{-3}
0.2	1.2844	1.4832	0.0630	0.2	1.2215	1.4918	0.0540×10^{-3}
0.3	1.4068	1.8046	0.0569	0.3	1.3495	1.8222	0.3362×10^{-3}
1.0	2.7388	7.3791	0.0205	1.0	2.7184	7.3890	0.1029×10^{-3}
$cond(\mathbf{A}) = 3.3936e + 004$				$cond(\mathbf{A}) = 8.3123e + 008$			

Пример 2.2.3. Рассмотрим переопределенную систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 2t+1 & 2 \\ 3t & 4 \end{pmatrix} x + \int_0^t \begin{pmatrix} 1+s & t \\ t & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} x(s) ds = f_3(t), \quad t \in [0,1].$$

с краевым условием

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} x(1) = 50.$$

Индекс этой системы равен 1, так как пучок матриц $\lambda A + B$ имеет индекс 1 (см. теорему 1.3.1). Действительно, по определению 1.1.5, существует матрица P , что

$$P(t)(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 2t+1 & 2 \\ 3t & 4 \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } \text{rank} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2, \det P(t) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Решение краевой задачи единственно. В качестве решения был принят векторный многочлен

$$x_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} t^3$$

и вычислен соответствующий свободный член $f_3(t)$. Построена и решена система (2.6). Вычисленные коэффициенты многочлена $p_3(t)$ отличаются от коэффициентов $x_3(t)$ на величину, не превышающую 10^{-12} .

2.3 Разностные схемы для решения вырожденных систем ИДУ

В основе разностных схем лежат нижеследующие утверждения.

Теорема 2.3.1. Пусть выполнены условия теоремы 1.4.1. Тогда при достаточно малых $h \leq h_0$ решения разностной схемы

$$\mathcal{S}(t_{i+1}) \frac{x_{i+1} - x_i}{h} + \Gamma \left(t_{i+1}, x_{i+1}, h \sum_{j=0}^i \tilde{K}(t_i, t_j, x_j) \right) = 0 \quad (2.8)$$

существуют, где $x_0 = a$, $h = \epsilon/N$, $t_i = \alpha + ih$, $i = \overline{0, N}$, и справедлива оценка

$$\|x_i - x(t_i)\|_{\mathbf{I}} \leq Ch, \quad C = \text{const} > 0,$$

$x_i, x(t_i)$ – приближенное и точное решения в точке t_i , соответственно.

Более того, схему (2.8) можно заменить на безитерационную схему

$$\mathcal{S}(t_{i+1}) \frac{w_{i+1} - w_i}{h} + \Gamma(\xi_i) + \mathcal{D}(\xi_i)(w_{i+1} - w_i) = 0, \quad (2.9)$$

где $\xi_i = \left(t_{i+1}, w_i, h \sum_{j=0}^i \tilde{K}(t_i, t_j, w_j) \right)$, для которой справедлива оценка

$$\|w_i - x(t_i)\|_{\mathbf{I}} \leq C_1 h, \quad C_1 = \text{const} > 0.$$

Численный расчет идет по следующей схеме:

$$w_{i+1} = M_{i+1}^{-1} \left[\mathcal{S}(t_{i+1})w_i - h\Gamma(\xi_i) + h\mathcal{D}(\xi_i) \right],$$

где $M_{i+1} = \mathcal{S}(t_{i+1}) + h\mathcal{D}(\xi_i)$.

Очень важным обстоятельством является тот факт, что интеграл в схеме можно считать по формуле левых прямоугольников. Именно это позволяет линеаризовать нелинейную разностную схему. Для линейных систем справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3.2. [96] Пусть в замкнутой системе (1.23) выполнены условия

- 1) $A(t), B(t), f \in \mathbf{C}^{k+1}(T), K(t,s) \in \mathbf{C}^k(T \times T)$;
- 2) система (1.23) имеет индекс 1;
- 3) $\text{rank } A(\alpha) = \text{rank}(A(\alpha)|b), b = f(\alpha) - B(\alpha)a, x(\alpha) = a$.

Тогда для разностной схемы

$$A_{i+k} \frac{\alpha_0 x_{k+i} + \alpha_1 x_{k+i-1} + \dots + \alpha_k x_i}{h} + B_{k+i} x_{k+i} + h \sum_{j=0}^{k+i-1} \gamma_j K(t_{k+i-1}, t_j) x_j = f_{k+i}$$

справедлива оценка $\|x(t_i) - x_i\|_{\mathbf{I}} \leq Ch^k, C = \text{const}, i = \overline{0, N}$, где $k \leq 6, \alpha_j$ – коэффициенты формулы дифференцирования назад, γ_j – весовые коэффициенты в формуле Ньютона–Котеса.

Весовые коэффициенты определяются согласно И.С. Березина [15] для случая $k = 1, \alpha_0 = 1, \alpha_1 = -1, \gamma_j = 1$; $k = 2, \alpha_0 = 3/2, \alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1/2, \gamma_j = 1/2$.

Численный расчет идет по следующей схеме:

$$x_{i+k} = (\alpha_0 A_{i+k} + h B_{i+k})^{-1} \left(-A_{i+k} \sum_{j=1}^k \alpha_j x_{i+k-j} - h^2 \sum_{j=0}^i \gamma_j K(t_{i+k-1}, t_j) x_j + h f_{i+k} \right), \quad (2.10)$$

где $A_{i+k} = A(t_{i+k})$.

В ряде случаев на практике приходится решать квазилинейные системы вида

$$A(t)\dot{x} + \tilde{B}(t,x)x + \int_0^t K(t,s)x(s)ds = f, \quad t \in T, \quad (2.11)$$

где $\tilde{B}(t,x) = B(t) + \tilde{K} \int_0^t \Phi(x(s))ds$, \tilde{K} , Φ – некоторые матрицы подходящей размерности. Если пучок матриц $\lambda A(t) + \tilde{B}(t,x)$ удовлетворяет критерию «ранг-степень» для всех $t \in T$, $x \in \mathbf{R}^n$, тогда решение системы (2.11) можно производить по формуле (2.10), где $k = 1$, $B_{i+1} = B(t_{i+1}) + h\tilde{K} \sum_{j=0}^i \Phi(x_j)$. В этом случае локально справедливы теоремы 1.4.1 и 2.3.1.

2.4 Численные эксперименты

Пример 2.4.1. Рассмотрим линейную вырожденную систему ИДУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \int_0^t \begin{pmatrix} t+s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} x(s)ds = \begin{pmatrix} \frac{7t^4}{12} + t^3 + \frac{t^2}{2} + 5t \\ \frac{t^4}{3} + t \end{pmatrix}$$

с начальным условием $x_0 = (0 \ 0)^\top$, $t \in T = [0,1]$. Эта система имеет индекс 1 и удовлетворяет условиям теоремы 2.3.2. Точное решение $x(t) = (x_1 \ x_2)^\top = (t^2 \ t)^\top$. Погрешности расчетов методом (2.10) приведены в табл. 2.3. Здесь $Err = \left\| (t_j^2 - x_{1,j} \ t_j - x_{2,j})^\top \right\|_1$.

Таблица 2.3

Погрешности расчетов для примера 2.4.1 методом (2.10) при $k = 1$

h	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01
Err	0.1101	0.0576	0.0293	0.0148	0.006

Пример 2.4.2. Рассмотрим квазилинейную систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} t + \int_0^t [x_1(s) - 1]ds & 1 + \int_0^t [x_2(s) - 2]ds \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x +$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} t+s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} x(s) ds = \begin{pmatrix} \frac{t^5}{3} + \frac{7t^4}{12} + \frac{t^3}{2} - \frac{3t^2}{2} + 5t \\ \frac{t^4}{3} + t \end{pmatrix}$$

с начальным условием $x_0 = (0 \ 0)^\top$, $t \in T = [0,1]$. Система имеет индекс 1 и точное решение $x(t) = (x_1 \ x_2)^\top = (t^2 \ t)^\top$. Погрешности расчетов методом (2.10) приведены в табл. 2.4. Здесь $Err = \|(t_j^2 - x_{1,j} \ t_j - x_{2,j})^\top\|_1$.

Таблица 2.4

Погрешности расчетов для примера 2.4.2 методом (2.10) при $k = 1$

h	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01
Err	0.1650	0.0824	0.0411	0.0205	0.0082

Пример 2.4.3. Рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \sin^2 t + (t-1) \cos t + (2t-1) \sin t \\ \sin t(1 + \cos t) \end{pmatrix}$$

с начальным условием $g_0 = (x(0) \ y(0))^\top = (0 \ 1)^\top$, $t \in T = [0,2]$. Точное решение $g(t) = (x \ y)^\top = (\sin t \ \cos t)^\top$.

В определении 1.4.1 $\mathcal{S}(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{rank } \mathcal{S}(t) = 1 \ \forall t \in [0,2]$,

$$\Gamma(g, w, t) = \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Gamma(g, w, t)}{\partial g} = \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

$$U(g^*(t), \mathcal{W}g^*, t) = \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix},$$

$$\det [\lambda \mathcal{S}(t) + U(g^*(t), \mathcal{W}g^*, t)] = \det \left[\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda t + 2t + 2 \sin t & \lambda - 1 \\ 1 + \cos t & \sin t \end{pmatrix} = \lambda(t \sin t - 1 - \cos t) + \dots$$

Эта система удовлетворяет условиям теоремы 1.4.1. Критерий «ранг-степень» нарушается в точке $t \approx 1.3$, которая является корнем уравнения $t \sin t - 1 - \cos t = 0$. Погрешности расчетов при $t \in [0,1]$ методом (2.9) приведены в табл. 2.5. Здесь $Err = \left\| \begin{pmatrix} \sin t_j - x_j & \cos t_j - y_j \end{pmatrix}^\top \right\|_{\mathbf{I}}$.

Таблица 2.5

Погрешности расчетов для примера 2.4.3 методом (2.9)

h	0.01	0.025	0.05	0.001	0.0005
Err	0.0514	0.0246	0.0120	0.0048	0.0024

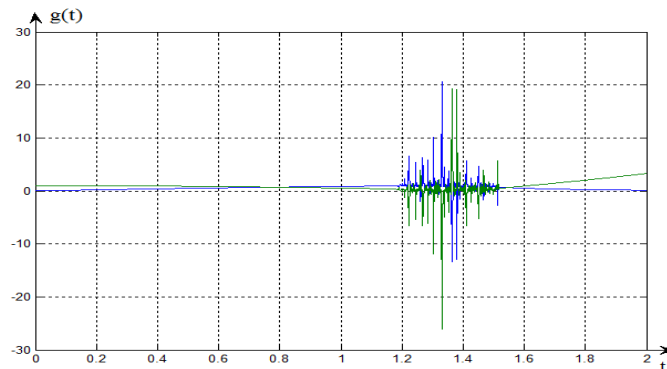


Рис. 2.3. Нарушение расчета при приближении значения t к точке 1.3

Пример 2.4.4. Рассмотрим систему, обладающую свойством конвергенции из примера 1.4.1,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

с начальным условием $g_0 = (x(0) \ y(0))^\top = (0 \ 1)^\top$, $t \in T = [0,10]$.

Эта система удовлетворяет условиям теоремы 1.4.1 и имеет индекс 1. Точное решение $g(t) = (x(t) \ y(t))^\top = ((e^{-t} + \sin t - \cos t)/2 \ \cos t)^\top$. Результаты расчетов методом (2.9) приведены в табл. 2.6. Здесь $Err = \left\| \left((e^{-t_j} + \sin t_j - \cos t_j)/2 - x_j \ \cos t_j - y_j \right)^\top \right\|_{\mathbf{I}}$.

Погрешности расчетов для примера 2.4.4 методом (2.9)

h	0.1	0.05	0.25	0.01	0.005
Err	0.0243	0.0123	0.0062	0.0025	0.0012

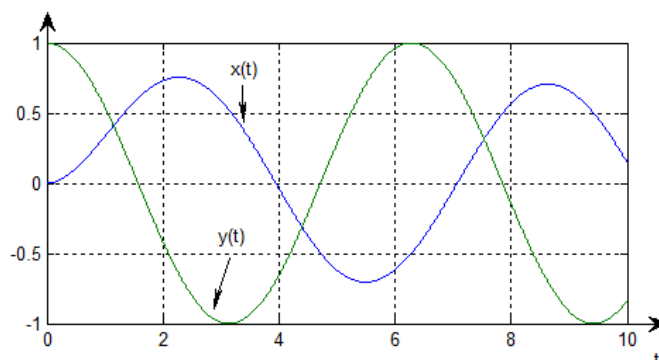


Рис. 2.4. Графики расчета для примера 2.4.4 методом (2.9) при $h = 0.005$

Основные результаты второй главы

1. Построен метод нахождения приближенного решения начально-краевых задач для линейных вырожденных систем ИДУ индекса 1 на основе метода наименьших квадратов. Приведены условия сходимости и оценки погрешности метода.
2. Разработана программа, реализующая метод наименьших квадратов решения начально-краевых задач для линейных вырожденных систем ИДУ индекса 1. Приведены численные эксперименты для тестирования программы. Результаты численных экспериментов хорошо соответствуют теоретическим оценкам.
3. Показаны разностные методы для решения линейных, квазилинейных вырожденных систем ИДУ и квазилинейных вырожденных систем ДАУ. Приведены условия сходимости и оценки погрешности методов.
4. Созданы программы тестирования алгоритмов решения начальных задач разностными методами и приведены результаты расчетов.

Глава 3. Моделирование гидравлических и электрических цепей, записанных в виде вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений

В данной главе рассматриваются модели гидравлических и электрических процессов, записанных в виде вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений. Конкретно выписаны модели связки прямооточного котла типа ПК-24 и турбины К-160-130 с использованием квазистационарного приближения, введенного в докторской диссертации О.А. Балышева [13], и электрических моделей, описанных в монографии Е.И. Ушакова [84]. При разработке математических моделей использовались методологии, описанные в работах [26; 80; 84]. При формулировке математических моделей использованы законы сохранения (первый и второй закон Кирхгофа, закон Ома).

Цель моделирования: создание инструмента для проверки влияния тех или иных факторов при создании полных моделей большой размерности.

3.1 Моделирование гидравлических цепей

3.1.1 Модель потокораспределения при расчетах статических гидравлических цепей

Гидравлическая цепь (ГЦ) – это модель гидравлической системы, в которой места соединения и деления потоков среды (газа, смеси газа и жидкости, жидкости) заменены узловыми точками, а участки ее течения – ветвями, т.е. отрезками, соединяющими узловые точки. Схема цепи – графическое изображение моделируемой системы, совокупность трех упорядоченных множеств: множества узлов, состоящего из подмножеств (потребителей, источников и простых точек разветвления на схеме); множества ветвей, отображающих заданные попарные

связи (соединения) между узлами; множества условных знаков, характеризующих тип и специфические особенности элементов. С математической точки зрения теории графов схема ГЦ – конечный ориентированный граф, дополненный специальными поясняющими знаками. Число ветвей n и узлов m называются параметрами ГЦ. *Конечная и замкнутая последовательность ориентированных ветвей, у которой совпадают только начальный и конечный узлы, называется простым контуром. Активная (пассивная) ветвь – связь между узлами, содержащая (не содержащая) источник напора [51].*

Графу ГЦ соответствует полная $(n \times m)$ -матрица \mathcal{A} соединений ветвей и узлов, которая однозначно описывает структуру схемы цепи и ориентацию ее ветвей. Здесь $a_{ij} = 1$, если узел j является начальным для ветви i (т.е. ветвь i исходит из узла j), $a_{ij} = -1$, если узел j , является конечным для ветви i (т.е. ветвь i ориентирована в направлении к узлу j), и $a_{ij} = 0$, когда узел j не принадлежит ветви i ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$).

По графу ГЦ также строится $(n \times l)$ -матрица \mathcal{B} контуров (l – количество контуров), она описывает совпадение выбранной базисной системы контуров и ветвей. Здесь $b_{ij} = 1$, если ветвь i принадлежит контуру j и ее ориентация совпадает с направлением обхода контура; $b_{ij} = -1$, когда ориентация входящей в контур j ветви i противоположна направлению его обхода, и $b_{ij} = 0$, если ветвь i не входит в контур ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, l}$).

Введем обозначения:

$X(t) = \left(x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t) \right)^T$ – вектор-функция расходов среды (газа, смеси газа и жидкости, жидкости) на ветвях ГЦ;

$P(t) = \left(p_1(t) \ p_2(t) \ \dots \ p_{m_1}(t) \right)^T$ – вектор-функция неизвестных давлений в узлах ГЦ;

$P^*(t) = \left(p_{m_1+1}(t) \ p_{m_1+2}(t) \ \dots \ p_{m_1+m_2}(t) \right)^T$ – вектор-функция известных давлений, здесь $m_1 + m_2 = m$;

$Y(t) = \left(y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_n(t) \right)^T$ – вектор-функция перепадов давлений на ветвях ГЦ, где $y_i(t) = p_{ij} - p_{iv}$ – разность потенциалов, перепад давлений на i -той ветви

ГЦ, j и ν – входной и выходной узлы ветви i ($i = \overline{1, n}$, $j, \nu = \overline{1, m}$);

$H(t) = \left(h_1(t) \ h_2(t) \ \dots \ h_n(t) \right)^\top$ – вектор-функция напоров на ветвях ГЦ;

$Q(t) = \left(q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_m(t) \right)^\top$ – вектор-функция притоков или стоков в узлах ГЦ;

$h_i(t) = y_i(t) + h_i(t)$ – потеря давления на i -й ветви, связанная с преодолением трения, для пассивной ветви $y_i(t) = h_i(t)$.

Согласно [51] стационарная модель гидравлической цепи может быть записана в виде трех групп уравнений:

– уравнения, вытекающие из 1-го закона Кирхгофа:

$$\mathcal{A}^\top X(t) = Q(t) \quad (3.1)$$

(первый закон утверждает, что в любом узле с номером j количество входящей в узел среды равно количеству выходящей среды: $\sum_j x_i(t) = q_i(t)$, $\sum_{i=1}^m q_i(t) = 0$);

– уравнения, вытекающие из 2-го закона Кирхгофа:

$$\mathcal{B}^\top Y(t) = 0 \quad (3.2)$$

(второй закон утверждает, что в любом замкнутом контуре с номером ρ суммарный перепад давлений равен нулю: $\sum_\rho y_i(t) = 0$);

– замыкающие соотношения, которые описывают физические законы движения среды по трубам: на каждой ветви с номером $i = \overline{1, n}$ падение давления в зависимости от расхода по ветви и гидравлического сопротивления имеет вид

$$y_i(t) + h_i(t) = s_{0,i}x_i(t) + s_{1,i}x_i^2(t), \quad (3.3)$$

где $s_{0,i}$ и $s_{1,i}$ – гидравлические сопротивления i -го участка, соответствующие ламинарным и турбулентным течениям.

Равенства (3.1) и (3.3) можно переписать в виде

$$\mathcal{A}_1^\top X = Q_1, \quad \mathcal{A}_1 P + \mathcal{A}_2 P^* + H = S_0 X + S_1 X |X|, \quad (3.4)$$

где $\mathcal{A}_1 P + \mathcal{A}_2 P^* = Y$, $(\mathcal{A}_1 \ \mathcal{A}_2) = \mathcal{A}$, т.е. матрица \mathcal{A}_1 получена из \mathcal{A} отбрасыванием последних m_2 столбцов, причем матрица \mathcal{A}_1 имеет полный ранг; $|X(t)| X(t) = \text{diag}\{x_1(t)|x_1(t)|, x_2(t)|x_2(t)|, \dots, x_n(t)|x_n(t)|\}$; $Q_1(t)$

– вектор-функция притоков в узлах с неизвестными давлениями; $S_0 = \text{diag} \{s_{0,1}, \dots, s_{0,n}\}$, $S_1 = \text{diag} \{s_{1,1}, \dots, s_{1,n}\}$ – диагональные матрицы гидравлических сопротивлений участков, соответствующие ламинарным и турбулентным течениям [51], $s_{0,i} > 0$, $s_{1,i} > 0$. Система (3.4) состоит из $m_1 + n$ уравнений с $m_1 + n$ неизвестными: n компонент вектора X и m_1 компонент вектора P .

Производя несложные преобразования, получим замкнутую систему нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} S_0 & -\mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_1^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ P(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 |X(t)| X(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(t) + \mathcal{A}_2 P^*(t) \\ Q_1(t) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Замечание 3.1.1. Замена квадрата расходов $X^2(t)$ в формуле (3.3) на произведение $|X(t)|X(t)$, предложенная в работах А.П. Меренкова [51], позволяет производить расчеты, когда в (3.3) величина $y_i(t) + h_i(t)$ меняет знак. Пусть $s_{0,i} = 0$, $y_i(t) + h_i(t) < 0$, тогда уравнение (3.3) не имеет вещественного решения относительно x_i , а уравнение $y_i(t) + h_i(t) = s_{1,i}|x_i(t)|x_i(t)$ имеет.

Замечание 3.1.2. В монографии [51] используются более общие замыкающие соотношения $y_i = s_i(|x_i|)^{\beta-1}x_i$, где β один и тот же для любого ν . Для газов иногда используются замыкающие соотношения вида

$$y_i + h_i = s_i|x_i|x_i, \quad y_i = p_{ij}^2 - p_{i\nu}^2, \quad (3.6)$$

но при условии, что они выполняются на всех участках ГЦ. В этом случае первый закон Кирхгофа остается без изменений. Второй закон заменяется на его аналог: сумма перепадов квадратов давлений по замкнутому контуру равна нулю [10]. Общие выводы замыкающих соотношений для некоторых случаев течения сжимаемой и несжимаемой жидкости можно найти в работе [12].

Падение давления на различных участках ГЦ, описывающей пароводяные тракты котлов и турбин, подчиняется законам движения среды, где наряду с соотношениями вида (3.4) присутствуют нелинейные по давлению зависимости. Например, расчет перепада давления при расширении пара в отсеке турбины

ведется с использованием уравнения Флюгеля-Стодолы [25]

$$s_i = \frac{p_{j,0}^2 - p_{\nu,0}^2}{|x_{i,0}| x_{i,0}} \frac{T_i}{T_{i0}},$$

где j, ν обозначают параметры на входе и выходе i -ого отсека, 0 – признак номинального режима, T – температура пара;

расход через регулировочный клапан турбины рассчитывается с использованием уравнения Бендемана [37]

$$x_{\text{кл}} = \frac{2\sigma}{1 - \epsilon} \left\{ \frac{2k}{k + 1} [-0.09p_j^2 + 1.09p_{\nu}p_j - p_{\nu}^2] \right\}^{0.5},$$

p_j – параметр пара перед регулировочными клапанами, p_{ν} – давление в объеме за регулировочными клапанами перед первым рядом сопел, k – показатель адиабаты;

перепад давления участка с водой рассчитывается с использованием уравнения Дарси [12]

$$p_j - p_{\nu} = s_i |x_i| x_i;$$

сопротивление участков с кипящей водой [66]

$$s_i(p_{ij}, p_{i\nu}, x_i, \dots) = \frac{\lambda}{2gF\rho'} (1 + x\psi(\frac{\rho'}{\rho''})),$$

где ρ', ρ'' – плотности воды и пара в состоянии насыщения; x – массовое паросодержание; ψ – коэффициент, учитывающий влияние структуры потока на гидравлическое сопротивление.

Пошаговый расчет потокораспределения в динамических моделях энергоблока в целом предусматривает разбиение замыкающих соотношений на четыре подмножества, в которых законы падения давлений на ветвях заданы соотношениями [44]

$$p_{ij} - p_{i\nu} = s_i |x_i| x_i; \quad (3.7)$$

$$p_{ij}^2 - p_{i\nu}^2 = s_i |x_i| x_i; \quad (3.8)$$

$$c_0 p_{ij}^2 + c_1 p_{ij} p_{i\nu} + c_2 p_{i\nu}^2 = s_i |x_i| x_i; \quad (3.9)$$

$$p_{ij} - p_{i\nu} = s_i(p_{ij}, p_{i\nu}, x_i, \dots) |x_i| x_i, \quad (3.10)$$

где $c_0 = -0.09$, $c_1 = 1.09$, $c_2 = -1$, $c_0 + c_1 + c_2 = 0$, j и ν – входной и выходной узлы ветви i ($i = \overline{1, n}$, $j, \nu = \overline{1, m}$). Здесь уравнение (3.7) дает описание течения воды в трубах, уравнения (3.8), (3.9) определяют прохождение пара через отсеки турбины и регулирующие клапаны. Уравнение (3.10) описывает течение парожидкостной смеси в поверхностях нагрева или трубах. Формулы (3.8), (3.9) после преобразования имеют вид соответственно

$$p_{ij} - p_{i\nu} = \frac{s_i |x_i| x_i}{p_{ij} + p_{i\nu}};$$

$$p_{ij} - p_{i\nu} = \frac{s_i |x_i| x_i}{p_{i\nu} - 0.09 p_{ij}}.$$

3.1.2 Представление динамической модели гидравлических цепей в виде вырожденной системы ИДУ

В монографии [12] интегрированием по пространству общих уравнений движения получены замыкающие соотношения, описывающие нестационарную модель гидравлической цепи вида,

$$y_i(t) + h_i(t) = r_i(t)\dot{x}_i(t) + s_{0,i}x_i(t) + s_{1,i}x_i^2(t), \quad (3.11)$$

где r_i – параметр инерции, $r_i(t) > 0$. Следуя замечанию 3.1.1, мы заменим (3.11) на соотношение

$$y_i(t) + h_i(t) = r_i(t)\dot{x}_i(t) + s_{0,i}x_i(t) + s_{1,i}|x_i(t)|x_i(t). \quad (3.12)$$

Этим соотношениям соответствует система дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) вида

$$\begin{pmatrix} R(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{P}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_0 & -\mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_1^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ P(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 |X(t)| X(t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} H(t) + \mathcal{A}_2 P^*(t) \\ Q_1(t) \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

где $R = \text{diag}\{r_0(t), r_1(t), \dots, r_n(t)\}$ – параметры инерции, зависящие от геометрических характеристик участка цепи $r_i(t) > 0$.

На некоторых ветвях могут присутствовать регуляторы, и уравнение i -й ветви с учетом (3.12) выглядит так:

$$y_i(t) + h_i(t) = r_i(t)\dot{x}_i(t) + s_{0,i}x_i(t) + \left[s_{1,i} + k_i \int_0^t (\psi_i(x_i(\tau)) - \theta_i) d\tau \right] x_i(t) |x_i(t)|,$$

где k_i – коэффициент пропорциональности ($k_i \geq 0$), θ_i – задание регулятора ($\theta_i \geq 0$), $\psi(\cdot)$ – функция регулятора.

Итак, систему (3.13) при наличии автоматических регуляторов можно представить в виде вырожденной системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} R(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{P}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_0 & -\mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_1^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ P(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [S_1 + K \int_0^t (\Psi(X(\tau)) - \Theta) d\tau] X(t) |X(t)| \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(t) + \mathcal{A}_2 P^*(t) \\ Q_1(t) \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

где $K = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n)^\top$ – вектор коэффициентов пропорциональности ($k_i \geq 0$), $\Theta = (\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n)^\top$ – вектор заданных значений регуляторов ($\theta_i \geq 0$), $\Psi(X) = (\psi_1(X) \ \psi_2(X) \ \dots \ \psi_n(X))^\top$ – вектор-функция регуляторов.

Можно переписать эту систему в неявном виде

$$W(z) := \mathcal{S}(t)\dot{z} + \Gamma(z, \mathcal{V}z, t) = 0, \quad t \in T = [\alpha, \beta] \subset [0, \infty),$$

где $z = (X^\top \ P^\top)^\top$, $\mathcal{V}z = \int_0^t \mathcal{K}(t, \tau, z(\tau)) d\tau$ – оператор Вольтерра, $\mathcal{S}(t) = \text{diag}(R(t), 0)$.

3.1.3 Характеристика объекта моделирования

При моделировании ГЦ была рассмотрена часть тренажера для персонала прямооточного котла ПК-24 и турбины К-160-130, которые являются частью обо-

рудования ТЭЦ-10 (г. Ангарск). Дубль-блок 150 МВт Иркутской ТЭЦ-10 имеет в своем составе два прямоточных котлоагрегата ПК-24, предназначенных для работы с турбиной К-160-130, и собственно паротурбинную установку. На рис. 3.1 представлена укрупненная блок-схема моделируемых частей энергоблока, будем рассматривать часть блока, штрихованную на рисунке.

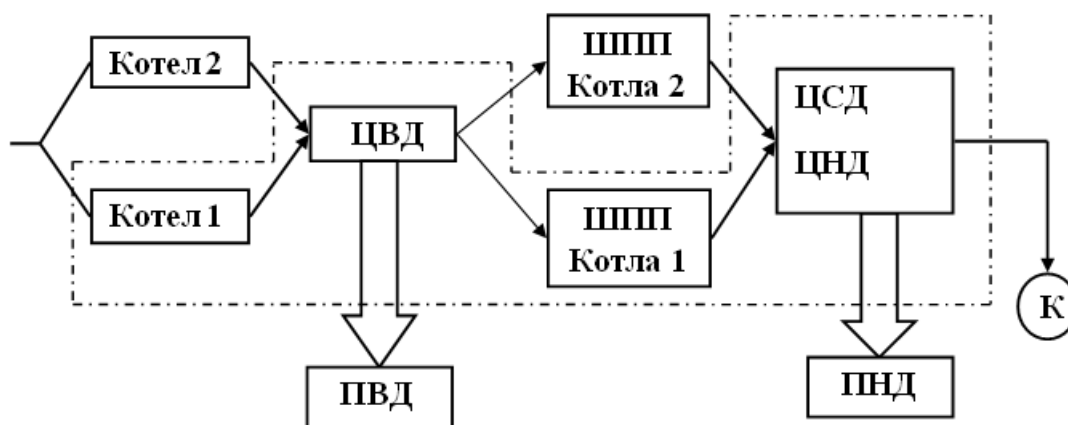


Рис. 3.1. Общий вид моделируемого объекта

Вода подается в котлы 1, 2 и нагревается до температуры 545°C , поступает в цилиндр высокого давления (ЦВД) турбины. После ЦВД пар поступает в котлы 1, 2 на промежуточный перегрев, где нагревается до температуры 545°C и поступает в цилиндр среднего давления (ЦСД), далее в цилиндр низкого давления (ЦНД), а затем в конденсатор (К), в котором пар преобразуется в воду. Вода из конденсатора поступает в подогреватель низкого давления (ПНД), а затем в подогреватель высокого давления (ПВД) и идет на вход котлов 1, 2.

Котельный агрегат. Котлоагрегат ПК-24 с промежуточным перегревом пара обеспечивает производительность 270 т/ч с давлением 140 кг/см^2 и температурой перегретого пара 545°C . Расчетная температура питательной воды при номинальной нагрузке блока и включенных подогревателях высокого давления (ПВД) составляет 228°C . В двух ступенях конвективного экономайзера вода подогревается до температуры 308°C и поступает в общий питательный трубопровод. На трубопроводе расположена измерительная диафрагма и регулирующий

питательный клапан (РПК). Из питательного трубопровода перед измерительной диафрагмой производится отбор на впрыски: перед верхней радиационной частью (ВРЧ); перед конвективным пароперегревателем (КПП).

Примененная схема отвода воды на впрыски обеспечивает минимальную температуру уходящих газов вследствие увеличения пропуски воды через конвективный экономайзер. После РПК вода проходит через нижнюю радиационную часть топки (НРЧ). В НРЧ вода закипает, и пароводяная смесь поступает в переходную зону (ПЗ). ПЗ вынесена в конвективную шахту. За ПЗ слабонагретый пар попадает в расположенную на стенках топочной камеры среднюю радиационную часть (СРЧ), а затем в верхнюю радиационную часть (ВРЧ). Из ВРЧ перегретый пар с температурой 481°C поступает в трубопровод, на котором размещена разделительная паровая задвижка РЗ-1. До нее взят отвод с дроссельной шайбой к растопочному сепаратору. Шайба обеспечивает расход воды при растопке 90 т/ч. Пар после растопочного сепаратора поступает в трубопровод за задвижкой РЗ-1. Сброс из сепаратора, на котором расположены дроссельный клапан Д-2 и запорная задвижка РЗ-2, направляется в конденсатор турбины.

Примененная схема растопочного узла позволяет одновременно с растопкой котла производить разворот и нагружение турбины по скользящему графику. Вместе с тем эта схема с помощью дроссельного устройства позволяет поддерживать повышенное давление в предвключенном тракте, необходимое по условиям надежности гидродинамики.

После растопочного узла пар доводится до нужных параметров перегревом в потолочном экране (ПЭ) и конвективном пароперегревателе. Из выходной камеры КПП осуществляется отвод к двум предохранительным клапанам, настроенным на 147 и 151 кг/см². На главном паропроводе размещена задвижка ПП-1, перед которой выполнен отвод на БРОУ-1. Редуцируемый пар через ПП-1 сбрасывается в «холодный» паропровод вторичного перегрева. Впрыски на БРОУ-1 и вторичный пароперегреватель берутся из коллектора под давлением 60 кг/см².

Пар во вторичный пароперегреватель, состоящий из двух ступеней ШПП-1 и ШПП-2, поступает из цилиндра высокого давления (ЦВД) турбины с температурой 375°C и давлением $32,5 \text{ кг/см}^2$. Из выходных камер ШПП-2 вторичный пар направляется в часть среднего давления (ЧСД) турбины. На выходной камере вторичного пара размещены два предохранительных клапана, настроенных на 33 и $33,6 \text{ кг/см}^2$. Дополнительно, для снижения избыточного давления за ШПП на «холодном» паропроводе вторичного перегрева установлена редуцирующая установка РУ-30/14. Перед задвижкой ППГ-5 на «горячем» паропроводе промежуточного перегрева выполнен отвод на БРОУ-2. Задвижка ППГ-5, как и БРОУ-1, необходима на случай внезапного сброса нагрузки турбогенератора. При внезапном сбросе нагрузки БРОУ-1 перепускает свежий пар в промперегреватель, предохраняя его от пережога. Через БРОУ-2 пар перепускается в конденсатор. Кроме того, БРОУ-1 и БРОУ-2 служат обводами турбины при растопках и остановках котла. Впрыск на БРОУ-2 берется из коллектора под давлением 60 кг/см^2 . На рис. 3.2 представлен пароводяной тракт котлоагрегата.

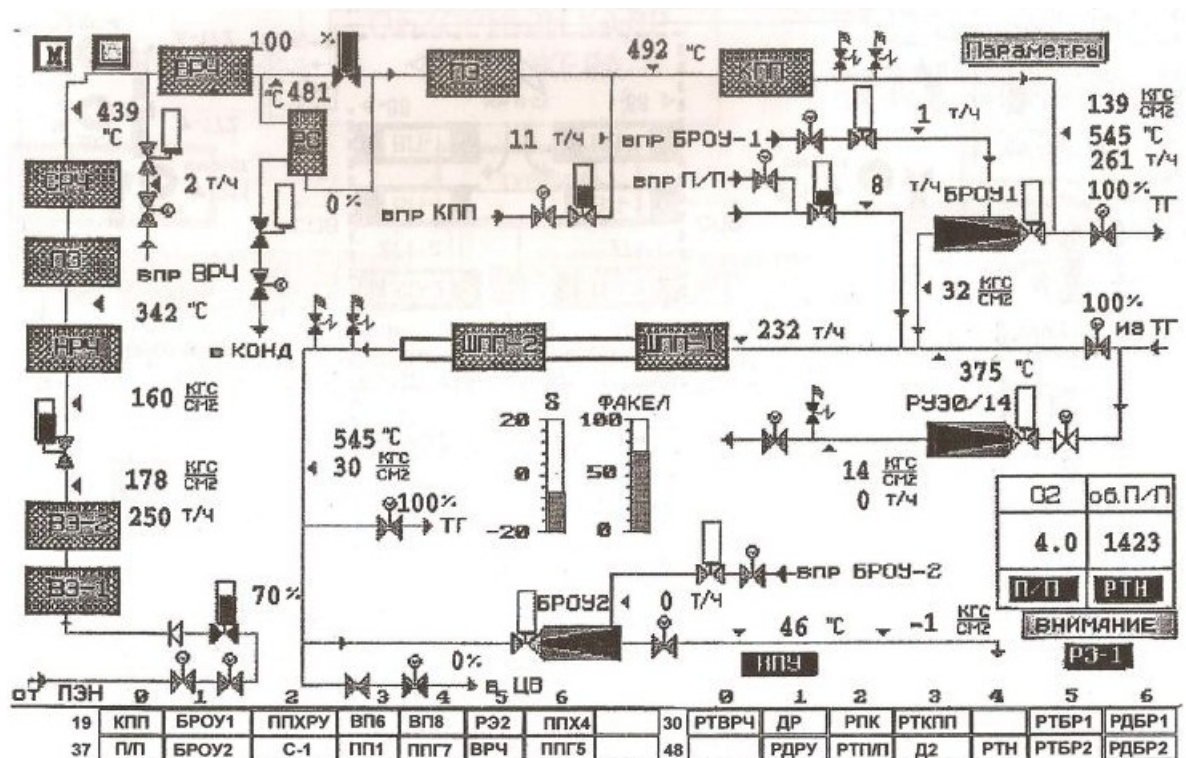


Рис. 3.2. Пароводяной тракт котлоагрегата

Турбинная установка. Паровая конденсационная турбина К-160-130 с промежуточным перегревом пара представляет собой двухцилиндровый одно-вальный агрегат, предназначенный для привода электрического генератора переменного тока типа ТВ-150-2. Цилиндр высокого давления (ЦВД) разделительной диафрагмой разделен на часть высокого давления (ЧВД) и часть среднего давления (ЧСД). ЧВД содержит одну регулируемую ступень и шесть ступеней давления. Шестая и седьмая ступени давления размещены в единой обойме, которая совместно с разделительной диафрагмой образует камеру для отвода пара на промперегрев. ЧСД имеет восемь ступеней давления. Цилиндр низкого давления выполнен в два потока пара, каждый из которых имеет по шесть ступеней давления.

В ЧВД расположены отборы пара на подогреватель высокого давления ПВД-8 и на промперегрев. Из ЧСД выполнены отборы на ПВД-7, деаэратор и на подогреватель низкого давления ПНД-4. В ЦВД располагаются отборы на ПНД-1, ПНД-2, и ПНД-3. Все отборы турбины оборудованы обратными клапанами типа «КОС» с принудительным закрытием.

Регулирование паровпуска высокого давления состоит из отдельно стоящего стопорного клапана. Пар из стопорного клапана по перепускным трубам подводится к четырем регулирующим клапанам, расположенным на передней части ЦВД и подающим пар к соплам. Регулирование паровпуска ЧСД состоит из двух блок-клапанов промперегрева, соответственно по одному на каждый котлоагрегат, сочетающих в себе принцип стопорного и регулирующего клапанов. Пар из последней ступени турбины через выхлопной патрубок направляется в двухпоточный и двухходовой конденсатор К-150-9115.

На рис. 3.3 представлена технологическая схема турбины.

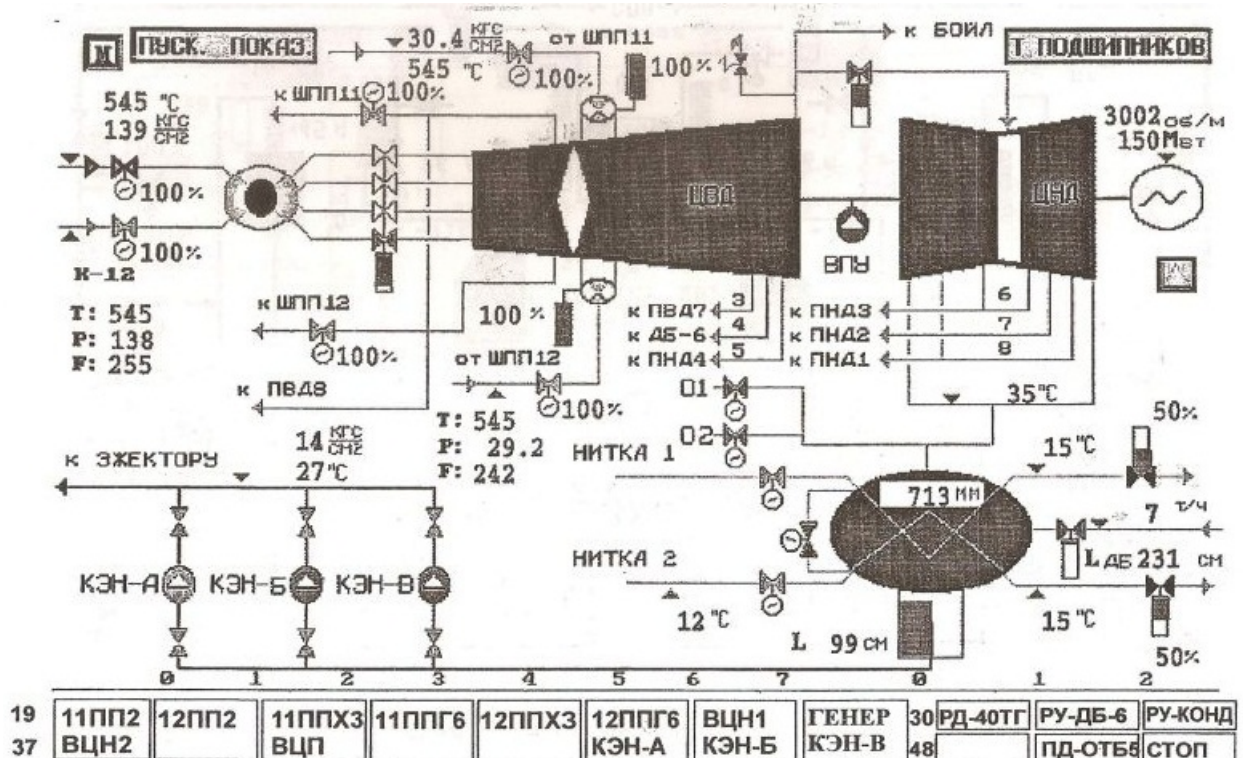


Рис. 3.3. Технологическая схема турбины

3.1.4 Математическая модель гидравлической цепи связки «Прямоточный котел-турбина»

На рис. 3.4 представлена детализированная схема гидравлической цепи связки «Прямоточный котел-турбина». Эта цепь моделирует структуру пароводяного тракта котла, включая газоздушный тракт котла. При построении этой модели предполагается, что: значения потоков на участках гидравлической цепи неотрицательны; разность значений потоков, входящих в узел и выходящих из узла, при отсутствии в узле внутренних стоков и источников массы равна нулю; среда движется от узла с большим давлением к узлу с меньшим давлением.

По ходу тракта вода, подаваемая насосом в узле с номером 14, нагревается, переходит в пар, пар нагревается до температуры 545°С и через регулирующийся клапан поступает в турбину. На ГЦ обозначены участки x_1, x_2, \dots, x_{22} . На участках $x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_{14}$ течет вода, на участках x_2, x_7, x_{14} на-

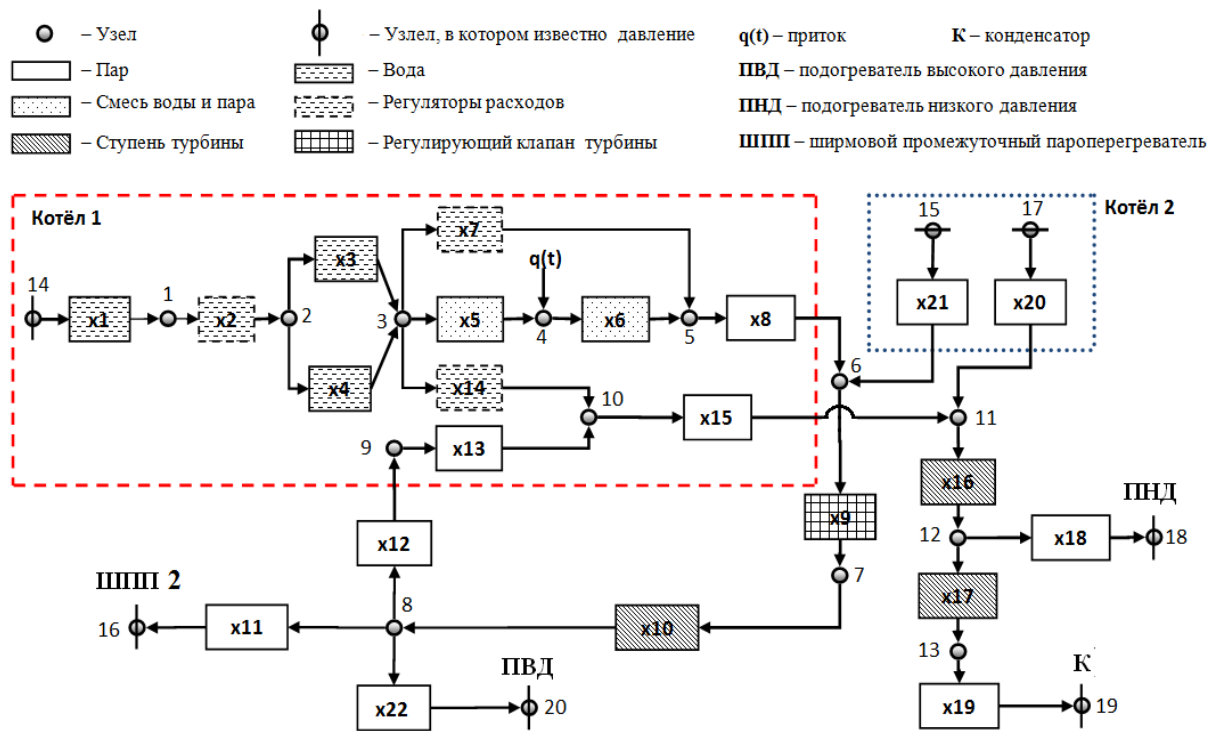


Рис. 3.4. Детализированная схема гидравлической цепи связки «Прямоточный котел-турбина»

ходится регулятор расхода питательной воды, регулятор температуры острого пара и регулятор температуры ширмового промежуточного пароперегревателя (ШПП), соответственно. На участке x_5 , x_6 течет пароводяная смесь. На участках x_8 , x_{11} , x_{12} , x_{13} , x_{15} , x_{20} , x_{17} , x_{21} , x_{22} течет пар. На участке x_9 находится регулирующий клапан турбины. На участках x_{10} , x_{16} , x_{17} находятся ступени турбин. На участке x_{19} находится конденсатор. Приток $q(t)$ имитирует изменение плотности среды на кипящем участке.

Используя общие правила, изложенные в предыдущем параграфе, составим уравнения балансов расходов с использованием первого закона Кирхгофа для узлов p_1, p_2, \dots, p_{13} (см. рис. 3.4):

$$x_1 - x_2 = 0; \quad x_2 - x_3 - x_4 = 0;$$

$$x_3 + x_4 - x_5 - x_7 - x_{14} = 0; \quad x_5 - x_6 + q = 0;$$

$$x_6 + x_7 - x_8 = 0; \quad x_8 - x_9 + x_{21} = 0;$$

$$x_9 - x_{10} = 0; \quad x_{10} - x_{11} - x_{12} = 0;$$

$$x_{12} - x_{13} = 0; \quad x_{13} + x_{14} - x_{15} = 0;$$

$$x_{15} - x_{16} - x_{20} = 0; \quad x_{16} - x_{17} - x_{18} = 0; \quad x_{17} - x_{19} = 0.$$

Предполагается, что вектор-функция регуляторов задается как $\psi(x_i) = x_i$ и пусть $S_0 \equiv 0$. Составим уравнения потерь давлений:

на участке x_2 с регулятором расхода питательной воды

$$p_1 - p_2 = r_2 \dot{x}_2 + [s_{1,2} + k_2 \int_0^t (x_2(\tau) - \theta_2) d\tau] |x_2| x_2;$$

на участке x_7 с регулятором температуры острого пара

$$p_3 - p_5 = r_7 \dot{x}_7 + [s_{1,7} + k_7 \int_0^t (x_7(\tau) - \theta_7) d\tau] |x_7| x_7;$$

на участке x_{14} с регулятором температуры ширмового промежуточного пароперегревателя

$$p_3 - p_{10} = r_{14} \dot{x}_{14} + [s_{1,14} + k_{14} \int_0^t (x_{14}(\tau) - \theta_{14}) d\tau] |x_{14}| x_{14};$$

на участке, где находится регулирующий клапан x_9

$$p_6 - p_7 = r_9 \dot{x}_9 + s_{1,9} |x_9| x_9 / (p_7 - 0.09p_6);$$

на участках, на которых течет вода, уравнения потерь давлений выглядят как

$$p_{ij} - p_{i\nu} = r_i \dot{x}_i + s_{1,i} |x_i| x_i,$$

где j, ν – входной и выходной узлы ветви i ($i = 1, 3, 4$), например, на участке x_1

$$p_{14} - p_1 = r_1 \dot{x}_1 + s_{1,1} |x_1| x_1;$$

на участках, на которых течет пар, уравнения потерь давлений выглядят как

$$p_{ij} - p_{i\nu} = r_i \dot{x}_i + s_{1,i} |x_i| x_i / (p_{ij} + p_{i\nu}),$$

где $i = 8, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22$, например, на участке x_8

$$p_5 - p_6 = r_8 \dot{x}_8 + s_{1,8} |x_8| x_8 / (p_5 + p_6);$$

на участках, на которых течет смесь пара и воды, уравнения потерь давлений выглядят как

$$p_{ij} - p_{i\nu} = r_i \dot{x}_i + s_{1,i} |x_i| x_i,$$

где $i = 5, 6$, например, на участке x_5

$$p_3 - p_4 = r_5 \dot{x}_5 + s_{1,5} |x_5| x_5.$$

Итак, схема ГЦ связки «Прямоточный котел-турбина» содержит 19 узлов и 22 ветвей, и мы получим систему (3.14) с размерностью 41 на 41. В формуле (3.14) имеем:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.2 Моделирование электрических цепей

3.2.1 Основные элементы цепи

Электрической цепью называют совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий ЭДС, тока и напряжения [29]. Основными элементами электрической цепи (см. [26]) являются линейные сосредоточенные, не зависящие от времени резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности.

Резистором (см. рис. 3.5 а) называется элемент, для которого текущий через него ток i и приложенное к нему напряжение u связаны законом Ома

$$u = Ri = i/G,$$

где R – сопротивление резистора, измеряемое в омах; а G – проводимость, измеряемая в сименах. Напряжение измеряется в вольтах, а ток – в амперах.

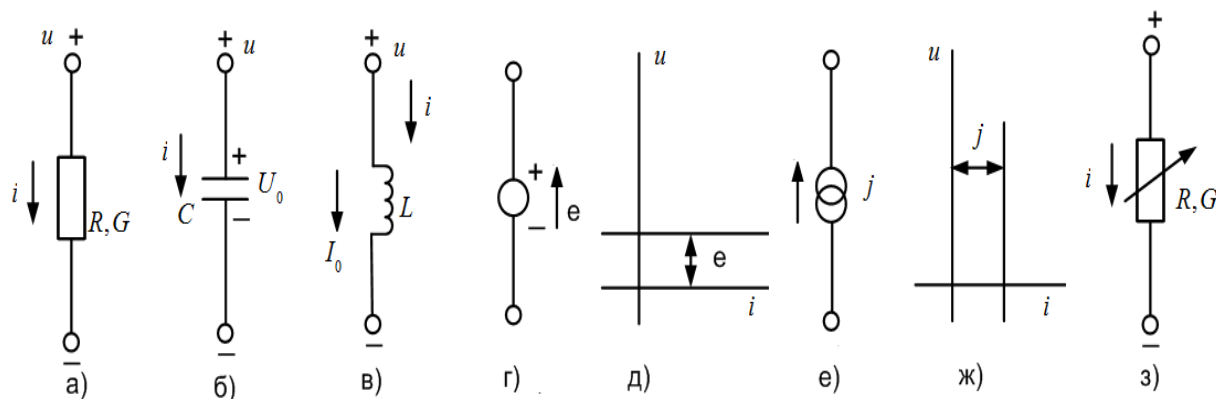


Рис. 3.5. Основные элементы цепей: а – резистор; б – конденсатор; в – катушка индуктивности; г – независимый источник напряжения; д – характеристика источника напряжения; е – независимый источник тока; ж – характеристика источника тока; з – реостат.

Конденсатор (см. рис. 3.5 б) обозначают буквой C , а его емкость измеряют в фарадах. В общем случае он может быть описан с помощью уравнения

$$q = f(u),$$

где q обозначает заряд в кулонах. Если функция $f(u)$ является произведением напряжения u на константу C , то

$$q = Cu.$$

Это уравнение описывает линейную независящую от времени емкость. Ток, текущий через конденсатор, будет

$$i = dq/dt. \quad (3.15)$$

Для линейной не зависящей от времени емкости уравнение (3.15) сводится к виду

$$i = Cdu/dt,$$

а обратная зависимость выражается через интеграл

$$u(t) = U_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau,$$

где U_0 – напряжение на конденсаторе в момент $t = 0$.

Катушка индуктивности представлена на рис. 3.5 в. Индуктивность обозначается символом L , измеряется в генри и может быть описана с помощью функции

$$\phi = f(i),$$

где ϕ обозначает магнитный поток в веберах. Если магнитный поток ϕ прямо пропорционален току i с коэффициентом L , то

$$\phi = Li,$$

и это уравнение описывает линейную не зависящую от времени индуктивность. Напряжение на катушке индуктивности связано с протекающим через нее током соотношением

$$u = d\phi/dt.$$

Для линейной не зависящей от времени индуктивности можно записать как:

$$u = Ldi/dt,$$

а обратную зависимость можно представить в форме

$$i(t) = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau,$$

где I_0 – ток, протекающий через катушку индуктивности в момент $t = 0$.

Независимый источник напряжения (см. рис. 3.5 е) обеспечивает заданное значение напряжения на его полюсах независимо от того, какой ток (в любом направлении) течет через него. Теоретически он поддерживает это напряжение даже при коротком замыкании его полюсов. Хотя создать идеальный источник напряжения невозможно. Характеристика источника напряжения на плоскости $i - u$ показана на рис. 3.5 д. Сравнивая эту характеристику с вольт-амперной характеристикой резистора, можно видеть, что независимый источник напряжения ведет себя как специфический нелинейный резистор. Если напряжение меняется, то эта прямая линия поднимается или опускается. Особым является случай, когда напряжение источника тождественно равно нулю. При этом характеристика совпадает с осью абсцисс x , и через источник может течь любой ток, хотя никакого напряжения на его полюсах не возникает. Отсюда заключаем, что идеальный источник напряжения при $e = 0$ ведет себя как короткозамкнутая цепь.

Независимый источник тока (см. рис. 3.5 г) – это элемент электрической цепи, поддерживающий в этой цепи ток заданного значения, не зависящего от сопротивления прочих элементов цепи. Это – идеальный источник тока. Напряжение на его полюсах зависит от цепи, подключенной к источнику. Теоретически идеальный источник тока будет создавать заданный ток даже в разомкнутой цепи, что возможно только в предположении бесконечно большого напряжения между его полюсами. Этот элемент является идеализированным, но в комбинации с другими элементами он может быть использован для моделирования реальных источников. Характеристикой источника тока является вертикальная линия на плоскости $i - u$, как это показано на рис. 3.5 ж. При различных значениях тока источника эта линия сдвигается влево или вправо. Если ток равен нулю, то характеристика совпадает с вертикальной осью u , и ток равен нулю

независимо от приложенного напряжения. Отсюда заключаем, что идеальный источник тока при $i = 0$ эквивалентен разомкнутой цепи.

Регулятором электрического тока служит реостат (см. рис. 3.5 з), включаемый в цепь, в которой необходимо регулировать силу тока. Так, если напряжение (разность потенциалов) U зажимов данной цепи, сопротивление этой цепи r , а сопротивление реостата R , то по закону Ома сила тока будет

$$i = U/(r + R).$$

Если сопротивление r цепи остается постоянным, то при изменении R , например, при его увеличении, сила тока i будет уменьшаться, и наоборот, при уменьшении R i будет увеличиваться. Таким образом, изменяя сопротивление R реостата, мы можем получить желаемое значение для силы тока i . Если сопротивление цепи r меняется, то, изменяя соответственно R , мы можем поддерживать силу тока все время постоянной. Так, если r увеличивается, то, уменьшая R , мы приведем силу тока i до требуемого значения; точно так же, если r уменьшается, то, увеличивая R , мы опять доведем силу тока до желаемой величины и т.д. Для последовательного изменения силы тока применяют реостаты с подвижными контактами.

3.2.2 Общие принципы формирования моделей электрических цепей

Исходные уравнения электрической цепи можно представить в матричной форме с использованием контурной и узловой матриц. Цепь изображается в виде направленного графа, состоящего из ветвей и узлов с фиксированным направлением каждой ветви. Введем векторы u_B , i_B , e_B , соответственно, для напряжений, токов ветвей и напряжений действующих в них источников. Положительные направления для каждой из указанных переменных примем совпадающими с направлением соответствующей ветви. В ветвях с источником тока направление

ветви следует выбирать совпадающим с направлением тока, а в ветвях с источниками напряжения – противоположным направлению ЭДС. Направление ветвей с R, L, C можно выбирать произвольно.

В зависимости от обстоятельств под ветвью будем понимать или отдельный элемент цепи (индуктивность, емкость, сопротивление, идеальный источник напряжения или тока), или их последовательное соединение. Не нарушая общности, далее будем считать, что ветвь содержит не более одного источника, каковым может быть либо источник тока, либо источник ЭДС. Если в цепи имеется последовательное соединение источника тока и источника ЭДС, всегда можно рассматривать их принадлежащими разным ветвям. Таким образом, узлами цепи могут быть как точки соединения трех и более ветвей (неустраняемые узлы), так и точки соединения двух ветвей (устраняемые узлы).

Обозначим через $\mathcal{A}(m \times n)$; $\mathcal{B}(l \times n)$, соответственно, узловую и контурную матрицы цепи. Строки матрицы \mathcal{A} соответствуют узлам, а столбцы – ветвям цепи. Элементы матрицы \mathcal{A} : $a_{ij} = 0$, если j -ая ветвь не примыкает к узлу i ; $a_{ij} = \pm 1$ в противном случае, причем знак $+$ берется, если ветвь направлена от узла. Здесь $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Строки матрицы \mathcal{B} соответствуют контурам цепи, столбцы – ветвям. Элементы \mathcal{B} : $b_{ij} = 0$, если j -ая ветвь не входит в контур i ; $b_{ij} = \pm 1$ в противном случае, причем знак $+$ берется, если направление ветви совпадает с направлением обхода контура. Здесь $i = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, n}$.

В общем случае уравнения цепи состоят из трех частей [84]:
уравнения баланса токов в узлах (первый закон Кирхгофа)

$$\mathcal{A}i = 0;$$

уравнений баланса напряжений в контурах (второй закон Кирхгофа)

$$\mathcal{B}u = 0; \tag{3.16}$$

и уравнений ветвей (обобщенный закон Ома)

$$u_B = \frac{d(L_B i_B)}{dt} + R_B i_B + \tilde{C}_B \int_{t_0}^t i_B d\tau + u_C(t_0) + e_B, \tag{3.17}$$

где R_B, \tilde{C}_B – диагональные матрицы активных сопротивлений и величин, обратных емкости ветви, соответственно; L_B – матрица индуктивностей, которая может быть вырожденной, e_B – вектор напряжений на зажимах источников (тока и напряжения).

Подставим (3.17) в (3.16) и обозначим $i_B = x$, тогда мы получим систему интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}L_B \\ 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} \mathcal{B}R_B \\ \mathcal{A} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \mathcal{B}\tilde{C}_B \\ 0 \end{pmatrix} \int_{t_0}^t x(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} -u_C(t_0) - e_B \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Система (3.18) в общем случае является переопределенной. Вычеркивая в матрице \mathcal{A} линейно-зависимые строки, мы можем привести систему к замкнутому виду.

В монографии Е.И. Ушакова [84] описано явление, которое в нашем случае будет интерпретироваться следующим образом: при неудачном выборе контуров система (3.18) имеет индекс выше 1. Это означает, что малым возмущениям входных данных могут соответствовать большие возмущения решений. Поэтому мы предлагаем при формировании системы уравнений использовать построение системы по аналогии с системами гидравлических цепей:

$$\begin{pmatrix} \bar{L}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_B & -\mathcal{A}_1^\top \\ \mathcal{A}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \tilde{C}_B \int_{t_0}^t x(\tau)d\tau \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2^\top \varphi^*(t) - u_C(t_0) - e_B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

где $\varphi^*(t)$ – вектор-функция известных потенциалов, \bar{L}_B – диагональная матрица индуктивностей; $\varphi(t)$ – вектор-функция неизвестных потенциалов в узлах цепи; $(\mathcal{A}_1^\top \ \mathcal{A}_2^\top) = \mathcal{A}^\top$, причем матрица \mathcal{A}_1 имеет полный ранг.

3.2.3 Представление электрических цепей в виде вырожденных систем ИДУ

В ИСЭМ СО РАН имеется установка для проведения различных физических экспериментов [12]. Структуру этой установки можно схематически изобразить в виде двухконтурной ГЦ (см. рис. 3.6 а). Для сравнения свойств электрических и гидравлических цепей была выписана двухконтурная схема ЭЦ (см. рис. 3.6 б).

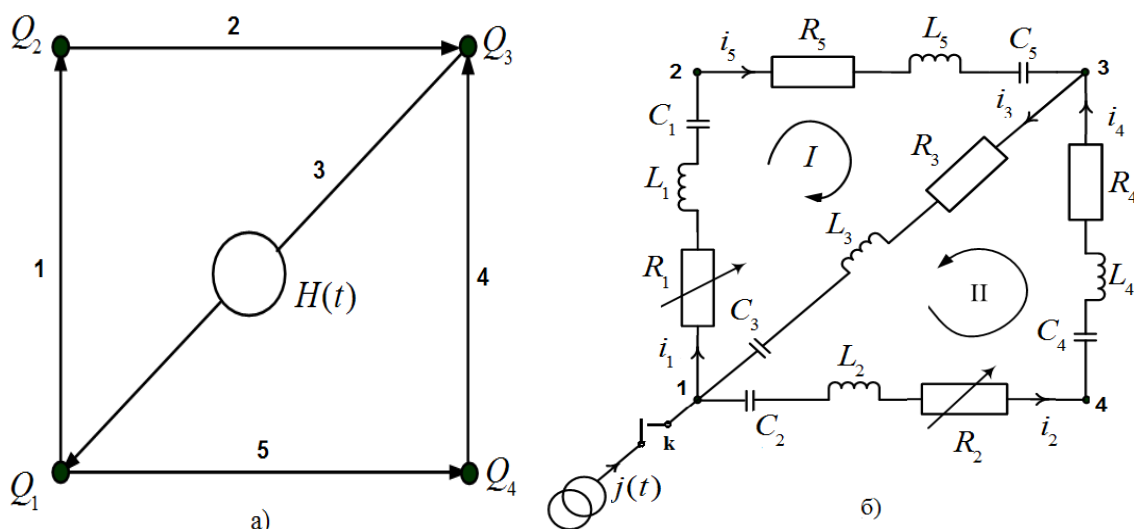


Рис. 3.6. а) Двухконтурная гидравлическая цепь; б) двухконтурная электрическая цепь

Рассмотрим электрическую цепь, направления токов в которой предполагаются аналогичными рис. 3.6 б. Положим, что в цепи внешний периодический (гармонический) источник тока $j(t)$, напряжение которого изменяется по периодическому закону с частотой $f = 2\pi/\omega$. При закрытии ключа K источник тока включается, и на ветвях 1, 2, 3, 4, 5 цепи возникают вынужденные колебательные напряжения u_{12} , u_{14} , u_{31} , u_{43} , u_{25} , которые создают токи i_1 , i_2 , i_3 , i_4 , i_5 , соответственно, где $u_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$ – напряжение между i -м и j -м узлами, φ_i (φ_j) – потенциал в i -ом (j -ом) узле. При этом конденсаторы C_i начинают заряжаться от $u_{C_i}(t_0) = 0$ до напряжения $U_{C_i} = \max(u_{C_i})$ за некоторый промежуток времени t , где $i = \overline{1, 5}$, C_i , u_{C_i} – емкость и напряжение конденсатора, соответственно, $u_{C_i}(t_0)$ – напряжение конденсатора C_i в момент $t = t_0 = 0$. При установившихся

вынужденных колебаниях все напряжения изменяются с частотой ω внешнего источника переменного тока. После открытия ключа K источник тока отключится и начинается процесс зарядки конденсаторов через резисторы и катушки индуктивности. Эти процессы имеют колебательный характер. Это – свободные затухающие колебания.

Параметры L и C колебательного контура определяют собственную частоту свободных колебаний

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Итак, если частота ω вынужденного источника тока и собственная частота ω_0 свободных колебаний некоторого контура цепи равны, тогда возникает явление резонанса и ток в таком контуре цепи достигнет максимального значения.

Используя общие правила, изложенные в предыдущем параграфе, выпишем уравнения для двухконтурной цепи, изображенной на рис. 3.6 б.

Матрица A примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица A имеет неполный ранг.

Контурная матрица B запишется как

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в замкнутом контуре (I) и (II) имеем $u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0$, $u_{14} + u_{43} + u_{31} = 0$. При включении источника тока в момент $t = 0$ имеем $u_{0C_1} + u_{0C_3} + u_{0C_5} = 0$, $u_{0C_2} + u_{0C_3} + u_{0C_4} = 0$, а когда отключен источник тока, имеем $u_{0C_1} + u_{0C_3} + u_{0C_5} = u_{12} + u_{31} + u_{23} = 0$, $u_{0C_2} + u_{0C_3} + u_{0C_4} = u_{14} + u_{31} + u_{43} = 0$. Тогда используя уравнение (3.17) (здесь нет источника напряжений, т. е. $e_B = 0$), мы получим:

для замкнутого контура (I)

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} + L_5 \frac{di_5}{dt} + R_1 i_1 + R_3 i_3 + R_5 i_5 + \\ + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1(\tau) d\tau + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3(\tau) d\tau + \frac{1}{C_5} \int_0^t i_5(\tau) d\tau = 0;$$

для замкнутого контура (II)

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} + L_4 \frac{di_4}{dt} + R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 + \\ + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2(\tau) d\tau + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3(\tau) d\tau + \frac{1}{C_4} \int_0^t i_4(\tau) d\tau = 0.$$

Выпишем систему (3.18) применительно к схеме из рис. 3.6 б, получим систему

ИДУ

$$\begin{pmatrix} L_1 & 0 & L_3 & 0 & L_5 \\ 0 & L_2 & L_3 & L_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 0 & R_3 & 0 & R_5 \\ 0 & R_2 & R_3 & R_4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & \frac{1}{C_3} & 0 & \frac{1}{C_5} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} i_1(\tau) \\ i_2(\tau) \\ i_3(\tau) \\ i_4(\tau) \\ i_5(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j(t) \\ 0 \\ -j(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Система (3.20) является переопределенной. Для решения такой системы в работах [35; 65; 83; 92] вычеркивается в матрице \mathcal{A} одна линейно-зависимая строка. Тогда система (3.20) становится замкнутой. В данной работе будем решать переопределенную систему (3.20) методом наименьших квадратов.

С другой стороны, можем поставить задачу так, что потенциал φ_4 в узле 4 известен, тогда выпишем систему (3.19) применительно к схеме из рис. 3.6 б,

имеем

$$\mathcal{A}_1^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2^\top = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получим систему ИДУ

$$\begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} i_1(\tau) \\ i_2(\tau) \\ i_3(\tau) \\ i_4(\tau) \\ i_5(\tau) \\ \varphi_1(\tau) \\ \varphi_2(\tau) \\ \varphi_3(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varphi_4 \\ 0 \\ \varphi_4 \\ 0 \\ j(t) \\ 0 \\ -j(t) \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Подставим числовые значения и решим получившуюся систему уравнений. Расчеты производятся с помощью вычислительной машины.

Помимо исходной модели рассматриваются электрические цепи с регуляторами. Два резистора R_1, R_2 могут изменить сопротивления

$$\tilde{R}_1 = R_1 + k_1 \int_0^t (|i_1(\tau)| - |\theta_1(\tau)|) d\tau,$$

$$\tilde{R}_2 = R_2 + k_2 \int_0^t (|i_2(\tau)| - |\theta_2(\tau)|) d\tau,$$

где $\theta_1(t), \theta_2(t)$ – задания регуляторов токов на ветвях 1 и 2.

Исследованы системы с учетом возможных изменений сопротивления, индуктивности, емкости при зависимости от температуры в разное время суток:

$$\bar{j}(t) = j(t) + \epsilon(t), \quad \bar{R}_\kappa = R_\kappa(t) + \epsilon_{R_\kappa}(t),$$

$$\bar{L}_\kappa = L_j(t) + \epsilon_{L_\kappa}(t), \quad \bar{C}_\kappa = C_\kappa(t) + \epsilon_{C_\kappa}(t),$$

где $\kappa = 1, 2, \dots, 5$; ϵ – обозначение малого возмущения.

3.3 Исследование моделей гидравлических и электрических цепей

3.3.1 Исследование моделей гидравлических цепей

Выясним некоторые качественные свойства системы (3.13).

Лемма 3.3.1. *Если в системе (3.13) матрица S_1 не зависит от компонент вектор-функции $P(t)$, то система имеет индекс 2.*

Доказательство. Рассмотрим произведение

$$Y_1 \circ \Omega(X, P) = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \mathcal{A}_1^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{P} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R^{-1}(t)S_0 & -R^{-1}(t)\mathcal{A}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} R^{-1}(t)S_1 |X(t)| X(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

где $Y_1 = \begin{pmatrix} R^{-1}(t) & 0 \\ 0 & (d/dt)E_{m_1} \end{pmatrix}$, $\Omega(X, P)$ – оператор системы (3.13). Если в системе (3.13) матрица S_1 не зависит от P , то, действуя на произведение (3.22) оператором

$$Y_2 = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -(d/dt)\mathcal{A}_1^\top & (d/dt)E_{m_1} \end{pmatrix},$$

получим

$$Y_2 \circ Y_1 \circ \Omega(x, p) = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \tilde{U}(x) & \mathcal{A}_1^\top R^{-1}(t)\mathcal{A}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{P} \end{pmatrix} + \dots,$$

где $\tilde{U}(x)$ – некоторый блок подходящей размерности. Матрица \mathcal{A}_1 имеет полный ранг, матрица $R^{-1}(t)$ – диагональная с положительными элементами. Следовательно, матрица $\mathcal{A}_1^\top R^{-1}(t)\mathcal{A}_1$ – неособенная для всех $t \in T$. Произведение $Y_2 \circ Y_1$ является дифференциальным оператором второго порядка. \square

Лемма 3.3.2. *Пусть в системе (3.13) $H(t) \equiv 0$, $P^*(t) \equiv 0$, $Q_1(t) \equiv 0$, $t \in I_t$, регуляторы отсутствуют. Тогда множество \mathcal{M} из определения 1.4.2 существует для всех t_0 и через любую точку (X_0, P_0, t_0) , где $(X_0, P_0) \in \mathcal{M}$, проходит единственное решение системы (3.13), и система (3.13) обладает свойством конвергенции.*

Доказательство. Опишем вначале множество \mathcal{M} из определения 1.4.2.

Очевидно, что в условиях леммы необходимо выполнение равенства $\mathcal{A}_1^\top X(t_0) =$

0. Далее, сама система (3.13) не удовлетворяет четвертому условию теоремы 1.4.1, но этому условию удовлетворяет система с оператором из соотношения (3.22) $Y_1 \circ \Omega(X, P) = 0$. Прямым вычислением показывается, что $\det [\lambda \mathcal{S}(\alpha) + \mathcal{D}(a, 0, \alpha)] = [\mathcal{A}_1^\top R^{-1}(t) \mathcal{A}_1] \lambda^n + \dots$, и условие 4 теоремы 1.4.1 выполнено для всех значений t . Для выполнения условия 3 теоремы 1.4.1 необходимо и достаточно выполнения в точке t_0 равенства

$$[\mathcal{A}_1^\top R^{-1}(t) \mathcal{A}_1] P(t) = -\mathcal{A}_1^\top R^{-1}(t) S_1 |X(t)| X(t). \quad (3.23)$$

Множество решений системы $\mathcal{A}_1^\top X(t_0) = 0$ непусто. В силу неособенности матрицы $\mathcal{A}_1^\top R^{-1}(t) \mathcal{A}_1$ для любого $X(t_0) = 0$ найдется допустимое начальное значение $P(t_0) = 0$. Итак, множество \mathcal{M} непусто и согласно теореме 1.4.1 для допустимых начальных данных найдется окрестность точки t_0 , на которой определено решение системы (3.13). Пусть $y(t) = (X(t) \quad P(t))^\top$ – решение системы (3.13). Рассмотрим скалярное произведение

$$(y, \Omega(X, P)) = (1/2) \sum_{i=1}^n r_i(t) \frac{d}{dt} [x_i^2(t)] + \sum_{i=1}^n [s_{0,i} x_i^2(t) + s_{1,i} x_i^2(t) |x_i(t)|] = 0. \quad (3.24)$$

Здесь учтено, что матрица $R(t)$ диагональная и

$$-(X, \mathcal{A}_1 P) + (P, \mathcal{A}_1^\top X) \equiv 0.$$

Допустим, что у системы (3.13) существует $\eta(t)$ – ненулевое ограниченное решение, определенное на I_t . Из равенства (3.24) видим, что для любого ненулевого решения

$$\sum_{i=1}^n r_i(t) \frac{d}{dt} [x_i^2(t)] < 0. \quad (3.25)$$

Следовательно, при $t \rightarrow -\infty$ имеем $\|\eta(t)\|_{\mathbf{I}} \rightarrow \infty$. Получили противоречие. Нулевое решение является единственным ограниченным решением на $\in I_t$. Из соотношений (3.23), (3.25) следует справедливость леммы. \square

3.3.2 Исследование моделей электрических цепей

Лемма 3.3.3. *Индекс системы (3.18) зависит только от индуктивностей цепи L_j , $j = 1, 2, \dots$. Если индекс системы (3.18) равен 1, то он не меняется при произвольных изменениях матриц \tilde{C}_B , R_B , и при малых возмущениях элементы матрицы R_B не меняют индекс системы.*

Доказательство. Пусть система (3.18) имеет индекс 1. Тогда действуя на систему оператором $\begin{pmatrix} E_l & 0 \\ 0 & (d/dt)E_m \end{pmatrix}$, получим систему

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}\bar{L}_B \\ \mathcal{A} \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} \mathcal{B}R_B \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \mathcal{B}\tilde{C}_B \\ 0 \end{pmatrix} \int_{t_0}^t x(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} -u_C(t_0) - e_B \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}\bar{L}_B \\ \mathcal{A} \end{pmatrix}$ зависит только от \bar{L}_B и согласно определению 1.1.9 ее ранг полный. Малые возмущения элементов матрицы \bar{L}_B не меняют ранга матрицы \tilde{A} , если он полный. Любые возмущения матриц R_B , \tilde{C}_B не влияют на свойства матрицы \tilde{A} . \square

Лемма 3.3.4. *Система (3.19) имеет индекс 2 при любых \bar{L}_B с положительными элементами.*

Доказательство. Для системы (3.19) рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} Y_1 \circ \Omega(x, \varphi) = & \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \mathcal{A}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{L}_B^{-1}R_B & -\bar{L}_B^{-1}\mathcal{A}_1^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} \bar{L}_B^{-1}[\tilde{C}_B \int_{t_0}^t x(\tau)d\tau] \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $Y_1 = \begin{pmatrix} \bar{L}_B^{-1} & 0 \\ 0 & (d/dt)E_m \end{pmatrix}$, $\Omega(x, \varphi)$ – оператор системы (3.19). Действуя на произведение (3.26) оператором

$$Y_2 = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -(d/dt)\mathcal{A}_1 & (d/dt)E_m \end{pmatrix},$$

получим

$$Y_2 \circ Y_1 \circ \Omega(x, \varphi) = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \tilde{U}(x) & \mathcal{A}_1 \bar{L}_B^{-1}(t) \mathcal{A}_1^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \dots,$$

где $\tilde{U}(x)$ – некоторый блок подходящей размерности. Матрица \mathcal{A}_1 имеет полный ранг, матрица L_B имеет положительные элементы, поэтому матрица $\mathcal{A}_1 \bar{L}_B^{-1} \mathcal{A}_1^\top$ неособенная. Тогда матрица $\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \tilde{U}(x) & \mathcal{A}_1 \bar{L}_B^{-1}(t) \mathcal{A}_1^\top \end{pmatrix}$ имеет полный ранг, т.е. система (3.19) имеет индекс 2. Произведение $Y_2 \circ Y_1$ является дифференциальным оператором второго порядка. \square

Основные результаты третьей главы

1. Выписаны математические модели ГЦ и ЭЦ с регуляторами в виде вырожденных систем ИДУ.
2. В качестве примеров построена модель ГЦ связки «прямоточный котел – турбина» и ЭЦ двухконтурной установки, которая является аналогом двухконтурной ГЦ, описывающей реальную установку.
3. Изучены свойства моделей ГЦ и ЭЦ на основе теории вырожденных систем ИДУ, изложенных в первой главе. Вычислен индекс системы ИДУ и получены условия разрешимости.
4. Проведен анализ влияния малых возмущений входных данных на свойства вырожденных систем ИДУ, моделирующих ГЦ и ЭЦ.

Глава 4. Программный комплекс для исследования систем

В этой главе описываются структуры комплекса программ для решения моделей ГЦ (например, модель ГЦ связки «Прямоточный котел – турбина») и ЭЦ (например, модель двухконтурной цепи).

4.1 Программа для решения гидравлических цепей

4.1.1 Описание структуры программы

Функциональное назначение. Программа решения интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) модели нестационарной гидравлической цепи на основе теории вырожденных систем ИДУ предназначена для решения модели нестационарных гидравлических цепей с использованием автоматических регуляторов питательной воды и температуры на основе теории вырожденной системы ИДУ. Программа позволяет автоматически получить графики расходов и давлений в нестационарных гидравлических цепях, а также получить вывод значений вектор-функции расходов и давлений для заданных компонент вектор-функции расходов и давлений в заданных точках отрезка интегрирования. Возможно использование программы при преподавании таких дисциплин, как численные методы решения и исследования модели нестационарных ГЦ, описывающих пароводяные тракты прямоточных котлов тепловых электростанций и систем пылеприготовления этих котлов. Программный комплекс зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ (приложение 2).

Язык программирования – язык пакета Matlab версии 7.11.0.584 R2010b. В данной программе использовались следующие основные компоненты: *uitable* – для загрузки данных (в виде матриц) из файла Excel в программу; *Edit* –

для ввода и редактирования входных параметров: отрезок интегрирования, шаг интегрирования, и т.д.; *axes* – для вывода на экран графика функции.

Основные функции и процедуры языка Matlab, использованные в программе: *xlsread* – для чтения данных из файла Excel; *xlswrite* – для записи данных в файле Excel; *uigetdir* – для указания каталога, где хранится входной файл данных; *inv* – для вычисления обратной матрицы.

Логическая структура программы:

- ввод данных в файле и диалоговом окне программы;
- загрузка данных из файла в программу, редактирование и сохранение отредактированных входных данных;
- вычисление приближенных решений;
- вывод решения и его графика.

На рис. 4.1 показывается пользовательский интерфейс программы решения моделей ГЦ.

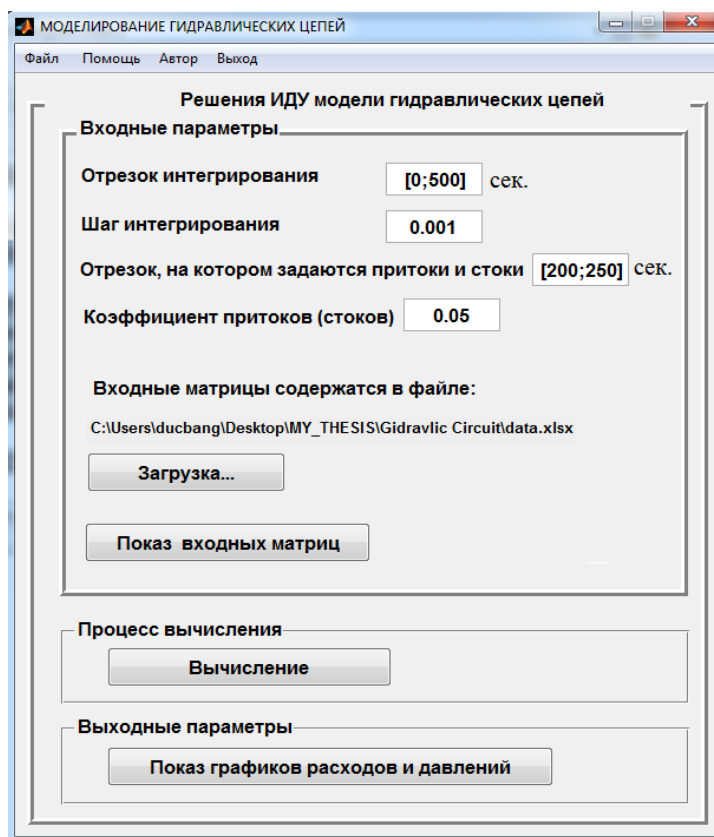


Рис. 4.1. Программа для решения гидравлических цепей

Кнопки, используемые в программе:

- «Загрузка» – для загрузки данных из файла «data.xlsx» в программу. Если данные имеют неправильные форматы, то возникает сообщение об ошибке;
- «Файл» – для указания каталога, где сохраняется файл «data.xlsx»;
- «Показ входных матриц» – для показа визуально в программе значения входных матриц (на рис. 4.2 показывается форма входных матриц). При этом можно изменить и сохранить входные данные;
- «Вычисление» – для расчета результатов;
- «Показ графиков расходов и давлений» – для просмотра результатов вычисления в виде графиков (см. рис. 4.5). Можно показать вывод значений вектор-функции расходов и давлений для заданных компонент вектор-функции расходов и давлений в заданных точках отрезка интегрирования.

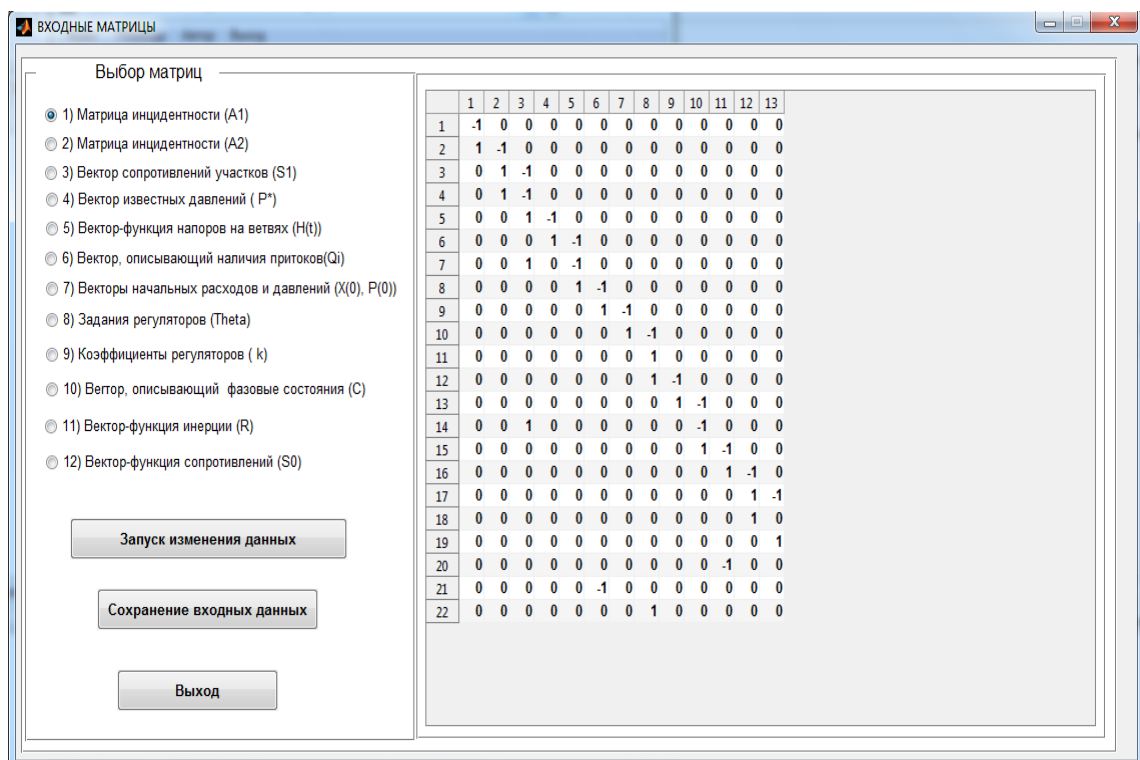


Рис. 4.2. Форма показа входных матриц

На рис. 4.3 представлена обобщенная схема алгоритма работы модулей программы.

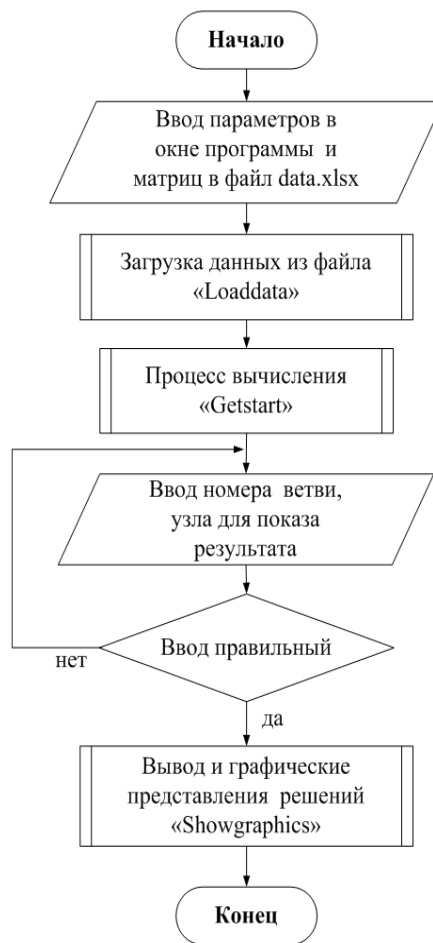


Рис. 4.3. Обобщенная схема алгоритма работы модулей программы

Алгоритм и описание программы нахождения численного решения сводится к следующим этапам:

Шаг 1. Ввод данных осуществляется пользователем в файле «data.xlsx» (Excel) и в диалоговом окне.

Входные данные, введенные в диалоговом окне:

1. $[a, b]$ – отрезок интегрирования; h – шаг интегрирования;
2. $[t_1, t_2]$ – отрезок, на котором задаются притоки или стоки, $[t_1, t_2] \subset [a, b]$;
3. k – коэффициент притоков (стоков), $k > 0$;
4. номер ветви, на которой будет показан график изменения расхода;
5. номер узла, в котором будет показан график изменения давления;
6. момент времени показа значений расходов ветвей и давлений узлов.

Входные данные, введенные в файле «data.xlsx»:

1. R – матрица инцидентности ГЦ;
2. S_1 – матрица сопротивлений участков ГЦ;
3. P^* – вектор-функция известных давлений в узлах ГЦ;
4. H – вектор-функция напоров на ветвях ГЦ;
5. Q_i – вектор, описывающий наличие притоков и стоков в узлах ГЦ. Здесь значения вектора Q_i задаются следующим образом: $Q_i(i) = 1$, если в узле i ГЦ есть приток; $Q_i(i) = 0$, если в узле i ГЦ нет притока. Вектор-функция притоков Q в программе задана следующим образом:

$$\begin{cases} q_i(t) = 0 \text{ при } t < t_1, t > t_2, \\ q_i(t) = k(t - t_1)(t - t_2) \text{ при } t_1 \leq t \leq t_2, \end{cases}$$

где $[t_1, t_2]$ – отрезок, на котором действуют притоки, $k > 0$ – коэффициент притоков;

6. X_0, P_0 – вектор начальных расходов в участках цепи и вектор начальных давлений в узлах цепи, соответственно. Начальные значения расходов задаются так, чтобы удовлетворялись условия уравнений балансов расходов в узлах. Начальные значения давлений задаются так, что давление в конце ветви меньше давления в начале;
7. K – вектор коэффициентов регуляторов на участках, $K(i) = 0$, если в i -й ветви нет регулятора;
8. Θ – вектор заданных значений регуляторов, $\Theta(i) = 0$, если в i -й ветви нет регулятора;
9. C – вектор номеров участков, содержащих различные технические устройства (регулирующие клапана, ступени турбины), со средой в разных фазовых состояниях (жидкость, газ, смесь жидкости и газа). Здесь значения вектора C задаются следующим образом: $C(i) = 0$, если на участке i течет вода или смеси пара и воды, $C(i) = 1$, если на участке i пар, $C(i) = -1$, если участок i содержит регулятор и $C(i) = 2$, если участок i содержит регулирующее клапана;

10. A_1 и A_2 – матрицы инцидентности;
 11. S_0 – матрица сопротивлений участков ГЦ.

На рис. 4.4 показывается пример файла «data.xlsx».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
2	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
3	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
4	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
5	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
6	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0				
7	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0				
8	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0				
9	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0				
10	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0				
11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0				
12	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0				
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0				
14	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0				
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0				
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0				
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1				
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0			
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0			
21	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0			
22	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0			

Рис. 4.4. Пример файла data.xlsx

Шаг 2. Загрузка данных из файла «data.xlsx» осуществляется при помощи процедуры *Loaddata*. В процедуре *Loaddata* использована функция *xlsread* для загрузки всех числовых элементов некоторой матрицы A из файла «data.xlsx» в матрицу $numA$: $[numA, txtA, rawA] = xlsread(path_folder, 'A')$, где $path_folder$ – ссылка на каталог, сохраняющий файл «data.xlsx», $numA$ – числовые элементы матрицы A , $txtA$ – текстовые элементы матрицы A . Для сохранения отредактированных входных данных в файл в программе использована процедура *xlswrite*.

Шаг 3. Вычисление приближенных решений.

Система (3.13) в исходном виде имеет индекс 2, поэтому ее заменяем системой, у которой продифференцированы последние m_1 уравнений

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ \mathcal{A}_1^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_0 & -\mathcal{A}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 |x(t)| x(t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} H(t) + \mathcal{A}_2 p^*(t) \\ \dot{Q}_1(t) \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Эта система имеет индекс 1, для нее выполнен критерий «ранг-степень» для всех $t \in T$. Тогда можно применить метод (2.9) для решения.

По входным данным автоматически формируется система ИДУ вида (4.1) и эта система решается разностным методом первого порядка (2.9). Здесь положим

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}, \quad \Gamma(Z, t) = \begin{pmatrix} S_0 X - \mathcal{A}_1 P + S_1 |X| X - \mathcal{A}_2 P^* \\ -\dot{Q}_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D} = \frac{\partial \Gamma}{\partial Z} = \begin{pmatrix} S_0 + 2S_1 |X| & -\mathcal{A}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что для учета свойств ветвей мы считаем, что гидравлические сопротивления могут зависеть от $X(t)$, $P(t)$ в зависимости от фазового состояния среды на ветви или вида технического устройства на ветви [45; 46].

Сопротивление $\tilde{s}_{1,i}$ на i -й ветви, в которой течет пар (если $C(i) = 1$) вычисляется формулой

$$\tilde{s}_{1,i} = \frac{s_{1,i} |x_i| x_i}{p_{ij} + p_{i\nu}}.$$

Сопротивление $\tilde{s}_{1,i}$ на i -й ветви, которая содержит регулирующий клапан (если $C(i) = 2$),

$$\tilde{s}_{1,i} = \frac{s_{1,i} |x_i| x_i}{p_{ij} - 0.09 p_{i\nu}},$$

где j и ν – входной и выходной узлы ветви i .

Сопротивление $\tilde{s}_{1,i}$ на i -й ветви, в которой течет вода или смесь воды и пара (если $C(i) = 0$),

$$\tilde{s}_{1,i} = s_{1,i}.$$

При наличии регуляторов (если $C(i) = -1$)

$$\tilde{s}_{1,i} = s_{1,i} + K(i) \int_0^{t_{\kappa+1}} (x_i(\tau) - \Theta(i)) d\tau \approx s_{1,i} + K(i) \sum_{\rho=0}^{\kappa} (x_{i,\rho} - \Theta(i)), \kappa = 0, 1, \dots$$

Для вычисления приближенных решений построена функция *Getstart*, в которой содержатся следующие функции: *get_G* предназначена для расчёта значений матрицы Γ ; *get_D* – для расчёта матрицы $\frac{\partial \Gamma}{\partial Z}$; *get_A* – для расчёта матрицы $\begin{pmatrix} R & 0 \\ \mathcal{A}_1^\top & 0 \end{pmatrix}$; *get_S1* – для расчёта матрицы \tilde{S}_1 , здесь интеграл вычисляется методом левых прямоугольников. Элементы матрицы \tilde{S}_1 всегда положительные, поэтому при расчете, если $\tilde{s}_{1,i} \leq 0.000001$, то положим $\tilde{s}_{1,i} = 0.000001$, где $\tilde{s}_{1,i}$ – элементы матрицы \tilde{S}_1 . Тогда имеем систему

$$\begin{cases} Z_0 = (X(0) \quad P(0))^\top, \\ Z_{i+1} = \text{inv}(\text{get_A} + h * \text{get_D}) * [\text{get_A} * Z_i - h * \text{get_G} + h * \text{get_D}]. \end{cases}$$

Этот процесс осуществляется циклом *for i* от 0 до $(b - a)/h$.

Шаг 4. Вывод решения и его графика осуществляется при помощи процедуры *Showgraphic*. В процедуре *Showgraphic* использовались команда *plot()* для вывода на экран графика решения, команда *num2str()* – для показа значения расхода или давления на экране программы.

Выходные данные программы:

- 1) графики изменений расходов в участках цепи;
- 2) графики изменений давлений в узлах цепи;
- 3) вывод значений вектор-функции расходов и давлений для заданных компонент вектор-функции расходов и давлений в заданных точках отрезка интегрирования.

На рис. 4.5 показывается форма графиков изменений расходов и давлений.

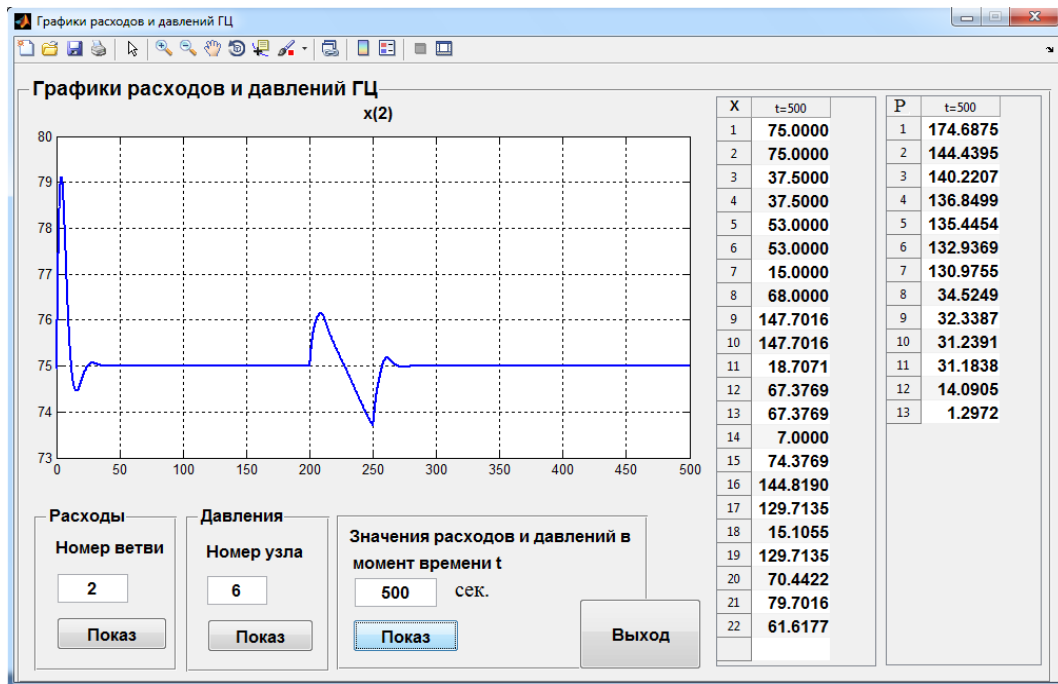


Рис. 4.5. Форма показа графиков изменений расходов и давлений

4.1.2 Результаты расчетов

Идентификация входных данных. Заданы номинальные значения расходов и давлений, взятые из данных теплового расчета ПК-24

$$X_n = [82; 82; 41; 41; 65; 65; 10; 75; 150; 150; 20; 65; 65; 7; 72; 144; 129; 15; 129; 72; 75; 65];$$

$$P_n = [170; 150; 145; 140; 138; 135; 133; 35; 33; 32; 31; 14; 1].$$

Сопротивления для участков ГЦ связки «Прямоточный котел - турбина» вычисляются по следующим формулам:

на участках, на которых течет вода или смесь пара и воды

$$s_i = \frac{|p_{\text{ВХ}} - p_{\text{ВЫХ}}|}{x_i^2},$$

где $p_{\text{ВХ}}$, $p_{\text{ВЫХ}}$ – входное и выходное давления участка i , $i = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 14)$;

на участках, на которых течет пар

$$s_i = \frac{|p_{\text{ВХ}}^2 - p_{\text{ВЫХ}}^2|}{x_i^2},$$

где $i = 8, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22$;

на участке, где находится регулирующий клапан x_9

$$s_9 = (-0.09p_6^2 + 1.09p_7p_6 - p_7^2)/x_9^2.$$

Тогда получим следующую таблицу входных данных (см. таб. 4.1).

Таблица 4.1

Входные данные модели ГЦ связки «Прямоточный котел – турбина»

Ветви	C	$X(0)$ (кг/с)	Θ (кг/с)	K	S_1 (diag)	R (diag)	Узлы	$P(0)$ (кг/см ²)	P^* (кг/см ²)	Q_i
1	0	76	0	0	0.0045	1	1	169.9	-	0
2	-1	76	75	0.0001	0.003	1	2	149.5	-	0
3	0	38	0	0	0.003	1	3	144.8	-	0
4	0	38	0	0	0.003	1	4	139.7	-	0
5	0	55	0	0	0.0012	1	5	137.8	-	0
6	0	55	0	0	0.0005	1	6	134.5	-	1
7	-1	10	15	0.005	0.07	1	7	132.9	-	0
8	1	65	0	0	0.1456	1	8	34.9	-	0
9	2	130	0	0	0.0107	1	9	32.9	-	0
10	1	130	0	0	0.7317	1	10	31.4	-	0
11	1	10	0	0	0.66	1	11	30.5	-	0
12	1	60	0	0	0.0322	1	12	13.6	-	0
13	1	60	0	0	0.0154	1	13	0.9	-	0
14	-1	11	7	0.05	2.3061	1	14	-	200	-
15	1	71	0	0	0.0122	1	15	-	150	-
16	1	142	0	0	0.0369	1	16	-	31	-
17	1	130	0	0	0.0117	1	17	-	35	-
18	1	12	0	0	0.80	1	18	-	4	-
19	1	130	0	0	0.0001	1	19	-	0.01	-
20	1	71	0	0	0.0509	1	20	-	30	-
21	1	65	0	0	0.76	1	-	-	-	-
22	1	60	0	0	0.0769	1	-	-	-	-

Приток задается следующим образом:

$$\begin{cases} q(t) = 0, & t < 200, t > 250, \\ q(t) = k(t - 200)(t - 250), & 200 \leq t \leq 250, k = 0.05. \end{cases}$$

Полагаем $S_0(t) \equiv 0$, $H(t) \equiv 0$, $h = 0.001$, $t \in [0, 500]$.

Используется разработанная программа в предыдущей параграфе для решения модели ГЦ связки прямооточного котла и турбины (см. рис. 3.4), получим графики изменений расходов и давлений с заданными значениями регуляторов и заданной функцией изменения плотности среды на участках кипения. Эти графики изображены на рисунках 4.6, 4.7.

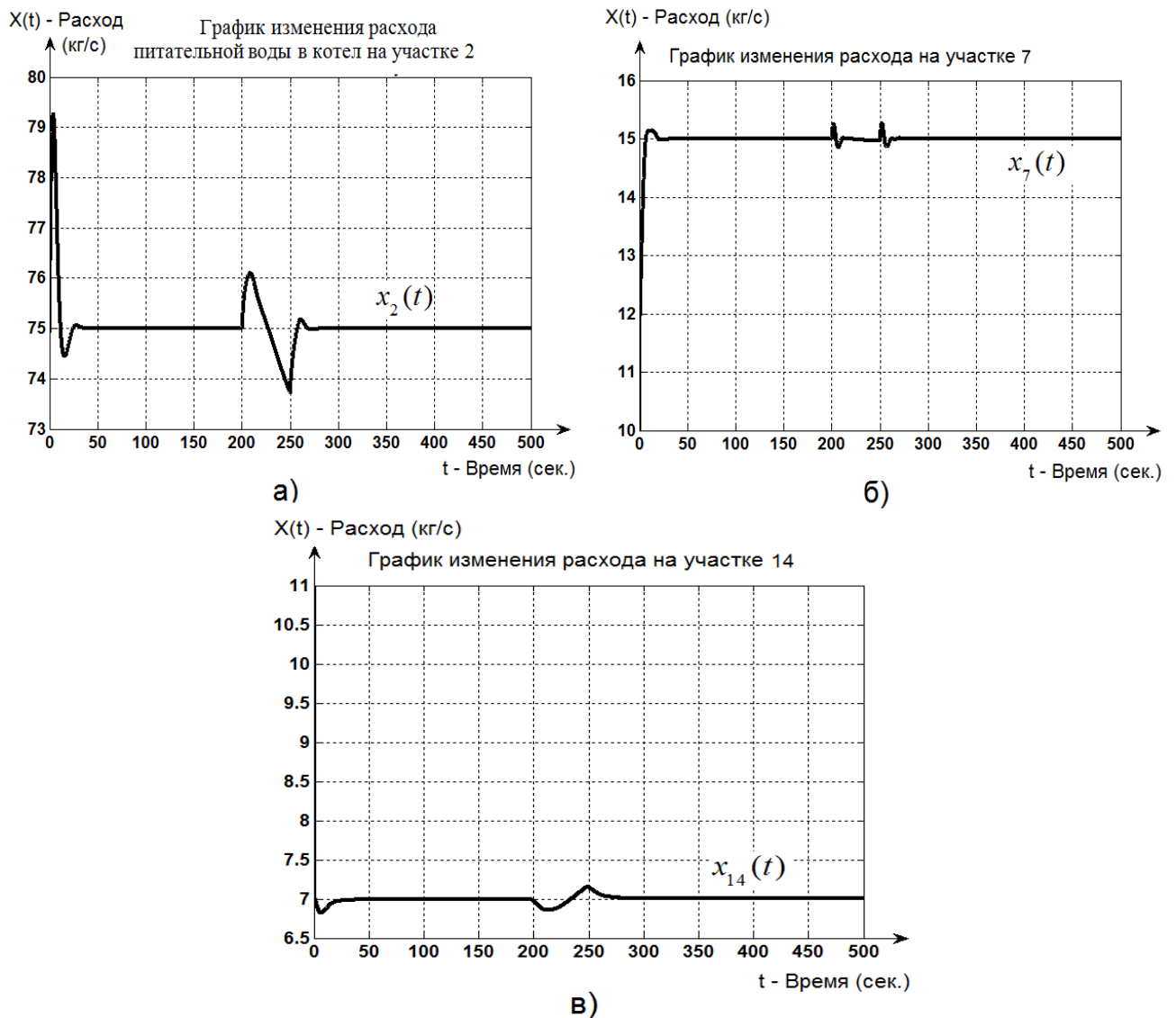


Рис. 4.6. Графики изменений расходов на участках 2 (рис. а), 7 (рис. б), 14 (рис. в)

В результате работы программы расходы на регулирующих ветвях достигли заданных значений, и отклик на функцию притока качественно соответствует экспериментальным наблюдениям.

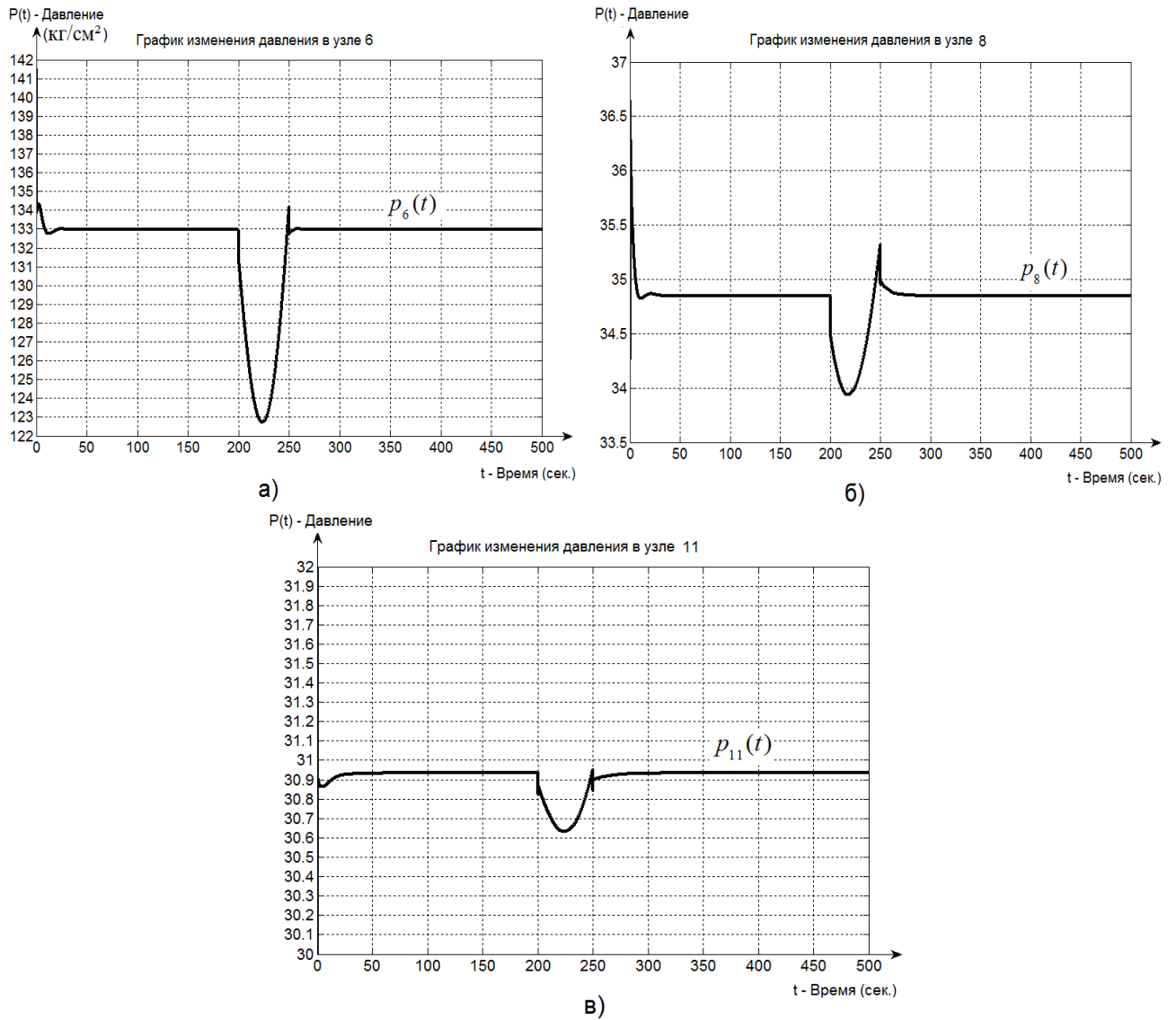


Рис. 4.7. Графики изменений давлений в узлах 6 (рис. а), 8 (рис. б), 11 (рис. в)

4.2 Программа для решения электрических цепей

На основе полученных теоретических результатов при моделировании ЭЦ и исследовании численных методов в предыдущих параграфах были разработаны программы для решения ЭЦ на языке Matlab. Будем решать системы (3.18) методом наименьших квадратов (см. описание программы в п. 2.2) и системы (3.19) разностным методом (2.10), описание программы которого приведено ниже.

4.2.1 Описание структуры программы

Программа решения ЭЦ методом разностных схем

Логическая структура программы:

- ввод данных в файл и диалоговом окне программы;
- загрузка данных из файла, редактирование и сохранение отредактированных входных данных на программе;
- вычисление приближенных решений;
- вывод решения и его графика.

На рис. 4.8 показывается пользовательский интерфейс программы решения моделей ЭЦ.

Кнопки, используемые в программе:

- «Загрузка» – для загрузки данных из файла «data.xlsx» в программу. Если данные имеют неправильные форматы, то возникает сообщение об ошибке;
- «Показ входных матриц» – для показа визуально в программе значения входных матриц. При этом можно изменить и сохранить входные данные;
- «Вычисление» – для расчета результатов.

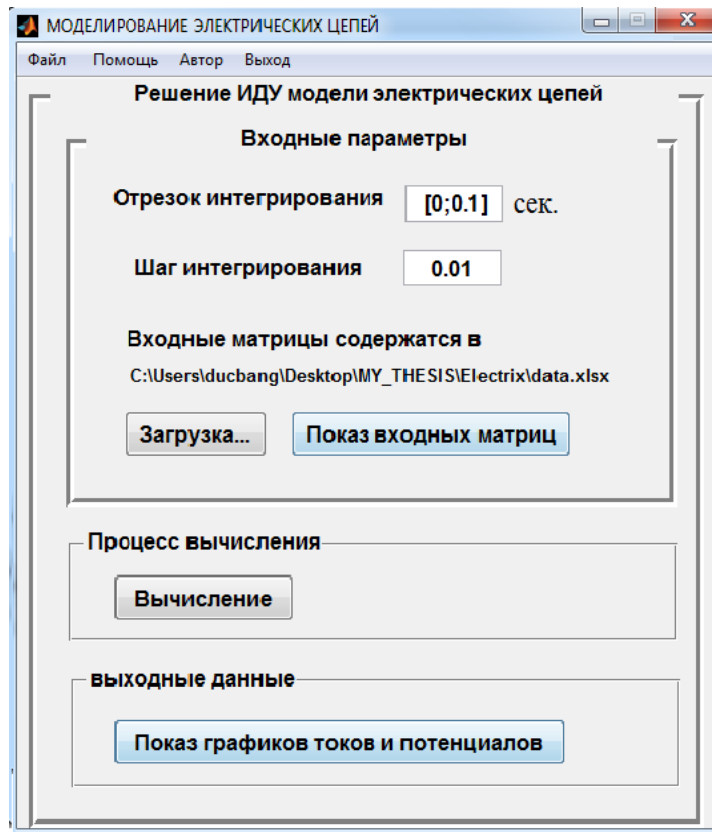


Рис. 4.8. Программа для решения электрических цепей

– «Показ графиков токов и потенциалов» – для просмотра результатов вычисления в виде графиков.

На рис. 4.9 представлена обобщенная схема алгоритма работы модулей программы.

Алгоритм и описание программы нахождения численного решения сводится к следующим этапам:

Шаг 1. Ввод данных осуществляется пользователем в файле «data.xlsx» (Excel) и в диалоговом окне.

Входные данные, введенные в диалоговом окне:

1. $[\alpha, \beta]$ – отрезок интегрирования;
2. τ – шаг интегрирования.

Входные данные, введенные в файл «data.xlsx»:

1. L_B – вектор индуктивностей ветвей ЭЦ;
2. R_B – вектор сопротивлений ветвей ЭЦ;
3. C_B – вектор емкостей ветвей ЭЦ;

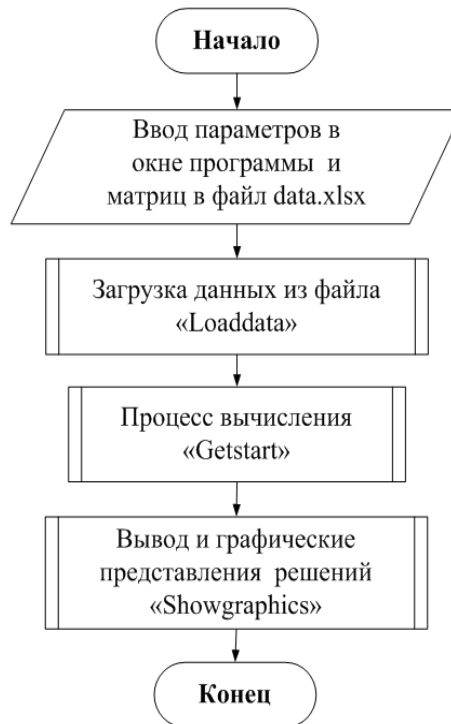


Рис. 4.9. Обобщенная схема алгоритма работы модулей программы

4. A_1, A_2 – матрицы инцидентности;
5. $u_C(t_0), e_B$ – вектор напряжений на зажимах емкостей и источников, соответственно;
6. $j(t)$ – источник тока;
7. $x(0), \varphi(0)$ – вектор начальных токов и потенциалов;
8. K – вектор коэффициентов регуляторов на участках, $K(i) = 0$, если в i -й ветви нет регулятора;
9. Θ – вектор заданных значений регуляторов, $\Theta(i) = 0$, если в i -й ветви нет регулятора.

Шаг 2. Загрузка данных из файла «data.xlsx» осуществляется при помощи процедуры *Loaddata*. В процедуре *Loaddata* использована функция *xlsread* для загрузки всех числовых элементов некоторой матрицы A из файла «data.xlsx» в матрицу $numA$: $[numA, txtA, rawA] = xlsread(path_folder, 'A')$, где $path_folder$ – ссылка на каталог, сохраняющий файл «data.xlsx», $numA$ – числовые элементы матрицы A , $txtA$ – текстовые элементы матрицы A . Для сохранения отредактированных входных данных в файл в программе использована процедура *xlswrite*.

Шаг 3. Вычисление приближенных решений.

Система (3.19) в исходном виде имеет индекс 2, поэтому ее заменяем системой, у которой индекс 1 и для нее выполнен критерий «ранг-степень» для всех $t \in T$:

$$\begin{pmatrix} \bar{L}_B & 0 \\ \mathcal{A}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_B & -\mathcal{A}_1^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{C}_B \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2 \varphi - [u_C(t_0) + e_B] \\ \dot{j}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Тогда можно применить метод (2.10) для решения. По входным данным автоматически формируется система ИДУ вида (4.2), которая решается методом разностных схем (2.10) при $k = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$.

Для вычисления приближенных решений построена функция *Getstart*, в которой содержатся следующие функции: *get_A* предназначена для расчёта значений матрицы $\begin{pmatrix} \bar{L}_B & 0 \\ \mathcal{A}_1 & 0 \end{pmatrix}$; *get_B* – для расчёта матрицы $\begin{pmatrix} R_B & -\mathcal{A}_1^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; *get_K* – для расчёта матрицы $\begin{pmatrix} \tilde{C}_B \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau \\ 0 \end{pmatrix}$, интеграл которой вычисляется методом левых прямоугольников; *get_f* – для расчёта матрицы $\begin{pmatrix} \mathcal{A}_2 \varphi - [u_C(t_0) + e_B] \\ \dot{j}(t) \end{pmatrix}$. При наличии регуляторов (если $K(i) \neq 0$)

$$\tilde{R}_i = R_i + K(i) \int_0^{t_{\kappa+1}} (|x_i(\tau)| - |\Theta_i(\tau)|) d\tau \approx R_i + K(i) \sum_{\rho=0}^{\kappa} (|x_{i,\rho}| - |\Theta_{i,\rho}|), \quad \kappa = 0, 1, \dots$$

Элементы \tilde{R}_i всегда положительные, поэтому при расчете, если $\tilde{R}_i \leq 0.000001$, положим $\tilde{R}_i = 0.000001$.

Шаг 4. Вывод решения и его графика осуществляется при помощи процедуры *Showgraphic*. В процедуре *Showgraphic* использовалась команда *plot()* для вывода графиков решений на экране программы.

Выходные данные – графики изменений токов на ветвях и потенциалов в узлах цепи.

4.2.2 Результаты расчетов

Используем разработанные программы для решения модели ЭЦ двухконтурной установки, описываемой в предыдущих параграфах. Входные данные отражены в табл. 4.2.

Таблица 4.2
Входные данные модели ЭЦ двухконтурной установки

Ветви	R (Ом)	L (Генри)	C (Фарад)	$i_B(0)$ (Ампер)	Узлы	φ^* (Вольт)	$\varphi(0)$ (Вольт)
1	50	$2/\pi$	$(10^{-4})/\pi$	0	1	-	0
2	50	$2/\pi$	$(10^{-4})/\pi$	0	2	-	0
3	50	$2/\pi$	$(10^{-4})/\pi$	0	3	-	0
4	50	$2/\pi$	$(10^{-4})/\pi$	0	4	0	-
5	50	$2/\pi$	$(10^{-4})/\pi$	0	-	-	-

При наличии тока $j(t) = 5\sqrt{2}\sin(100\pi t)$ процесс принимает стандартные синусоидальные колебания с периодом $T = 2\pi/\omega = 0.02$ секунды, как показано на рис. 4.10, 4.11.

На рис. 4.10 приведены результаты решения системы (3.20) методом наименьших квадратов (2.5). Интегрирование в формуле (2.5) и вычисление функционала проводилось по методу Симпсона с шагом $\tau = 0.1$ и порядком многочлена $k = 1$.

На рис. 4.11 приведены результаты решения системы (3.21) методом разностных схем (2.10) при влиянии возмущений. Интегрирование в формуле (2.11) проводилось по методу левых прямоугольников с шагом $\tau = 0.0001$. Малое возмущение задано таким образом: $\epsilon(t) = \delta \sin\left(\frac{kt}{\delta^2}\right)$, $k = 1$, $\delta = 0.001$.

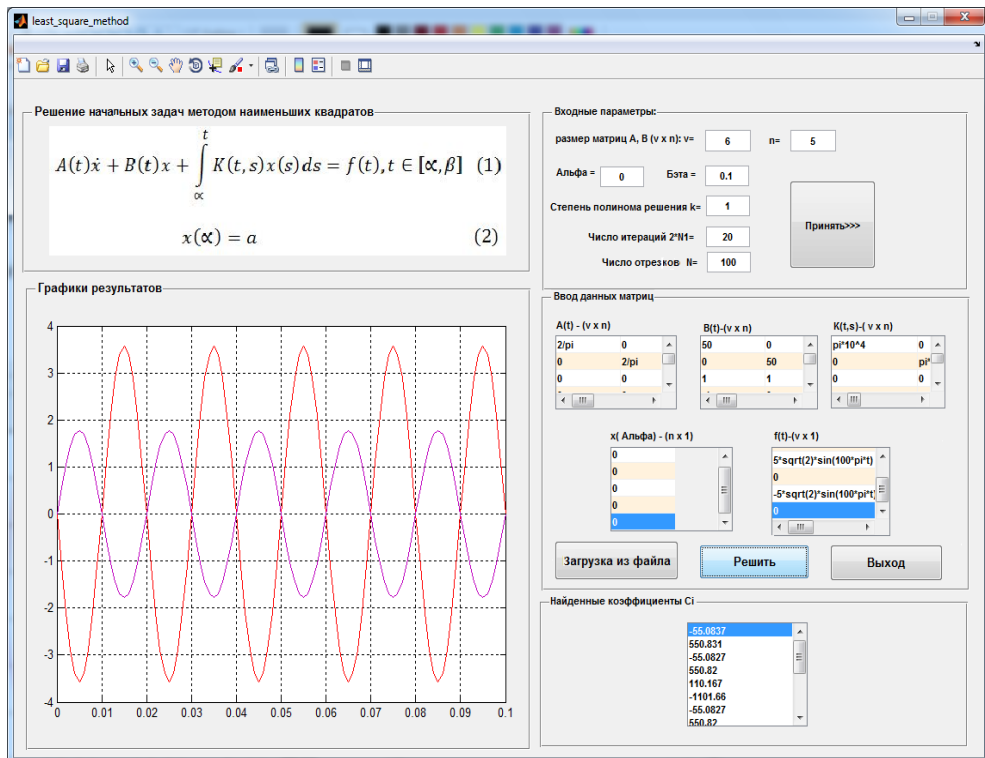
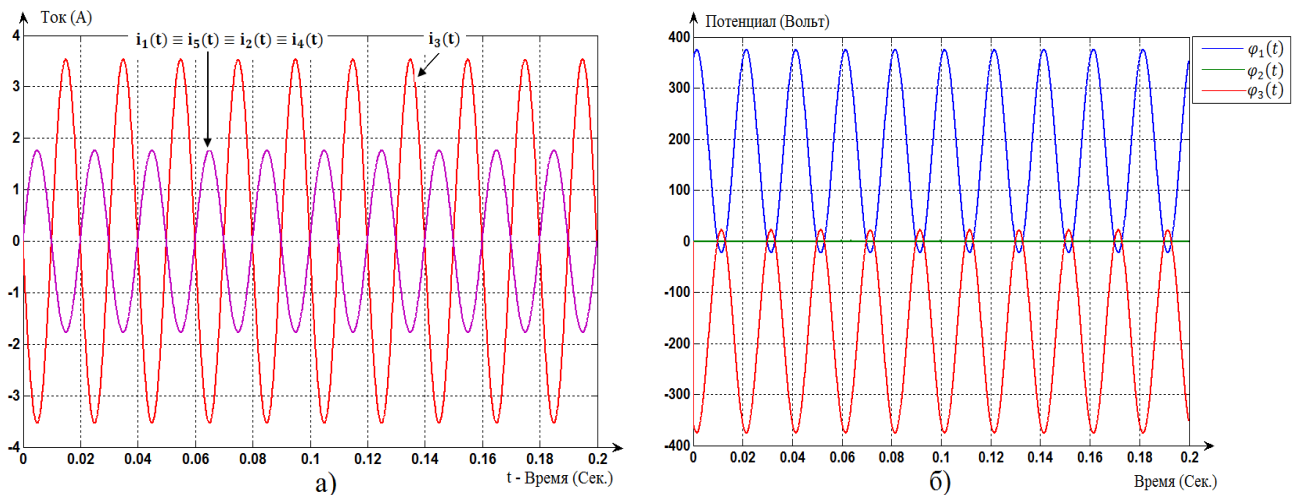


Рис. 4.10. Программа решения электрических цепей методом наименьших квадратов

Рис. 4.11. При $j(t) = 5\sqrt{2}\sin(100\pi t)$
а) токи на ветвях; б) потенциалы в узлах 1, 2, 3

При отсутствии действующего источника тока ($j(t) = 0$) процесс быстро стягивается к нулю (затухающие колебания, см. рис. 4.12).

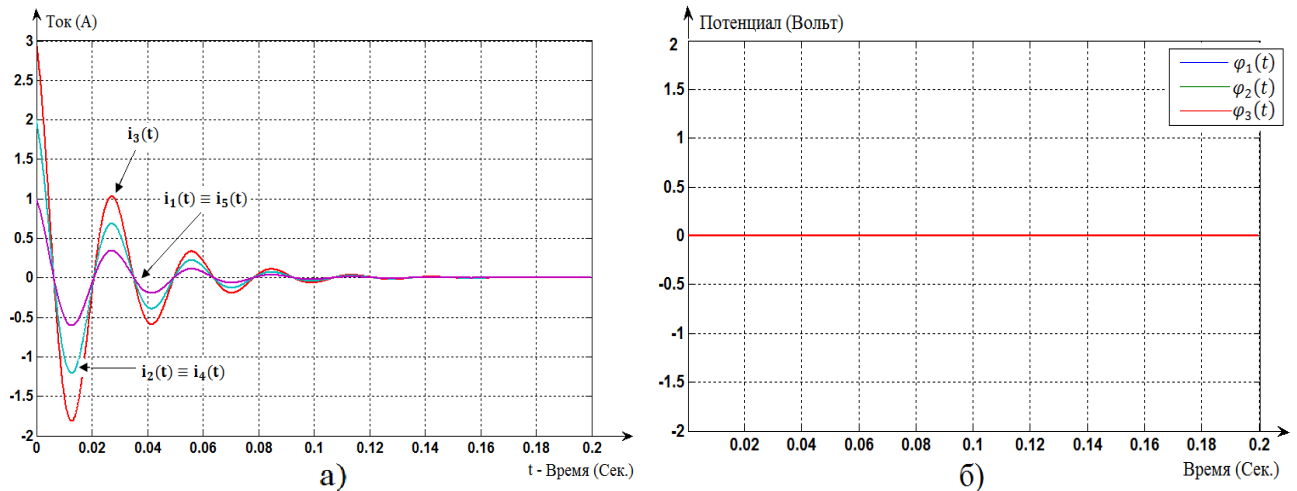


Рис. 4.12. При $j(t) = 0$, $i_B(0) = (1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1)^T$
а) токи на ветвях; б) потенциалы в узлах 1, 2, 3

Явление резонанса. Рассмотрим случай, когда данные задаются следующим образом:

Таблица 4.3
Входные данные модели ЭЦ двухконтурной установки

Ветви	R (Ом)	L (Генри)	C (Фарад)	$i_B(0)$ (Ампер)	Узлы	φ^* (Вольт)	$\varphi(0)$ (Вольт)
1	50	$0.625/\pi$	$(10^{-4})/\pi$	0	1	-	0
2	50	$0.5/\pi$	$(0.5 * 10^{-4})/\pi$	0	2	-	0
3	50	$0.5/\pi$	$(0.2 * 10^{-4})/\pi$	0	3	-	0
4	50	$0.5/\pi$	$(10^{-4})/\pi$	0	4	0	-
5	50	$0.625/\pi$	$(4 * 10^{-4})/\pi$	0	-	-	0

Узел 2 цепи является устранимым, поэтому ветви 1 и 5 являются последовательно соединенными. Можем считать, что это соединение эквивалентно общей ветви, у которой емкость, индуктивность, сопротивление вычисляются по формулам $1/C_{15} = 1/C_1 + 1/C_5$, $L_{15} = L_1 + L_5$, $R_{15} = R_1 + R_5$, соответственно. Тогда собственная частота 1-го контура цепи $\omega_0 = 1/\sqrt{(L_1 + L_5)(\frac{C_1 C_5}{C_1 + C_5})} = 100\pi$. Итак, $\omega_0 = \omega = 100\pi$, в 1-ом контуре цепи возникает явление *резонанса*. Токи $i_1 = i_5$ достигнут максимального значения, как показано на рис. 4.13 а.

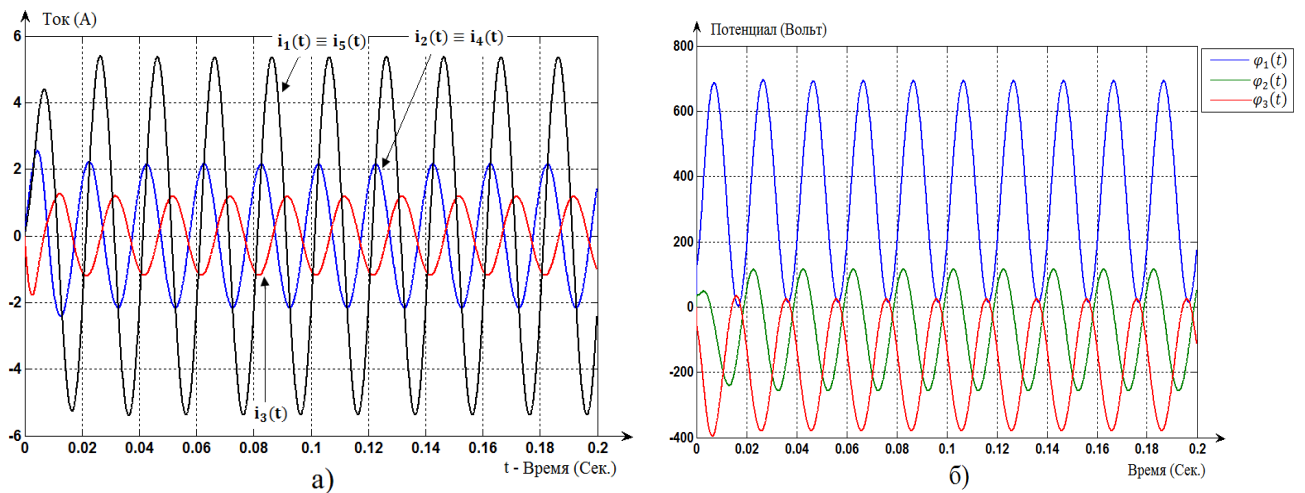


Рис. 4.13. Явление резонанса:
а) токи на ветвях; б) потенциалы в узлах 1, 2, 3

Электрическая цепь с использованием регуляторов. Явление резонанса иногда отрицательно влияет на работу элементов, поэтому для того, чтобы элементы в ЭЦ работали в нормальном режиме, использовались регуляторы (реостаты) \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 для регулирования амплитуд токов на ветвях 1, 2. Функции регуляторов заданы следующим образом: $\theta_1 = 2\sqrt{2} \sin(100\pi t)$; $\theta_2 = 2\sqrt{2} \sin(100\pi t)$; коэффициенты регуляторов $k_1 = k_2 = 1$. В результате токи на ветвях 1, 2 достигнут значения амплитуды $2\sqrt{2}$ ампер, как показано на рис. 4.14.

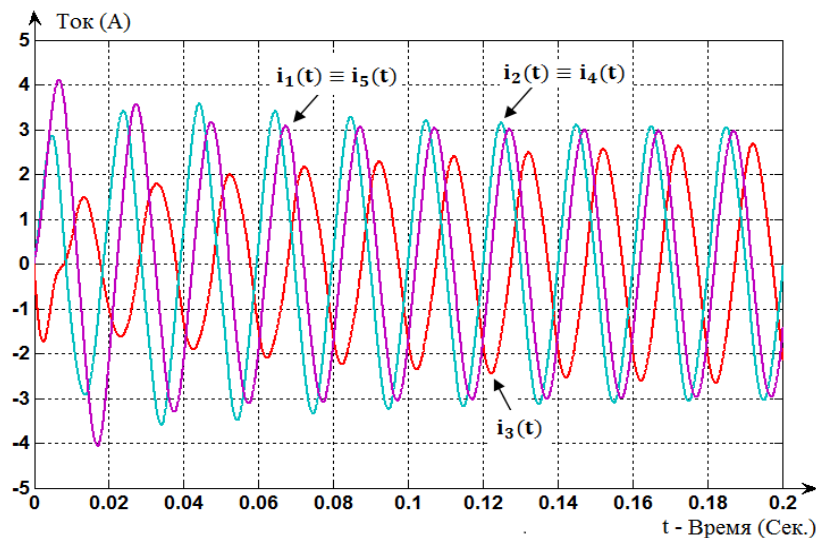


Рис. 4.14. Графики токов на ветвях цепи при наличии регуляторов

Основные результаты четвертой главы

1. Разработан комплекс программ, реализующих модель ГЦ.
2. Проведено программное исследование модели ГЦ связки «прямоточный котел – турбина» с использованием автоматических регуляторов на нескольких ветвях цепи. Даны результаты расчетов в виде графиков.
3. Разработан комплекс программ, реализующих модель ЭЦ.
4. Проведено программное исследование модели ЭЦ «двухконтурная установка» с использованием автоматических регуляторов. Даны результаты расчетов токов, потенциалов в цепи при влиянии возмущений входных данных и явления резонанса.

Заключение

В диссертационной работе впервые разработаны модели ГЦ и ЭЦ с автоматическими регуляторами в виде вырожденных систем ИДУ. Впервые предложены и обоснованы методы наименьших квадратов для решения начальных и краевых задач для систем ИДУ с матрицей неполного ранга перед производной искомой вектор-функции.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Исследована разрешимость вырожденных систем ИДУ (выделены классы ИДУ, для которых доказаны теоремы существования и единственности решений начальных и краевых задач);
2. В рамках теорем существования обоснованы разностные методы, метод наименьших квадратов, разработаны алгоритмы и соответствующие программы для решения вырожденных систем ИДУ;
3. Разработаны новые модели ГЦ, ЭЦ с автоматическими регуляторами в виде вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений;
4. Исследованы разрешимости моделей ГЦ, ЭЦ на основе теории вырожденных систем ИДУ;
5. Созданы комплексы программ, реализующих модель ГЦ, ЭЦ.

Список литературы

- [1] Brenan, K.E. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations / K.E. Brenan, S.L. Campbell, L.R. Petzold // Classics in applied mathematics. — Philadelphia: SIAM, 1996. — № 14.
- [2] Brunner, H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations / H. Brunner. — N.Y.: Published in the United States of America by Cambridge University Press, 2004.
- [3] Nguyen, D.B. Investigation of the unsteady-state hydraulic networks by means of singular systems of integral differential equations / D.B. Nguyen, E.V. Chystiakova // Вестник ЮУрГУ ММП. — 2016. — Т. 9, № 1. — С. 69–83.
- [4] Clark, K.D. Numerical solution of boundary value problems in differential-algebraic systems / K.D. Clark, L.R. Petzold // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing archive. — 1989. — Vol. 10, № 5. — P. 915–931.
- [5] Elena, C.V. Application of the DAE theory in investigation of quasi-stationary hydraulic circuits // Numdiff-13 programme numerical treatment of differential equations. Halle (Saale), Germany, September 10–14, 2012. — Amsterdam: Martin-Luther-University Halle - Wittenberg; Center for Mathematics and Computer Science, 2012. — P. 22–23.
- [6] Falaleev, M.V. Degenerate integro-differential operators in Banach spaces and their applications / M.V. Falaleev, S.S. Orlov // Russian Mathematics. — 2011. — Vol. 55, № 10. — P. 59–69.
- [7] März, R. On Difference and Shooting Methods for Boundary Value Problems in Differential-Algebraic Equations / R. März // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Journal of applied mathematics and mechanics. — 2006. — Vol. 64, № 11. — P. 463–473.

- [8] Silverman, L.M. Generalizations of theorem of Dolezal / L.M. Silverman, R.S. Bucy // *Math. System Theory*. — 1970. — Vol. 4. — P. 334–339.
- [9] Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. — Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2003.
- [10] Айда-Заде, К.Р. Вычислительные задачи на гидравлических сетях / К.Р. Айда-Заде // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. — 1989. — Т. 29, № 2. — С. 184–193.
- [11] Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — М.: Наука, 1987.
- [12] Балышев, О.А. Анализ переходных и стационарных процессов в трубопроводных системах (Теоретические и экспериментальные аспекты) / О.А. Балышев, Э.А. Таиров. — Новосибирск: Наука, 1999. — 164 с.
- [13] Балышев, О.А. Нестационарные модели в теории гидравлических цепей на примере трубопроводных систем энергетики и коммунального хозяйства / О.А. Балышев: дис... д-ра технических наук: 05.13.16. — Иркутск, 1998. — 412 с.
- [14] Бертсекас, Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа / Д. Бертсекас. — М: Радио и связь, 1987. — 400 с.
- [15] Березин, И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. — М., 1962. — Т. 1. — 464 с.
- [16] Беляев, Н.Р. Введение в теорию приближенных вычислений / Н.Р. Беляев, И.В. Танатаров // v.0.63, 2011. — 215 с.

- [17] Бояринцев, Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 1980. — 222 с.
- [18] Бояринцев, Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука, 1998. — 224 с.
- [19] Булатов, М.В. О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений / М.В. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1994. — Т. 34, № 3. — С. 360–372.
- [20] Булатов, М.В. Об одном семействе матричных троек / М.В. Булатов // Материалы конф. Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий. — Иркутск, 2002. — С. 10.
- [21] Булатов, М.В. Методы решения дифференциально-алгебраических и вырожденных интегральных систем / М.В. Булатов: дис. . . д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18. — Иркутск: ИГУ, 2002.
- [22] Булатов, М.В. Об интегро-дифференциальных системах с вырожденной матрицей перед производной / М.В. Булатов // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 5. — С. 692–697.
- [23] Булатов, М.В. Численное решение систем интегральных уравнений Вольтера 1-го рода / М.В. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1998. — Т. 38, № 4. — С. 607–610.
- [24] Булатов, М.В. Численное решение интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед производной многошаговыми методами / М.В. Булатов, Е.В. Чистякова // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 9. — С. 1248–1255.

- [25] Вульман, Ф.А. Тепловые расчеты на ЭЦВМ теплоэнергетических установок / Ф.А. Вульман, Н.С. Хорьков. — М.: Энергия, 1975. — 200 с.
- [26] Влах, И. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем / И. Влах, К. Синхал. — М.: Радио и связь, 1988. — 560 с.
- [27] Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1967.
- [28] Гаврилов, А.В. Формула Лейбница для ковариантной производной и некоторые ее приложения / А.В. Гаврилов // Матем. тр. — 2010. — Т. 13, № 1. — С. 63–84.
- [29] Герасимов, В.Г. Электротехника и электроника. Кн. 1. Электрические и магнитные цепи: Учеб. для вузов / В.Г. Герасимов, Э.В. Кузнецов, О.В. Николаева и др. — М.: Энергоатомиздат, 1996. — 288 с.
- [30] Горбунов, В.К. Метод нормальной сплайн-коллокации / В.К. Горбунов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1989. — Т. 29, № 2. — С. 212–224.
- [31] Горбунов, В.К. Метод нормальных сплайнов в вырожденных системах дифференциальных уравнений / В.К. Горбунов, В.В. Петрищев // Ученые записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. — Ульяновск, 1997. — Вып. 3. — С. 125–132.
- [32] Демидович, Б.П. Лекции по теории математической устойчивости / Б.П. Демидович. — М.: Наука, 1967.
- [33] Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. — М.: Физматгиз, 1961. — 659 с.
- [34] Демидович, Б.П. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. — М., 1967. — 368 с.

- [35] Добротворский, И.Н. Теория электрических цепей / И.Н. Добротворский. — М.: Радио и связь, 1989.
- [36] Дмитриев, С.С. Численное решение систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом / С.С. Дмитриев, Е.Б. Кузнецов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2008. — Т. 48, № 3. — С. 430–444.
- [37] Иванов, В.А. Режимы мощных паротурбинных установок / В.А. Иванов. — М.: Энергия, 1971. — 280 с.
- [38] Каганович, Б.М. Методы оптимизации тепловых сетей при совместной работе ТЭЦ и котельных / Б.М. Каганович: автореф. дис...канд. техн. наук. — М.: МЭИ, 1971. — 25 с.
- [39] Каганович, Б.М. Дискретная оптимизация тепловых сетей / Б.М. Каганович. — Новосибирск: Наука, 1978. — 88 с.
- [40] Кузнецов, Е.Б. Параметризация численного решения нелинейных краевых задач / Е.Б. Кузнецов, С. Д. Красников // Матем. моделирование. — 2006. — Т. 18, № 9. — С. 3–16.
- [41] Келлер, А.В. Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями Шоултера-Сидорова / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. — 2008. — Т. 27, № 127. — С. 50–56.
- [42] Краснов, М.Л. Интегральные уравнения / М.Л. Краснов. — М.: Наука, 1975. — 304 с.

- [43] Левин, А.А. Разработка эффективных математических моделей динамических процессов в теплоэнергетическом оборудовании / А.А. Левин: дис. . . канд. техн. наук: 05.13.18. — Иркутск, 2008. — 119 с.
- [44] Левин, А.А. Расчет потокораспределения в энергоустановках как гидравлических цепях с регулируемыми параметрами / А.А. Левин, Э.А. Таиров, В.Ф. Чистяков. // Трубопроводные системы энергетики: математическое моделирование и оптимизация. — Новосибирск: Наука, 2010. — С. 115–124.
- [45] Левин, А.А. Расчет потокораспределения в системе пылеприготовления ТЭС / А.А. Левин, Э.А. Таиров, В.Ф. Чистяков // Тр. XII всерос. научного семинара с междунар. участием “Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем”. — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2010.
- [46] Левин, А.А. Расчет гидравлических цепей в квазистационарном приближении / А.А. Левин, Е.В. Чистякова, В.Ф. Чистяков // Тр. XII всерос. научн. семинара с междунар. участием “Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем”. — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2010.
- [47] Логинов, А.А. Алгебро-дифференциальная система математической модели энергоблока ТЭС / А.А. Логинов, Э.А. Таиров, В.Ф. Чистяков // Тр. конф. “Методы оптимизации и их приложения”. — Иркутск, 1998. — С. 119–122.
- [48] Логинов, А.А. Методика расчета потокораспределения в пароводяных и газовоздушных трактах энергоблоков для задач реального времени / А.А. Логинов, Э.А. Таиров, В.Ф. Чистяков // Математические модели и численные методы механики сплошных сред. — Новосибирск, 1996. — С. 378–380.

- [49] Лоусон, Ч. Численное решение задач метода наименьших квадратов / Ч. Лоусон, Р. Хенсон. — М.: Наука, 1986. — 232 с.
- [50] Маслов В.П. Операторные методы / В.П. Маслов. — М: Наука, 1973.
- [51] Меренков, А.П. Теория гидравлических цепей / А.П. Меренков, В.Я. Хасилев. — М.: Наука, 1985. — 277 с.
- [52] Мэтьюз, Д.Г. Численные методы. Использование Matlab / Д.Г. Мэтьюз, К.Д. Финк. — М.: Издательский дом “Вильямс”, 2001. — 720 с.
- [53] Новицкий, Н.Н. Трубопроводные системы энергетики управления развитием и функционированием / Н.Н. Новицкий, М.Г. Сухарев, Е.В. Сеннова. — Новосибирск: Наука, 2004. — 460 с.
- [54] Нгуен, Д.Б. Программа автоматизированного решения краевой задачи для вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений методом наименьших квадратов / Д.Б. Нгуен, В.Ф. Чистяков. — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014615157 от 20 мая 2014 г. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, 2014.
- [55] Нгуен, Д.Б. Программа решения интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) модели нестационарной гидравлической цепи на основе теории вырожденных систем ИДУ / Н.Д. Банг, В.Ф. Чистяков. — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015660014 от 21 сентября 2015 г. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, 2015.
- [56] Нгуен, Д.Б. О моделях нестационарных гидравлических цепей с ветвями в различных фазовых состояниях / Д.Б. Нгуен, В.Ф. Чистяков // Тез. конф. “Ляпуновские чтения”. — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013. — С. 7.

- [57] Нгуен, Д.Б. О квазистационарных моделях гидравлических цепей / Д.Б. Нгуен, В.Ф. Чистяков // Тез. конф. “Винеровские чтения”. — Иркутск, 2013. — С. 46.
- [58] Нгуен, Д.Б. Метод наименьших квадратов решения краевых задач для вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений / Д.Б. Нгуен, В.Ф. Чистяков // Тез. конф. “Винеровские чтения”. — Иркутск, 2014. — С. 46.
- [59] Нгуен, Д.Б. Решение начальной задачи для систем вырожденных интегро-дифференциальных уравнений методом наименьших квадратов / Д.Б. Нгуен, В.Ф. Чистяков // Тез. IV Междунар. школы-семинара “Нелинейный анализ и экстремальные задачи”. — Иркутск, 2014. — С. 41.
- [60] Нгуен, Д.Б. Об одном методе решения краевых задач для систем вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / Д.Б. Нгуен, В.Ф. Чистяков // Тез. XV Всерос. конф. молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям. — Тюмень, 2014. — С. 43.
- [61] Нгуен, Д.Б. О некоторых свойствах вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений / Д.Б. Нгуен, В.Ф. Чистяков, Е.В. Чистякова // Вестник Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. — 2015. — Т. 11. — С. 1–14.
- [62] Нгуен, Д.Б. О решении краевых задач для вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений методом наименьших квадратов / Д.Б. Нгуен, В.Ф. Чистяков // Вестник ЮурГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. — 2015. — Т. 8, № 2. — С. 81–94.
- [63] Нгуен, Д.Б. О решении краевых задач для вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений методом наименьших квадратов / Н.Д. Банг, В.Ф. Чистяков // Материалы XIX Байкальской всерос.

- конф. “Информационные и математические технологии в науке и управлении”. — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2014. — Т. 2. — С. 7–11.
- [64] Нгуен, Д.Б. Модель гидравлического тракта энергетической установки на основе теории вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений / Д.Б. Нгуен, Е.В. Чистякова // Тез. Междунар. конф. “Дифференциальные уравнения и математическое моделирование”. — Улан-Удэ, 2015. — С. 204–205.
- [65] Осипов, Ю.М. Методы расчета линейных электрических цепей: Учебное пособие по курсам электротехники и ТОЭ / Ю.М. Осипов, П.А. Борисов. — СПб: НИУ ИТМО, 2012. — 120 с.
- [66] Петерсон, Д.Ф. К разработке метода гидравлического расчета прямого котла докритического давления на ЭЦВМ / Д.Ф. Петерсон Л.В. Саминская, В.Б. Хабенский // Тр. ЦКТИ. — 1969. — Вып. 98. — С. 60–70.
- [67] Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс. — 2009. — 9-изд. — С. 300–303.
- [68] Сеннова, Е.В. Методика анализа надежности в теплофикационных системах / Е.В. Сеннова: автореф. дис. . . канд. техн. наук. — Новосибирск: НИИ им. В.В. Куйбышева, 1975. — 28 с.
- [69] Сеннова, Е.В. Об оптимальном проектировании развиваемых и реконструируемых теплоснабжающих систем / Е.В. Сеннова, В.А. Стенников // Теплоэнергетика. — 1964. — № 9. — С. 26–30.
- [70] Сеннова, Е.В. О нормативах надежности в теплофикационных системах / Е.В. Сеннова // Изв. вузов. Сер. Энергетика. — 1975. — № 4. — С. 110–116.

- [71] Сеннова, Е.В. Математическое моделирование и оптимизация теплоснабжающих систем / Е.В. Сеннова, В.Г. Сидлер. — Новосибирск: Наука, 1987. — 219 с.
- [72] Суетин, П.К. Классические ортогональные многочлены: Учебное пособие / П.К. Суетин. — М.: Физматлит, 2005. — 480 с.
- [73] Семушин, И.В. Вычислительные методы алгебры и оценивания: Учебное пособие / И.В. Семушин. — Ульяновск: УлГТУ, 2011. — 366 с.
- [74] Сидоров, Н.А. Исследование непрерывных решений задачи Коши в окрестности точки ветвления / Н.А. Сидоров // Изв. вузов. Сер. Математика. — 1976. — № 9. — С. 99–110.
- [75] Сидоров, Н.А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н.А. Сидоров // Математические заметки. — 1984. — Т. 35, вып. 4. — С. 569–579.
- [76] Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Изв. вузов. Сер. Математика. — 1997. — № 5. — С. 60–68.
- [77] Сухарев, М.Г. Технологический расчет и обеспечение надежности газо- и нефтепроводов / М.Г. Сухарев, А.М. Карасевич. — М.: ГУП Изд-во “Нефть и газ” РТУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2000. — 271 с.
- [78] Сухарев, М.Г. Основы математического и компьютерного моделирования в задачах нефтегазового комплекса: Учеб. пособие для вузов / М.Г. Сухарев, С.С. Арсеньев, Т.М. Жукова. — М.: МАКС Пресс, 2010. — 116 с.
- [79] Сухарев, М.Г. Расчеты систем транспорта газа с помощью вычислительных машин / М.Г. Сухарев, Е.Р. Ставровский. — М.: Недра, 1971. — 206 с.

- [80] Таиров, Э.А. Математическая модель, численные методы и программное обеспечение тренажера для энергоблока Иркутской ТЭЦ-10 / Э.А. Таиров, А.А. Логинов, В.Ф. Чистяков. — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 1999. — 43 с.
- [81] Таиров, Э.А. Применение теории гидравлических цепей в моделировании теплоэнергетических установок / Э.А. Таиров, А.А. Левин, В.Ф. Чистяков // Известия Российской академии наук. Сер. Энергетика. — 2011. — № 2. — С. 142–147.
- [82] Таиров, Э.А. Методы комплексного исследования динамики энергетических установок и их элементов / Э.А. Таиров: дис... д-ра техн. наук: 05.14.01. — Иркутск, 2000. — 356 с.
- [83] Улахович, Д.А. Основы теории линейных электрических цепей: Учеб. пособие / Д.А. Улахович. — СПб.: БХВ-Петербург, 2009. — 816 с.
- [84] Ушаков, Е.И. Статическая устойчивость электрических систем / Е.И. Ушаков. — Новосибирск: Наука, 1988. — 271 с.
- [85] Фалалеев, М.В. Системы дифференциальных уравнений с вырождением в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев, О.В. Коробова // Сиб. матем. журн. — 2008. — Т. 49, № 4. — С. 916–927.
- [86] Фалалеев, М.В. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения / М.В. Фалалеев, С.С. Орлов // Изв. вузов. Сер. Математика. — 2011. — № 10. — С. 68–79.
- [87] Фалалеев, М.В. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения / М.В. Фалалеев, С.С. Орлов // Вестник ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. — 2011. — № 7. — С. 100–110.

- [88] Фалалеев, М.В. Обобщенные решения вырожденных интегродифференциальных уравнений в банаховых пространствах и их приложения / М.В. Фалалеев, С.С. Орлов // Тр. ИММ УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 4. — С. 286–297.
- [89] Федоров, В.Е. Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием / В.Е. Федоров, Е.А. Омельченко // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, № 2. — С. 418–429.
- [90] Чистякова, Е.В. К вопросу о существовании периодических решений дифференциально-алгебраических уравнений / Е.В. Чистякова, В.Ф. Чистяков // Сиб. журн. индустр. математики. — 2006. — С. 148–158.
- [91] Чистякова, Е.В. Об одном семействе вырожденных интегродифференциальных уравнений / М.В. Булатов, Е.В. Чистякова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2011. — Т. 51, № 9. — С. 1665–1673.
- [92] Чистякова, Е.В. Методы исследования и решения вырожденных интегродифференциальных уравнений и их приложения / Е.В. Чистякова: дис. ... канд. физ-мат. наук: 05.13.18. — Иркутск, 2006. — С. 113.
- [93] Чистякова, Е.В. О свойствах разностных схем для вырожденных интегродифференциальных уравнений индекса 1 / Е.В. Чистякова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2009. — Т. 49, № 9. — С. 1579–1588.
- [94] Чистякова, Е.В. Теоремы о нелокальной разрешимости систем дифференциально-алгебраических уравнений для нестационарных гидравлических цепей / Е.В. Чистякова // Сиб. журн. индустр. математики. — 2010. — Т. 13, № 3. — С. 140–150.
- [95] Чистякова, Е.В. О разрешимости вырожденных систем квазилинейных интегродифференциальных уравнений общего вида / Е.В. Чистякова, В.Ф. Чистяков // Вычисл. технологии. — 2011. — Т. 16, № 5. — С. 100–114.

- [96] Чистякова, Е.В. Дифференциально-алгебраические уравнения с малым нелинейным членом // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 9. — С. 1–4.
- [97] Чистяков, В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В.Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука, 1996. — 278 с.
- [98] Чистяков, В.Ф. О разрешимости линейных интегро-алгебраических уравнений и численных методах их решения / В.Ф. Чистяков // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54, № 4. — С. 932–946.
- [99] Чистяков, В.Ф. О грубом индексе нелинейных алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков // Тр. XII Байкальской междунар. конф. “Методы оптимизации и их приложения”. — Иркутск, 2001. — С. 213–218.
- [100] Чистяков, В.Ф. Применение метода наименьших квадратов для решения линейных дифференциально-алгебраических уравнений / В.Ф. Чистяков, Е.В. Чистякова // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2013. — Т. 21, № 1. — С. 81–95.

Приложения

**Приложение 1. Свидетельство о государственной регистрации
программы автоматизированного решения краевой задачи для
вырожденных систем линейных ИДУ методом наименьших
квадратов**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2014615157

**Программа автоматизированного решения краевой задачи
для вырожденных систем линейных
интегро-дифференциальных уравнений методом
наименьших квадратов**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего профессионального
образования «Иркутский государственный технический
университет» (RU)*

Авторы: *Чистяков Виктор Филимонович (RU),
Нгуен Дык Банг (RU)*

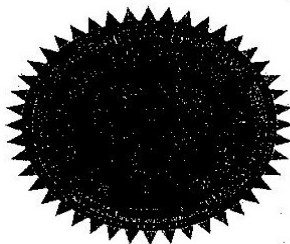
Заявка № 2014612749

Дата поступления 31 марта 2014 г.

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ 20 мая 2014 г.

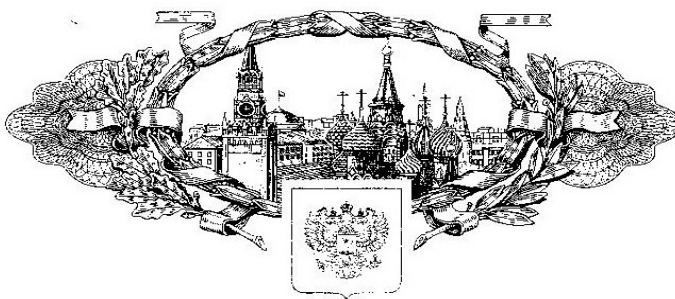
Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов



**Приложение 2. Свидетельство о государственной регистрации
программы решения ИДУ модели нестационарной гидравлической
цепи на основе теории вырожденных систем ИДУ**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015660014

**Программа решения интегро-дифференциальных уравнений
(ИДУ) модели нестационарной гидравлической цепи на
основе теории вырожденных систем ИДУ**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Иркутский
национальный исследовательский технический университет»
(RU)*

Авторы: *Чистяков Виктор Филимонович (RU),
Нгуен Дык Банг (RU)*

Заявка № **2015616738**

Дата поступления **22 июля 2015 г.**

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **21 сентября 2015 г.**

*Заместитель руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Л.Л. Кирий

