ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ

УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Лихачева Алена Олеговна

КОВРЫ И КОВРОВЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ ТИПОВ B_l, C_l, F_4

1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

(физико-математические науки)

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук, профессор,

Нужин Яков Нифантьевич

Красноярск – 2023

Содержание

Введение

Актуальность темы. Диссертация посвящена изучению подгрупп групп Шевалле, определяемых системой корней и наборами аддитивных подгрупп. Наборы идеалов и в общем случае аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\} \tag{0.0.1}$$

определенного ассоциативного, необязательно коммутативного, кольца с условиями

$$\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i, r, j \leq n, \tag{0.0.2}$$

возникали при решении различных задач. Такие наборы назывались коврами или сетями, а связанные с ними кольца и группы — ковровыми, сетевыми, обобщенными конгруэнц-подгруппами и др. Аддитивные подгруппы возникают в силу определения сложения матриц, а включения (0.0.2) происходят из матричного умножения и согласуются с коммутированием трансвекций, что и определяет различные приложения наборов (0.0.1) с включениями (0.0.2). В частности, они применялись при решении следующих задач: описание центральных и коммутаторных рядов, силовских p-подгрупп некоторых матричных групп (Ю. И. Мерзляков [25], 1964 г.); групп, лежащих между матричными группами над кольцом и его подкольцом (Н. С. Романовский [33], 1970 г.); параболических подгрупп и надгрупп диагональных подгрупп в общей и специальной линейных группах (З. И. Боревич [1], [2], 1976 г.).

Далее кольцо коэффициентов K всегда предполагается ассоциативным и коммутативным. По определению набор аддитивных подгрупп кольца K (0.0.1) с условиями (0.0.2) называется *полным матричным ковром*. Убрав из набора (0.0.1) все диагональные подмножества $\mathfrak{A}_{ii}$, мы получим *элементарный матричный ковер*. Всякий элементарный ковер $\mathfrak{A}$ определяет *элементарную ковровую* подгруппу

$$E_n(\mathfrak{A}) = \left\langle t_{ij}(\mathfrak{A}_{ij}) \mid 1 \leq i,\ j \leq n,\ i \neq j \right\rangle \subseteq SL_n(K),$$

где $t_{ij}(u)$ — элементарные трансвекции.

Понятия ковра и ковровой подгруппы были перенесены на группы Шевалле нормальных и скрученных типов различными способами (К. Сузуки [42], Н. А. Вавилов [5], В. М. Левчук [20, вопрос 7.28], [21]). Элементарная группа Шевалле типа A_{n-1} над коммутативным кольцом K изоморфна подгруппе специальной линейной группы $SL_n(K)$, порожденной всеми трансвекциями $t_{ij}(u)$, $u \in K$. При этом изоморфизме корневым элементам $x_r(u)$ определенным образом соответствуют трансвекции $t_{ij}(u)$. Учитывая данный изоморфизм, К. Сузуки для каждой системы корней Φ называет ковром (в оригинале «carpet») типа Φ над кольцом K всякий набор его идеалов $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ с условием

$$\mathfrak{A}_r \mathfrak{A}_s \subseteq \mathfrak{A}_{r+s}, \text{ при } r, s, r+s \in \Phi, \tag{0.0.3}$$

и описывает в терминах ковровых подгрупп параболические подгруппы групп Шевалле над локальными кольцами с некоторыми ограничениями на их мультипликативные группы [42]. Перенося эти результаты на полулокальные кольца, Н. А. Вавилов называет наборы идеалов с условиями (0.0.3) сетями, а затем, описывая параболические подгруппы скрученных групп Шевалле, вводит аналог понятия сети для данных групп [5], [6]. В. М. Левчук заменил условия (0.0.3) в определении ковра на следующие включения

$$C_{ij,rs} \mathfrak{A}_r^i \mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \text{ при } r, s, ir+js \in \Phi,\ i > 0,\ j > 0, \tag{0.0.4}$$

где $C_{ij,rs}$ — структурные константы из коммутаторной формулы Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^i), \quad ir+js \in \Phi, \tag{0.0.5}$$

которые могут принимать значения $\pm 1, \pm 2, \pm 3$, а $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$ [21]. При этом набор $\{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ не обязан состоять только из идеалов, его элементами являются аддитивные подгруппы. Данное определение оказалось более естественным и позволило снять возникающие ранее ограничения на мультипликативную группу основного кольца в различных задачах, в частности, при описании параболических подгрупп. Отметим, что в случае, когда в системе корней, ассоциированной с группой Шевалле, все корни имеют одинаковую длину, то условия (0.0.3) и (0.0.4) совпадают, а также, что ранее З. И. Боревич использовал понятие матричного ковра аддитивных подгрупп при описании подгрупп линейных групп, богатых трансвекциями [3].

В диссертации *ковром лиева типа* называется набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\},$$

кольца K с условием (0.0.4), а *ковровой подгруппой* группы Шевалле типа Φ подгруппа

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \rangle.$$

С одной стороны, определения ковра и ковровой подгруппы возникали как инструмент при вычислении центральных и коммутаторных рядов определенных матричных групп над кольцами, а также при описании различных промежуточных подгрупп в группах Шевалле, в первую очередь, при описании параболических подгрупп, надгрупп диагональной подгруппы и групп, лежащих между группами лиева типа над кольцом и его подкольцом. С другой стороны, ковровые подгруппы можно рассматривать как обобщение исходных групп Шевалле и изучать их структуру. Условие ковровости (0.0.4) дает следующее полезное свойство ковровых подгрупп: при коммутировании корневых элементов из ковровой подгруппы каждый сомножитель в правой части коммутаторной формулы Шевалле (0.0.5) лежит в этой же ковровой подгруппе.

Ключевыми понятиями для ковров являются неприводимость и замкнутость. По определению ковер называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа не содержит новых корневых элементов, и он *неприводим*, если все его аддитивные подгруппы ненулевые.

В приложениях ковров и ковровых подгрупп при решении различных задач возникали собственные вопросы ковровой тематики, некоторые из которых решались по мере их поступления, а некоторые остаются открытыми до сих пор. Например, следующие два вопроса В. М. Левчука из коуровской тетради [20].

Вопрос 7.28. *Какие условия на элементарный ковер (в терминах $\mathfrak{A}_r$) необходимы и достаточны для того, чтобы ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ группы Шевалле $E(\Phi, K)$ пересекалась с подгруппой $x_r(K)$ по $x_r(\mathfrak{A}_r)$?*

Вопрос 15.46. *Редуцируется ли вопрос 7.28 об условиях замкнутости элементарного ковра $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ к лиеву рангу 1, когда K — поле? Более точно, верно ли, что для допустимости ковра $\mathfrak{A}$ необходима и достаточна допустимость подковров $\{\mathfrak{A}_\mathfrak{r}, \mathfrak{A}_{-\mathfrak{r}}\}$, $r \in \Phi$ ранга 1?*

Большой вклад в изучение собственно ковров и ковровых подгрупп внесли З. И. Боревич ([1] – [4]), Н. А. Вавилов ([4] – [9]) и В. М. Левчук ([19], [21] – [24]). Последнее время в этом направлении активно работают В.А. Койбаев ([10], [11], [13] – [18], [57]) и Я.Н. Нужин ([27] – [32], [43] – [45]).

Целью диссертационной работы является описание неприводимых ковров аддитивных подгрупп лиева типа B_l, C_l, F_4 над полями.

Основные задачи работы.

1. Доказать существование незамкнутых неприводимых ковров лиева типа над коммутативными кольцами, ассоциированных с любой системой корней.

2. Описать неприводимые ковры аддитивных подгрупп над локально конечными полями ранга больше единицы.

3. Описать неприводимые ковры типа B_l, C_l, F_4 $l \geq 2$ над полем F характеристики 0 и 2, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R-модулем, в случае, когда F — алгебраическое расширение поля R.

Методы исследования. В работе используются методы линейной алгебры, методы теории полей, методы теории групп.

Научная новизна. В работе впервые указаны примеры неприводимых незамкнутых ковров любого лиева типа, в которых все подковры ранга 1, за исключением одного, замкнутые. Завершено описание неприводимых ковров ранга больше 1 над полем F, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R-модулем, где F — алгебраическое расширение поля R, в частности, когда F — локально конечное поле.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты диссертации представляют теоретический интерес и могут быть применены в теории групп лиева типа. Вместе с тем, полученные результаты можно ввести в учебный процесс в виде материалов для проведения специальных курсов для студентов, магистрантов и аспирантов кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета и других университетов и математических центров.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на Красноярском алгебраическом семинаре (Сибирский федеральный университет, 2016–2023 гг.) и следующих конференциях.

1. Международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2016 г.).

2. XI школа-конференция по теории групп, посвященная 70-летию со дня рождения А. Ю. Ольшанского (Красноярск, 2016 г.).

3. Российская научная конференция «Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования» (Владикавказ, 2017 г.).

4. Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (Москва, 2018 г.).

5. Международная конференция «Алгебра и динамические системы», посвященная 110-летию со дня рождения С. Н. Черникова (Нальчик, 2022 г.).

6. XIV Международная школы-конференция по теории групп, посвященная памяти В. А. Белоногова, В. А. Ведерникова и Л. А. Шеметкова (Брянск, 2022 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [43] — [56]. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [43] — [46] в изданиях из перечня ВАК рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата наук.

Структура и объем работы.

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, глоссария и списка литературы. Главы подразделяются на параграфы. Основные результаты сформулированы в виде теорем. Номер теоремы, леммы и др. включает номер параграфа, главы и порядковый номер. Список цитированной литературы состоит из 42 наименований, а список работ автора по теме диссертации из 14 наименований. Вся работа изложена на 71 страницах и включает в себя 14 рисунков.

Глава 1 содержит основные определения, необходимые для дальнейшей работы. В ней строятся примеры незамкнутых ковров над различными классами коммутативных колец. В **§§ 1.1 – 1.3** приводятся определения ковра, ковровой подгруппы, вводятся необходимые технические леммы. Примеры 1.3.4 и 1.3.5 дают отрицательный ответ на вопрос: *будет ли подгруппа M, порождённая своими пересечениями* $M \cap X_r$, $r \in \Phi$, *ковровой?* В **§ 1.4** приводится основная теорема главы и её доказательство.

Теорема 1.4.1. *Пусть* K *— коммутативное кольцо с единицей 1,* $\mathbb{Z}$ *— его аддитивная подгруппа, порожденная единицей 1, и в* K *существуют ненулевой идеал* I *такой, что* $\mathbb{Z} + I \neq K$*. Тогда для любой системы корней* Φ *существует неприводимый незамкнутый ковер типа* Φ *над* K*.*

Теорема 1.4.1 получена в неразделимом соавторстве с Я.Н. Нужиным и С.К. Франчук (С.К. Куклиной) [43]. Доказательство теоремы для типов B_l, C_l, F_4 проведено автором диссертации лично.

В **главе 2** рассматриваются ковры лиева типа над локально конечными полями. В **§§ 2.1 – 2.2** рассматриваются случаи, когда ранг системы равен 1 и 2. В частности, доказывается базовая лемма, необходимая для доказательства основной теоремы этой главы

Лемма 2.2.1. *Пусть* $\{a, b\}$ *— фундаментальная система корней для системы корней* Φ *типа* A_2, B_2 *или* G_2, $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ *— неприводимый ковер типа* Φ *над локально конечным полем* K, *причем* $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. *Тогда* $\mathfrak{A}_r = P$, $r \in \Phi$, *для некоторого подполя* P *поля* K.

В **§ 2.3** рассматривается случай, когда ранг системы больше 2. Здесь же приводится основная теорема главы и её доказательство

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ *— неприводимый ковер типа* Φ *ранга* $l \geq 2$ *над локально конечным полем* K. *Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из расширенной группы Шевалле* $\widehat{E}(\Phi, K)$ *все аддитивные подгруппы* $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, *совпадают с некоторым подполем* P *поля* K, *в частности, ковер* $\mathfrak{A}$ *замкнут.*

Утверждение теоремы 2.3.1 отмечается в [22, следствие 3.2], исключая следующие случаи: 1) Φ типа B_l $(l \geq 2)$, C_l $(l \geq 2)$, F_4 при $char K = 2$; 2) Φ типа G_2 и $char K$ равна 2 или 3.

В **§ 2.4** рассматриваются полные неприводимые матричные ковры над локально конечными полями. Приводится доказательство теоремы

Теорема 2.4.1. *Пусть* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ *— полный неприводимый матричный ковер степени* $n \geq 2$ *над локально конечным полем* K. *Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из* $GL_n(K)$ *все аддитивные подгруппы* $\mathfrak{A}_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, *совпадают с некоторым подполем* P *поля* K.

Теоремы 2.3.1 и 2.4.1 получены в неразделимом соавторстве с В.А. Койбаевым, Я.Н. Нужиным и С.К. Франчук (С.К. Куклиной) [44]. Доказательство теоремы 2.3.1 для типов B_l, C_l, F_4 проведено автором диссертации лично.

Глава 3 посвящена описанию ковров типа B_l, C_l, F_4 над полями. В **§ 3.1** рассматриваются промежуточные подгруппы групп лиева типа. В **§ 3.2** даются все необходимые леммы для доказательства основной теоремы главы. В **§ 3.3** приводится основная теорема главы и ее доказательство.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ *— неприводимый ковер типа* B_l $(l \geq 2)$, C_l $(l \geq 2)$ *или* F_4 *над полем* F, *причем хотя бы одна аддитивная подгруппа* $\mathfrak{A}_r$ *является* R*-модулем, где* F *— алгебраическое расширение поля* R. *Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом либо* $\mathfrak{A}_r = P$ *при всех* $r \in \Phi$, *для некоторого подполя* P *поля* F, *либо* $\mathrm{char} F = 2$, *существует несовершенное подполе* K *поля* F *и*

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \textit{если } r \textit{ — короткий корень} \\ Q, & \textit{если } r \textit{ — длинный корень} \end{cases}$$

для двух различных бесконечных аддитивных подгрупп P *и* Q *поля* K, *удовлетворяющих включениям*

$$K^2 \leq Q < P \leq K. \tag{0.0.6}$$

и равенствам

$$P = P^{-1}, \quad Q = Q^{-1}. \tag{0.0.7}$$

Кроме того, ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ *является замкнутым.*

Теорема 3.3.1 получена в неразделимом соавторстве с научным руководителем Я.Н. Нужиным [45]. Случай F_4 рассмотрен автором диссертации лично [46]. Ранее В.М. Левчук [22] описал неприводимые ковры ранга больше 1 над полем F, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R-модулем, где F — алгебраическое расширение поля R, в предположении, что характеристика поля F отлична от 0 и 2 для типов B_l,

C_l, F_4, а для типа G_2 отлична от 0, 2 и 3. Оказалось, что с точностью до сопряжения диагональным элементом все аддитивные подгруппы этих ковров совпадают с одним промежуточным подполем между R и F. Назовем такие ковры *константными.* В этой главе решается аналогичная задача для ковров типа B_l, C_l, F_4 над полем характеристики 0 и 2. Выяснилось, что неконстантные ковры появляются только в характеристике 2 и они параметризуются парой аддитивных подгрупп, причем для типов B_l и C_l одна из этих двух аддитивных подгрупп может не быть полем, примеры таких ковров указаны в [31]. Появление неконстантных ковров для типов B_l, C_l, F_4 в характеристике 2 и для типа G_2 в характеристике 3 не было неожиданностью, это следует из работы Я. Н. Нужина [28], где для данных типов описаны группы, лежащие между группами Шевалле над различными несовершенными полями, большее из которых является алгебраическим расширением меньшего (см. также замечание на стр. 84 в монографии Р. Стейнберга [35]). Тип G_2 в характеристиках 0, 2 и 3 рассмотрен в работах [34, 41]. Таким образом, в данной главе завершается описание неприводимых ковров ранга больше 1 над полем F, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R-модулем, где F — алгебраическое расширение поля R. Для ранга 1 условие ковровости (0.0.4) вырождается, а ковровая подгруппа будет изоморфна некоторой подгруппе из $SL_2(F)$ или $PSL_2(F)$, порожденной элементарными трансвекциями, и в этом случае общие методы уже не работают.

Основные результаты.

1. Построены примеры неприводимых незамкнутых ковров любого лиева типа над широкими классами коммутативных колец.

2. Доказано, что любой неприводимый ковер аддитивных подгрупп, ас-

социированный с группой Шевалле лиева ранга больше единицы над локально конечным полем, с точностью до сопряжения диагональным элементом совпадает с ковром, все аддитивные подгруппы которого равны некоторому фиксированному подполю основного поля. Аналогичный результат получен для матричного полного ковра.

3. Описаны неприводимые ковры типа B_l, C_l, F_4 при $l \geq 2$ над полем F характеристики 0 и 2, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R-модулем, в случае, когда F — алгебраическое расширение поля R. Доказано, что такие ковры являются замкнутыми и могут параметризоваться парой аддитивных подгрупп только при $p = 2$, причем для типов B_l и C_l одна из этих двух аддитивных подгрупп может не быть полем.

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Нужину Якову Нифантьевичу за неоценимую помощь и активную поддержку на всех этапах выполнения работы. Автор благодарен всему коллективу кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики Сибирского Федерального Университета за внимание и всестороннюю помощь при написании диссертации.

Работа частично поддержана Научно-образовательным математическим центром СОГУ, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2023-939), а работа над теоремой 3.3.1 поддержана Российским научным фондом (код проекта: 22-21-00733).

1 Ковры аддитивных подгрупп над коммутативными кольцами

В этой главе вводятся необходимые определения и вспомогательные результаты. Основная теорема этой главы дает примеры незамкнутых неприводимых ковров любого лиева типа над достаточно широкими классами коммутативных колец.

1.1 Матричные ковры

Далее K — коммутативное кольцо с единицей 1, $GL_n(K)$ — общая линейная группа, состоящая из множества обратимых $n \times n$–матриц, $SL_n(K)$ — специальная линейная группа, состоящая из множества матриц с определителем единица. Через

$$t_{ij}(u) = e + ue_{ij}, \quad i \neq j,$$

обозначим *элементарную трансвекцию*, где e — единичная матрица, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных позициях нули. Элементарную трансвекцию далее для краткости будем называть просто трансвекцией. Подгруппу $E_n(K)$, порождённую трансвекциями, называем *элементарной подгруппой*.

Набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

кольца K с условиями

$$\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i, r, j \leq n,$$

называется *полным матричным ковром*. Схематично его можно изобразить следующим образом

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} & \dots & \mathfrak{A}_{1n} \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} & \dots & \mathfrak{A}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{A}_{n1} & \mathfrak{A}_{n2} & \dots & \mathfrak{A}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Множество матриц вида

$$G(\mathfrak{A}) = \{(a_{ij}) \in SL_n(K) \mid a_{ij} \equiv \ \delta_{ij} \ mod \ \mathfrak{A}_{ij}\}$$

является подгруппой специальной линейной группы $SL_n(K)$ относительно матричного умножения и называется *конгруэнц-подгруппой по модулю ковра* $\mathfrak{A}$. Схематично эту группу можно изобразить так

$$G(\mathfrak{A}) = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} & \mathfrak{A}_{13} & \dots & \mathfrak{A}_{1n} \\ \mathfrak{A}_{21} & 1+\mathfrak{A}_{22} & \mathfrak{A}_{23} & \dots & \mathfrak{A}_{2n} \\ \mathfrak{A}_{31} & \mathfrak{A}_{32} & 1+\mathfrak{A}_{33} & \dots & \mathfrak{A}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{A}_{n1} & \mathfrak{A}_{n2} & \mathfrak{A}_{n3} & \dots & 1+\mathfrak{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

Если все $\mathfrak{A}_{ij}$ совпадают с каким-то фиксированным идеалом I кольца K, то получаем хорошо известную *конгруэнц-подгруппу по модулю идеала* I

$$G(I) = \{(a_{ij}) \in SL_n(K) \mid a_{ij} \equiv \ \delta_{ij} \ mod \ I\}$$

Набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, \ j \leq n, \ i \neq j\}$$

называется *элементарным (матричным) ковром*, если

$$\mathfrak{A}_{ik}\mathfrak{A}_{kj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \ 1 \leq i, j, k \leq n, \ i \neq j, \ j \neq k, \ i \neq k.$$

Схематично его можно изобразить следующим образом

$$\begin{pmatrix} * & \mathfrak{A}_{12} & \dots & \mathfrak{A}_{1n} \\ \mathfrak{A}_{21} & * & \dots & \mathfrak{A}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{A}_{n1} & \mathfrak{A}_{n2} & \dots & * \end{pmatrix}$$

Отличие элементарного ковра от полного заключается в том, что диагональные элементы $\mathfrak{A}_{ii}$ не определены. Группа $E_n(\mathfrak{A})$, порожденная трансвекциями

$$t_{ij}(u_{ij}), \quad u_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i,\ j \leq n,\ i \neq j,$$

называется *элементарной (матричной) ковровой подгруппой*. Очевидно, $E_n(\mathfrak{A})$ есть подгруппа группы $SL_n(K)$. Для элементарного ковра $\mathfrak{A}$ рассмотрим набор аддитивных подгрупп

$$\overline{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i,\ j \leq n,\ i\ \neq j\},$$

индуцированный трансвекциями из элементарной ковровой подгруппы $E_n(\mathfrak{A})$, а именно для любых $i \neq j$ положим

$$\overline{\mathfrak{A}}_{ij} = \{u \in K \mid t_{ij}(u) \in E_n(\mathfrak{A})\},$$

и назовем набор $\overline{\mathfrak{A}}$ *замыканием* ковра $\mathfrak{A}$. Очевидно, $\mathfrak{A}_{ij} \subseteq \overline{\mathfrak{A}}_{ij}$. Ковер $\mathfrak{A}$ называем *замкнутым*, если $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}$. Другими словами, ковер $\mathfrak{A}$ называется замкнутым, если его ковровая подгруппа $E(\mathfrak{A})$ не содержат новых корневых элементов.

Через $D(n, K)$ обозначим группу обратимых диагональных $(n \times n)$–матриц над кольцом K. Справедлива следующая формула сопряжения трансвекций

$$dt_{ij}(u)d^{-1} = t_{ij}(x_i x_j^{-1} u), \tag{1.1.1}$$

где

$$d = diag(x_1, ..., x_n),\ d \in D(n, K).$$

По любому ковру $\mathfrak{A}$ (полному или элементарному) и любой матрице d из $D(n, K)$ можем определить новый набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}'_{ij}),$$

где

$$\mathfrak{A}'_{ij} = x_i x_j^{-1} \mathfrak{A}_{ij}.$$

Набор $\mathfrak{A}'$ будем называть *сопряженным ковром* и формально этот факт будем задавать равенством

$$\mathfrak{A}' = d\mathfrak{A}d^{-1}.$$

Несложно проверить, что для аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}'$ условия ковровости выполняются. Действительно, пусть

$$\mathfrak{A}'_{ij} = x_i x_j^{-1} \mathfrak{A}_{ij},$$

а

$$\mathfrak{A}'_{jk} = x_j x_k^{-1} \mathfrak{A}_{jk}.$$

Тогда

$$\mathfrak{A}'_{ij}\mathfrak{A}'_{jk} = x_i x_j^{-1} \mathfrak{A}_{ij} x_j x_k^{-1} \mathfrak{A}_{jk} = x_i x_k^{-1} \mathfrak{A}_{ij} \mathfrak{A}_{jk},$$

где

$$x_i x_k^{-1} \mathfrak{A}_{ij} \mathfrak{A}_{jk} \subseteq x_i x_k^{-1} \mathfrak{A}_{ik} = \mathfrak{A}'_{ik}.$$

Таким образом справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1.1. *Определенный выше набор аддитивных подгрупп* $\mathfrak{A}'$ *является элементарным ковром*

Лемма 1.1.2. *При сопряжении диагональным элементом* $d = diag(x_1, ..., x_n)$ *любой замкнутый элементарный ковер переходит в замкнутый.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\mathfrak{A}$ — незамкнутый ковер. То есть существует такая трансвекция $t_{ij}(u) \in E_n(\mathfrak{A})$, что $u \notin \mathfrak{A}_{ij}$. При сопряжении элементарной ковровой подгруппы $E_n(\mathfrak{A})$ диагональным элементом $d = diag(x_1, ..., x_n)$ получаем

$$t_{ij}(x_i x_j^{-1} u) = d\ t_{ij}(u)\ d^{-1} d\ \in E_n(\mathfrak{A})\ d^{-1}$$

Согласно формуле (1.1.1)

$$x_i x_j^{-1} u \in \mathfrak{A}'_{ij},$$

но

$$\mathfrak{A}'_{ij} = x_i x_j^{-1} \mathfrak{A}_{ij},$$

отсюда,

$$x_i x_j^{-1} u \in x_i x_j^{-1} \mathfrak{A}_{ij}.$$

Следовательно $u \in \mathfrak{A}_{ij}$. Противоречие. Лемма доказана.

Назовем элементарный матричный ковер

$$\mathfrak{A}_{ik}\mathfrak{A}_{kj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij},\ 1 \le i, j, k \le n,\ i \ne j,\ j \ne k,\ i \ne k$$

дополняемым до полного матричного ковра

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\} \tag{1.1.2}$$

или, кратко, *дополняемым*, если можно доопределить диагональные множества $\mathfrak{A}_{ii}$, $1 \le i \le n$, так, чтобы

$$\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \le i, r, j \le n.$$

Хорошо известно, что элементарный матричный ковер (1.3.3) дополняется до полного ковра (1.1.2) тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{A}_{ij} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \le i, j \le n,\ i \ne j \tag{1.1.3}$$

(см., например, [3, с. 25] или [21, лемма 6]). Это дополнение можно получить, положив

$$\mathfrak{A}_{ii} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji}, \quad 1 \le i \le n,$$

и в этом случае множество матриц вида

$$e + \sum_{i,j=1}^{n} \mathfrak{A}_{ij} e_{ij}$$

является полугруппой относительно матричного умножения. Поэтому любой дополняемый элементарный матричный ковер является замкнутым ковром. В частности, элементарный матричный ковер, полученнный из полного матричного ковра отбрасыванием диагональных элементов, замкнут. Если все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_{ij}$ являются идеалами, то включения (1.1.3) выполняются. Таким образом, справедлива

Лемма 1.1.3. *Любой элементарный матричный ковер идеалов над коммутативным кольцом является замкнутым ковром.*

В кольце целых чисел любая аддитивная подгруппа является идеалом. Поэтому лемма 1.1.3 дает

Следствие 1.1.4. *Любой элементарный матричный ковер аддитивных подгрупп над кольцом целых чисел является замкнутым ковром.*

1.2 Подгруппы и элементы групп Шевалле

Группы лиева типа являются наиболее естественным обобщением классических линейных групп. Работа К. Шевалле 1955 г. [39] синтезировала методы теории конечномерных комплексных алгебр Ли и привела к формированию теории групп и алгебр лиева типа над произвольными полями, включая конечные. Группы Шевалле возникают как группы автоморфизмов простых алгебр Ли, которые в свою очередь определяются системой корней.

Пусть V — евклидово пространство размерности l. Для каждого ненулевого вектора r из V через w_r обозначим отражение относительно гиперплоскости, ортогональной вектору r. Оно является линейным преобразованием, причем $w_r(r) = -r$, а $w_r(x) = x$ для всех с условием $(r, x) = 0$. В общем случае для любого вектора x из V

$$w_r(x) = x - \frac{2(r, x)}{(r, r)} r.$$

Определение 1.2.1. *Подмножество Φ из V называется системой корней, если выполняются следующие аксиомы: 1) Φ — конечное множество ненулевых векторов; 2) Φ порождает пространство V; 3) если $r, s \in \Phi$, то $w_r(s) \in \Phi$; 4) если $r, s \in \Phi$, то $2(r, s)/(r, r)$ — целое число; 5) если $r, \lambda r \in \Phi$, где $\lambda \in R$, то $\lambda = \pm 1$.*

Заметим, что если $r \in \Phi$, то и $-r \in \Phi$. Это следует из аксиомы (3), так как $w_r(r) = -r$. Через $W(\Phi)$ обозначается группа, порожденная отражениями w_r для всех $r \in \Phi$. $W(\Phi)$ называется *группой Вейля системы* Φ. Ясно, что это группа ортогональных преобразований пространства V. По аксиоме (3) W переводит Φ в себя, а по аксиоме (2) W действует точно на Φ. Так как Φ — конечное множество, то и W — конечная группа. Хотя Φ и порождает все пространство V, Φ не является линейно независимой системой векторов. Таким образом, Φ содержит собственное подмножество, которое служит базисом для V, а именно, Φ содержит подмножество 1) Π — линейно независимая система векторов; 2) каждый корень из Φ есть линейная комбинация корней из Π с коэффициентами, которые либо все неотрицательные, либо все неположительные.

Подмножество Π из Φ, удовлетворяющее условиям (1), (2) называется *фундаментальной системой корней. Рангом системы корней* Φ называют размерность пространства V. Непустое подмножество Ψ системы корней Φ называется ее подсистемой, если при замене Φ на Ψ выполняются все аксиомы определения (1.2.1), быть может, исключая аксиому (5). Так как $w_r(r) = -r$, то в силу аксиомы (3) $\{-r, r\}$ есть минимальная подсистема, содержащая корень r. В группе ортогональных преобразований пространства V отражения $w_r, r \in \Phi$, порождают подгруппу $W = W(\Phi)$, называемую группой Вейля системы Φ. Легко видеть, что всякая система корней пространства V переходит вновь в систему корней при ортогональном преобразовании и умножении всех векторов в V на фиксированный (произвольно) вещественный положительный скаляр. Системы корней, связанные таким образом, называют *эквивалентными*. Введенные системы корней называют также *приведенными*, рассматривая и неприведенные системы корней, удовлетворяющие всем аксиомам определения (1.2.1), кроме аксиомы (5).

Систему корней Φ называют *разложимой*, если она представляется объединением $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ двух ортогональных подсистем корней $\Phi_1 \perp \Phi_2$; в противном случае Φ называют *неразложимой системой корней*. Системы корней ранга 2 наиболее часто используются, потому что любая пара корней вкладывается в систему корней ранга 2. Любая система корней ранга 2 есть либо $A_1 \times A_1$ (рисунок 1.2.1), либо A_2 (рисунок 1.2.2), либо B_2 (рисунок 1.2.3), либо G_2 (рисунок 1.2.4) и они выглядят следующим образом.

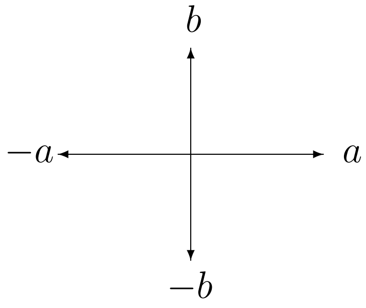

Рис. 1.2.1.

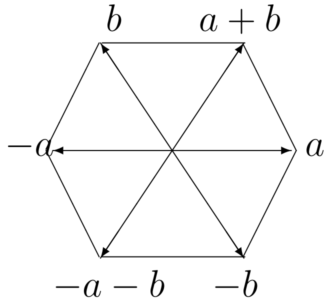

Рис. 1.2.2.

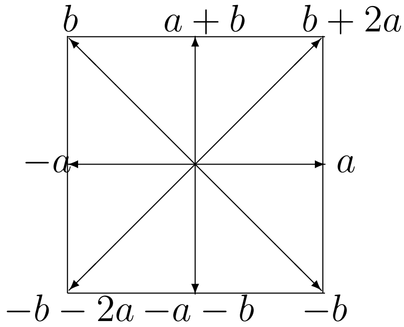

Рис. 1.2.3.

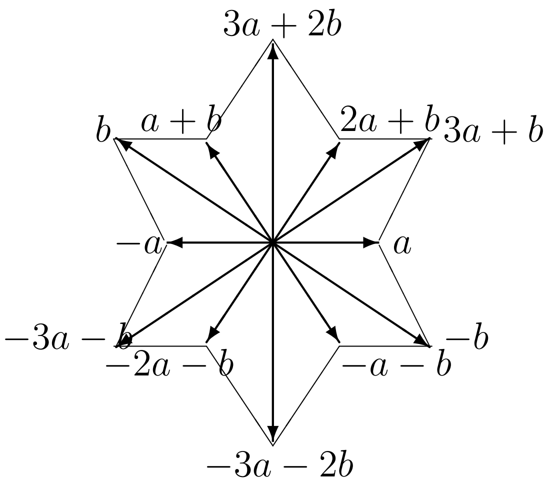

Рис. 1.2.4

С каждой системой корней ассоциируется граф Кокстера, имеющий l вершин, которые соответствуют каждому фундаментальному корню p_i, так, что i-ая вершина соединена с j-ой вершиной ребром тогда и только тогда, когда $p_i + p_j$ — корень.

A_l $(l \leq 1)$

Рис. 1.2.5.

B_l $(l \leq 2)$
C_l $(l \leq 3)$

Рис. 1.2.6.

D_l $(l \leq 4)$

Рис. 1.2.7.

G_2

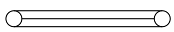

Рис. 1.2.8.

F_4

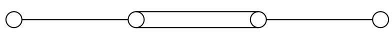

Рис. 1.2.9.

E_6

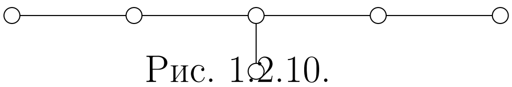

Рис. 1.2.10.

E_7

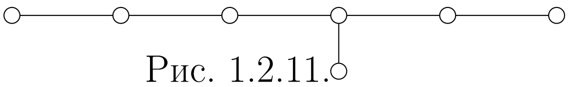

Рис. 1.2.11.

E_6

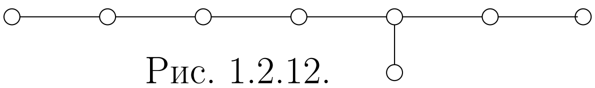

Рис. 1.2.12.

Пусть Φ — приведённая, неразложимая система корней ранга l, $E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом K с единицей. Группа $E(\Phi, K)$ порождается своими корневыми подгруппами

$$X_r = x_r(K) = \{x_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in K\}.$$

Подгруппы X_r абелевы для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u). \tag{1.2.1}$$

Пусть F^* — мультипликативная группа поля F. Элементы

$$n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t),\ r \in \Phi,\ t \in F^*,$$

и соответственно

$$h_r(t) = n_r(t)n_r(-1),\ r \in \Phi,\ t \in F^*.$$

называются мономиальными и соответственно диагональными элементами и порождают мономиальную $N(F)$ и соответственно диагональную $H(F)$ подгруппы. Фактор-группа $N(F)/H(F)$ изоморфна группе Вейля W типа Φ.

Разложение Брюа

$$E(\Phi, K) = U(F)N(F)U(F) \tag{1.2.2}$$

группы Шевалле $E(\Phi, K)$ над полем F не является однозначным. Однако из него можно получить *приведенное* разложение Брюа, которое уже является единственным. Действительно, для каждого $w \in W$ выберем по представителю $n_w \in N(F)$ и положим

$$\Phi_w^+ = \Phi^+ \cap w^{-1}(-\Phi^+),$$

$$U_w(F) = \langle x_r(F) \mid r \in \Phi_w^+ \rangle.$$

Тогда любой элемент $g \in E(F)$ единственным образом представляется в виде

$$g = uhn_wv, \text{ где } u \in U(F),\ h \in H(F),\ w \in W,\ v \in U_w(F). \tag{1.2.3}$$

Это разложение и называется приведенным разложение Брюа или в другой терминологии каноническим представлением элементов групп Шевалле (см., например, [35, теорема 4′] или [37, следствие 8.4.2]).

1.3 Ковры лиева типа

Понятие элементарного матричного ковра переносилось на группы Шевалле различными способами. В данной работе используется определение элементарного ковра для групп Шевалле, которое ввел В. М. Левчук [[21]]. Такие ковры, ассоциированные с группама Шевалле будем называть коврами лиева типа для того, чтобы отличать их от матричных коров.

Назовём *элементарным ковром типа* Φ *ранга* l *над коммутативным кольцом* K всякий набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\},$$

кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r,\ s,\ ir+js \in \Phi, \quad i > 0,\ j > 0, \tag{1.3.1}$$

где

$$\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\},$$

а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^i), \quad r,\ s,\ r+s \in \Phi. \tag{1.3.2}$$

Здесь и далее $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над K определяет *ковровую подгруппу*

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \rangle,$$

группы Шевалле $E(\Phi, K)$, где $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная множеством M некоторой группы. Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е.

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r), \quad r \in \Phi.$$

При $\Phi = A_{n-1}$ ковер $\mathfrak{A}$ лиева ранга $n-1$ совпадает с элементарным матричным ковром

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i,\ j \leq n,\ i \neq j\} \tag{1.3.3}$$

степени n и в этом частном случае соотношения (1.3.1) запишутся в виде

$$\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij} \ \text{ для всех попарно различных } \ i, r, j, \tag{1.3.4}$$

а ковровая подгруппа $E_n(\mathfrak{A})$ порождается трансвекциями

$$t_{ij}(u_{ij}),\quad u_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij},\quad 1 \leq i,\ j \leq n,\ i \neq j.$$

Замечание 1.3.1. *Условие ковровости обеспечивает следующий факт: в правой части коммутаторной формулы Шевалле каждый из сомножителей лежит в ковровой подгруппе, если мы коммутируем два корневых элемента из этой ковроой подгруппы.*

Наряду с элементарной группой Шевалле $E(\Phi, K)$ будем рассматривать расширенную группу Шевалле $\widehat{E}(\Phi, K)$, которая является расширением группы $E(\Phi, K)$ при помощи всех диагональных элементов $h(\chi)$, где χ — K-характер целочисленной решетки корней $\mathbb{Z}\Phi$, т. е. гомоморфизм аддитивной группы $\mathbb{Z}\Phi$ в мультипликативную группу K^* кольца K [37, §7.1] (см. также [9]). Любой K-характер χ однозначно задается значениями на фундаментальных корнях и для любых $r \in \Phi$ и $t \in K$

$$h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t). \tag{1.3.5}$$

Лемма 1.3.2. *Сопрягая диагональным элементом $h(\chi)$ ковровую подгруппу $E(\Phi, \mathfrak{A})$ получим ковровую подгруппу*

$$h(\chi)E(\Phi, \mathfrak{A})h(\chi)^{-1} = E(\Phi, \mathfrak{A}'),$$

определяемую ковром

$$\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A}'_r \mid r \in \Phi\},$$

где $\mathfrak{A}'_r = \chi(r)\mathfrak{A}_r$.

Доказательство. В силу (3.2.1) группа $h(\chi)E(\Phi,\mathfrak{A})h(\chi)^{-1}$ порождается подгруппами $x_r(\chi(r)\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$. Очевидно, условие ковровости (1.3.1) дает включения

$$C_{ij,rs}\chi(r)^i\mathfrak{A}_r^i\chi(s)^j\mathfrak{A}_s^j \subseteq \chi(r)^i\chi(s)^j\mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r,s,ir+js \in \Phi,\ i,j>0.$$

Отсюда, в силу определения аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}'_r$, $r \in \Phi$, получаем условие ковровости

$$C_{ij,rs}(\mathfrak{A}'_r)^i(\mathfrak{A}'_s)^j \subseteq \mathfrak{A}'_{ir+js}, \quad r,s,ir+js \in \Phi,\ i,j>0,$$

для набора аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}'$. Лемма доказана.

Ковер $\mathfrak{A}'$ из леммы 1.3.2 естественно назвать *сопряженным* к исходному ковру $\mathfrak{A}$ и мы можем говорить о сопряженных коврах, не привязывая их к ковровым подгруппам. Поэтому допустимо такое высказывание. «С точностью до сопряжения диагональным элементом ковер $\mathfrak{A}$ совпадает с ковром $\mathfrak{A}'$.»

Возникает следующий естественный вопрос: *будет ли подгруппа M, порождённая своими пересечениями $M \cap X_r$, $r \in \Phi$, ковровой?*

Если $\Phi = A_l, D_i, E_l$, то для любой пары линейно независимых корней r, s и любых $t, u \in K$

$$[x_r(t), x_s(u)] = \begin{cases} x_{r+s}(\pm tu),\ \text{если } r+s \in \Phi, \\ 1,\ \text{если } r+s \notin \Phi, \end{cases}$$

и, следовательно, подгруппа M, порождённая пересечениями

$$M \cap X_r = x_r(\mathfrak{A}_r), \quad r \in \Phi,$$

является ковровой и определяется ковром аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r, \mid r \in \Phi\}.$$

Однако, в общем случае, как показывают следующие примеры 1.3.3 и 1.3.4, ответ на указанный выше вопрос отрицательный.

Пример 1.3.3. *Пусть M — группа Шевалле типа B_2 над полем характеристики 2, порожденная двумя корневыми элементами $x_a(1)$ и $x_b(1)$, где a и b — фундаментальные корни. Тогда,*

$$[x_a(1), x_b(1)] = x_{a+b}(1)x_{2a+b}(1),$$

но по отдельности элементы $x_{a+b}(1), x_{2a+b}(1)$ не лежат в M так как элементы $x_a(1)$, $x_b(1)$ пораждают диэдральную группу порядка 8. Если бы произведение $x_{a+b}(1)x_{2a+b}(1)$ расщеплялось, тогда и подгруппа M совпадала бы со всей унипотентной подгруппой и имела бы порядок 16. Следовательно, M — не является ковровой подгруппой.

Пример 1.3.4. *Пусть M — подгруппа группы Шевалле типа G_2 над полем K характеристики 3, порожденная двумя корневыми элементами $x_a(1)$ и $x_b(1)$, где a и b — фундаментальные корни, $M = \langle x_a(1), x_b(1)\rangle$. Тогда*

$$[x_a(1), x_b(1)] = x_{a+b}(1)x_{2a+b}(1)x_{3a+b}(1)x_{3a+2b}(1).$$

Покажем, что по отдельности элементы $x_{a+b}(1)$ и $x_{3a+b}(1)$ не лежат в M. Очевидно, что любой диагональный элемент $h(\chi)$ из группы Шевалле G_2 над полем K нормализует группу M. Отметим также, что для типа G_2 расширенная группа Шевалле совпадает с элементарной группой. Любой K-характер χ однозначно задается значениями на фундаментальных корнях и для любых $r \in \Phi$ и $t \in K$

$$h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t).$$

Более того, если $r = ka + mb$, то и сопряжение

$$\chi(ka + mb) = (\chi(a))^k (\chi(b))^m$$

выполняется.

Пусть $\chi(a) = \chi(b) = -1$. Тогда

$$h(\chi)[x_a(1), x_b(1)]h(\chi)^{-1} = x_{a+b}(1)x_{2a+b}(-1)x_{3a+b}(1)x_{3a+2b}(-1). \qquad (1.3.6)$$

Следовательно, в M лежат произведения

$$x_{a+b}(1)x_{3a+b}(1) \text{ и } x_{2a+b}(1)x_{3a+2b}(1).$$

Полагая $\chi(a) = 1$, $\chi(b) = -1$, получаем

$$h(\chi)x_{2a+b}(1)x_{3a+2b}(1)h(\chi)^{-1} = x_{2a+b}(-1)x_{3a+2b}(1). \qquad (1.3.7)$$

Следовательно, в M лежат оба корневые элементы $x_{2a+b}(1)$ и $x_{3a+2b}(1)$. Подгруппа M_1, порожденная этими двумя корневыми элементами вместе с произведением $x_{a+b}(1)x_{3a+b}(1)$, является нормальной элементарной абелевой подгруппой порядка 27. В группе M то вытекает из следующих равенств:

$$[x_a(\pm 1), x_{2a+b}(\pm 1)] = x_{3a+b}(\pm 3) = 1,$$

$$[x_a(\pm 1), x_{3a+b}(\pm 1)] = 1,$$

$$[x_a(\pm 1), x_{a+b}(\pm 1)x_{3a+b}(\pm 1)] = x_{2a+b}(\pm 2)x_{3a+b}(\pm 3)x_{3a+2b}(\pm 3) = x_{2a+b}(\pm 1),$$

$$[x_b(\pm 1), x_{2a+b}(\pm 1)] = 1,$$

$$[x_b(\pm 1), x_{3a+2b}(\pm 1)] = 1,$$

$$[x_b(1), x_{a+b}(1)x_{3a+b}(1)] = x_{3a+2b}(\pm 1).$$

Таким образом, произведение $x_{a+b}(1)x_{3a+b}(1)$ в группе M не расщепляется, то есть по отдельности элементы $x_{a+b}(1)$ и $x_{3a+b}(1)$ не лежат в M.

Следовательно, в силу замечания 1.3.1 условия ковровости нарушаются и поэтому группа M не является ковровой [27].

По произвольному ковру $\mathfrak{A}$ типа Φ вводим новый набор аддитивных подгрупп

$$\overline{\mathfrak{A}} = \{\overline{\mathfrak{A}}_r |\, r \in \Phi\},$$

где

$$\overline{\mathfrak{A}}_r = \{t \in K |\, x_r(t) \in E(\Phi, \mathfrak{A})\},$$

и называем его *замыканием* ковра $\mathfrak{A}$.

Элементарный ковёр $\mathfrak{A}$ типа Φ ранга l называется *замкнутым* (в статье В. М. Левчука *допустимым*[21]), если его ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, то есть $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}$. В этой главе также рассмотрим примеры колец, над которыми замкнут любой ковер.

Ковер $\mathfrak{A}$ назовем *унипотентным*, если все его аддитивные подгруппы, индексированные отрицательными корнями, являются нулевыми. По любому ковру $\mathfrak{A}$ можно определить унипотентный ковер, положив $\mathfrak{A}_r = 0$ для всех $r \in -\Phi^+$, и его ковровую подгруппу

$$U(\mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi^+ \rangle.$$

Очевидно, $U(\mathfrak{A})$ является подгруппой в $E(\Phi, \mathfrak{A})$, а если ковер $\mathfrak{A}$ замкнутый, то $U(\mathfrak{A}) = U(F) \cap E(\Phi, \mathfrak{A})$. Любой унипотентный ковер замкнут, а изучение ковров и ковровых подгрупп над полями сводится к неприводимым коврам и соответствующим ковровым подгруппам [22, 29].

При переходе от разложения (1.2.2) к разложению (1.2.3) существенно используется единственность представления унипотентного элемента в виде произведения корневых элементов, соответствующих положительным корням, причем в любом фиксированном порядке. Аналогичный результат имеет место и для ковровых унипотентных подгрупп.

Лемма 1.3.5 ([29, лемма 3]). *Пусть $\mathfrak{A}$ — унипотентный ковер типа Φ над полем F. Тогда каждый элемент из $E(\Phi, \mathfrak{A})$ можно единственным образом записать в виде $\prod_{r\in\Phi} x_r(t_r)$, где $t_r \in \mathfrak{A}_r$, и умножение производится в любом заранее фиксированном порядке. В частности, любой унипотентный ковер над полем замкнут.*

1.4 Примеры незамкнутых ковров над кольцами

Далее в этом параграфе $\mathbb{Z}$ — аддитивная подгруппа кольца K, порожденная его единицей 1. Если его характеристика $p > 0$, то $\mathbb{Z}$ совпадает с кольцом вычетов $\mathbb{Z}_p$ по модулю p. Основном результатом главы является

Теорема 1.4.1. *Пусть K — коммутативное кольцо с единицей 1, $\mathbb{Z}$ — его аддитивная подгруппа, порожденная единицей 1, и в K существуют ненулевой идеал I такой, что $\mathbb{Z} + I \neq K$. Тогда для любой системы корней Φ существует неприводимый незамкнутый ковер типа Φ над K.*

Доказательство. Отметим что доказательство теоремы конструктивное. Мы строим неприводимый незамкнутый ковер

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\},$$

параметризуемый идеалом I и аддитивной подгруппой J с условием

$$\mathbb{Z} + I \neq \mathbb{Z} + I + J. \tag{1.4.1}$$

В частности, J может совпадать с K. Более конкретно аддитивные подгруппы ковра задаются следующим образом. Положим Φ — системы корней ранга $l \geq 2$ определим набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\} \tag{1.4.2}$$

следующим образом. Фиксируем корень $p \in \Phi$ и полагаем

$$\mathfrak{A}_p = \mathbb{Z} + I,$$

$$\mathfrak{A}_{-p} = \mathbb{Z} + I + J,$$

$$\mathfrak{A}_r = I,\ r \neq \pm p.$$

Покажем, что набор $\mathfrak{A}$ является ковром. Для сокращения записи положим

$$A = \mathbb{Z} + I,$$

$$B = \mathbb{Z} + I + J.$$

Если сумма $r+s$ корней r, s является корнем, то все три корня $r, s, r+s$ лежат в некоторой подсистеме корней Φ_2 ранга 2 системы Φ. Поэтому достаточно проверить условия ковровости для систем корней типа A_2, B_2 и G_2. Пусть $\{a, b\}$ — фундаментальная система для Φ_2.

Для типа A_2 коммутаторная формула имеет вид

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu). \tag{1.4.3}$$

При $p = a$ формула (1.4.3) и условие ковровости дают следующие шесть импликаций:

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b} \Rightarrow AI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_a \Rightarrow II \subseteq A,$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b} \Rightarrow BI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_b \Rightarrow BI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-b} \Rightarrow AI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{-a} \Rightarrow II \subseteq B.$$

Так как идеал I лежит в пересечении $A \cap B$, то включения, указанные в правых частях этих шести импликаций, выполняются. Для других $p \in \Phi_2$ ситуация подобная. Если $p \notin \Phi_2$, то формула (1.4.3) и условие ковровости дают импликацию $\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_s \subseteq \mathfrak{A}_{r+s} \Rightarrow II \subseteq I$. Включение $II \subseteq I$, очевидно, выполняется.

Для типа B_2 имеется два вида коммутаторной формулы

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u), \tag{1.4.4}$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu). \tag{1.4.5}$$

При $p = a$ формула (1.4.4) дает следующие восемь импликаций:

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b} \Rightarrow AI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \Rightarrow A^2I \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b} \Rightarrow BI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}^2_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \Rightarrow B^2I \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_a \Rightarrow II \subseteq A,$$

$$\mathfrak{A}^2_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq_{2a+b} \Rightarrow I^2I \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{-a} \Rightarrow I \subseteq B,$$

$$\mathfrak{A}^2_{-a-b}\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \Rightarrow I^2I \subseteq I,$$

При $p = a$ формула (1.4.5) дает еще четыре импликации:

$$2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \Rightarrow 2AI \subseteq I,$$

$$2\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_b \Rightarrow 2BI \subseteq I,$$

$$2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-b} \Rightarrow 2AI \subseteq I,$$

$$2\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \Rightarrow 2BI \subseteq I.$$

Так же, как и для типа A_2, включения, указанные в правых частях всех таких импликаций, выполняются в силу того, что идеал I лежит в пересечении $A \cap B$. Случай $p \neq a$ рассматривается аналогично.

Для типа G_2 имеется четыре вида коммутаторной формулы

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u)x_{3a+b}(\pm t^3u)x_{3a+2b}(\pm t^3u^2), \tag{1.4.6}$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu)x_{3a+2b}(\pm 3tu^2)x_{3a+b}(\pm 3t^2u), \qquad (1.4.7)$$

$$[x_a(t), x_{2a+b}(u)] = x_{3a+b}(\pm 3tu), \qquad (1.4.8)$$

$$[x_b(t), x_{3a+b}(u)] = x_{3a+2b}(\pm tu). \qquad (1.4.9)$$

Мы не будем подробно выписывать условия ковровости для этого типа. В силу формул (1.4.6)–(1.4.9) для подходящих $n, m, c \in \{1, 2, 3\}$ все они имеют вид

$$cA^nI^m \subseteq X,$$

$$cB^nI^m \subseteq X,$$

$$cI^nI^m \subseteq X$$

(как впрочем, и для типов A_2 и B_2), где X есть A, B или I. Они выполняются снова только в силу того, что идеал I лежит в пересечении $A \cap B$. Таким образом, набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}$ является ковром.

Покажем незамкнутость ковра $\mathfrak{A}$. В силу неравенства (1.4.1) в кольце K существует элемент t такой, что $t \in \mathfrak{A}_{-p}$, но $t \notin \mathfrak{A}_p$. Так как $1 \in \mathfrak{A}_p \cap \mathfrak{A}_{-p}$, то

$$n_p = x_p(1)x_{-p}(-1)x_p(1) \in E(\Phi, \mathfrak{A}).$$

Отсюда

$$n_p^{-1}x_{-p}(t)n_p = x_p(-t) \in E(\Phi, \mathfrak{A})$$

и, следовательно, ковер $\mathfrak{A}$ не является замкнутым.

Итак, теорема доказана.

Замечание 1.4.2. *По лемме 1.1.3, за исключением лишь одного подковра $\{\mathfrak{A}_p,\ \mathfrak{A}_{-p}\}$, все другие подковры $\{\mathfrak{A}_r,\ \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1 ковра (1.4.2) являются замкнутыми.*

Пример 1.4.3. *Тройка $K = F[x]$, I, $J = \mathbb{Z}x$, где $F[x]$ — кольцо многочленов над полем F, I — его идеал, порожденный некоторым многочленом степени не меньше 2, удовлетворяет предположению теоремы.*

Таким образом, множество колец, удовлетворяющих условию (1.4.1), не пусто.

Пример 1.4.3 можно обобщить следующим образом.

Пример 1.4.4. *Пусть K — коммутативное кольцо с единицей e, обладающее ненулевым идеалом I и элементом k, что*

$$\mathbb{Z}e + I \neq \mathbb{Z}e + \mathbb{Z}k + I,$$

где $\mathbb{Z}x$ — аддитивная подгруппа кольца K, порожденная элементом x. Для системы корней Φ ранга $l \geq 2$ определим

$$\mathfrak{A}_s = \mathbb{Z}e + I,$$

$$\mathfrak{A}_{-s} = \mathbb{Z}e + \mathbb{Z}k + I$$

$$\mathfrak{A}_r = I,\ r \neq \pm s,$$

Тогда набор $\mathfrak{A}$ является незамунутым ковром.

2 Ковры лиева типа над локально-конечными полями

В этой главе доказывается, что любой неприводимый ковер аддитивных подгрупп, ассоциированный с группой Шевалле лиева ранга больше 1 над локально конечным полем, с точностью до сопряжения диагональным элементом совпадает с ковром, все аддитивные подгруппы которого равны некоторому фиксированному подполю основного поля.

2.1 Случай ранга 1

Любая пара аддитивных подгрупп задает элементарный ковер ранга 1. Для ранга 1 условие ковровости 1.3.1 вырождается, а ковровая подгруппа будет изоморфна некоторой подгруппе из $SL_2(F)$ или $PSL_2(F)$, порожденной элементарными трансвекциями. Тем не менее, ковры ранга 1 играют важную роль. Это подчеркивает следующий известный вопрос, который поставил В. М. Левчук в 2002 г. [20, вопрос 15.46].

Верно ли, что для замкнутости ковра $\mathfrak{A}$ *типа* Φ *над полем* K *необходима и достаточна замкнутость его подковров* $\{\mathfrak{A}_r,\ \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, *ранга* 1*?*

Пусть $GF(q)$ — конечное поле. *Собственным (порождающим) элементом* конечного поля называется элемент, который не лежит в собственном подполе конечного поля. *Примитивным элементом* поля $GF(q)$, называется такой элемент t, что все элементы поля, за исключением нуля, могут быть представлены в виде степени элемента α. Отметим, что собственный элемент, в отличии от примитивного, не всегда порождает всю мультипликативную группу конечного поля. Следующий результат обычно называют теоремой Диксона ([38], теор. 2.8.4; [22]).

Лемма 2.1.1. *Пусть t— собственный элемент поля нечетного порядка q и*

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Тогда либо $L = SL_2(q)$, либо $q = 9$, $|Z(L)| = 2$, $L/Z(L) \cong A_5$, $t^2 = -1$ и L содержит подгруппу, изоморфную $SL_2(3)$.

Пример 2.1.2. *Из леммы 2.1.1 следует существование незамкнутых ковров над конечными полями нечетной характеристики. Действительно, пара аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}_r = t\mathbb{Z}_p$ и $\mathfrak{A}_{-r} = \mathbb{Z}_p$ задает незамкнутый ковер ранга 1 над конечным полем $GF(q)$, при $q \neq 9$. Данный пример показывает, что в основной теореме этой главы ограничение на лиев ранг больше 1 существенно.*

Рассмотрим также следующий кононический пример замкнутого ковра ранга 1.

Пример 2.1.3. *Пусть $\mathbb{F}_2[x]$ — кольцо многочленов над полем $\mathbb{F}_2$, состоящим из двух элементов. Над этим кольцом определим ковер ранга 1, состоящий из аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}_r = \{0, 1\}$ и $\mathfrak{A}_{-r} = \{0, x\}$, где x — трансцендентный элемент. Данный ковер будет являться замкнутым, так как благодаря трансцендентному элементу x в ковровой подгруппе не появятся новые корневые элементы.*

Действительно, этому ковру ранга 1 соответстует матричный ковер степени 2, ковровая подгруппа которого порождается следующими матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

В элементах этой группы на позициях (1,2) и (2,1) будут стоять ненулевые многочлены от x. А так как x — трансцендентный элемент, то в ковровой подгруппе не появятся новые корневые элементы.

2.2 Случай ранга 2

Следующая лемма в действительности утверждает, что для системы корней ранга 2 над локально конечным полем K с точностью до сопряжения диагональным элементом из расширенной группы Шевалле $\widehat{E}(\Phi, K)$ все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$ совпадают с некоторым подполем P поля K, в частности, ковер $\mathfrak{A}$ замкнут. Она является базой для доказательства основной теоремы этой главы.

Лемма 2.2.1. *Пусть $\{a, b\}$ — фундаментальная система корней для системы корней Φ типа A_2, B_2 или G_2, $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа Φ над локально конечным полем K, причем $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. Тогда $\mathfrak{A}_r = P$, $r \in \Phi$, для некоторого подполя P поля K.*

Доказательство. В силу следствия 3.2 из [22] достаточно рассмотреть следующие три случая: 1) Φ типа B_2 и $char K = 2$; 2) Φ типа G_2 и $char K = 2$; 3) Φ типа G_2 и $char K = 3$.

Пусть Φ типа B_2 и $char K = 2$. Тогда

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(tu)x_{2a+b}(t^2u). \tag{2.2.1}$$

Условия ковровости, возникающие из формул типа (2.2.1), дают следующие пары включений

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}, \quad \mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}, \tag{2.2.2}$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_a, \quad \mathfrak{A}_{-a-b}^2\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{-b}, \tag{2.2.3}$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}, \quad \mathfrak{A}_{-a}^2\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{b}, \tag{2.2.4}$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b}, \quad \mathfrak{A}_{-a}^2\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b}. \tag{2.2.5}$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{a}, \quad \mathfrak{A}_{a+b}^2\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}. \tag{2.2.6}$$

Из предположения $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$ и включений (2.2.5) следует, что $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех отрицательных корней r. Отсюда и из включений (2.2.3) и (2.2.4) получаем включение

$$\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a} \cap \mathfrak{A}_{-b} \cap \mathfrak{A}_{a+b} \cap \mathfrak{A}_{b}. \tag{2.2.7}$$

Сейчас из включений (2.2.2), (2.2.6) и (2.2.7) последовательно выводится, что всякая степень любого элемента $t \in \mathfrak{A}_{2a+b}$ лежит в $\mathfrak{A}_{2a+b}$. Таким образом, все многочлены от t с коэффициентами в простом подполе $\mathbb{F}_2$ содержатся в $\mathfrak{A}_{2a+b}$ для любого элемента $t \in \mathfrak{A}_{2a+b}$. Так как любое подкольцо локально конечного поля является полем, то $\mathfrak{A}_{2a+b}$ есть объединение конечных полей. Для любого конечного поля характеристики 2 возведение в квадрат является его автоморфизмом, поэтому заключаем, что $\mathfrak{A}_{2a+b}^2 = \mathfrak{A}_{2a+b}$. Отсюда и в силу включений (2.2.2) и (2.2.7) получаем

$$\mathfrak{A}_{2a+b}\mathfrak{A}_{2a+b} = \mathfrak{A}_{2a+b}^2\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a}^2\mathfrak{A}_{b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}.$$

Следовательно, $\mathfrak{A}_{2a+b}$ — поле. Сейчас из включений (2.2.2–2.2.5) следует, что все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, индексированные длинными корнями, совпадают с некоторым подполем P поля K. В силу включения $1 \in \mathfrak{A}_b \cap \mathfrak{A}_{-b}$ из (2.2.2) и (2.2.6) получаем равенство $\mathfrak{A}_{a+b} = \mathfrak{A}_a$. Ситуация симметричная, поэтому совпадают все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, соответствующие коротким корням. Сейчас из (2.2.2) следуют включения $\mathfrak{A}_a^2 \subseteq P \subseteq \mathfrak{A}_a$. Далее так же как и для $\mathfrak{A}_{2a+b}$ получаем, что $\mathfrak{A}_a^2 = \mathfrak{A}_a$. Отсюда $\mathfrak{A}_r = P$ для всех $r \in \Phi$.

Пусть Φ типа G_2. Нам потребуются два типа коммутаторных формул

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u)x_{3a+b}(\pm t^3u)x_{3a+2b}(\pm t^3u^2), \tag{2.2.8}$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu) x_{3a+b}(\pm 3t^2u) x_{3a+2b}(\pm 3tu^2). \qquad (2.2.9)$$

Условия ковровости, возникающие из формул (2.2.8) и (2.2.9), дают соответственно следующие серии включений

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}, \quad \mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}, \quad \mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}, \quad \mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b^2 \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}, \qquad (2.2.10)$$

$$2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}, \quad 3\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}, \quad 3\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b}^2 \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}. \qquad (2.2.11)$$

Длинные корни из Φ составляют систему корней типа A_2 с фундаментальной системой $\{b, 3a+b\}$. По условию леммы $1 \in \mathfrak{A}_{-b}$, а включение $1 \in \mathfrak{A}_{-3a-b}$ следует из $\mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}$, только для отрицательный корней. Поэтому независимо от характеристики поля K все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, индексированные длинными корнями, совпадают с некоторым подполем P поля K в силу справедливости леммы для типа A_2.

Из включений типа $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ следует совпадение всех аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}_r$, соответствующие коротким корням, а затем и включения $P \subseteq \mathfrak{A}_r$.

Если $charK = 2$, то из $3\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}$ получаем $\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq P$. Следовательно, $\mathfrak{A}_r = P$ для всех $r \in \Phi$.

Если $charK = 3$, то из $\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ следует, что $\mathfrak{A}_a^2 \subseteq \mathfrak{A}_a$. Отсюда несложно получить, что $\mathfrak{A}_a$ является полем, причем $\mathfrak{A}_a^3 = \mathfrak{A}_a$. Наконец, из $\mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b^2 \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}$ получаем $\mathfrak{A}_a^3 = \mathfrak{A}_a \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}$. Следовательно, $\mathfrak{A}_r = P$ для всех $r \in \Phi$.

Лемма доказана.

2.3 Общий случай

Здесь доказывается следующая основная теорема этой главы.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ *— неприводимый ковер типа* Φ *ранга* $l \geq 2$ *над локально конечным полем* K*. Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из расширенной группы Шевалле* $\widehat{E}(\Phi, K)$ *все аддитивные подгруппы* $\mathfrak{A}_r$*,* $r \in \Phi$*, совпадают с некоторым подполем* P *поля* K*, в частности, ковер* $\mathfrak{A}$ *замкнут.*

Утверждение теоремы 2.3.1 отмечается в [22, следствие 3.2] в качестве следствия, исключая следующие случаи: 1) Φ типа B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 2$), F_4 и $char K = 2$; 2) Φ типа G_2 и $char K$ равна 2 или 3. Переход к произвольному лиеву рангу от ранга 2 в [22] отсутствует, поэтому мы воспроизводим его для любой характеристики основного поля. Случай ранга 2 полностью рассмотрен в лемме 2.2.1.

Для доказательства общего случая теоремы 2.3.1 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.3.2. *[37, стр. 50] Любой положительный корень* $r \in \Phi^+$ *может быть представлен в виде суммы фундаментальных корней* $r = r_{i_1} + r_{i_2} + \dots + r_{i_k}$ *таким образом, что* $r_{i_1} + r_{i_2} + \dots + r_{i_s}$ *является корнем для всех* $s \leq k$*.*

Доказательство теоремы 2.3.1 для ранга $l \geq 3$**.** Пусть $\mathfrak{A}$, Φ и K такие как в теореме 2.3.1, $\Pi = \{r_1, \dots, r_l\}$ — фундаментальная система корней для Φ, Φ^+ — множество положительных корней из Φ. В силу (3.2.1) и леммы 1.3.2 с точностью до сопряжения диагональным элементом из $\widehat{E}(\Phi, K)$ можно считать, что $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Pi$. Для ранга $l = 2$

утверждение теоремы следует из леммы 2.2.1, поэтому далее считаем, что $l \geq 3$.

Если корни $r_i, r_j \in \Pi$ являются соседними в графе Кокстера, соответствующего системе корней Φ, то пересечение $\Phi \cap (\mathbb{Z}r_i + \mathbb{Z}r_j)$ является подсистемой корней типа A_2 или B_2. Обозначим ее через Φ_{ij}. По лемме 2.2.1 существует подполе P_{ij} поля K такое, что $\mathfrak{A}_r = P_{ij}$ для всех $r \in \Phi_{ij}$, в частности, $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Pi \cup (-\Pi)$. Более того, в силу связности графа Кокстера все подполя P_{ij} совпадают. Обозначим это единственное подполе через P.

Покажем, что все $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, совпадают с подполем P. Возьмем произвольный корень $r \in \Phi^+$. По лемме 2.3.2 $r = r_{i_1} + r_{i_2} + \cdots + r_{i_k}$, где $r_{i_1} + r_{i_2} + \cdots + r_{i_s}$ является корнем для всех $s \leq k$. Таким образом, существуют корни $s \in \Phi^+$ и $r_i \in \Pi$ такие, что $r = s + r_i$. Отсюда в силу условия ковровости (1.3.1) получаем включения

$$C_{11,r_i,s}\mathfrak{A}_{r_i}\mathfrak{A}_s = N_{r_i,s}\mathfrak{A}_{r_i}\mathfrak{A}_s \subseteq \mathfrak{A}_r, \tag{2.3.1}$$

$$C_{11,-r_i,r}\mathfrak{A}_{-r_i}\mathfrak{A}_r = N_{-r_i,r}\mathfrak{A}_{-r_i}\mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_s, \tag{2.3.2}$$

где $N_{r,s}$ — структурные константы соответствующей алгебры Ли и в данном случае (при $l \geq 3$) они равны ± 1 или ± 2.

Пусть $N_{r_i,s}$ и $N_{-r_i,r}$ отличны от нуля в поле K. Тогда, учитывая, что $1 \in \mathfrak{A}_{r_i} \cap \mathfrak{A}_{-r_i}$, из включений (2.3.1) и (2.3.2) получаем равенство $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_s$. Индукция по высоте корней приводит к равенству $\mathfrak{A}_r = P$ для всех положительных корней r. Аналогично получаем такое же равенство и для отрицательных корней.

При $l \geq 3$ константы $N_{r_i,s}$ и $N_{-r_i,r}$ из (2.3.1) и (2.3.2) могут равняться нулю только когда корни r_i, s, r лежат в подсистеме корней типа B_2 и $charK = 2$. Поэтому остается рассмотреть только типы B_l, C_l и F_4 в характеристике 2.

Пусть Φ типа B_l, $l \geq 3$, причем корень $r_1 \in \Pi$ короткий (остальные корни из Π длинные). Тогда для любого корня $r \in \Phi^+$ выполняется одно из следующих условий: 1) $r = 2r_1 + r_2$; 2) существуют корни $s \in \Phi^+$ и $r_i \in \Pi$ такие, что $r = s + r_i$ и корни s и r_i порождают подсистему корней типа A_2 или B_2, причем в случае B_2 корень r_i длинный. Справедливость выполнения одного из условий 1) или 2) следует из вида положительных корней. Они исчерпываются тремя видами:

$r_1 + \cdots + r_i$ $(1 \leq i \leq l)$ — короткие корни;

$r_2 + \cdots + r_i$ $(2 \leq i \leq l)$ — длинные корни;

$2r_1 + \cdots + 2r_i + r_{i+1} + \cdots + r_j$ $(1 \leq i \leq l-1,\ i < j \leq l)$ — длинные корни.

В случае 1) сразу получаем равенство $\mathfrak{A}_r = P$ по лемме 2.2.1. В случае 2) константы $N_{r_i,s}$ и $N_{-r_i,r}$ из (2.3.1) и (2.3.2) равны ± 1, а следовательно, так же как и выше по индукции получаем равенство $\mathfrak{A}_r = P$. Аналогичное равенство получаем для любого отрицательного корня r.

Пусть Φ типа C_l, $l \geq 3$, причем корень $r_l \in \Pi$ длинный (остальные корни из Π короткие). Положительные корни исчерпываются следующими тремя видами:

$r_i + \cdots + r_j$ $(1 \leq i \leq l-1,\ 1 \leq j \leq l)$ — короткие корни;

$r_i + 2r_{i+1} + \cdots + 2r_j + r_{j+1}$ $(1 \leq i \leq l-2,\ 2 \leq j \leq l-1)$ — короткие корни;

r_l, $2r_i + \cdots + 2r_{l-1} + r_l$ $(1 \leq i \leq l-1)$ — длинные корни.

Поэтому для любого короткого корня $r \in \Phi^+$ выполняется одно из следующих условий: 1) $r = r_{l-1} + r_l$; 2) существуют короткие корни $s \in \Phi^+$ и $r_i \in \Pi$ такие, что $r = s + r_i$ и корни s и r_i порождают подсистему корней типа A_2. В случае 1) сразу получаем равенство $\mathfrak{A}_r = P$ по лемме 2.2.1. В случае 2) константы $N_{r_i,s}$ и $N_{-r_i,r}$ из (2.3.1) и (2.3.2) равны ± 1, а следовательно, так же как и выше по индукции получаем равенство $\mathfrak{A}_r = P$. Аналогичное равенство получаем для любого отрицательного короткого корня r. Так как $\mathfrak{A}_{2r_{l-1}+r_l} = \mathfrak{A}_{r_l} = P_{l-1,l} = P$, то последовательно с применением леммы 2.2.1 получаем, что и все $\mathfrak{A}_r$, индексированные остальными длинными корнями

$$2r_{l-2} + 2r_{l-1} + r_l, \ldots, 2r_1 + \cdots + 2r_{l-1} + r_l,$$

также совпадают с P.

Наконец, пусть Φ типа F_4 с фундаментальной системой $\Pi = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$, причем корни r_1, r_2 — короткие и $r_2 + r_3 \in \Phi$. Тогда для любого короткого корня $r \in \Phi^+$ выполняется одно из следующих условий:

1) r лежит в подсистеме корней типа C_3 с базисом $\{r_1, r_2, r_3\}$;

2) r лежит в подсистеме корней типа B_3 с базисом $\{r_2, r_3, r_4\}$;

3) r равен $r_1+r_2+r_3+r_4$, $r_1+2r_2+r_3+r_4$, $r_1+2r_2+2r_3+r_4$, $r_1+3r_2+2r_3+r_4$ или $2r_1 + 3r_2 + 2r_3 + r_4$.

В случаях 1), 2) уже установлено, что $\mathfrak{A}_r = P$. В случае 3) существуют корни $s \in \Phi^+$ и $r_i \in \Pi$ такие, что $r = s + r_i$ и корни s и r_i порождают подсистему корней типа A_2 или B_2, причем в случае B_2 корень r_i длинный. Далее также как и для Φ типа C_l получаем равенство $\mathfrak{A}_r = P$ для всех корней $r \in \Phi$.

Теорема доказана.

Замечание 2.3.3. *В доказательстве теоремы 2.3.1 типы B_l и C_l рассматривались по отдельности, несмотря на то, что группы Шевалле $B_l(K)$ и $C_l(K)$ над совершенным полем K характеристики 2 изоморфны и любое локально конечное поле совершенно. Дело в том, что изначально ковер типа Φ над K определяется простой алгеброй Ли типа Φ над K, а алгебры типа B_l и C_l при $l \geq 3$ над любым полем не являются* *изоморфными.*

2.4 Полные неприводимые матричные ковры над локально конечными полями

Теорема 2.4.1. *Пусть* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ *— полный неприводимый матричный ковер степени* $n \geq 2$ *над локально конечным полем* K*. Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из* $GL_n(K)$ *все аддитивные подгруппы* $\mathfrak{A}_{ij}$*,* $1 \leq i, j \leq n$*, совпадают с некоторым подполем* P *поля* K*.*

Доказательство. При $n \geq 3$ теорема 2.4.1 является следствием теоремы 2.3.1. Действительно, если $n \geq 3$, то по теореме 2.3.1 с точностью до сопряжения диагональной матрицей из $GL_n(K)$ все аддитивные подгрупп $\mathfrak{A}_{ij}$ при $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, совпадают с некоторым подполем P поля K. Далее, при $i \neq j$ из условия ковровости

$$P\mathfrak{A}_{jj} = \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{jj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij} = P,$$

$$PP = \mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{A}_{ij} \subseteq \mathfrak{A}_{jj}$$

следует равенство $\mathfrak{A}_{jj} = P$. Таким образом, все $\mathfrak{A}_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, совпадают с подполем P.

Пусть $n = 2$. С точностью до сопряжения диагональной матрицей из $GL_2(K)$ можно считать, что $1 \in \mathfrak{A}_{21}$. Пусть $i \neq j$, $i, j = 1, 2$. Условие ковровости состоит их трех типов включений

$$\mathfrak{A}_{ii}\mathfrak{A}_{ii} \subseteq \mathfrak{A}_{ii}, \tag{2.4.1}$$

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{jj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \tag{2.4.2}$$

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji} \subseteq \mathfrak{A}_{ii}. \tag{2.4.3}$$

Из (2.4.1) следует, что $\mathfrak{A}_{11}$ и $\mathfrak{A}_{22}$ являются кольцами, а в силу локальной конечности поля K, — полями. Учитывая, что $1 \in \mathfrak{A}_{21}$, включения $\mathfrak{A}_{11}, \mathfrak{A}_{22} \subseteq \mathfrak{A}_{21}$ следуют из (2.4.2), а включение $\mathfrak{A}_{12} \subseteq \mathfrak{A}_{11} \cap \mathfrak{A}_{22}$ — из (2.4.3). Сейчас в силу (2.4.2) $\mathfrak{A}_{12}$ — поле. Отсюда и из (2.4.3) получаем включения $\mathfrak{A}_{21} \subseteq \mathfrak{A}_{11} \cap \mathfrak{A}_{22}$, а из (2.4.2) — включения $\mathfrak{A}_{11}, \mathfrak{A}_{22} \subseteq \mathfrak{A}_{12}$. Следовательно, $\mathfrak{A}_{12} = \mathfrak{A}_{21} = \mathfrak{A}_{11} = \mathfrak{A}_{22}$.

Теорема доказана.

3 Ковры типа B_l, C_l, F_4 над полями

В своей статье [22] В. М. Левчук описал неприводимые ковры ранга больше 1 над полем F, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R-модулем, где F — алгебраическое расширение поля R, в предположении, что характеристика поля F отлична от 0 и 2 для типов B_l, C_l, F_4, а для типа G_2 отлична от 0, 2 и 3. Оказалось, что с точностью до сопряжения диагональным элементом все аддитивные подгруппы этих ковров совпадают с одним промежуточным подполем между R и F. Назовем такие ковры *константными.* В этой главе решается аналогичная задача для ковров типа B_l, C_l, F_4 над полем характеристики 0 и 2. Выяснилось, что неконстантные ковры появляются только в характеристике 2 и они параметризуются парой аддитивных подгрупп, причем для типов B_l и C_l одна из этих двух аддитивных подгрупп может не быть полем ни при каком сопряжении диагональными элементами, примеры таких ковров указаны в [31]. Появление неконстантных ковров для типов B_l, C_l, F_4 в характеристике 2 и для типа G_2 в характеристике 3 не было неожиданностью, это следует из работы Я. Н. Нужина [28], где для данных типов описаны группы лежащие между группами Шевалле над различными несовершенными полями, большее из которых является алгебраическим расширением меньшего. Подгруппы, определяемые неконстантными коврами появлялись также в замечание на стр. 84 в монографии Р. Стейнберга [35]. Тип G_2 в характеристиках 0, 2 и 3 рассмотрен в работах [34, 41]. Таким образом, в данной главе завершается описание неприводимых ковров ранга больше 1 над полем F, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R-модулем, где F — алгебраическое расширение поля R. Для ранга 1 условие ковровости (1.3.1) вырождается, а ковровая подгруппа будет изоморфна некоторой подгруппе из $SL_2(F)$ или $PSL_2(F)$, порожденной элементарными трансвекциями, и в этом случае общие методы уже не работают.

3.1 Группы, лежащие между группами Шевалле над различными полями

Я.Н. Нужин в статье [26] установил, что группы, лежащие между группами $E(\Phi, R)$ и $E(\Phi, K)$, исчерпываются группами $E(\Phi, P)$ или их расширениями при помощи диагональных автоморфизмов для промежуточных подполей P, $R \subseteq P \subseteq K$, в случае, когда K — алгебраическое расширение поля R, содержащего более четырех элементов. При этом в исключительных характеристиках предполагалась совершенность поля R. Он же в работе [28] описал группы, лежащие между группами Шевалле типа B_l, C_l, F_4, G_2 над различными полями характеристик 2 и 3 в случае, когда большее поле является алгебраическим расширением меньшего несовершенного поля. Будем также называть их промежуточными подгруппами. Для $\Phi = B_l, C_l, F_4$ исключительной характеристикой является только 2, а для $\Phi = G_2$ — 2 и 3. Для этих типов промежуточные подгруппы не определяются только одним промежуточным подполем. Первые примеры таких групп указаны в книге Р. Стейнберга [[35], § 10, с. 144]. В моих исследованиях также появляются промежуточные подгруппы, и, более того, в теореме 3.3.1 возникают подгруппы, которые определяются неконстантными коврами.

Суммируя теоремы 3.1 и 4.1 из статьи [28], упоминаемой выше, получаем следующий результат.

Предложение 3.1.1. *Пусть F — алгебраическое расширение поля K характеристики p, а M — группа, лежащая между группами Шевалле $E(\Phi, K)$ и $E(\Phi, F)$ типа $\Phi = B_l$, C_l $(l \geq 2)$, F_4, G_2. Пусть $p = 2$ при*

$\Phi = B_l,\ C_l,\ F_4$ и $p = 3$ при $\Phi = G_2$. Тогда M является произведением ковровой подгруппы $E(\Phi, \mathfrak{A})$ на некоторую диагональную подгруппу H_M, нормализующую $E(\Phi, \mathfrak{A})$. Ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ является замкнутым и определяется равенствами

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ — короткий корень,} \\ Q, & \text{если } r \text{ — длинный корень.} \end{cases}$$

для некоторых аддитивных подгрупп P и Q поля F с условиями

$$K \subseteq P^p \subseteq Q \subseteq P \subseteq F. \tag{3.1.1}$$

Более того, в зависимости от типа группы Шевалле $E(\Phi, F)$ справедливы следующие уточнения для аддитивных подгрупп P и Q поля F и диагональной подгруппы H_M:

(a) если $\Phi = B_l$ и $l \geq 3$, то Q — поле;

(b) если $\Phi = C_l$ и $l \geq 3$, то P — поле;

(c) если $\Phi = F_4, G_2$, то обе аддитивные подгруппы P и Q являются полями и H_M — единичная подгруппа.

В статье Я.Н. Нужина и А.В. Степанова [31] приводятся примеры промежуточных подгрупп типов B_l, C_l, удовлетворяющих предложению 3.1.1, которые определяются парой аддитивных подгрупп P и Q, одна из которых может не быть полем, а для типа $B_2 = C_2$ обе не являются полями. Ниже приводятся эти примеры.

Пусть n — натуральное число больше единицы и $x_1, \ldots, x_n$ — независимые коммутативные переменные, то есть трансцендентные элементы над полем из двух элементов $\mathbb{F}_2$. Рассмотрим поле рациональных функций $F = \mathbb{F}_2(x_1, \ldots, x_n)$ и его подполе $K = \mathbb{F}_2(x_1^2, \ldots, x_n^2)$, порожденное квадратами этих переменных. Очевидно, что F — алгебраическое расширение степени 2^n поля K и в качестве базиса линейного пространства F над K можно взять множество мономов

$$\{x_{i_1}\dots x_{i_m} \mid i_1<\dots<i_m,\ \{i_1,\cdots,i_m\}\subseteq\{1,\dots,n\}\}.$$

Предложение 3.1.2. *Пусть $\Phi = B_l, C_l$, $l \geq 2$. Существуют поля $K \subseteq F$ характеристики 2 и пара аддитивных подгрупп P и Q с условиями $PQ \subseteq P$, $P^2Q \subseteq Q$, где $K \subseteq Q \subseteq P \subseteq F$. Более того:*

1. *если $\Phi = B_l$, $l \geq 3$, то P не является полем;*
2. *если $\Phi = C_l$, $l \geq 3$, то Q не является полем;*
3. *если $\Phi = B_2 = C_2$, то ни P, ни Q не является полем.*

Доказательство. Случай B_l, $l \geq 3$. Пусть $Q = K$, а P есть K-модуль с базисом $\{1, x_1, x_2\}$. Следующие свойства проверяются непосредственно: 1) $PQ \subseteq P$; 2) $P^2Q \subseteq Q$; 3) $\dim_K P = 3$ и, следовательно, аддитивная подгруппа P не является полем, так как 3 не делит 2^n.

Случай C_l, $l \geq 3$. Пусть $P = F$, а Q есть K-модуль с базисом $\{1, x_1, x_2\}$. Свойства 1) - 3) из предыдущего пункта выполняются и в этом случае, только в свойстве 3) нужно заменить P на Q. Далее доказательство повторяет доказательство для типа B_l.

Случай $B_2 = C_2$. Пусть в этом случае $n \geq 4$. Аддитивные подгруппы P и Q поля F определим следующим образом. Пусть P есть K-модуль с базисом

$$\{1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_1x_2x_3, x_1x_2x_4\},$$

а Q есть K-модуль с базисом $\{1, x_1, x_2\}$. Следующие свойства проверяются непосредственно:

1) $PQ \subseteq P$;

2) $P^2Q \subseteq Q$;

3) $\dim_K P = 12$, $\dim_K Q = 3$ и, следовательно, обе аддитивные подгруппы P и Q не являются полями, так как 3 и 12 не делят 2^n.

Предложение 3.1.2 дает примеры ковров

$$\mathfrak{A} = \begin{cases} \mathfrak{A}_r = P, & \text{если } r \text{ -- короткий корень} \\ \mathfrak{A}_r = Q, & \text{если } r \text{ -- длинный корень} \end{cases}$$

Типа $\Phi = B_l, C_l$, которые определяются парой аддитивных подгрупп P и Q и ни при каком сопряжении диагональным элементом подгруппы P и Q одновременно не становятся полями.

3.2 Ковры типа A_2, B_2

Группа $E(\Phi, F)$ увеличивается до расширенной группы Шевалле при помощи всех диагональных элементов $h(\chi)$, где χ — F-характер целочисленной решетки корней $\mathbb{Z}\Phi$, то есть гомоморфизм аддитивной группы $\mathbb{Z}\Phi$ в мультипликативную группу F^* поля F [37, §7.1]. Любой F-характер χ однозначно задается значениями на фундаментальных корнях и для любых $r \in \Phi$ и $t \in F$

$$h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t). \tag{3.2.1}$$

То, что равенство (3.2.1) естественным образом сочетается с определением ковра, утверждает лемма 1.3.2 (см. §1.3)

Для системы корней типа A_2 условия ковровости имеют только один вид $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ (с точностью до вращения, см. рисунок 3.2.1).

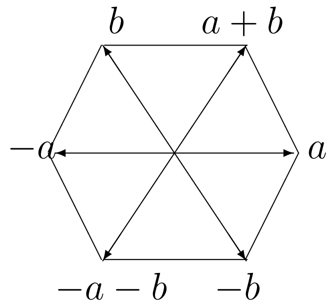

Рис. 3.2.1

Для системы корней Φ типа B_2 (см. рисунок 3.2.2) мы имеем три вида условий ковровости: $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$, $\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ и $2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$.

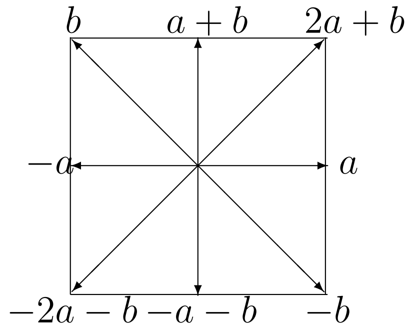

Рис. 3.2.2

Доказательство следующей леммы, фактически, повторяет рассуждения доказательства теоремы 2 из [26, стр. 530] для типа B_2, но там накладывалась инвариантность относительно диагональной подгруппы порядка больше 3 и в действительности рассматривались замкнутые ковры, хотя понятие «ковер» не использовалось. Здесь работают только условия ковровости.

Лемма 3.2.1. *Пусть* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ *— неприводимый ковер типа* B_2 *над полем* F, $\{a, b\}$ *— фундаментальная система для* Φ *и пусть* $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. *Тогда* $t^n \in \mathfrak{A}_r$ *для любого* $t \in \mathfrak{A}_r$ *и любого натурального числа* n, *если* r *есть* $a+b$ *или* $2a+b$.

Доказательство. В силу предположения $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. Поэтому из включений $\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b}$ и $\mathfrak{A}_{-a}^2\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b}$ получаем $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi^-$. Сейчас из условий ковровости $\mathfrak{A}_{a+b}^2\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ и $\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ получаем включения $\mathfrak{A}_{a+b}^2 \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ и соответственно $\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$. Таким образом,

$$\mathfrak{A}_{a+b}^2 \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}. \tag{3.2.2}$$

Далее, из условий ковровости $\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-2a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a}$ следует $\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a}$. Объединяя последнее включение с условием ковровости $\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$, получаем

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}. \tag{3.2.3}$$

Пусть $t \in \mathfrak{A}_{a+b}$. Из включений (3.2.2) следует $t^2 \in \mathfrak{A}_{a+b} \cap \mathfrak{A}_{2a+b}$. Отсюда и в силу включения (3.2.3) индукцией по n получаем $t^n \in \mathfrak{A}_{a+b}$ для всех натуральных чисел n.

Пусть $t \in \mathfrak{A}_{2a+b}$. Из включений (3.2.2) и (3.2.3) также легко следует, что $t^n \in \mathfrak{A}_{2a+b}$ для всех натуральных чисел n. Лемма доказана.

Нам потребуются две следующие технические леммы, которые используются при доказательстве основной теоремы.

Лемма 3.2.2. *Пусть F — алгебраическое расширение поля R, A — ненулевая аддитивная подгруппа поля F, являющаяся R-модулем, и $t^n \in A$ для любого $t \in A$ и для всех натуральных чисел n. Тогда $1 \in A$ и $A = A^{-1}$, где A^{-1} состоит из всех обратных к ненулевым элементам из A в объединении с нулем.*

Доказательство По определению алгебраического расширения найдется такой многочлен минимальной степени $g(t)$ равный нулю. Пусть $g(t) = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_0$. Все коэффициенты данного многочлена принадлежат полю R, а степени элемента t принадлежат F. По определению R-модуля следует, что $g(t) \in A$. В силу минимальности степени многочлена $g(t)$, a_0 отличен от 0. Отсюда следует, что $1 \in A$. Поскольну для некоторых b_i справедливо равенство $b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + ... + b_1 t = 1$, то $t(b_n t^{n-1} + ... + b_1) = 1$, откуда $b_n t^{n-1} + ... + b_1 = t^{-1}$. Следовательно, $A = A^{-1}$. Лемма доказана.

Лемма 3.2.3. *[32, лемма 5] Пусть $Q \subseteq P$ — аддитивные подгруппы поля F характеристики $p > 0$ с условиями:*

1. *$1 \in Q$;*
2. *$P^p Q \subseteq Q$;*
3. *$Q = Q^{-1}$.*

Пусть K — наименьшее подполе в F, содержащее P. Тогда Q содержит поле K^p.

Следующая лемма служит базой индукции для докозательства основной теоремы главы.

Лемма 3.2.4. *Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа A_2 или B_2 над полем F, $\{a, b\}$ — фундаментальная система для Φ, причем хотя бы одна аддитивная подгруппа $\mathfrak{A}_r$ является R-модулем, где F — алгебраическое расширение поля R. Тогда, если $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$, то либо $\mathfrak{A}_r = P$ при всех $r \in \Phi$ для некоторого подполя P поля F, либо Φ типа B_2, $char K = 2$, существует несовершенное подполе K поля F и*

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ короткий корень} \\ Q, & \text{если } r \text{ длинный корень} \end{cases}$$

для двух различных бесконечных аддитивных подгрупп P *и* Q *поля* K, *удовлетворяющих включениям*

$$K^2 \leq Q < P \leq K. \tag{3.2.4}$$

и равенствам

$$P = P^{-1}, \quad Q = Q^{-1}. \tag{3.2.5}$$

Доказательство. Пусть Φ типа A_2 или $charF > 2$ и Φ типа B_2. Тогда в силу [22, следствие 3.2] $\mathfrak{A}_r = \chi(r)P$, $r \in \Phi$, для некоторого подполя P поля F и подходящего F-характера χ решетки $\mathbb{Z}\Phi$. Поскольку $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$, то $\chi(a), \chi(b) \in P$, а так как любой F-характер определяется своими значениями на фундаментальных корня, то $\mathfrak{A}_r = P$ для всех $r \in \Phi$.

Пусть Φ типа B_2. Не теряя общности, можно считать, что $\mathfrak{A}_{a+b}$ или $\mathfrak{A}_{2a+b}$ является R-модулем.

Пусть $\mathfrak{A}_{a+b}$ является R-модулем. Тогда $1 \in \mathfrak{A}_{a+b}$ и $\mathfrak{A}_{a+b} = \mathfrak{A}_{a+b}^{-1}$ в силу лемм 3.2.1 и 3.2.2. Используя включение $1 \in \mathfrak{A}_{a+b} \cap \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$ и условия ковровости, получаем $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi$. Сейчас применяя только условия ковровости, приходим к равенствам $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_s$ при $|r| = |s|$. Положим $\mathfrak{A}_r = P$, если r — короткий корень, и $\mathfrak{A}_r = Q$, если корень r длинный.

Если $charK \neq 2$, то из условий ковровости $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ и $2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ следует, что $P = Q$ и P является подкольцом поля F, а следовательно, подполем в силу алгебраичности расширения F/R.

Пусть $charK = 2$. Тогда R^2 — поле и F — его алгебраическое расширение. Поскольку $\mathfrak{A}_{a+b}$ является R-модулем и $1 \in \mathfrak{A}_{a+b}$, то $R \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$. Поэтому аддитивная подгруппа $\mathfrak{A}_{2a+b}$ является R^2-модулем в силу условия ковровости $\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$. Отсюда $1 \in \mathfrak{A}_{2a+b}$ и $\mathfrak{A}_{2a+b} = \mathfrak{A}_{2a+b}^{-1}$ снова в силу лемм 3.2.1 и 3.2.2. Таким образом, равенства (3.2.5) установлены,

$1 \in Q$, $PQ \subseteq P$ и $P^2Q \subseteq Q$. Поэтому либо $P = Q$ и P — поле, либо по лемме 3.2.3 существует несовершенное подполе K поля F, удовлетворяющее включениям (3.2.4).

Второй случай, когда $\mathfrak{A}_{2a+b}$ является R-модулем, рассматривается подобным образом.

В доказательстве также используется лемма 2.3.2 (см. § 2.3)

3.3 Доказательство основной теоремы главы

Основным результатом параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа B_l $(l \geq 2)$, C_l $(l \geq 2)$ или F_4 над полем F, причем хотя бы одна аддитивная подгруппа $\mathfrak{A}_r$ является R-модулем, где F — алгебраическое расширение поля R. Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом либо $\mathfrak{A}_r = P$ при всех $r \in \Phi$, для некоторого подполя P поля F, либо $\mathrm{char} F = 2$, существует несовершенное подполе K поля F и*

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ — короткий корень} \\ Q, & \text{если } r \text{ — длинный корень} \end{cases}$$

для двух различных бесконечных аддитивных подгрупп P и Q поля K, удовлетворяющих включениям

$$K^2 \leq Q < P \leq K. \tag{3.3.1}$$

и равенствам

$$P = P^{-1}, \quad Q = Q^{-1}. \tag{3.3.2}$$

Кроме того, ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ является замкнутым.

Доказательство. Пусть $\Pi = \{p_1, \ldots, p_l\}$ — фундаментальная система корней системы корней Φ. С точностью до сопряжения диагональным элементом можно считать, что $1 \in \mathfrak{A}_{-p_i}$ для всех $p_i \in \Pi$. С другой стороны, не теряя общности можно считать, что для некоторых i, j одна из аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}_{p_i+p_j}$ или $\mathfrak{A}_{2p_i+p_j}$ является R-модулем. Пусть Φ_{ij} — подсистема корней с фундаментальной системой $\{p_i, p_j\}$. По лемме 3.2.4 $\mathfrak{A}_r = P$ для всех коротких корней из Φ_{ij} и $\mathfrak{A}_r = Q$ для всех длинных корней из Φ_{ij}, причем в данном случае мы не исключаем совпадения аддитивных подгрупп P и Q. В силу связности графа Кокстера, ассоциированного с системой Φ, аналогичное утверждение справедливо для любой подсистемы Φ_{km}, порожденной соседними корнями на графе Кокстера. В частности, $\mathfrak{A}_r = P$ для всех коротких фундаментальных корней и $\mathfrak{A}_r = Q$ для всех длинных фундаментальных корней, причем выполняются условия (3.3.1) и (3.3.2) из теоремы 3.3.1. Используя лемму 3.2.4, установим справедливость этого утверждения для всех аддитивных подгрупп индукцией по высоте корней $h(r)$, совпадающей с суммой коэффициентов в представлении корня r через Π. Но, для того чтобы применять лемму 3.2.4, сначала нужно получить включения $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех отрицательных корней $r \in \Phi^-$.

По лемме 2.3.2 любой отрицательный корень $r \in \Phi^-$ представляется в виде $r = s - p_i$, где $h(p_i) = 1$, $s \in \Phi^-$ и $|h(s)| = |h(r)| - 1$. Возможны три случая:

1) $\{s, -p_i\}$ — фундаментальная система типа A_2;

2) $\{s, -p_i\}$ — фундаментальная система типа B_2;

3) $s, -p_i$ — короткие корни и они порождают подсистему корней типа B_2.

Индукцией по $|h(r)|$ установим включение $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех отрицательных корней $r \in \Phi^-$. В случаях 1) и 2) в силу условия ковровости $\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_{-p_i} \subseteq \mathfrak{A}_r$, а также индуктивного предположения, получаем включение $1 \in \mathfrak{A}_r$. В случае 3) сумма $s + p_i$ является корнем, p_i — короткий корень и $\{s + p_i, -p_i\}$

— фундаментальная система типа B_2. Поэтому в силу условия ковровости $\mathfrak{A}^2_{-p_i}\mathfrak{A}_{s+p_i} \subseteq \mathfrak{A}_r$, а также индуктивного предположения, получаем включение $1 \in \mathfrak{A}_r$.

По лемме 2.3.2 любой положительный корень $r \in \Phi^+$ представим в виде $r = s + p_i$, где $h(p_i) = 1$, $h(s) = h(r) - 1$. Возможны три случая:

1) $\{s, p_i\}$ — фундаментальная система типа A_2;

2) $\{s, p_i\}$ — фундаментальная система типа B_2;

3) s, p_i — короткие корни и они порождают подсистему корней типа B_2.

Индукцией по высоте корней покажем, что $\mathfrak{A}_{-r} = \mathfrak{A}_r$ и $\mathfrak{A}_r$ совпадает с P или Q в зависимости от длины корня r.

В случае 1) сразу получаем равенство $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_{p_i}$ в силу индуктивного предположения и леммы 3.2.4, где $\mathfrak{A}_{p_i}$ совпадает с P или Q. В случае 2) тоже сразу в силу индуктивного предположения и леммы 3.2.4 получаем равенство $\mathfrak{A}_r = P$, поскольку корень r короткий. В случае 3) разность $s - p_i$ является корнем, p_i — короткий корень и $\{s - p_i, p_i\}$ — фундаментальная система типа B_2. Поэтому $\mathfrak{A}_{p_i} = P$, а в силу индуктивного предположения $\mathfrak{A}_{s-p_i} = Q$. Отсюда $\mathfrak{A}_r = Q$ по лемме 3.2.4.

Итак, мы доказали, что $\mathfrak{A}_r = P$ для всех коротких и $\mathfrak{A}_r = Q$ для всех длинных корней. Условия (3.3.1) и (3.3.2) из теоремы 3.3.1 выполняются в силу леммы 3.2.4. Осталось понять, что исходный ковер $\mathfrak{A}$ замкнут. При $P = Q$ ковер $\mathfrak{A}$ замкнут, так как в этом случае он сопряжен с константным ковром, а при переходе к сопряженному ковру замкнутость не изменяется. Если же подгруппы P и Q различны, то в силу включений (3.3.1) ($K^2 \le Q \le P \le K$) ковровая подгруппа $\Phi(\mathfrak{A})$ лежит между группами Шевалле $\Phi(K^2)$ и $\Phi(K)$ и тогда K — несовершенное поле характеристики 2. Группы, лежащие между группами Шевалле над несовершенными полями, большее из которых является алгебраическим расширением меньшего, описаны в [28], и там же установлено, что они определяются замкнутыми коврами аддитивных подгрупп (см. также [31]). Поскольку поле K является алгебраическим расширением своего квадрата K^2, то наш исходный ковер $\mathfrak{A}$ замкнут.

Теорема доказана.

Заключение

В диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук получены следующие результаты:

1. Построены примеры неприводимых незамкнутых ковров любого лиева типа над широкими классами коммутативных колец.

2. Доказано, что любой неприводимый ковер аддитивных подгрупп, ассоциированный с группой Шевалле лиева ранга больше единицы над локально конечным полем, с точностью до сопряжения диагональным элементом совпадает с ковром, все аддитивные подгруппы которого равны некоторому фиксированному подполю основного поля. Аналогичный результат получен для матричного полного ковра.

3. Описаны неприводимые ковры типа B_l, C_l, F_4 при $l \geq 2$ над полем F характеристики 0 и 2, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R-модулем, в случае, когда F — алгебраическое расширение поля R. Доказано, что такие ковры являются замкнутыми и могут параметризоваться парой аддитивных подгрупп только при $p = 2$, причем для типов B_l и C_l одна из этих двух аддитивных подгрупп может не быть полем.

Словарь терминов

Обозначения:

K — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей 1;

$\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел;

$GL_n(K)$ — общая линейная группа (множество матриц с определителем, не равным нулю);

$SL_n(K)$ — специальная линейная группа (множество матриц с определителем единица);

$t_{ij}(u)$ — элементарная трансвекция;

e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули;

Φ — приведенная неразложимая система корней ранга l;

$\Pi = \{r_1, ..., r_l\}$ — множество фундаментальных корней;

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор;

$E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом K с единицей;

W — группа Вейля типа Φ;

$x_r(t)$ — корневой элемент;

$n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$ — мономиальный элемент;

$h_r(t) = n_r(t)n_r(-1)$ — диагональный элемент;

X_r — корневая подгруппа;

$U = \langle X_r \mid r \in \Phi^+\rangle$ — верхняя унипотентная подгруппа;

$V = \langle X_r \mid r \in \Phi^-\rangle$ — нижняя унипотентная подгруппа;

$H = \langle h_r(t) \mid r \in \Phi, t \in K^*\rangle$ — диагональная подгруппа;

$N = \langle n_r(t) \mid r \in \Phi, t \in K^*\rangle$ — мономиальная подгруппа;

$Z\Phi$ — линейная оболочка системы корней Φ над кольцом целых чисел;

$N_{r,s}$ — структурные константы соответствующей алгебры Ли;

K-характер группы P — это гомоморфизм аддитивной группы P в мультипликативную группу K^*;

Определения:

Под **аддитивной подгруппой** кольца K мы понимаем любую подгруппу всей его аддитивной группы, то есть группы по сложению.

Полный (матричный) ковер степени n над кольцом K — это набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

основного кольца K, если выполняется следующее условие

$$\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i, r, j \leq n$$

Ковровое кольцо — это множество матриц

$$M_n(\mathfrak{A}) = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$$

которое является кольцом, относительно обычных матричных операций сложения, умножения.

Элементарный ковер — это набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

основного кольца K, если выполняется следующее условие

$$\mathfrak{A}_{ik}\mathfrak{A}_{kj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij},\ 1 \leq i, j, k \leq n,\ i \neq j,\ j \neq k,\ i \neq k.$$

Элементарная ковровая подгруппа — это группа $E_n(\mathfrak{A})$, порожденная трансвекциями

$$t_{ij}(u_{ij}), \quad u_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Ковер типа Φ ранга l над K — это набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\},$$

кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad \text{при } r,\ s,\ ir+js \in \Phi, \quad i,j>0,$$

где

$$\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\},$$

а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^i), \quad r,\ s,\ r+s \in \Phi.$$

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над K определяет **ковровую подгруппу**

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \rangle,$$

группы Шевалле $E(\Phi, K)$, где $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная множеством M.

Поле F характеристики $p>0$ называется **совершенным**, если поле F^p совпадает с полем F, где $F^p = \{f^p | f \in F^p\}$. В противном случае поле называется **несовершенным**.

Параболическая группа — это надгруппа подгруппы UH и сопряженная с ней.

Список литературы

[1] Боревич З. И. О параболических подгруппах в линейных группах над полулокальным кольцом // Вестник ЛГУ, т. 13 (1976), № 3, с. 16–24.

[2] Боревич З. И. О параболических подгруппах в специальной линейной группе над полулокальным кольцом // Вестник ЛГУ, т. 19 (1976), № 4, с. 29–34.

[3] Боревич З. И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР,т. 75 (1978), с. 22–31.

[4] Боревич З. И., Вавилов Н. А. О подгруппах полной линейной группы над коммутативным кольцом // Доклады АН СССР, т. 267 (1982), с. 777–778.

[5] Вавилов Н. А. О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР, 75(1978), с. 43–58.

[6] Вавилов Н. А. О параболических подгруппах групп Шевалле скрещенного типа над полулокальным кольцом // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 94 (1979), с. 21–36.

[7] Вавилов Н. А., Плоткин Е. Б. Сетевые подгруппы групп Шевалле // Зап. научн. сем. ЛОМИ, т. 94 (1979), с. 40–49.

[8] Вавилов Н. А., Плоткин Е. Б. Сетевые подгруппы групп Шевалле. II. Разложение Гаусса // Зап. научн. сем. ЛОМИ, т. 114 (1982), с. 62–76.

[9] Вавилов Н. А. Весовые элементы групп Шевалле //Алгебра и анализ, т. 20 (2008), № 1, с. 34–85

[10] Дряева Р. Ю., Койбаев В. А. Элементарная сеть, ассоциированная с элементарной группой // Владикавк. матем. журн., т. 18 (2016), № 3, с. 31–34.

[11] Дряева Р. Ю., Койбаев В. А., Нужин Я. Н. Полные и элементарные сети над полем частных кольца главных идеалов // Зап. научн. сем. ПОМИ, т. 455 (2017), с. 42–51.

[12] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп // Москва «Наука», 1982, 288 с.

[13] Койбаев В. А. Сети, ассоциированные с элементарными сетями // Владикавказ: Владикавказский матем. журн., т. 12 (2010), № 4, с. 39–43

[14] Койбаев В. А. Элементарные сети в линейных группах // Труды института математики и механики УрО РАН, т. 17 (2011), № 4, с. 134–141.

[15] Койбаев В. А. Разложение трансвекции в элементарной группе // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., т. 5 (2012), № 3, с. 388–392

[16] Койбаев В. А. Вложение элементарной сети в промежуток сетей // Зап. научн. сем. ПОМИ, т. 484 (2019), с. 115–120.

[17] Койбаев В. А., Нужин Я. Н. Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца // Фундамент. и прикл. матем., т. 18 (2013), № 1, с. 75–84.

[18] Койбаев В. А., Нужин Я. Н. k-Инвариантные сети над алгебраическим расширением поля k // Сибирский математический журнал, т. 58 (2017), № 1, с. 143–147

[19] Колесников С. Г., Левчук В. М. Обобщенные конгруэнц-подгруппы групп Шевалле // Сиб. матем. журн., т. 40 (1999), № 2, с. 336–351.

[20] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 18-е изд. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2014, 253 с.

[21] Левчук В. М. Параболические подгруппы некоторых ABA-групп. // Матем. заметки, Красноярск, т. 31 (1982), № 4, с. 509–525.

[22] Левчук В. М. О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем // Алгебра и логика, т. 22 (1983), № 5, с. 504-517.

[23] Левчук В. М. Центральные ряды и ряды коммутантов некоторых подгрупп групп Шевалле // Докл. АН СССР, т. 313 (1990), № 4, с. 799–802.

[24] Левчук В. М. Коммутаторное строение некоторых подгрупп групп Шевалле // Укр. мат . журн., т. 44 (1992), № 6, с. 786–795.

[25] Мерзляков Ю. И. Центральные ряды и ряды коммутантов матричных групп // Алгебра и логика. Семинар, т. 3 (1964), № 4, с. 49–59

[26] Нужин Я. Н. О группах, заключенных между группами лиева типа над различными полями // Алгебра и логика, т. 22 (1983), № 5, с. 526–541

[27] Нужин Я. Н. Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами. // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, Красноярск, т. 4 (2011), № 4, с. 527–535

[28] Нужин Я. Н. Группы, лежащие между группами Шевалле типа B_l, C_l, F_4, G_2 над несовершенными полями характеристики 2 и 3. // Сиб. матем. журн., т. 54 (2013), № 1, с. 157–162.

[29] Нужин Я. Н. Разложение Леви для ковровых подгрупп групп Шевалле над полем // Алгебра и логика, т. 55 (2016), № 5, с. 558–570.

[30] Нужин Я. Н. Определяющие соотношения для ковровых подгрупп групп Шевалле над полями // Сиб. матем. журн., т. 63 (2022) № 5, с. 1095–1103

[31] Нужин Я. Н., Степанов А.В. Подгруппы групп Шевалле типов B_l и C_l, содержащие группу над подкольцом, и связанные с ними ковры // Алгебра и анализ, т. 31 (2019), № 4, с. 198–224.

[32] Нужин Я. Н., Степанов А.В. Разложение Брюа для ковровых подгрупп групп Шевалле над полями // Алгебра и логика, т. 60 (2021), № 5, с. 497–509

[33] Романовский Н. С. О подгруппах общей и специальной линейных групп над кольцом // Математические заметки, т. 9 (1971), № 6, с. 699–708.

[34] Франчук С. К. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа G2 над полями характеристики p>0 // Владикавк. матем. журн., т. 22 (2000), № 1, с. 78–84

[35] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле // Москва: Мир, 1975, 261 с.

[36] Carter R. W. Finite groups of Lie type // London: Wiley and Sons, 1985, p. 556.

[37] Carter R. W. Simple Groups of Lie Type // John Wiley and Sons, 1972, p. 331.

[38] Gorenstein D. Finite groups (Harper's Ser. Modern Math.)// New York a.o., Harper Row Publ., 1968, p. 527

[39] Chevalley C. Sur certain groupes simples // Tohoku Math.J., vol. 7 (1955), p. 14–66

[40] Dickson L. E. Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory, Leipzig: Teuber, 1901, p. 312

[41] Nuzhin Ya. N., Troyanskaya E. N. Irreducible carpets of additive subgroups of type G2 over a field of characteristic 0 // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., т. 15 (2022), № 5, с. 610–614

[42] Suzuki K., On parabolic subgroups of Chevalley groups over local rings // Tohoku Math. J., vol. 29 (1976), № 1, p. 57–66

Работы автора по теме диссертации

[43] Куклина С. К., Лихачева А. О, Нужин Я. Н О замкнутости ковров лиева типа над коммутативными кольцами // Труды ИММ УрО РАН.— Екатеринбург, т. 21 (2015), № 3, с. 192–197

[44] Койбаев В. А., Куклина С. К., Лихачева А. О, Нужин Я. Н Подгруппы групп Шевалле над локально конечным полем, определяемые набором аддитивных подгрупп // Математические заметки, т. 102 (2017), № 6, с. 857–865.

[45] Лихачева А. О., Нужин Я. Н. Неприводимые ковры лиева типа Bl, Cl и $F4$ над полями // Сибирские электронные математические известия, т. 20 (2023), № 1, с. 124–131.

[46] Лихачева А. О. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа F_4 // Владикавк. матем. журн., т. 25 (2023), № 2, с. 96–102.

[47] Куклина С. К., Лихачева А. О Примеры незамкнутых ковров аддитивных подгрупп // Молодежь и наука: сборник материалов X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края, Красноярск: СФУ, 2014, с. 76–78 [Электронный ресурс]

[48] Куклина С. К., Лихачева А. О, Нужин Я. Н. Примеры незамкнутых ковров // Алгебра и приложения: труды международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина, Нальчик: издательство КБГУ, 2014, с. 74–77.

[49] Лихачева А. О. О замкнутости ковров типа B_2 над коммутативными кольцами // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: проспект Свободный- 2015», посвященной 70-летию Великой Победы, Красноярск: СФУ, 2015, с. 13–14. [Электронный ресурс]

[50] Лихачева А. О. О замкнутости ковров аддитивных подгрупп над локально конечным полем //Сборник материалов международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Проспект Свободный - 2016», посвященной Году образования в Содружестве Независимых Государств. «Математика, информатика: алгебра, математическая логика и дискретная математика», Красноярск: СФУ, 2016, с. 42 [Электронный ресурс]

[51] Куклина С. К., Лихачева А. О., Нужин Я. Н. О замкнутости ковров аддитивных подгрупп над локально конечным полем // Тезисы

докладов Международной XI школы-конференции по теории групп, посвященной 70-летию А.Ю. Ольшанского, Красноярск: СФУ, 2016, с. 36–37

[52] Куклина С. К., Лихачева А. О., Нужин Я. Н. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп над локально конечными полями // Тезисы докладов Международной конференции, Мальцевские чтения, Новосибирск: Издательство Института математики, 2016, с. 93.

[53] Лихачева А. О. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа F_4 // Сборник тезисов докл. 2-й всероссийской научной конференции «Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования», Владикавказ: Северо-Осетинский государственный университет имени К.Л. Хетагурова, 2017, с. 54–55.

[54] Лихачева А. О. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа F_4 // Тезисы докладов Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 110-летию со дня рождения С.Н. Черникова, Нальчик: Издательство «Принт-центр», 2022, с. 79–80.

[55] Лихачева А. О, Нужин Я. Н. Неприводимые ковры лиева типа $Bl, ClF4$ над полями // Тезисы докладов XIV Международной школы-конференции по теории групп, посвященной памяти В.А. Белоногова, В.А. Ведерникова и Л.А. Шеметкова, Брянск, 2022, с. 40–41.

[56] Likhacheva A. O. On irreducible carpets of additive subgroups of type F_4 // Тезисы докладов, представленных на международную алгебраическую конференцию, посвященную 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша — Москва: издательство МГУ, 2018, с. 250–251.

Другие публикации автора

[57] Икаев С. С., Койбаев В. А., Лихачева А. О. Строение сетей над квадратичными полями // Владикавк. матем. журн., т. 24 (2022), № 3, с. 87–95

[58] Икаев С. С., Койбаев В. А., Лихачева А. О. О разложении элементарной трансвекции в элементарной сетевой группе // Тезисы докладов Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 110-летию со дня рождения С.Н. Черникова, Нальчик: Издательство «Принт-центр», 2022, С. 55–56.