МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ
«МОСКОВСКИЙ ГОРОДСКОЙ ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

КОЩЕЕВА АННА КОНСТАНТИНОВНА

НОВЫЕ КОНСТАНТЫ В ПРЕДТАБЛИЧНЫХ СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКИХ ЛОГИКАХ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-матем. наук, доцент
Яшин Александр Данилович

Москва – 2014

Содержание

Введение

В исследовании какого-либо объекта (или класса объектов) при отыскании существенно новых свойств этого объекта часто применяется метод обогащения, при котором изучаемый объект становится частью другого объекта, при этом новый объект наделяется дополнительными атрибутами — отношениями, функциями и прочее. В некоторых случаях исходный объект представляет собой собственное подмножество нового объекта, в других — новый объект получается лишь заданием на старом дополнительных атрибутов.

Синтаксическим отражением такого обогащения является расширение языка. Утверждения и понятия, записанные на исходном языке, можно назвать *реальными*, а утверждения и понятия, использующие дополнительные атрибуты — *идеальными*. Например, к числу реальных понятий Д. Гильберт относил понятие алгоритмически вычислимой функции. К реальным утверждениям он относил формулы вида $\forall x(f(x) = g(x))$ с вычислимыми функциями f и g. Мотивировка — любой частный случай этого равенства проверяется явно за конечное число шагов.

Пусть $\mathbf{T}$ — базовая теория в базовом языке $\mathcal{S}$. Основа языка $\mathcal{S}$ — реальные понятия; основа теории $\mathbf{T}$ — аксиомы и правила вывода реального языка. Добавление к базовому языку новых символов (например, функциональных, константных, предикатных), иначе говоря, введение в язык $\mathcal{S}$ идеальных понятий, или *экстрапонятий*, расширяет (другими словами — обогащает) его до языка $\mathcal{S}' : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$. Соответственно, введение в базовую теорию $\mathbf{T}$ дополнительных аксиом (и, возможно, правил вывода) расширяет ее до теории $\mathbf{T}' : \mathbf{T} \subset \mathbf{T}'$. При этом новые аксиомы, или *экстрааксиомы*, отражают свойства экстрапонятий и их взаимосвязь с реальными понятиями. В математике примеров такого рода много. В теории натуральных чисел, например, ряд результатов был получен с помощью теории комплексных чисел. В алгебре примером такого рода является задача о разложении многочлена $x^4 + 1 = 0$ на множители над полем действительных чисел (есть два способа решения: первый подразумевает отыскание комплексных корней, второй — выделение полного квадрата). Примерами из математической логики являются булевы алгебры с операторами, языки более высокого порядка, относительно элементарная определимость и другие.

Заметим, что при произвольном расширении теория $\mathbf{T}'$ может оказаться противоречивой, даже если $\mathbf{T}$ была непротиворечива. Поэтому важнейшее требование для такого расширения теорий — получаемая теория должна быть *консервативна* над исходной теорией, то есть экстрапонятия и новые аксиомы не должны нарушать базовую теорию:

$$\frac{A \in \mathcal{S}, \quad \mathbf{T}' \vdash A}{\mathbf{T} \vdash A}$$

(если утверждение реального языка выводимо в расширенной теории, то и в реальной теории оно должно быть выводимо).

Согласно Гильберту, основное назначение экстрапонятий — получение новых реальных, теорем, а также более ясное доказательство уже известных теорем. Иначе говоря, экстрапонятия повышают выразительную силу языка и упрощают доказательства прежних теорем.

Для пропозициональных исчислений экстрапонятиями являются, например, кванторы. Язык первого порядка позволил выразить практически все понятия, нужные для работы в привычных разделах математики. Следствием такой универсальности стали, например, неразрешимость логики первого порядка, неполнота арифметики, неформализуемость логики второго порядка.

Тем не менее, для решения ряда задач был найден промежуточный вариант — вместо кванторов использовать дополнительные пропозициональные связки, отражающие некоторые свойства кванторов. Известные связки модальной логики $\Box$, $\Diamond$ являются экстрапонятиями для языка классической двузначной логики.

Однако, классическая двузначная логика не всегда позволяет адекватно моделировать некоторые прикладные задачи (например, в теоретической информатике). В связи с этим возникла необходимость применять и неклассические логики. Первым важнейшим примером таковых является интуиционистская пропозициональная логика (Int), введенная первоначально Л. Э. Я. Брауэром, впоследствии формализованная А. Гейтингом, и истолкованная А. Н. Колмогоровым в работе [36] как логика задач (подробнее об Int см., например, [11]). Кроме того, полезными, по разным соображениям, оказались и расширения Int, названные впоследствии *суперинтуиционистскими* (*с.и.*) логиками.

П. С. Новиков[1] в конце 50-тых годов XX века поставил задачу о новых логических связках как экстрапонятиях для языка со *стандартным логическими связками* $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$. Я. С. Сметанич привел точные формулировки подхода Новикова к понятию новых логических связок в суперинтуиционистских логиках в работах [14, 15].

Одним из примеров, рассмотренных Я. С. Сметаничем, является расширение Int дополнительной одноместной связкой, удовлетворяющей аксиомам

$$\varphi(p) \leftrightarrow \varphi(q);$$

$$\neg\neg\varphi(p);$$

$$\varphi(p) \rightarrow (q \vee \neg q).$$

Первая из трех аксиом показывает, что смысл $\varphi(\cdot)$ не зависит от аргумента, то есть можно рассматривать φ как логическую константу. Кроме того, можно рассматривать не одну, а несколько дополнительных логических констант (помимо стандартных констант $\mathtt{0}$ «ложь», $\mathtt{1}$ «истина»).

[1] в дальнейшем фамилия «Новиков» будет означать исключительно «П. С. Новиков».

В настоящей работе будут рассмотрены только дополнительные логические константы. Для этого случая подход Новикова адаптируется следующим образом.

Язык чистой пропозициональной логики основан на пропозициональных переменных $Var = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$; пропозициональных связках: $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ (эквиваленция понимается как $p \leftrightarrow q \rightleftharpoons (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$); пропозициональных константах: $\mathsf{0}$ и $\mathsf{1}$. Обычным образом строится множество Fm формул этого языка.

Добавим к исходному языку дополнительный набор констант $\overline{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$. Получим класс $Fm(\overline{\varphi})$ формул расширенного языка.

$\overline{\varphi}$-Логикой будем называть множество формул языка $Fm(\overline{\varphi})$, включающее Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки. φ-Логика $\mathfrak{L}$ называется *консервативным расширением* с. и. логики L, если L включено в $\mathfrak{L}$ и для всякой чистой формулы A из $A \in \mathfrak{L}$ следует $A \in L$.

$\overline{\varphi}$-Логика $\mathfrak{L}$ определяет *новые независимые константы в с. и. логике* L, если $\mathfrak{L}$ является консервативной над L и *не допускает никакого явного соотношения* ни для какой дополнительной константы (явное соотношение — формула вида $\varphi_i \leftrightarrow B$, где B не содержит φ_i). Другими словами, при добавлении явного соотношения к $\mathfrak{L}$ нарушается консервативность над L.

$\overline{\varphi}$-Логика $\mathfrak{L}$ называется *полным по Новикову расширением* логики L, если $\mathfrak{L}$ консервативна над L и *не допускает присоединения* никакой новой формулы (в смысле предыдущего определения).

Проблема Новикова для с. и. логики L формулируется следующим образом:

– построить примеры $\overline{\varphi}$-логик, определяющие новые независимые константы для L, и примеры полных $\overline{\varphi}$-логик для L (*проблема минимум*);

– дать исчерпывающее описание семейства полных по Новикову расширений L и выяснить в каких из них дополнительные константы независимы (*проблема максимум*).

Известно, что семейство с. и. логик имеет мощность континуума [19], поэтому естественным представляется рассмотрение проблемы Новикова для таких с. и. логик, которые по тем или иным причинам уже находились в поле зрения исследователей. В настоящей работе проблема Новикова рассматривается применительно к предтабличным суперинтуиционистским логикам.

Напомним, что *табличной* называют с.и. логику, которая характеризуется конечным числом конечных шкал. *Предтабличной* называют с. и. логику, которая сама табличной не является, но любое ее собственное расширение оказывается табличным.

Из работы [6] известно, что всякая предтабличная суперинтуиционистская логика финитно аппроксимируема. Л. Л. Максимова, используя этот результат, в работе [8] показала, что предтабличных суперинтуиционистских пропозициональных логик ровно три: LC, $L2$, $L3$[2]. Предтабличность первой логики была доказана в [28], остальных двух — в [34].

Цель диссертации:

1) получить исчерпывающее описание семейства всех полных по Новикову расширений каждой из предтабличных с. и. логик в языке с несколькими дополнительными константами и исследовать каждое пополнение на наличие явных соотношений;

2) построить явную аксиоматику гильбертовского типа для из указанных расширений исследуемых логик в языке с одной дополнительной константой;

3) исследовать каждое из пополнений на алгоритмическую разрешимость;

[2]Отметим, что для $L2$ и $L3$ используются и другие обозначения: в работе [8] указано, что логика $L2$ эквивалентна логике LP_2, а логика $L3$ эквивалентна логике LQ_3. Логики LP_2 и LQ_3 рассматривались в работе [33]. Здесь мы будем придерживаться обозначений, введенных Л. Л. Максимовой.

4) исследовать массовую проблему распознавания консервативности φ-логик над LC, $L2$, $L3$ на предмет алгоритмической разрешимости.

Диссертация состоит из введения, трех глав по 3 параграфа, списка литературы, включающего 50 наименований. Общее число страниц диссертации — 84. Номер теоремы, леммы и др. включают последовательно номер главы, параграфа и порядковый номер в параграфе. Для примеров, определений, замечаний предусмотрена отдельная нумерация, которая включает номер главы, номер параграфа и порядковый номер примера, определения, замечания в параграфе соответственно. Некоторые параграфы разбиты на пункты, пронумерованные по порядку в каждом параграфе отдельно. Используются обозначения: $\rightleftharpoons$ — «по определению равносильно»; $:=$ — «по определению равно»; $[1, m]$ — натуральные числа от 1 до m включительно.

Основные результаты диссертации связаны с получением ответов на сформулированные выше вопросы.

1) для LC и $L2$ дано семантическое описание всех полных по Новикову расширений в терминах классов конечных $\overline{\varphi}$-цепей с раскраской (LC) и конечных $\overline{\varphi}$-вееров с раскраской ($L2$); для $L3$ подобное описание дано для случая одной константы;

2) дана аксиоматика гильбертовского типа для всех полных по Новикову расширений логик LC и $L2$, а также для 4-х полных по Новикову расширений логики $L3$ для случая одной константы;

3) установлена алгоритмическая разрешимость каждого пополнения указанных трех с. и. логик, а так же алгоритмическая проблема распознавания консервативности.

В первой главе приведены необходимые сведения о метаматематике $\overline{\varphi}$-логик. Результаты, полученные в процессе работы, приведены с их доказательствами.

В § 1.1 приведены сведения из метаматематики чистых логик.

В § 1.2 приведена семантическая характеризация предтабличных суперинтуиционистских логик в терминах шкал Крипке. Приведены утверждения о строении шкал, являющихся моделями логик LC (предложение 1.2.1) и $L2$ (предложение 1.2.3). Доказано аналогичное утверждение для $L3$ (предложение 1.2.5).

В § 1.3 основные метаматематические понятия и результаты переносятся на $\overline{\varphi}$-язык. Формально обосновывается корректность постановки проблемы полноты по Новикову для произвольной логики L (теорема 1.3.1). Для произвольных конечных $\overline{\varphi}$-шкал описана методика (основана на материалах работы [38]), которая позволяет исследовать конечные $\overline{\varphi}$-шкалы на наличие явных соотношений. Рассмотрены примеры $\overline{\varphi}$-шкал как с наличием, так и с отсутствием явных соотношений.

Вторая глава посвящена классификации полных $\overline{\varphi}$-расширений предтабличных суперинтуиционистских логик.

В §2.1 показано, что любая консервативная над LC $\overline{\varphi}$-логика включена в некоторую $\overline{\varphi}$-логику, задаваемую конфинальным классом конечных $\overline{\varphi}$-цепей (теорема 2.1.1 и следствия 2.1.4, 2.1.5). Таким образом, для отыскания примеров полных по Новикову расширений LC достаточно рассматривать конфинальные классы конечных $\overline{\varphi}$-цепей.

В работе [23] для построения полных по Новикову $\overline{\varphi}$-расширений логики LC используется *метод наростов*. В настоящей работе вместо понятия «нарост» мы используем его цветовой аналог — «прототип», поэтому описание полных по Новикову $\overline{\varphi}$-расширений логики LC с несколькими константами дается в терминах прототипов.

Прототипом $\mathcal{C}$ называется конечная $\overline{\varphi}$-цепь, в которой все точки имеют попарно различные цвета. Из данного прототипа $\mathcal{C}$ строится класс $[\mathcal{C}]_\infty := \{\mathcal{C}_k \mid k \in \omega\}$, где $\mathcal{C}_k$ получено из $\mathcal{C}$ дублированием корня в k экземплярах.

Классификацию полных по Новикову расширений логики LC устанавливают сформулированные в п. 2 § 2.1

Теорема 2.1.6 (А). *Всякое консервативное $\overline{\varphi}$-расширение логики Даммета включено в $\mathcal{L}([\mathcal{C}]_\infty)$ для некоторого прототипа $\mathcal{C}$.*

Теорема 2.1.6 (Б). *Если $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — неизоморфные прототипы, то $\overline{\varphi}$-логики, определяемые этими прототипами, несовместны над LC, то есть их объединение порождает неконсервативную над LC $\overline{\varphi}$-логику.*

Описание попарно неизоморфных прототипов $\overline{\varphi}$-цепей с одной и с двумя константами дано в п. 2 § 2.1. С помощью методики, приведенной в предложении 1.3.6, эти прототипы проанализированы на наличие явных соотношений.

В § 2.2 установлено, что для отыскания примеров полных по Новикову расширений $L2$ достаточно рассматривать конфинальные классы конечных $\overline{\varphi}$-вееров (теорема 2.2.1 и следствие 2.2.7, предложение 2.2.8) и приведен следующий результат.

Предложение 2.2.8. *Полные по Новикову расширения логики $L2$ в языке с несколькими константами характеризуются подходящими конфинальными классами $\overline{\varphi}$-вееров.*

Для наглядного описания таких расширений $L2$ в п. 2 § 2.2 вводится понятие прототипа.

Прототипом $\mathcal{F}$ будем называть $\overline{\varphi}$-веер, все максимальные точки которого имеют разные цвета.

Классификационная теорема 2.2.13 для полных по Новикову расширений $L2$ получена в нераздельном соавторстве с А. Д. Яшиным и опубликована в статье [40].

В п. 3 § 2.2 рассматриваются примеры пополнений с. и. логики $L2$ с одной и с двумя константами, анализируется наличие явных соотношений в них.

В § 2.3 рассматриваются расширения логики $L3$ в языке с одной константой. Установлено, что для отыскания примеров полных по Новикову расширений $L3$ в $Fm(\varphi)$ достаточно рассматривать конфинальные классы конечных φ-даймондов (теорема 2.3.1 и следствие 2.3.6).

В п. 2 § 2.3 введены в рассмотрение пять классов φ-даймондов, на соответствующих φ-шкалах каждого из которых определенным образом задано значение константы φ, определяющее так называемый «цветовой тип класса». φ-Логики этих классов обозначены $\mathfrak{L}^1$, $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L}^3$, $\mathfrak{L}^4$, $\mathfrak{L}^5$ соответственно.

Классификацию полных по Новикову расширений логики $L3$ описывают следующие две теоремы:

Теорема 2.3.8. *Любая консервативная над* $L3$ *φ-логика включена в одну из пяти φ-логик* $\mathfrak{L}^1$, $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L}^3$, $\mathfrak{L}^4$, $\mathfrak{L}^5$.

Теорема 2.3.9. *φ-Логики* $\mathfrak{L}^1$, $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L}^3$, $\mathfrak{L}^4$, $\mathfrak{L}^5$ *попарно несравнимы.*

Таким образом, семейство полных по Новикову расширений L3 состоит в точности из $\mathfrak{L}^1$, $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L}^3$, $\mathfrak{L}^4$, $\mathfrak{L}^5$.

Результаты § 2.3 опубликованы автором в работе [42].

В третьей главе дается явная аксиоматика гильбертовского типа для каждого из указанных расширений соответствующей предтабличной суперинтуиционистской логики в языке с одной константой, рассмотрены вопросы разрешимости и алгоритмической проблемы распознавания консервативности полных по Новикову расширений предтабличных суперинтуиционистских логик.

Аксиоматика полных по Новикову расширений предтабличных суперинтуиционистских логик приведена § 3.2.

Для полных по Новикову φ-логик, описанных в главе 2, заданы свои исчисления на основе соответствующих исчислений $LC(\varphi)$, $L2(\varphi)$, $L3(\varphi)$.

Установлена корректность каждого такого исчисления (теорема 3.2.1, теорема 3.2.3, теорема 3.2.9).

Доказана полнота каждого исчисления на основе соответствующих исчислений $LC(\varphi)$, $L2(\varphi)$, $L3(\varphi)$ относительно соответствующих характеристических классов φ-шкал.

Теорема 3.2.2. *Пусть A — произвольная формула.*
Если A общезначима в классе φ-цепей типа «φ — нигде», то $\mathfrak{I}_1 \vdash A$.
Если A общезначима в классе φ-цепей типа «φ — везде», то $\mathfrak{I}_2 \vdash A$.
Если A общезначима в классе φ-цепей типа «φ — только в топе», то $\mathfrak{I}_3 \vdash A$.

Здесь $\mathfrak{I}_1 = LC(\varphi) + \neg\varphi$ (класс «φ — нигде»); $\mathfrak{I}_2 = LC(\varphi) + \varphi$ (класс «φ — везде»); $\mathfrak{I}_3 = LC(\varphi) + \neg\neg\varphi + \varphi \to (A \vee \neg A)$ (класс «φ — только в топе»).

Теорема 3.2.7. *Пусть A — произвольная формула. Для каждого $k \in [1,5]$ выполнено следующее: если $\boldsymbol{\mathfrak{F}}^k \models A$, то $\mathfrak{I}_k \vdash A$.*

Здесь $\mathfrak{I}_1 = L2(\varphi) + \neg\varphi$ (класс $\boldsymbol{\mathfrak{F}}^1$ вееров типа «φ — нигде»); $\mathfrak{I}_2 = L2(\varphi) + \varphi$ (класс $\boldsymbol{\mathfrak{F}}^2$ вееров типа «φ — везде»); $\mathfrak{I}_3 = L2(\varphi) + \neg\neg\varphi + \varphi \to (A \vee \neg A)$ (класс $\boldsymbol{\mathfrak{F}}^3$ вееров типа «φ — во всех точках крыши»); $\mathfrak{I}_4 = L2(\varphi) + \varphi \to (A \vee \neg A) + \neg\varphi \to (A \vee \neg A) + (\varphi \to (A \vee B)) \to ((\varphi \to A) \vee (\varphi \to B))$; (класс $\boldsymbol{\mathfrak{F}}^4$ вееров типа «φ — в единственной точке крыши»); $\mathfrak{I}_5 = L2(\varphi) + \varphi \to (A \vee \neg A) + \neg\varphi \to (A \vee \neg A) + (\neg\varphi \to (A \vee B)) \to ((\neg\varphi \to A) \vee (\neg\varphi \to B))$ (класс $\boldsymbol{\mathfrak{F}}^5$ вееров типа «φ — во всех точках крыши, кроме одной»).

Теорема 3.2.12. *Пусть A — произвольная формула. Для каждого $k \in [1,4]$ выполнено следующее: если $\boldsymbol{\mathfrak{D}}^k \models A$, то $\mathfrak{I}_k \vdash A$.*

Здесь $\mathfrak{I}_1 = L3(\varphi) + \neg\varphi$; $\mathfrak{I}_2 = L3(\varphi) + \varphi$;$\mathfrak{I}_3 = L3(\varphi) + \neg\neg\varphi + \varphi \to (A \vee \neg A)$; $\mathfrak{I}_4 = L3(\varphi) + \neg\neg\varphi + \varphi \to bd_2 + (A \vee (A \to \varphi))$; $\boldsymbol{\mathfrak{D}}^k$ — соответствующий класс φ-даймондов.

Результаты § 3.2 получены автором, результаты п. 2 § 3.2 опубликованы в статье [41].

В § 3.3 рассмотрены вопросы разрешимости полных по Новикову расширений предтабличных суперинтуиционистских логик и алгоритмическая проблема распознавания консервативности полных по Новикову расширений предтабличных суперинтуиционистских логик.

φ-Логика $\mathfrak{L}$ называется *разрешимой*, если существует алгоритм, который по произвольной формуле $A \in Fm(\varphi)$ определяет, $A \in \mathfrak{L}$ или $A \notin \mathfrak{L}$.

Теорема 3.3.1. *Все полные по Новикову расширения предтабличной суперинтуиционистской логики L в языке $Fm(\varphi)$ являются разрешимыми.*

Под проблемой *распознавания консервативности* будем понимать следующую массовую проблему:

пусть L — одна из логик LC, $L2$, $L3$. Для произвольной $A \in Fm(\varphi)$, является ли φ-логика $L + A$ консервативным расширением логики L?

Теорема 3.3.2. *Проблема распознавания консервативности расширений предтабличной суперинтуиционистской логики L в языке $Fm(\varphi)$ алгоритмически разрешима.*

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [40–50] и включают статьи [40–42] в изданиях из перечня, рекомендованного ВАК. Результаты статьи [40] получены в нераздельном соавторстве с А.Д. Яшиным.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на Красноярском алгебраическом семинаре (2014 г).

Они апробировались на

- Международной научной конференции «Седьмые Смирновские чтения по логике» (Москва, 2011 г.);
- Всероссийской научной конференции с международным участием «Технологии информатизации профессиональной деятельности (в науке, образовании и промышленности)— ТИПД–2011» (Ижевск, 2011г.);

- Международных конференциях серии «Алгебра и математическая логика» (Казань, 2011, 2014 гг.); Международных конференциях серии «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2011, 2012, 2013 гг.);
- Международной конференции «Алгебра и логика: теория и приложения» (Красноярск, 2013 гг.);

Автор выражает благодарность научному руководителю, профессору кафедры прикладной математики ГБОУ ВПО МГППУ Яшину Александру Даниловичу, за поддержку и помощь в работе над диссертацией.

Глава 1. О метаматематике $\overline{\varphi}$-логик

В этой главе:

- излагаются сведения из метаматематики чистых логик;
- приводится семантическая характеризация предтабличных суперинтуиционистских логик в терминах шкал Крипке;
- основные метаматематические понятия и результаты перенесены на $\overline{\varphi}$-язык;
- формально обоснована корректность постановки проблемы полноты по П. С. Новикову для произвольной логики L.

При написании этой главы автор опирался на работы [2,7,10,12,13,24, 39].

1.1. Метаматематика чистых шкал и логик

Язык логики высказываний содержит

1) счетное множество *пропозициональных переменных*

$Var = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$;

2) *пропозициональные связки*: $\vee, \wedge, \to, \neg$;

3) *пропозициональные константы*: $\mathtt{0}$(ложь), $\mathtt{1}$(истина);

4) *вспомогательные символы* (скобки): (и);

Множество Fm формул языка логики высказываний определяется индуктивно:

1) пропозициональные переменные и константы есть формулы;

2) если A и B — формулы, то $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы;

3) других формул, кроме построенных по пп. 1 и 2, нет.

Для обозначения переменных будут так же использоваться строчные латинские буквы p, $q, \ldots$ (возможно, с индексами), и прописные латинские буквы A, B, $C, \ldots$ — для обозначения формул. Кроме того, применяется уменьшение числа скобок в формуле до минимума с сохранением смысла. Формулы, участвующие в построении формулы A в приведенном выше определении, а также сама формула A называются *подформулами* формулы A.

Определение 1.1.1. *Подстановкой* [2] на множестве Fm называется отображение $s\colon Fm \to Fm$, удовлетворяющее условиям: $s(A \circ B) = s(A) \circ s(B)$, где $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$; $s(\neg A) = \neg s(A)$, $s(0) = 0$, $s(1) = 1$.

Интуиционистская логика высказываний Int — это наименьшее подмножество множества Fm, содержащее аксиомы интуиционистского исчисления высказываний [4], и замкнутое относительно правил вывода modus ponens $(A, A \to B\ /\ B)$ и подстановки. Одним из примером формулы, выводимой в Int, является формула $A \to A$.

Определение 1.1.2. *Суперинтуиционистская* (*с.и.*) *логика* — это произвольное подмножество $L \subsetneq Fm$, включающее Int и замкнутое относительно правил *modus ponens* и подстановки.

Через $L + A$ обозначается наименьшая логика, включающая логику L и содержащая формулу A.

п. 1. Шкалы и модели

Дадим необходимые сведения из метаматематики с. и. логик (приведенные здесь сведения частично опираются на [25] и [23]).

Определение 1.1.3. *Шкалой* называется пара $(W, \leqslant)$, где W — непустое множество, а $\leqslant$ — частичный порядок на нем. В некоторых случаях будем отождествлять ч.у.м. с его носителем.

Элементы шкал будем в дальнейшем называть *точками.* При $x \leqslant y$ говорят, что точка x видит точку y. При наличии наименьшего элемента он называется *корнем*, а шкала — *корневой* (или *порожденной*). При наличии наибольшего элемента он называется *топом.* Предикат $\max_W x$ означает, что x — максимальный элемент частично упорядоченного множества W.

Определение 1.1.4. Подмножество $X \subseteq W$ называется *конусом*, если оно замкнуто относительно увеличения: $x \in X,\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ y \in X$. Конус вида $W^x = \{y \in W \mid x \leqslant y\}$ называется *конусом с корнем* x (или *конусом, порожденным точкой* x). Если имеет место включение $W' \subseteq W$ и W' — конус, то говорят, что конус W' *порожден* из шкалы W.

Например, W и $\varnothing$ являются конусами. Множество конусов шкалы W обозначаем через $Con\, W$.

Определение 1.1.5. Множество $W' \subseteq W$ называется *цепью* (*антицепью*), если все элементы этого множества попарно сравнимы (несравнимы), то есть $\forall x,\, y \in W'(x \leqslant y \vee y \leqslant x)$ ($\forall x,\, y \in W'(x \nleqslant y \wedge y \nleqslant x)$).

На множестве $Con\, W$ рассматриваются теоретико–множественные операции $\cup$, $\cap$, а также операции *псевдодополнения* и *относительного псевдодополнения:*

$$-X = \{x \in W \mid W^x \cap X = \varnothing\}, \quad X \supset Y = \{x \in W \mid X \cap W^x \subseteq Y \cap W^x\}.$$

Конус X шкалы W называется *плотным*, если $--X = W$. Точечный эквивалент этого условия — $\forall x \exists y \geqslant x : \ y \in X$ [12].

Структура $(Con\, W, \cap, \cup, \supset, -, \varnothing, W)$ является примером *псевдобулевой алгебры* (*алгебры Гейтинга*). Псевдобулевы алгебры (п.б.а.) являются моделями интуиционистской логики высказываний так же, как булевы алгебры — моделями классической логики высказываний (см., например, [12], [37], [29]). В некоторых случаях мы будем отождествлять алгебру конусов с множеством $Con\, W$.

Известны следующие теоремы о представлении п.б.а. (например [18, 26]):

Теорема 1.1.1 (о представлении п.б.а.). *Всякая п.б.а. изоморфна подалгебре алгебры $Con\, W$ для некоторой шкалы W.*

Теорема 1.1.2 (о представлении конечных п.б.а.). *Всякая конечная п.б.а. изоморфна алгебре $Con\, F$ для некоторой конечной шкалы F.*

В связи с теоремой 1.1.1 широко применяется понятие обобщенной шкалы [25].

Определение 1.1.6. *Обобщенной шкалой* называется структура вида (W, S), где W — шкала, а S — подалгебра алгебры $Con\,W$, при этом под конечными обобщенными шкалами всегда будем понимать обобщенные шкалы, удовлетворяющие условию $S = ConW$. Любую шкалу W можно естественным образом отождествить с обобщенной шкалой $(W, ConW)$. Обобщенную шкалу иногда будем называть просто *шкалой*, если ее тип ясен из контекста.

Определение 1.1.7. Пусть (W, S) — шкала. Отношение *отделенности* на множестве W определяется (см. [31, 32]) следующим образом:

$$x \prec y \;\rightleftharpoons\; x < y \,\&\, \exists Y \in S : x \notin Y \,\&\, y \in Y.$$

Определение 1.1.8. Точка $x \in W$ *имеет глубину 1*, если не существует $y \succ x$ (обозначение $d_{(W,S)}(x) = 1$, это аналог максимальности в обычной шкале). Точка $x \in W$ *имеет глубину* $k > 1$ (обозначение $d_{(W,S)}(x) = k$, $k \in \omega$) тогда и только тогда, когда существует $\prec$-цепь $x \prec x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_{k-1}$ длины k и не существует $\prec$-цепей с началом в точке x длины $k + 1$.

В дальнейшем, если из контекста ясно, о какой шкале идет речь, то индекс в обозначении глубины опускается.

Определение 1.1.9. *Оценкой переменных в шкале* $\mu = (W, S)$ называется отображение $v \colon Var \to S$, при этом $v(p)$ называется *значением* переменной p относительно оценки v.

На множество Fm оценка v распространяется по индукции:

$$v(\mathsf{0}) := \varnothing; \quad v(\mathsf{1}) := W; \quad v(A \wedge B) := v(A) \cap v(B);$$
$$v(A \vee B) := v(A) \cup v(B); \quad v(A \to B) := v(A) \supset v(B); \quad v(\neg A) := -v(A).$$

Пара (μ, v) называется *моделью*, а конус $v(A)$ — *значением формулы A относительно оценки v*. По оценке v определяется *отношение вынуждения:* $x \Vdash_v A \Leftrightarrow x \in v(A)$ (читается так: в точке x относительно оценки v *вынуждается* (или *истинна*) формула A).

Формула A *истинна в модели* (μ, v), если $v(A) = W_\mu$, где W_μ — наибольший конус шкалы μ; *общезначима в шкале* μ, если для любой оценки v в шкале μ имеем $v(A) = W_\mu$ ($\rightleftharpoons$ $\mu \models A$).

Определение 1.1.10. *Логикой* класса $\mathbf{M} = \{(W_i, S_i) \mid i \in I)\}$ шкал называется множество $L(\mathbf{M})$ формул, общезначимых в каждой шкале этого класса.

Замечание 1.1.1. Это множество действительно является логикой, поскольку в нем присутствуют все аксиомы Int и оно замкнуто относительно правил подстановки и модус поненс [39].

Теорема 1.1.3. *Для всякой с.и. логики L существует класс* $\mathbf{M}$ *обобщенных шкал такой, что* $L = L(\mathbf{M})$.

Это утверждение приводится в разных источниках и разных формулировках, например, в статье М.В. Захарьящева [3, с. 404, абз. 2] и в работе Х. Оно [37].

Класс $\mathbf{M}$, удовлетворяющий условиям теоремы 1.1.3, называется *характеристическим* (для L) [35]. В дальнейшем, если ясно о какой логике идет речь, то пишем просто «характеристический» без упоминания L.

п. 2. Порожденные шкалы и p-морфизмы

Пусть $\mu = (W, S)$ — шкала, $W_0 \in Con\, W$ (порядок на W_0 наследуется из порядка на W) и $S_0 = \{X \cap W_0 \mid X \in S\}$.

Определение 1.1.11. Шкала $\mu_0 = (W_0, S_0)$ называется *подшкалой, порожденной из μ конусом* W_0 ($\rightleftharpoons$ $\mu_0 \subseteq \mu$).

Если v — оценка на μ, то *наследуемая оценка* v' на μ' определяется посредством $v'(p) \ \rightleftharpoons\ v(p) \cap W'$ для всех $p \in Var$.

Теорема 1.1.4 (о порожденной модели). *При указанных предположениях для любой формулы $A \in Fm$ имеет место $v'(A) = v(A) \cap W'$.*

Определение 1.1.12. Пусть $\mu = (W, \leqslant; S)$, $\mu' = (W', \leqslant'; S')$ — шкалы. Отображение $h\colon W \to W'$ называется *p-морфизмом* шкалы μ на μ', если выполнены следующие условия:

- h — сюръективное отображение;
- $x \leqslant y \;\Rightarrow\; h(x) \leqslant' h(y)$ (монотонность);
- $z \geq' h(x) \;\Rightarrow\; \exists y \geq x : \; h(y) = z$ (*конусность*);
- $\forall X \in S' : \; h^{-1}(X) \in S$, где $h^{-1}(X)$ — полный прообраз конуса X по h

(непрерывность — по аналогии с «прообраз открытого множества открыт»). Обозначение $h\colon \mu \twoheadrightarrow \mu'$.

Предложение 1.1.5. *Пусть (W, S) и (W', S') — шкалы, $h\colon (W, S) \twoheadrightarrow (W', S')$. Тогда для всех $x \in W$ выполнено неравенство $d(x) \geqslant d(h(x))$.*

Пусть $h\colon \mu \twoheadrightarrow \mu'$ и v — оценка на μ'. *Прообраз* $(h^{-1}v)$ оценки v относительно h определяется так: $(h^{-1}v)(p) \;\rightleftharpoons\; h^{-1}(v(p))$ для всех $p \in Var$.

Теорема 1.1.6 (о p-морфизмах моделей). *При указанных предположениях для любой формулы A выполнено $(h^{-1}v)(A) = h^{-1}(v(A))$.*

Отношение *редуцируемости* $\mu \succeq \mu'$ на классе шкал определяется так:

$$\mu \succeq \mu' \;\rightleftharpoons\; \exists \mu_0 \subseteq \mu \exists h\colon \mu_0 \twoheadrightarrow \mu'.$$

Пусть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — некоторые классы обобщенных шкал. Отношение *редуцируемости* на классах шкал определяется следующим образом:

$$\mathbf{N} \succeq \mathbf{M} \;\rightleftharpoons\; \forall \mu \in \mathbf{M} \exists \eta \in \mathbf{N} : \eta \succeq \mu.$$

Говорят также, что класс $\mathbf{M}$ *мажорируется* классом $\mathbf{N}$.

Следующие две теоремы вытекают из метаматематических результатов, приведенных, например, в [24].

Теорема 1.1.7 (прямая о сравнении логик). *Пусть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — произвольные классы обобщенных шкал. Тогда из $\mathbf{N} \succeq \mathbf{M}$ следует $L(\mathbf{N}) \subseteq L(\mathbf{M})$.*

Теорема 1.1.8 (обратная о сравнении логик). *Пусть* $\mathbf{F}$ *— некоторый класс конечных порожденных шкал, а* $\mathbf{M}$ *— произвольный класс обобщенных шкал. Тогда из* $L(\mathbf{M}) \subseteq L(\mathbf{F})$ *следует* $\mathbf{M} \succeq \mathbf{F}$.

Теорема 1.1.9 (финитная аппроксимируемость Int**).** *Пусть* $\mathbf{F}$ *— класс всех конечных порожденных шкал. Тогда* $L(\mathbf{F}) = Int$.

С.и. логка называется *финитно аппроксимируемой* если она характеризуется некоторым классом конечных шкал [5].

1.2. О предтабличных суперинтуиционистских логиках

Определение 1.2.1. *Табличной* называют с.и. логику, которая может быть характеризована конечным числом конечных шкал.

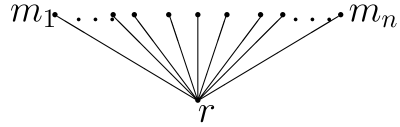
Определение 1.2.2. *Предтабличной* называют с.и. логику, которая сама табличной не является, но любое ее собственное расширение оказывается табличным.

В работе [8] семантическая характеризация предтабличных суперинтуиционистских логик построена с помощью шкал Крипке.

Определение 1.2.3. Будем называть *цепью* конечную линейно упорядоченную шкалу; цепь из n элементов обозначим C_n.

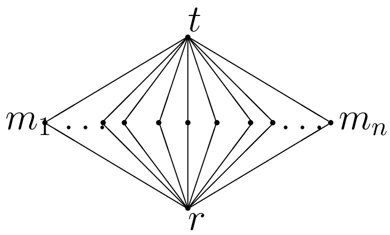
Определение 1.2.4. Будем называть *веером* конечную корневую шкалу глубины 2; веер с n максимальными элементами (*крыша* веера) обозначаем F_n.

Типичный веер имеет следующий вид:



Определение 1.2.5. Будем называть *даймондом* конечную корневую шкалу глубины 3 с топом; даймонд с n попарно несравнимыми точками «среднего слоя» (*миддл* даймонда) обозначаем D_n.

Типичный даймонд имеет следующий вид:



Отметим, что в работе [9] термину «даймонд» соответствует термин «юла».

Замечание 1.2.1. Заметим, что понятие «цепь», «веер» и «даймонд» легко обобщаются на шкалы с бесконечным числом элементов.

Определение 1.2.6. *Логикой Даммета* [27] LC называется логика, полученная добавлением к Int аксиомы линейности

$$Lin := (p \to q) \vee (q \to p).$$

Наличие в LC указанной аксиомы обуславливает специфические свойства шкал, являющихся моделями логики LC, которые будем также называть *LC-шкалами.*

Общезначимость аксиомы линейности в обобщенной шкале описывается следующим предложением.

Предложение 1.2.1 (строение LC-шкал, [23]). *Обобщенная шкала $\mu = (W, S)$ является моделью логики Даммета тогда и только тогда, когда в любой ее порожденной корневой подшкале (W', S') семейство конусов S' линейно упорядочено отношением включения $\subseteq$.*

Из упомянутых выше работ А. В. Кузнецова и Л. Л. Максимовой следует, что характеристическим для LC является класс $\mathbf{C}$ всех конечных цепей[1]. Более того, для характеристичности класса достаточно, чтобы он содержал конечные цепи сколь угодно большой высоты (*конфинальный подкласс*). В самом общем случае имеем [23]

Предложение 1.2.2. *Класс $\mathbf{M}$ обобщенных LC-шкал является характеристическим тогда и только тогда, когда $\mathbf{C} \preccurlyeq \mathbf{M}$.*

[1]Отсюда обозначение — LC — Logic of Chains.

Определение 1.2.7. *Логикой* $L2$ называется логика, полученная добавлением к Int аксиомы *ограничения глубины не более 2*

$$bd_2 := p_1 \vee (p_1 \to (p_2 \vee \neg p_2)).$$

Наличие в $L2$ указанной аксиомы обуславливает специфические свойства шкал, являющихся моделями логики $L2$, которые будем также называть *$L2$-шкалами.*

Предложение 1.2.3 (строение $L2$-шкал, [23]). *Обобщенная шкала $\mu = (W, S)$ является моделью логики $L2$ тогда и только тогда, когда ее высота не превосходит 2.*

Характеристическим для $L2$ является класс $\mathbf{F}$ всех конечных вееров. Заметим, что при $1 \leqslant k < n$ веер F_k является p-морфным образом веера F_n. Отсюда следует, что любой конфинальный подкласс $\mathbf{F}'$ класса $\mathbf{F}$ также является характеристическим (подкласс *конфинален*, если он содержит вееры F_k сколь угодно большой ширины). В общем случае имеем [23]

Предложение 1.2.4. *Класс $\mathbf{M}$ обобщенных $L2$-шкал является характеристическим тогда и только тогда, когда $\mathbf{F}' \preccurlyeq \mathbf{M}$ для некоторого конфинального подкласса $\mathbf{F}' \subseteq \mathbf{F}$.*

Определение 1.2.8. *Логикой* $L3$ называется логика, полученная добавлением к Int аксиом *ограничения глубины не более 3*

$$bd_3 := p_1 \vee (p_1 \to (p_2 \vee (p_2 \to (p_3 \vee \neg p_3))))$$

и *слабого закона исключенного третьего*

$$kc := \neg p \vee \neg\neg p.$$

Наличие в $L3$ указанных аксиом обуславливает специфические свойства шкал, являющихся моделями логики $L3$, которые будем также называть *$L3$-шкалами.*

Предложение 1.2.5 (строение $L3$-шкал). *Пусть $\mu = (W, S)$ – шкала.*

(1) *Если $\mu \models bd_3$, то $\forall x \in W\, (d(x) \leqslant 3)$.*

(2) *Если μ – корневая шкала и $\mu \models kc$, то для любых двух непустых конусов $X, Y \in S$ их пересечение не пусто.*

Доказательство. **1)** Пусть в шкале μ нашлись такие элементы x, y, z, t, что $x \prec y \prec z \prec t$ и $x \notin Y$, $y \in Y$, $y \notin Z$, $z \in Z$, $z \notin T$, $t \in T$ для некоторых $Y, Z, T \in S$. Если положить $v(p_1) := Y$, $v(p_2) := Z$, $v(p_3) := T$, то при такой оценке в точке x опровергается формула bd_3.

2) Пусть, напротив, нашлись непустые и непересекающиеся конусы $X, Y \in S$. Положим $v(p) := X$. Тогда $Y \subseteq -X$, т.е. $-X \neq \varnothing$ и, следовательно, в точке $o \in W$ опровергается формула kc. $\square$

Характеристическим для $L3$ является класс $\mathbf{D}$ всех конечных даймондов. Заметим, что любой конфинальный подкласс $\mathbf{D'}$ класса $\mathbf{D} := \{D_n | n \in \omega, n > 0\}$ также является характеристическим, поскольку при $1 \leqslant k < n$ даймонд D_k является p-морфным образом даймонда D_n (подкласс *конфинален*, если он содержит даймонды D_k для сколь угодно больших k).

Обозначения bd_2, bd_3, kc взяты из [25], где так обозначается соответствующие логики $\mathbf{BD_2} = Int + bd_2$ (bounded depth 2), $\mathbf{BD_3} = Int + bd_3$ (bounded depth 3), $\mathbf{KC} = Int + \neg p \vee \neg\neg p$.

1.3. Метаматематика $\overline{\varphi}$-шкал и $\overline{\varphi}$-логик

В этом параграфе приводятся необходимые сведения из метаматематики $\overline{\varphi}$-логик и $\overline{\varphi}$-шкал (изложение адаптировано для языка с несколькими константами и опирается на [13], [21], [38]).

Напомним, что к пропозициональному языку добавляется набор дополнительных логических констант $\overline{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$; получается класс

$Fm(\overline{\varphi})$ формул расширенного языка, при этом формулы из Fm были названы *чистыми*.

Формулы без переменных называются *константными*, $Fm_c(\overline{\varphi})$ — класс константных формул.

Понятие *подстановки* переносится на расширенный язык: $s(\varphi_i) = \varphi_i$ для всех $\varphi_i \in \overline{\varphi}$.

Определение 1.3.1. *$\overline{\varphi}$-Логикой* называется множество $\mathfrak{L}$ формул расширенного языка, включающее Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки [13, с. 155].

Через $\mathfrak{L} + A$ обозначим наименьшую $\overline{\varphi}$-логику, включающую логику $\mathfrak{L}$ и содержащую формулу A ($A \in Fm(\overline{\varphi})$).

Рукописное начертание букв для логик, шкал и классов шкал будет указывать на связь с расширенном языком, прямое начертание — на связь с чистым языком.

Определение 1.3.2. Будем говорить, что *$\overline{\varphi}$-логика* $\mathfrak{L}$ является *консервативным расширением* с.и. логики L, если $L \subseteq \mathfrak{L}$ и для всякой чистой формулы A из $A \in \mathfrak{L}$ следует $A \in L$.

Определение 1.3.3. *Явным соотношением для константы* φ_i назовем формулу вида $\varphi_i \leftrightarrow B$, где подформула B не содержит φ_i (но может содержать константы, отличные от φ_i).

$\overline{\varphi}$-Логика $\mathfrak{L}$ называется *полным по Новикову расширением* логики L, если $\mathfrak{L}$ консервативна над L и для любой формулы $A \in Fm(\overline{\varphi})$, не принадлежащей $\mathfrak{L}$, $\overline{\varphi}$-логика $\mathfrak{L} + A$ неконсервативна над L (то есть $\mathfrak{L}$ *не допускает присоединения* никакой новой формулы).

Если $\overline{\varphi} = \{\varphi\}$, то явное соотношение имеет вид $\varphi \leftrightarrow B$ для некоторой чистой формулы B. Тогда можно сказать, что $\mathfrak{L}$ определяет *новую* константу в L.

Подход Новикова к понятию новой константы адаптирован А. Д. Яшиным [38]: понятие *новизны* трансформируется в понятие *независимости* констант.

Определение 1.3.4. Будем говорить, что $\overline{\varphi}$-логика $\mathfrak{L}$ *определяет новые независимые логические константы в* L, если $\mathfrak{L}$ консервативна над L и для любого явного соотношения $\varphi_i \leftrightarrow B$ $\overline{\varphi}$-логика $\mathfrak{L} + \varphi_i \leftrightarrow B$ является неконсервативной над L (другими словами, $\mathfrak{L}$ не допускает присоединения никаких явных соотношений для дополнительных констант).

Напомним формулировку проблемы Новикова для с.и. логики L:

- построить явные примеры полных над L $\overline{\varphi}$-логик с независимыми константами (*проблема-минимум*);
- описать класс всех полных по Новикову $\overline{\varphi}$-логик (*проблема-максимум*).

Следующая теорема является формальным обоснованием корректности постановки проблемы полноты по Новикову для произвольной логики L.

Теорема 1.3.1. *Пусть L — некоторая с.и. логика. Любая консервативная над L $\overline{\varphi}$-логика включена в некоторую максимальную консервативную над L $\overline{\varphi}$-логику.*

Доказательство. Зафиксируем некоторую консервативную над с.и. логикой L $\overline{\varphi}$-логику $\mathfrak{L}$.

Положим $X := \{\mathfrak{L}' \mid \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{L}'$ — консервативное расширение $L\}$, X — упорядоченно по включению. Нетрудно убедиться, что всякая цепь в X имеет верхнюю грань, откуда по лемме Цорна, найдется максимальная по включению $\overline{\varphi}$-логика $\mathfrak{L}''$ такая, что $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}''$ и $\mathfrak{L}''$ — консервативное расширение L. $\square$

Однако этот результат ничего не дает в плане эффективного описания как конкретных примеров полных логик, так и всего семейства полных логик.

Определение 1.3.5. *Обобщенной $\overline{\varphi}$-шкалой* называется структура вида $(W, S; \overline{\Phi})$, где (W, S) — обобщенная шкала, $\overline{\Phi} = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ — набор конусов из S, которые также будем называть *константами.* О каких константах идет речь, будет ясно из контекста.

Как и в случае обобщенных шкал, под конечными обобщенными $\overline{\varphi}$-шкалами всегда будем понимать обобщенные $\overline{\varphi}$-шкалы, удовлетворяющую условию $S = ConW$. Аналогично, любую *$\overline{\varphi}$-шкалу* $(W; \overline{\Phi})$ можно естественным образом отождествить с обобщенной $\overline{\varphi}$-шкалой $(W, ConW; \overline{\Phi})$. Обобщенную $\overline{\varphi}$-шкалу будем иногда называть просто $\overline{\varphi}$-шкалой, если ее тип ясен из контекста.

Определение 1.3.6. *Оценкой переменных в $\overline{\varphi}$-шкале* $\mu = (W, S; \overline{\Phi})$ называется отображение $v \colon Var \to S$.

На стандартные связки оценка распространяется, как описано выше. Для новых констант для любой v полагаем $v(\varphi_i) := \Phi_i$, $i \in [1, n]$.

Конусы для интерпретации констант на обобщенной $\overline{\varphi}$-шкале $\mu = (W, S; \overline{\Phi})$ можно задавать также с помощью понятия цвета [1].

Определение 1.3.7. *Цветом* называется произвольное подмножество множества $\overline{\varphi}$ (всего существует 2^n цветов). *Цветом точки x* обобщенной $\overline{\varphi}$-шкалы μ называется множество $\mathrm{col}(x) := \{\varphi_i \in \overline{\varphi} \mid x \Vdash \varphi_i\}$. В случае одной константы точку x назовем *окрашенной*, если $x \in \Phi$, и соответственно *неокрашенной*, если $x \notin \Phi$.

Понятия *модели, истинности формулы в модели, общезначимости формулы в $\overline{\varphi}$-шкале* и *в классе $\overline{\varphi}$-шкал* определяются аналогично.

Класс $\mathfrak{M} = \{(W_i, S_i; \Phi_i) \mid i \in I)\}$ $\overline{\varphi}$-шкал будем называть *характеристическим* для L, если таковым является класс обедненных (без выделенных конусов) шкал $\mathbf{M} = \{(W_i, S_i) \mid i \in I)\}$.

Определение 1.3.8. *$\overline{\varphi}$-Логикой класса* $\mathfrak{M}$ обобщенных $\overline{\varphi}$-шкал называется множество

$$\mathcal{L}(\mathfrak{M}) \rightleftharpoons \{A \in Fm(\overline{\varphi}) \mid \forall \mu \in \mathfrak{M} : \mu \models A\}.$$

Замечание 1.3.1. Из вышесказанного следует, что для любой с. и. логики L по крайней мере одно консервативное расширение существует. В самом деле, по теореме 1.1.3 логика L характеризуется некоторым классом обобщенных шкал; введем в каждой шкале этого класса набор выделенных конусов каким-либо образом, получим характеристический класс обобщенных $\overline{\varphi}$-шкал и его $\overline{\varphi}$-логику $\mathfrak{L}$. При этом чистый фрагмент $\mathfrak{L}$ совпадает с L.

В работе [13] рассмотрено расширение пропозиционального языка произвольным набором $\overline{\varphi}$ дополнительных логических связок произвольной местности. Модели $\overline{\varphi}$-логик в таком языке названы посредством *$\overline{\varphi}$-п.б.а.*, то есть псевдобулевыми алгебрами с заданными на них дополнительными операторами; доказана теорема о моделируемости $\overline{\varphi}$-логик классами $\overline{\varphi}$-п.б.а. В нашем частном случае эта теорема формулируется следующим образом

Теорема 1.3.2 (о моделировании $\overline{\varphi}$-логик). *Для всякой $\overline{\varphi}$-логики $\mathfrak{L}$ существует класс обобщенных $\overline{\varphi}$-шкал $\mathfrak{M}$ такой, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{M})$.*

Для всякой консервативной над L $\overline{\varphi}$-логики $\mathfrak{L}$ существует характеристический для L класс обобщенных $\overline{\varphi}$-шкал $\mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$.

Пусть $\mu = (W, S; \overline{\Phi})$ — $\overline{\varphi}$-шкала. *Порожденная конусом W' $\overline{\varphi}$-подшкала* определяется так: $\mu' = (W', S'; \overline{\Phi}')$, где $S' = \{X \cap W' \mid X \in S\}$, $\Phi_i' = \Phi_i \cap S'$, $i \in [1, n]$. ($\rightleftharpoons$ $\mu' \overset{\overline{\varphi}}{\subseteq} \mu$).

Для обобщенных $\overline{\varphi}$-шкал $\mu = (W, S; \overline{\Phi})$ и $\mu' = (W', S'; \overline{\Phi}')$ определение *$p_{\overline{\varphi}}$ -морфизма* (понятие и обозначение взяты из [13]) получается из определения p-морфизма добавлением пункта о согласовании констант: $h^{-1}(\Phi_i') = \Phi_i, i \in [1, n]$. Обозначение $h \colon \mu \overset{\overline{\varphi}}{\twoheadrightarrow} \mu'$.

Для $\overline{\varphi}$-логики $\mathfrak{L}$ через $\mathfrak{L}_c$ будем обозначать ее *константный фрагмент*, то есть $\mathfrak{L}_c = \mathfrak{L} \cap Fm_c(\overline{\varphi})$.

Лемма 1.3.3. *Пусть $\mu \overset{\overline{\varphi}}{\twoheadrightarrow} \mu'$. Тогда имеет место $\mathfrak{L}_c(\mu) = \mathfrak{L}_c(\mu')$.*

Отношение *$\overline{\varphi}$-редуцируемости* между шкалами определяется так:

$$\mu \overset{\overline{\varphi}}{\preccurlyeq} \eta \rightleftharpoons \exists \eta' \overset{\overline{\varphi}}{\subseteq} \eta \exists h \colon \eta' \overset{\overline{\varphi}}{\twoheadrightarrow} \mu.$$

Отношение $\overline{\varphi}$-*редуцируемости* на классах $\overline{\varphi}$-шкал определяется так:

$$\mathfrak{M} \overset{\overline{\varphi}}{\preccurlyeq} \mathfrak{N} \rightleftharpoons \forall \mu \in \mathfrak{M} \exists \eta \in \mathfrak{N} : \mu \overset{\overline{\varphi}}{\preccurlyeq} \eta.$$

Теорема 1.3.4 (прямая теорема сравнения $\overline{\varphi}$-логик). *Для любых классов* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *обобщенных* $\overline{\varphi}$-*шкал из* $\mathfrak{M} \overset{\overline{\varphi}}{\preccurlyeq} \mathfrak{N}$ *следует* $\mathcal{L}(\mathfrak{N}) \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{M})$.

Эта теорема аналогична прямой теореме о сравнения для чистых с. и. логик и доказывается подобным же образом. По аналогии с $\overline{\varphi}$-шкалой, $\overline{\varphi}$-*цепью* будем называть структуру вида $\mathcal{C}_k := (C_k, \overline{\Psi})$ — цепь C_k с выделенными конусами $\overline{\Psi} = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n \in ConC_k\}$.

$\overline{\varphi}$-*Веером* будем называть структуру вида $\mathcal{F}_k := (F_k, \overline{\Psi})$ — веер F_n с выделенными конусами $\overline{\Psi} = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n \in ConF_k\}$.

$\overline{\varphi}$-*Даймондом* будем называть структуру вида $\mathcal{D}_k := (D_n, \Psi)$ — даймонд D_n с выделенными конусами $\overline{\Psi} = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n \in ConD_k\}$.

Все определения для $\overline{\varphi}$-цепей, $\overline{\varphi}$-вееров и $\overline{\varphi}$-даймондов являются частными случаями определений для $\overline{\varphi}$-шкал.

п. 3. Явные соотношения в конечных $\overline{\varphi}$-шкалах

Материал этого пункта основан на работе [38]. Понятие явного соотношения для константы φ_i было введено в определении 1.3.3.

Определение 1.3.9. Пусть F — произвольная конечная шкала. Набор конусов $\{X_1, \dots, X_s\}$ называется *системой образующих* п.б.а. $Con\, F$, если наименьшая подалгебра этой алгебры, содержащая указанные конусы, совпадает с $Con\, F$.

Определение 1.3.10. *Минимальной* называют систему образующих, у которой никакая собственная подсистема не порождает всю алгебру $Con\, F$.

В $\overline{\varphi}$-шкале $\mathcal{F} = (F; \overline{\Phi})$ нас интересует набор $\overline{\Phi}$ и его поднаборы как возможные системы образующих.

Для произвольной конечной корневой $\overline{\varphi}$-шкалы $\mathcal{F} = (F; \overline{\Phi})$ имеет место

Лемма 1.3.5. *Набор $\overline{\Phi}$ является системой образующих п.б.а. $Con\,F$ тогда и только тогда, когда $\overline{\varphi}$-шкала $\mathfrak{F}$ является $\overline{\varphi}$-несжимаемой, то есть не существует $p_{\overline{\varphi}}$ -морфизма на $\overline{\varphi}$-шкалу с меньшим количеством точек.*

Если $\overline{\varphi}$-логика $\mathfrak{L}$ имеет явное соотношение вида $\varphi_i \leftrightarrow B$, то, подставляя в B вместо переменных константы, отличные от φ_i, получим явное соотношение $\varphi_i \leftrightarrow B'$ с константной правой частью B'.

Предложение 1.3.6. *В конечной $\overline{\varphi}$-шкале $\mathfrak{F}$ с системой образующих $\overline{\varphi}$ существует явное соотношение для φ_i тогда и только тогда, когда при удалении Φ_i из $\mathfrak{F}$ $\overline{\varphi} \setminus \{\varphi_i\}$-шкала $(F; \Phi_1, \ldots, \Phi_{i-1}, \Phi_{i+1}, \ldots, \Phi_n)$ по прежнему остается несжимаемой, то есть не существует $p_{\overline{\varphi} \setminus \{\varphi_i\}}$ -морфизма на $\overline{\varphi} \setminus \{\varphi_i\}$-шкалу с меньшим числом точек.*

Пример 1.3.1. Рассмотрим конечную $\overline{\varphi}$-шкалу, раскрашенную так, как показано на рисунке 1.3a. Удалим из точки крыши константу φ_1; получим $\overline{\varphi}$-шкалу, указанную на рисунке 1.3b, для которой существует p_{φ_2}-морфизм на $\overline{\varphi}$-шкалу, указанную на рисунке 1.3c.

Тогда по предложению 1.3.6 в этой $\overline{\varphi}$-шкале не существует явного соотношения для φ_1; аналогично для φ_2.

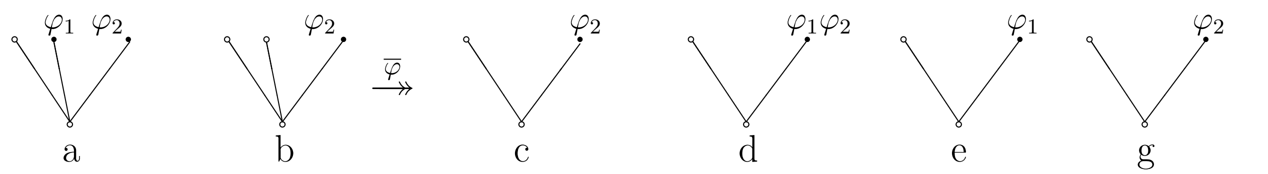


Рис. 1.3

Пример 1.3.2. Рассмотрим конечную $\overline{\varphi}$-шкалу, раскрашенную так, как показано на рисунке 1.3d. Удалим из точки крыши константу φ_2; получим $\overline{\varphi}$-шкалу, указанную на рисунке 1.3e, для которой не существует p-морфизма на $\overline{\varphi}$-шкалу с меньшим числом точек, аналогично, удалив из точки крыши константу φ_1, получим $\overline{\varphi}$-шкалу, указанную на рисунке 1.3g.

Тогда по теореме 1.3.6 в $\overline{\varphi}$-шкале существует явное соотношение, а именно $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$.

Глава 2. Классификационные теоремы для полных по Новикову расширений предтабличных суперинтуиционистских логик

2.1. Пополнения LC: классификация, примеры с одной и двумя константами и явные соотношения в них

В настоящем параграфе мы покажем, что любая консервативная над LC $\overline{\varphi}$-логика включена в некоторую $\overline{\varphi}$-логику, задаваемую конфинальным классом конечных $\overline{\varphi}$-цепей.

п. 1. Редукция к конечным $\overline{\varphi}$-цепям в логике LC

Теорема 2.1.1. *Пусть $\mu = (W, S; \overline{\Phi})$ — обобщенная $\overline{\varphi}$-шкала с корнем $o \in W$ такая, что $(W, S) \models LC$. Тогда существует конечная $\overline{\varphi}$-цепь $\mathcal{C}_l = (C_l, \overline{\Psi})$, для некоторого l, и $p_{\overline{\varphi}}$-морфизм $f : (W, S; \overline{\Phi}) \xrightarrow{\overline{\varphi}}\!\!\!\!\rightarrow (C_l, \overline{\Psi})$. При этом если в μ реализуется строго возрастающая последовательность цветов длины m, то высота $\overline{\varphi}$-цепи $\mathcal{C}$ не менее m.*

Приведем ряд вспомогательных определений и утверждений, сформулированных в условиях теоремы 2.1.1.

Зададим на W отношение эквивалентности $x \simeq y \ \rightleftharpoons\ \mathrm{col}(x) = \mathrm{col}(y)$. Классы эквивалентности назовем *цветовыми компонентами* (для краткости *компонентами*); обозначаем их буквами $X, Y, Z, \ldots$ Через $\mathrm{col}(X)$ обозначим цвет компоненты X (аналогично цвету точки $x \ \rightleftharpoons\ \mathrm{col}(x)$).

$$\mathrm{col}(X) := \{\varphi_i \in \overline{\varphi} \mid \forall x \in X : x \Vdash \varphi_i\}.$$

Обозначаем $\mathrm{COL}(X) \ \rightleftharpoons\ \bigcap\{\Phi_i \mid \varphi_i \in \mathrm{col}(X)\}$. Заметим, что $\mathrm{COL}(X) \in S$ и $X \subseteq \mathrm{COL}(X)$ (обратное включение в общем случае не выполнено, так как X конусом может и не быть).

На множестве компонент зададим *номинальное отношение порядка*:

$$X \prec Y \ \rightleftharpoons\ \mathrm{col}(X) \subsetneq \mathrm{col}(Y).$$

Иррефлексивность и транзитивность этого отношения очевидны.

Лемма 2.1.2. *Номинальное упорядочение компонент является линейным.*

Доказательство. Пусть $X \neq Y$ — компоненты. Докажем, что $X \prec Y$ или $Y \prec X$. Предположим противное, то есть, что $X \not\prec Y$ и $Y \not\prec X$, другими словами, что $\mathrm{col}(X) \not\subset \mathrm{col}(Y)$ и $\mathrm{col}(Y) \not\subset \mathrm{col}(X)$. Тогда найдутся константы $\varphi_i, \varphi_j \in \overline{\varphi}$ $(i \neq j)$ такие, что $\varphi_i \in \mathrm{col}(X) \setminus \mathrm{col}(Y)$, $\varphi_j \in \mathrm{col}(Y) \setminus \mathrm{col}(X)$. Рассмотрим некоторые точки $x \in X$ и $y \in Y$. Имеем $x \Vdash \varphi_i$, $y \nVdash \varphi_i$; $x \nVdash \varphi_j$, $y \Vdash \varphi_j$. Это означает, что конусы Φ_i и Φ_j несравнимы по включению, что противоречит строению LC-шкал. $\square$

Напомним, что при n константах существует 2^n попарно различных цветов.

Номинальное упорядочение компонент ничего не говорит о реальном расположении компонент относительно друг друга. Следующая лемма проясняет этот момент.

Лемма 2.1.3. *Пусть $X \prec Y$ и $x \in X$. Тогда x видит какую-то точку из Y.*

Доказательство (индукция по глубине компоненты $\delta(Y)$ в номинальном упорядочении).

Пусть $\delta(Y) = 1$, то есть Y — наибольшая компонента. Покажем, что $Y = \mathrm{COL}(Y)$. Включение $Y \subseteq \mathrm{COL}(Y)$ очевидно. Покажем, что $\mathrm{COL}(Y) \subseteq Y$. Если это не так, то найдется точка $y \in \mathrm{COL}(Y)$, $y \notin Y$. То есть $y \Vdash \bigwedge\{\varphi_i \mid Y \Vdash \varphi_i\}$, $\mathrm{col}(y) \neq \mathrm{col}(Y)$. Существует константа $\varphi_j \in \overline{\varphi}$ такая, что $\varphi_j \notin \mathrm{col}(Y)$ и $y \Vdash \varphi_j$, то есть y входит в некоторую компоненту, расположенную номинально выше Y. Но это противоречит тому, что Y — наибольшая компонента. Таким образом, имеем $\mathrm{COL}(Y) \neq \varnothing$, $\mathrm{COL}(Y) \in S$. В силу строения корневых LC-шкал, любой непустой допустимый конус плотен. Поэтому x видит какую-то точку y из $\mathrm{COL}(Y) = Y$.

Теперь пусть $\delta(Y) > 1$ и для всех компонент меньшей глубины утверждение верно. Докажем, что x видит какую-то точку из Y.

Предположим противное и рассмотрим компоненту $Z \succ Y$. Имеем $\delta(Y) < \delta(Y)$. По предположению индукции x видит хотя бы одну точку из Z. Докажем, что $x \in \mathrm{COL}(Y) \supset \mathrm{COL}(Z)$ методом от противного.

> Допустим, что $x \notin \mathrm{COL}(Y) \supset \mathrm{COL}(Z)$. Тогда найдется $u \in W$ такая, что $u \geqslant x$, $u \in COL(Y)$, $u \notin \mathrm{COL}(Z)$. Получаем, что, с одной стороны, и $u \notin Z$, а, с другой, так как x не видит никакую точку из Y, что $u \notin Y$. Пусть U — компонента, содержащая точку u. Имеем $U \neq Y$ и $U \neq Z$ поскольку компоненты либо совпадают, либо не пересекаются. Тогда $Y \prec U$ (так как $u \in COL(Y)$) и $U \prec Z$ (так как $u \notin COL(Z)$). Противоречие с тем, что $Z \succ Y$.

Итак, $x \in \mathrm{COL}(Y) \supset \mathrm{COL}(Z)$. Выберем произвольную точку $y \in Y$. С одной стороны, имеем $y \notin \mathrm{COL}(Y) \supset \mathrm{COL}(Z)$. С другой стороны, $y \in \mathrm{COL}(Y), x \notin \mathrm{COL}(Y)$. Получаем два допустимых конуса $\mathrm{COL}(Y)$ и $\mathrm{COL}(Y) \supset \mathrm{COL}(Z)$, несравнимых в S, что противоречит строению LC-шкал.

Таким образом, x видит какую-то точку из Y. Индукционный шаг проведен. Лемма доказана. $\square$

Завершим доказательство теоремы 2.1.1. Рассмотрим множество компонент с номинальным упорядочением, как искомую цепь $C := (\{X \mid X - \text{компонента}\}, \prec)$. $\Psi_j := \{X \mid X \Vdash \varphi_j\}$ и отображение $f : W \to C$ действует по правилу: для $x \in W$ $f(x) := \{y \in W \mid \mathrm{col}(x) = \mathrm{col}(y)\}$.

Убедимся, что f является p-морфизмом из W на C.

Сюръективность очевидна.

Монотонность. Если $x \in X, y \in Y$ и $x \leqslant y$, то $\mathrm{col}(X) \subseteq \mathrm{col}(Y)$ и $X \preccurlyeq Y$.

Конусность. Следует из леммы 2.1.3.

Непрерывность. Рассмотрим прообраз конуса $C^x = \{\{Y\} \mid X \preccurlyeq Y\}$.

$$f^{-1}(C^x) = f^{-1}(\{\{Y\} \mid X \preccurlyeq Y\}) = \bigcup\{f^{-1}(\{\{Y\} \mid X \preccurlyeq Y\}\} =$$
$$= \bigcup\{Y \mid X \preccurlyeq Y\} = \mathrm{COL}(X) \in S.$$

Убедимся, что отображение f является $p_{\overline{\varphi}}$-морфизмом из $\mathcal{W}$ на $(\mathcal{C};\Psi)$. Нетрудно проверить, что $\Psi_i = f(\Phi_i)$ для любого $i \in [1,n]$. Нужно убедиться, что $f^{-1}(\Psi_j) = f^{-1}(f(\Phi_j)) = \Phi_j$. Рассмотрим прообраз конуса $\Psi_j : f^{-1}(\Psi_j) = f^{-1}(\{\{X\} \mid X \Vdash \varphi_j\}) = f^{-1}(\{X \mid X \Vdash \varphi_j\}) = \bigcup\{X \Vdash \varphi_j\} = \bigcup\{x \in W \mid x \Vdash \varphi_j\} = \Phi_j$.

Таким образом, $f\colon (W,S;\overline{\Phi}) \xrightarrow{\overline{\varphi}}\!\!\!\!\rightarrow (C;\overline{\Psi})$.

Наконец заметим, что длина цепи $\mathcal{C}$ равна числу реализуемых компонент в $(W,S,\overline{\Phi})$. Итак, теорема доказана. □

Следствие 2.1.4. *Пусть $\mathfrak{M}$ — характеристический класс обобщенных LC-$\overline{\varphi}$-шкал. Тогда существует конфинальный класс $\mathfrak{C}$ конечных $\overline{\varphi}$-цепей такой, что $\mathfrak{C} \overset{\overline{\varphi}}{\preccurlyeq} \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть C_m — цепь из $(m+1)$-го элемента. В силу характеристичности $\mathfrak{M}$ для LC найдутся порожденная из некоторой шкалы класса $\mathfrak{M}$ корневая $\overline{\varphi}$-подшкала $(W,S,\overline{\Phi})$ и p-морфизм $h : (W,S) \twoheadrightarrow C_m$. Обозначим через $W_k := h^{-1}(\{c_k\})$ для $k \in [0,\ldots,m]$ — прообразы точек цепи $\mathcal{C}_m$, и пусть $\overline{W}_k := W_k \cup W_{k+1} \cup \ldots \cup W_m$. Заметим, что $\overline{W}_k \in S$ как пробраз конуса $\{c_k, c_{k+1}, \ldots, c_m\}$.

Расширим исходный набор констант $\overline{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ константами $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \ldots, \varphi_{n+m}$ по числу прообразов. Расширенный набор констант обозначим через $\overline{\overline{\varphi}}$. На обобщенной $\overline{\varphi}$-шкале $(W,S;\overline{\Phi})$ каждую новую константу φ_{n+k} интерпретируем конусом $\overline{W}_k$. Тем самым получаем новую $\overline{\overline{\varphi}}$-шкалу $(W,S;\overline{\overline{\Phi}})$. В силу теоремы 2.1.1 существует $\overline{\overline{\varphi}}$-цепь $\mathcal{C} = (C;\overline{\overline{\Phi}})$ и $p_{\overline{\overline{\varphi}}}$-морфизм $f : (W,S;\overline{\overline{\Phi}}) \xrightarrow{\overline{\overline{\varphi}}}\!\!\!\!\rightarrow (C;\overline{\overline{\Psi}})$, где $\overline{\overline{\Psi}}$ получается из $\overline{\Psi}$ добавлением конусов $\Psi_{n+k} = \overline{W}_k$. Конусы $\Phi_{n+m}, \Phi_{n+m-1}, \ldots, \Phi_{n+1}$ образуют строго возрастающую цепь в μ, поэтому в силу второго утверждения теоремы 2.1.1 $\overline{\varphi}$-цепь $\mathcal{C}$ имеет высоту не менее чем $m+1$.

Теперь «сотрем» в μ и в $\mathcal{C}$ выделенные конусы с номерами $n+m$, $n+m-1, \ldots, n+1$. Получаем $f : (W, S; \overline{\Phi}) \xrightarrow{\overline{\varphi}} (C; \overline{\Psi})$.

Проведя описанное построение для всех конечных цепей C_m, получим искомый класс $\mathfrak{C}$ $\overline{\varphi}$-цепей. $\square$

Следствие 2.1.5. *Любая консервативная над LC $\overline{\varphi}$-логика включена в $\overline{\varphi}$-логику некоторого конфинального класса конечных $\overline{\varphi}$-цепей.*

Таким образом, для отыскания примеров полных по Новикову расширений LC достаточно рассматривать конфинальные классы конечных $\overline{\varphi}$-цепей.

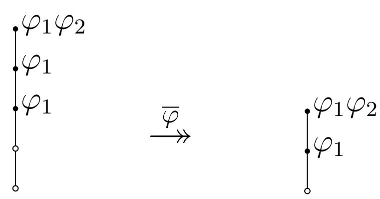
п. 2. Прототипы и классификация полных по Новикову расширений логики LC

В работе [23] дано описание полных по Новикову расширений логики LC для конечного случая констант. Для построения полных по Новикову расширений используется *метод наростов.*

В своих дальнейших рассуждениях вместо понятия «нарост» мы используем его цветовой аналог — «прототип».

Определение 2.1.1. *Прототипом* $\mathcal{C}$ называется конечная $\overline{\varphi}$-цепь $\mathcal{C} = (C, \Psi_1, \ldots, \Psi_n)$, в которой все точки имеют попарно различные цвета.

Заметим, что всякая конечная $\overline{\varphi}$-цепь $p_{\overline{\varphi}}$-морфируется на некоторый прототип (для этого достаточно отождествить точки, имеющие одинаковый цвет):



Рассмотрим произвольный конфинальный подкласс $\mathfrak{C}$ класса всех $\overline{\varphi}$-цепей. Пусть $\overline{\eta} := \{\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \ldots, \varphi_{i_s} \mid s < n\}$ — некоторый цвет. В отдельно взятой шкале *индексом цвета* $\overline{\eta}$ назовем число точек цвета $\overline{\eta}$, то есть $ind_{\overline{\eta}}(\mathcal{C}) := |\{x \in \mathcal{C} \mid \mathrm{col}(x) = \overline{\eta}\}|$. *Индексом цвета* $\overline{\eta}$ *в классе* $\mathfrak{C}$ назовем $ind_{\overline{\eta}}(\mathfrak{C}) := \sup\{ind_{\overline{\eta}}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \mathfrak{C}\}$. Заметим, что индекс цвета в классе может быть как нулевым, так и бесконечным.

В силу конфинальности класса $\mathfrak{C}$ найдется хотя бы один цвет, имеющий бесконечный индекс в этом классе. Все цвета в $\overline{\varphi}$-цепи упорядочены, их всего 2^n. Из всех цветов бесконечного индекса найдется максимальный по включению $\overline{\eta}$ (если их несколько, то, без ограничения общности, выберем любой из них). Рассмотрим конфинальный подкласс $\mathfrak{C}_1$, состоящий из $\overline{\varphi}$-цепей со сколь угодно длинными отрезками цвета $\overline{\eta}$. В каждой цепи класса $\mathfrak{C}_1$ удалим все точки, расположенные ниже отрезка цвета $\overline{\eta}$. Полученные $\overline{\varphi}$-цепи по прежнему образуют конфинальный класс $\mathfrak{C}_2$ со сколь угодно длинными выбранными отрезками цвета $\overline{\eta}$ (каждая $\overline{\varphi}$-цепь класса $\mathfrak{C}_2$ является $\overline{\varphi}$-подцепью некоторой $\overline{\varphi}$-цепи класса $\mathfrak{C}_1$, поэтому $\mathfrak{C}_2 \overset{\overline{\varphi}}{\preccurlyeq} \mathfrak{C}_1$). Поскольку прототипы образуют конечное множество, то найдется конфинальный подкласс $\mathfrak{C}_3 \subseteq \mathfrak{C}_2$, все $\overline{\varphi}$-шкалы которого отображаются на один и тот же прототип. Во всех шкалах класса $\mathfrak{C}_3$ корень имеет цвет $\overline{\eta}$, кроме того, существует шкалы со сколь угодно длинными отрезками цвета $\overline{\eta}$. В каждой шкале класса $\mathfrak{C}_3$ склеиваем все равноцветные точки, за исключением точек, имеющих цветовой тип $\overline{\eta}$. Получаем конфинальный класс $\mathfrak{C}_4$, такой, что $\mathfrak{C}_4 \overset{\overline{\varphi}}{\preccurlyeq} \mathfrak{C}_3$. Таким образом, класс $\mathfrak{C}_4$ — искомый. Класс $\mathfrak{C}_4$ можно описать другими словами.

Для данного прототипа $\mathcal{C}$ рассмотрим операцию *размножения корня*: построим класс $[\mathcal{C}]_\infty := \{\mathcal{C}_k \mid k \in \omega\}$, где $\mathcal{C}_k$ получено из $\mathcal{C}$ дублированием корня в k экземплярах с сохранением цвета. Из предыдущих построений получаем, что класс $\mathfrak{C}_4$ является конфинальным подклассом класса $[\mathcal{C}]_\infty$. Причем $\mathfrak{C}_4$ и $[\mathcal{C}]_\infty$ имеют один и тот же прототип $\mathcal{C}$.

Из проведенных построений и доказанных утверждений вытекает, что любая консервативная над LC $\overline{\varphi}$-логика включена в $\mathcal{L}([\mathcal{C}]_\infty)$ для подходящего прототипа $\mathcal{C}$.

Таким образом, полными по Новикову $\overline{\varphi}$-расширениями логики Даммета являются $\overline{\varphi}$-логики $\mathcal{L}([\mathcal{C}]_\infty)$ для всевозможных прототипов $\mathcal{C}$.

В итоге, установлена

Теорема 2.1.6 (А). *Всякое консервативное $\overline{\varphi}$-расширение логики Даммета включено в $\mathcal{L}([\mathcal{C}]_\infty)$ для некоторого прототипа $\mathcal{C}$.*

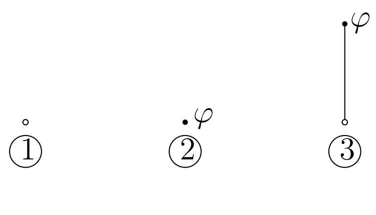
Теорема 2.1.6 (Б). *Если $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — неизоморфные прототипы, то $\overline{\varphi}$-логики, определяемые этими прототипами несовместны над LC, то есть их объединение порождает неконсервативную над LC $\overline{\varphi}$-логику.*

Действительно, найдется константная формула A такая, что $A \models \mathcal{C}_1$ и $A \not\models \mathcal{C}_2$. Тогда $A \in \mathcal{L}([\mathcal{C}_1]_\infty)$ и $A \notin \mathcal{L}([\mathcal{C}_2]_\infty)$. Так как $\mathcal{L}([\mathcal{C}_2]_\infty)$ полна по Новикову, то A не присоединима к $\mathcal{L}([\mathcal{C}_2]_\infty)$, то есть найдется чистая формула D такая, что $A \to D \notin \mathcal{L}([\mathcal{C}_2]_\infty)$. Очевидно, что в объединении $\mathcal{L}([\mathcal{C}_1]_\infty)$ и $\mathcal{L}([\mathcal{C}_2]_\infty)$ выводится D (не принадлежащая LC).

п. 3. Примеры пополнений LC с одной и двумя константами и явные соотношения в них.

Перечислим все попарно неизоморфные прототипы $\overline{\varphi}$-цепей с одной и с двумя константами.

1. С одной константой $\overline{\varphi} = \{\varphi\}$. Имеем следующие прототипы:



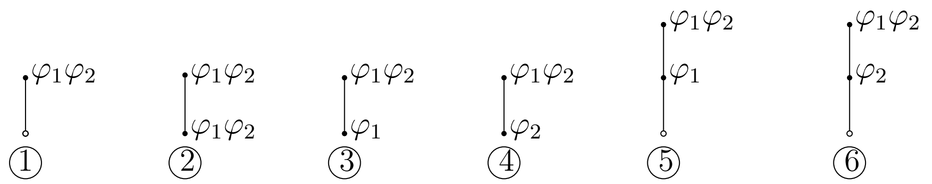
2. С двумя константами $\overline{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Во-первых, есть прототип с обеими пустыми константами, изоморфный прототипу 1 из предыдущего абзаца.

Во вторых, прототипы, изоморфные прототипу 2 из предыдущего абзаца, где φ заменено на φ_1 (или φ_2).

В-третьих, прототипы, изоморфные прототипу 3 из предыдущего абзаца, где φ заменено на φ_1 (или φ_2).

Интересны прототипы с обеими непустыми константами:



С помощью методики, указанной в предложении 1.3.6 проанализированы на предмет явных соотношений прототипы для одной и для двух констант. Результаты приведены в двух нижеследующих таблицах.

Таблица 1. Явные соотношения для прототипах φ-цепей с одной константы

Прототип №	Соотношение
1	$\varphi \leftrightarrow \mathsf{0}$
2	$\varphi \leftrightarrow \mathsf{1}$
3	нет

Таблица 2. Явные соотношения для двух констант в прототипах φ-цепей с непустыми φ_1 и φ_2

Прототип №	Соотношение	Прототип №	Соотношение
1	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	4	$\varphi_2 \leftrightarrow \mathsf{1}$
2	$\varphi_1 \leftrightarrow \mathsf{1}$, $\varphi_2 \leftrightarrow \mathsf{1}$	5	нет
3	$\varphi_1 \leftrightarrow \mathsf{1}$	6	нет

2.2. Пополнения $L2$: классификация, примеры с одной и двумя константами и явные соотношения в них

В настоящем параграфе мы покажем, что любая консервативная над $L2$ $\overline{\varphi}$-логика включена в некоторую $\overline{\varphi}$-логику, задаваемую подходящим конфинальным классом конечных $\overline{\varphi}$-вееров.

В работе [23] дано описание полных по Новикову расширений логики $L2$ для случая одной константы. В настоящем параграфе мы приведем аналогичные результаты для случая n констант.

п. 1. Редукция к конечным $\overline{\varphi}$-веерам в логике $L2$

Теорема 2.2.1. *Пусть $(W, S; \overline{\Phi})$ — обобщенная $\overline{\varphi}$-шкала с корнем o такая, что $(W, S) \models L2$, F_m — веер и $h\colon (W, S) \twoheadrightarrow F_m$. Тогда существуют $\overline{\varphi}$-веер $\mathfrak{F}_l$, где $m \leqslant l \leqslant m \cdot 2^n$, и $p_{\overline{\varphi}}$-морфизм $f\colon (W, S; \overline{\Phi}) \overset{\overline{\varphi}}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{F}_l$.*

Пусть точка a_0 — корень F_m, а точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$ образуют крышу веера F_m. Обозначим полные прообразы точек a_i через $W_0 := h^{-1}(\{a_0\})$, $W_i := h^{-1}(\{a_i\})$ для $i = [1, m]$. Прообраз крыши веера F_m обозначим через $\overline{W} := \bigcup_{i=1}^{m} W_i$. Из определения p-морфизма получаем, в частности, что $\overline{W} \in S$.

Приведем ряд вспомогательных утверждений, сформулированных в условиях теоремы 2.2.1.

Лемма 2.2.2. *Пусть $W_0 \cap \Phi_j \neq \varnothing$. Тогда $W_0 \subset \Phi_j$.*

Доказательство. Пусть $x \in W_0 \cap \Phi_j$ и $W_0 \not\subset \Phi_j$. Тогда $o \notin \Phi_j$. Получили $o \prec x$. Далее, конус $\overline{W}$ плотен в W, поэтому найдется точка $y \in \overline{W}$ такая, что $y \geqslant x$. Поскольку $x \in W_0$, получаем $x < y$. Отсюда $x \prec y$. Получили $\prec$-цепь $o \prec x \prec y$, что противоречит строению $L2$-шкал. □

Следствие 2.2.3. *Для любых $x, y \in W_0$ имеем* $\mathrm{col}(x) = \mathrm{col}(y)$.

Пусть $i > 0$. Рассмотрим на каждом W_i отношение «равноцветности»

$$x \simeq y \ \rightleftharpoons\ \mathrm{col}(x) = \mathrm{col}(y).$$

Поскольку число возможных цветов равно 2^n, множество W_i разбивается на дизъюнктные непустые компоненты в количестве от 1 до 2^n. Компоненту, содержащую точку $x \in W_i$ можно записать так:

$$[x] = W_i \cap \bigcap_{\varphi_j \in \mathrm{col}(x)} \Phi_j \cap \bigcap_{\varphi_j \notin \mathrm{col}(x)} \overline{\Phi}_j$$

(здесь $\overline{\Phi}_j$ обозначает теоретико-множественное дополнение).

Лемма 2.2.4. *Имеет место равенство* $W_i \setminus \Phi_j = W_i \cap (-\Phi_j)$ *для* $\forall i \in [1, m]$ *и* $\forall j \in [1, n]$.

Доказательство. Включение $\supseteq$ следует из того, что $-\Phi_j \subseteq \overline{\Phi}_j$ (согласно определению операции псевдодополнения на конусах).

Докажем обратное включение. Рассмотрим точку $x \in W_i$ такую, что $x \notin \Phi_j$. Допустим, что, напротив, что $x \notin -\Phi_j$. Тогда найдется точка $y \in \Phi_j$ такая, что $y \geqslant x$. Получаем $x < y$, поэтому $x \prec y$. Кроме того, $x \in W_i$, $o \notin W_i$, то есть $o \prec x$. Как и в доказательстве леммы 2.2.2, получили $\prec$-цепь $o \prec x \prec y$. Quod non. $\square$

Следствие 2.2.5. *Для любого* $i \in [1, m]$ *для любого* $x \in W_i$ *компонента* $[x]$ *разбиения конуса* W_i *является элементом п.б.а.* S.

Лемма 2.2.6. *Пусть* $y \in W_0$. *Для любого* $i \in [1, m]$, *для любой компоненты* X *разбиения конуса* W_i *имеем* $W^y \cap X \neq \varnothing$.

Доказательство (от противного). Пусть нашлась точка $y \in W_0$, которая не видит ни одной точки из X. Тогда $y \in -X$ (в силу предыдущего следствия $X \in S$).

Корень o видит компоненту X (она непуста), поэтому $o \notin -X$. Получили $o \prec y$.

Далее, конус $\overline{W}$ плотен в W, поэтому найдется $z \in \overline{W}$ такая, что $y \leqslant z$. Так как $y \in W_0$, имеем $y < z$ и $y \notin \overline{W}$, т.е. $y \prec z$.

Снова получили $\prec$-цепь $o \prec y \prec z$. Quod non. $\square$

Пусть конус W_i разбит на k_i компонент $X_i^1, X_i^2, \ldots, X_i^{k_i}$.

В веере F_m каждую максимальную точку a_i размножим в k_i точек $a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^{k_i}$. Получим l-веер F_l, где $l = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ (корень F_l по прежнему обозначен через a_0).

Зададим отображение $f\colon W \to F_l$ по следующему правилу:

$f(W_0) = a_0$,

$f(X_i^s) = a_i^s$ для $s \in [1; k_i]$.

Сюръективность f очевидна.

Монотонность. Пусть $x < y$ в W. Разберем возможные случаи отдельно.

Если $x, y \in W_0$, то $f(x) = a_0 = f(y)$.

Если $x \in W_0$ и $y \in W_i$, то $f(x) = a_0$, $f(y) \in \{a_i^1, \ldots, a_i^{k_i}\}$, поэтому $f(x) < f(y)$.

Если $x, y \in X_i^j$, то $f(x) = f(y)$.

Наконец, в предположении $x < y$ точки x и y не могут принадлежать разным компонентам разбиения конуса $\overline{W}$. В самом деле, если $y \in X_i^j$ и $x \notin X_i^j$, то $x \prec y$ (напомним, что компоненты являются элементами п.б.а. S). При этом $x \in \overline{W}$, $o \notin \overline{W}$. Получили $\prec$-цепь $o \prec x \prec y$, что невозможно.

Конусность. Пусть $f(x) < b$ в веере F_l. Это означает, что $f(x) = a_0$, т.е. $x \in W_0$ и b совпадает с некоторым a_i^s. В силу леммы 2.2.6 точка x видит компоненту X_i^s, т.е. $W \cap X_i^s \neq \varnothing$. Значит, найдется $y > x$ такая, что $f(y) = a_i^s = b$.

Непрерывность. Покажем, что для любого $X \in Con\, F_l$ выполнено $f^{-1}(X) \in S$.

Для конуса $\{a_i^s\}$ имеем $h^{-1}(\{a_i^s\}) = X_i^s \in S$ в силу леммы 2.2.5.

Для конуса F_l имеем $h^{-1}(F_l) = W \in S$.

Превратим веер F_l в $\overline{\varphi}$-веер, перенося раскраску из $(W, S; \overline{\Phi})$:

$\mathrm{col}(a_0) := \mathrm{col}(W_0)$ и $\mathrm{col}(a_i^s) := \mathrm{col}(X_i^s)$.

Корректность этого определения следует из следствия 2.2.3 и из определения отношения равноцветности.

Таким образом получили $\overline{\varphi}$-веер $\mathfrak{F}_l$ и желаемый $p_{\overline{\varphi}}$-морфизм. Теорема 2.2.1 доказана. $\square$

Следствие 2.2.7. *Пусть $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$ — произвольный $L2$-характеристический класс обобщенных $\overline{\varphi}$-шкал. Тогда существует конфинальный класс $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$ $\overline{\varphi}$-вееров такой, что $\boldsymbol{\mathfrak{F}} \overset{\overline{\varphi}}{\preccurlyeq} \boldsymbol{\mathfrak{M}}$.*

Доказательство. Зафиксируем натуральное число m. В силу $L2$-характеристичности класса $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$ найдутся порожденная из некоторой шкалы этого класса корневая подшкала $(W, S; \overline{\Phi})$ и p-морфизм $h\colon (W, S) \twoheadrightarrow F_m$. По основной лемме найдется $\overline{\varphi}$-веер $\mathfrak{F}_l$ (где $m \leqslant l \leqslant m \cdot 2^n$) и $p_{\overline{\varphi}}$-морфизм $(W, S; \overline{\Phi}) \overset{\overline{\varphi}}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{F}_l$.

Натуральный ряд содержит бесконечное число попарно не пересекающихся интервалов вида $[m, m \cdot 2^n]$. Для каждого из этих интервалов найдется $\overline{\varphi}$-веер $\mathfrak{F}_l$, где $l \in [m, m \cdot 2^n]$. Все такие $\mathfrak{F}_l$ и образуют искомый класс $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$. $\square$

В заключение этого параграфа сформулируем следующий результат.

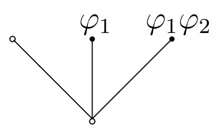
Предложение 2.2.8. *Полные по П.С. Новикову расширения логики $L2$ в языке с несколькими константами характеризуются подходящими конфинальными классами $\overline{\varphi}$-вееров.*

п. 2. Прототипы и классификация полных по Новикову расширений логики $L2$

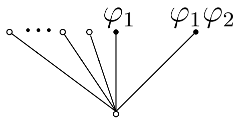
Определение 2.2.1. *Прототипом* $\mathfrak{F}$ будем называть $\overline{\varphi}$-веер $\mathfrak{F} = (F; \Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n)$, все максимальные точки которого имеют разные цвета.

Далее максимальные точки $\overline{\varphi}$-веера $\mathfrak{F}$ будем рассматривать вместе с их цветами.

Пример 2.2.1. *В случае двух констант один из прототипов выглядит так:*



Пусть $\mathcal{F}$ — прототип и a — точка крыши $\overline{\varphi}$-веера $\mathcal{F}$. Обозначим через $\boldsymbol{\mathcal{F}}[\mathcal{F}, a]$ класс $\overline{\varphi}$-вееров, полученный из $\mathcal{F}$ *размножением точки a с сохранением цвета* этой точки. Например, при размножении левой точки в веере из предыдущего примера $\overline{\varphi}$-веера этого класса будут иметь такой вид:



Лемма 2.2.9. *Любой $\overline{\varphi}$-веер $p_{\overline{\varphi}}$-морфно отображается на некоторый прототип.*

Действительно, склеивание всех равноцветных точек крыши в одну является искомым $p_{\overline{\varphi}}$-морфизмом.

Сразу получаем, что в прототипе $\mathcal{F}$ и классах вида $\boldsymbol{\mathcal{F}}[\mathcal{F}, a]$ истинны одни и те же константные формулы. То есть имеет место

Следствие 2.2.10. *Для каждой точки a из крыши веера $\mathcal{F}$ имеет место равенство $\mathcal{L}_c(\mathcal{F}) = \mathcal{L}_c(\boldsymbol{\mathcal{F}}[\mathcal{F}, a])$.*

Для каждой точки a из крыши прототипа введем константную формулу $\mathrm{Col}(a)$, описывающую ее цвет:

$$\mathrm{Col}(a) \rightleftharpoons \bigwedge\{\varphi_j |\ a \Vdash \varphi_j\} \wedge \bigwedge\{\neg\varphi_s |\ a \nVdash \varphi_s\}.$$

Лемма 2.2.11. *Для неизоморфных прототипов $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ имеем $\mathcal{L}_c(\mathcal{F}_1) \neq \mathcal{L}_c(\mathcal{F}_2)$.*

Доказательство. Если крыши прототипов неизоморфны, то в одной из них, например, в крыше веера $\mathcal{F}_1$, найдется точка a, не имеющая цветового аналога в крыше веера $\mathcal{F}_2$. Тогда получаем $\mathcal{F}_2 \models \neg\mathrm{Col}(a)$ и $\mathcal{F}_1 \not\models \neg\mathrm{Col}(a)$. Если же крыши изоморфны, то различны цвета корней этих шкал, то есть найдется константа, истинная в одной из них и не истинная в другой. $\square$

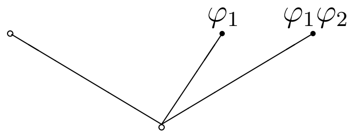
Лемма 2.2.12. *Выполнено соотношение $\mathcal{L}(\boldsymbol{\mathcal{F}}[\mathcal{F}, a]) \neq \mathcal{L}(\boldsymbol{\mathcal{F}}[\mathcal{F}, b])$ для всех a, b — точек крыши веера $\mathcal{F}$, $a \neq b$.*

Доказательство. *Аксиомой неразложимости для точки* a назовем формулу

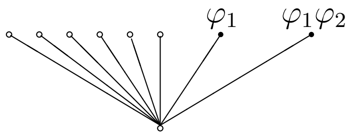
$$Irr(a) \rightleftharpoons (\mathrm{Col}(a) \to (p \vee q)) \to ((\mathrm{Col}(a) \to p) \vee (\mathrm{Col}(a) \to q)).$$

Для двух классов $\boldsymbol{\mathfrak{F}}[\mathcal{F}, a]$ и $\boldsymbol{\mathfrak{F}}[\mathcal{F}, b]$ аксиома неразложимости $Irr(b)$ выполнена в первом классе и не выполнена во втором, и наоборот, $Irr(a)$ выполнена во втором и не выполнена в первом. Таким образом, $\overline{\varphi}$-логики классов, полученных размножением разных точек одного прототипа, различны. $\square$

Пример 2.2.2. *Рассмотрим прототип, один из $\overline{\varphi}$-вееров класса $\boldsymbol{\mathfrak{F}}[\mathcal{F}, a_1]$ и один из $\overline{\varphi}$-вееров класса $\boldsymbol{\mathfrak{F}}[\mathcal{F}, a_2]$:*



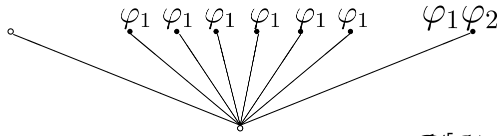
прототип



один из $\overline{\varphi}$-вееров класса $\boldsymbol{\mathfrak{F}}[\mathcal{F}, a_1]$

$\models ((\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \to (p \vee q)) \to;$

$\to ((\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \to p) \vee (\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \to q).$



один из $\overline{\varphi}$-вееров класса $\boldsymbol{\mathfrak{F}}[\mathcal{F}, a_2]$

$\not\models ((\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \to (p \vee q)) \to$

$\to ((\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \to p) \vee (\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \to q)$

Отметим, что для набора из n констант множество всех прототипов конечно, поскольку число всевозможных цветов точек $\overline{\varphi}$-шкалы равно 2^n.

Теорема 2.2.13. *Семейство полных расширений логики $L2$ состоит из всевозможных $\overline{\varphi}$-логик вида $\mathcal{L}(\boldsymbol{\mathfrak{F}}[\mathcal{F}, a])$, где $\mathcal{F}$ — прототип и a — точка крыши веера $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Согласно предложение 2.2.8 полные расширения $L2$ определяются конфинальными классами $\overline{\varphi}$-вееров.

Рассмотрим произвольный конфинальный класс $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_1$ $\overline{\varphi}$-вееров. По лемме 2.2.9 каждый $\overline{\varphi}$-веер этого класса $p_{\overline{\varphi}}$-морфно отображается на некоторый прототип. Поскольку число прототипов конечно, найдется конфинальный подкласс $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_2 \subseteq \boldsymbol{\mathfrak{F}}_1$, в котором все члены имеют один и тот же прототип $\mathcal{F}$.

Теперь работаем с $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_2$: в его прототипе конечное число точек, поэтому для этого класса существует конфинальный подкласс $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_3 \subseteq \boldsymbol{\mathfrak{F}}_2$ и точка a из крыши прототипа $\mathcal{F}$, такие, что $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_3$ содержит шкалы со сколь угодно большими прообразами точки a.

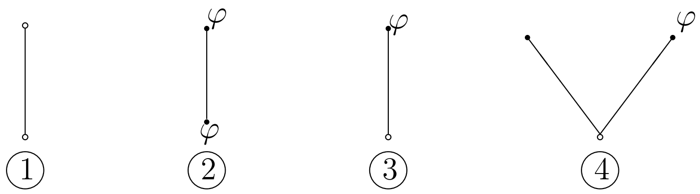
В каждом веере из $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_3$ склеим все равноцветные точки крыши в одну, кроме тех точек, которые являются прообразами точки a. Получим класс $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_4 \overset{\overline{\varphi}}{\preccurlyeq} \boldsymbol{\mathfrak{F}}_3$. Кроме того, имеем $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_4 \subseteq \boldsymbol{\mathfrak{F}}[\mathcal{F}, a]$. С другой стороны $\boldsymbol{\mathfrak{F}}[\mathcal{F}, a] \overset{\overline{\varphi}}{\preccurlyeq} \boldsymbol{\mathfrak{F}}_4$. Поэтому $\mathcal{L}(\boldsymbol{\mathfrak{F}}[\mathcal{F}, a]) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\mathfrak{F}}_4)$.

Таким образом, любая консервативная над $L2$ $\overline{\varphi}$-логика включена в какую-то $\overline{\varphi}$-логику вида $\mathcal{L}(\boldsymbol{\mathfrak{F}}(\mathcal{F}, a))$. Все $\overline{\varphi}$-логики такого вида различны.

Тем самым, классификация полностью завершена (то есть решена проблема-максимум). $\square$

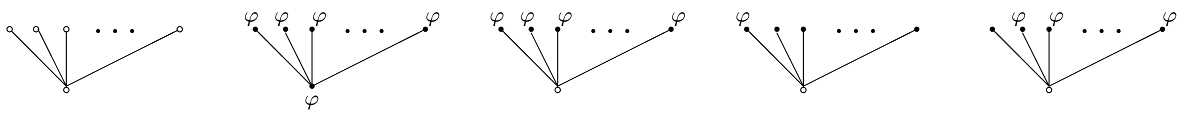
п. 3. Примеры пополнений $L2$ с одной и двумя константами и явные соотношения в них.

Перечислим все попарно неизоморфные прототипы $\overline{\varphi}$-вееров с одной константой:



Отметим, что в работе [23] дано следующее описание полных по Новикову расширений логики $L2$ для случая одной константы: логика $L2$ в языке с одной дополнительной константой имеет ровно пять полных по Новикову расширений $\mathcal{L}^1, \ldots, \mathcal{L}^5$, характеризуемых классами φ-вееров $\boldsymbol{\mathfrak{F}}^1, \ldots, \boldsymbol{\mathfrak{F}}^5$.

Типичные представители этих классов выглядят следующим образом:



На соответствующих φ-шкалах каждого из этих пяти классов определенным образом задано значение константы φ, которое определяет так называемый «цветовой тип класса».

$\boldsymbol{\mathcal{F}}^1 := \{\mathcal{F}^1_n \mid n > 0\}$, где $\mathcal{F}^1_n = (F_n, \varnothing)$. Цветовой тип класса «$\varphi$ — нигде».

$\boldsymbol{\mathcal{F}}^2 := \{\mathcal{F}^2_n \mid n > 0\}$, где $\mathcal{F}^2_n = (F_n, F_n)$. Цветовой тип класса «$\varphi$ — везде».

$\boldsymbol{\mathcal{F}}^3 := \{\mathcal{F}^3_n \mid n > 0\}$, где $\mathcal{F}^3_n = (F_n, \{m_1, \ldots, m_n\})$. Цветовой тип класса «$\varphi$ — во всех точках крыши».

$\boldsymbol{\mathcal{F}}^4 := \{\mathcal{F}^4_n \mid n > 1\}$, где $\mathcal{F}^4_n = (F_n, \{m_1\})$. Цветовой тип класса «$\varphi$ — в единственной точке крыши»;

$\boldsymbol{\mathcal{F}}^5 := \{\mathcal{F}^5_n \mid n > 1\}$, где $\mathcal{F}^5_n = (F_n, \{m_2, \ldots, m_n\})$. Цветовой тип класса «$\varphi$ — во всех точках крыши, кроме одной».

Отметим, что упомянутые пять цветовых типов имеют смысл и для каждого бесконечного φ-веера.

Перечислим все попарно неизоморфные прототипы $\overline{\varphi}$-вееров с двумя константами $\overline{\varphi} = \{\varphi_1,\ \varphi_2\}$:

Во-первых, есть прототип с обеими пустыми константами, изоморфный прототипу 1 из предыдущего параграфа.

Во-вторых, прототипы, изоморфные предыдущим 2, 3, 4, где φ заменено на φ_1 (пустое φ_2).

В-третьих, прототипы, изоморфные предыдущим 2, 3, 4, где φ заменено на φ_2 (пустое φ_1).

Интересны прототипы с обеими непустыми константами:

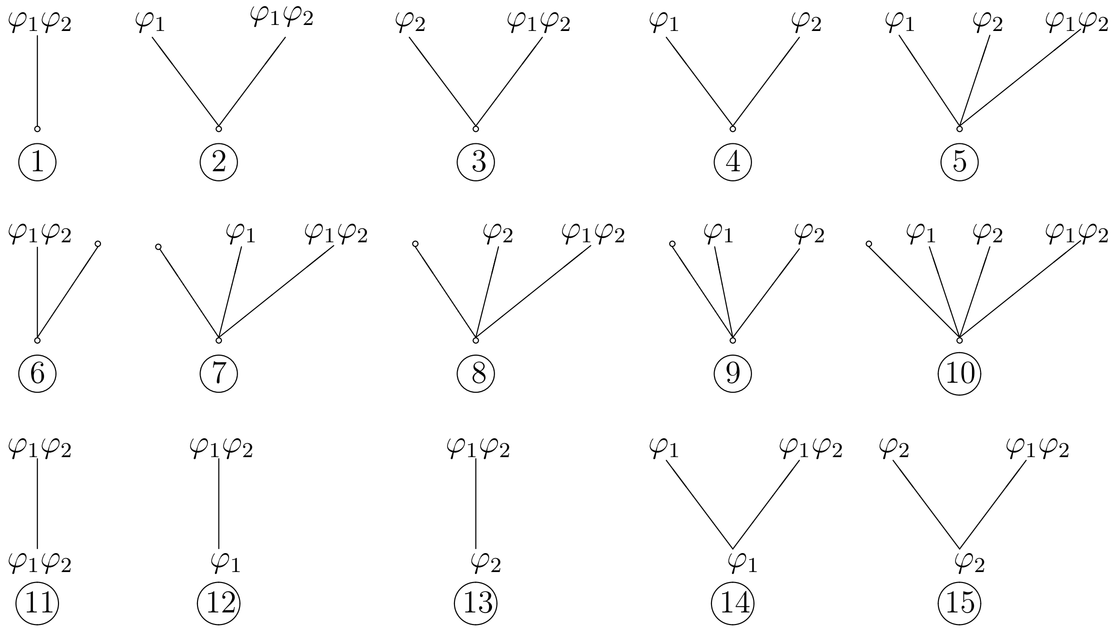
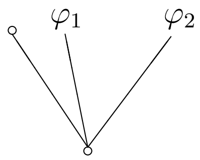


Рис. 2.2

Пример 2.2.3. Если в прототипе № 9 из рисунка 2.2:



«стереть» любое из φ_1, φ_2, то веер сжимается в прототип типа 4 из рисунка предыдущего получить прототип из пункта 1.

Таким образом, для прототипа № 9 не существует явных соотношений.

С помощью этой методики, основываясь предложении 1.3.6, проанализированы прототипы для одной и для двух констант. Результаты приведены в двух нижеследующих таблицах.

Таблица 3.

Явные соотношения для прототипах φ-вееров с одной константы

Прототип №	Соотношение	Прототип №	Соотношение
1	$\varphi \leftrightarrow \mathsf{0}$	3	нет
2	$\varphi \leftrightarrow \mathsf{1}$	4	нет

Таблица 4.

Явные соотношения для двух констант в прототипах φ-вееров с непустыми φ_1 и φ_2

Прототип №	Соотношение	Прототип №	Соотношение
1	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	9	нет
2	$\varphi_1 \leftrightarrow (\varphi_2 \vee \neg\varphi_2)$	10	нет
3	$\varphi_2 \leftrightarrow (\varphi_1 \vee \neg\varphi_1)$	11	$\varphi_1 \leftrightarrow \mathsf{1}$, $\varphi_2 \leftrightarrow \mathsf{1}$
4	$\varphi_1 \leftrightarrow \neg\varphi_2$	12	$\varphi_1 \leftrightarrow \mathsf{1}$
5	нет	13	$\varphi_2 \leftrightarrow \mathsf{1}$
6	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	14	$\varphi_1 \leftrightarrow \mathsf{1}$
7	нет	15	$\varphi_2 \leftrightarrow \mathsf{1}$
8	нет	-	-

2.3. Пополнения $L3$: классификация, примеры с одной константой и явные соотношения в них

В данном параграфе мы рассматриваем расширения логики $L3$ с одной константой.

п. 1. Редукция к конечным φ-даймондам в логике $L3$

Теорема 2.3.1. *Пусть $(W, S; \Phi)$ — φ-шкала с корнем $o \in W$ такая, что $(W, S) \models L3$, D_n — даймонд и $h\colon (W, S) \twoheadrightarrow D_n$. Тогда существуют φ-даймонд $\mathcal{D}_l = (D_l, \Psi)$, для некоторого $l \in [n; 2n+1]$, и p_φ-морфизм $f\colon (W, S; \Phi) \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} (D_l, \Psi)$.*

Пусть $W_r := h^{-1}(\{r\})$ — прообраз корня, $W_i := h^{-1}(\{m_i\})$ для $i \in [1, n]$ — прообразы миддла, $W_t := h^{-1}(\{t\})$ — прообраз топа. Эти прообразы образуют разбиение множества W. Из определения p-морфизма получаем, в частности, что $W_t \in S$ и $W_t \cup W_i \in S$, для $i \in [1, n]$.

Приведем ряд вспомогательных утверждений, сформулированных в условиях теоремы 2.3.1.

Лемма 2.3.2. *Пусть $x \in W$ и $\Phi \neq \varnothing$, тогда*

(1) *$x \in W_r$, если и только если $d(x) = 3$;*

(2) *если $d(x) = 1$, то $x \in W_t \cap \Phi$;*

(3) *если $x \in W_i$ для некоторого $i \in [1, n]$, то $d(x) = 2$;*

(4) *если $x \in W_t$, то $d(x) \leqslant 2$;*

(5) *если $x \in W_t \setminus \Phi$, то $d(x) = 2$.*

Доказательство. **1)** Необходимость следует из определения даймонда, предложения 1.1.5 и предложения 1.2.5. Для доказательства достаточности положим $d(x) = 3$ и $x \notin W_r$. Тогда либо $x \in W_t$, либо $x \in W_i \subset W_i \cup W_t$ для некоторого $i \in [1, n]$. В любом случае, для $o \in W_r$ получаем $o \prec x$ (так как $W_t \in S, W_i \cup W_t \in S$), откуда $d(o) > 3$ (quod non).

2) Так как $\Phi \neq \varnothing$, то $o \notin -\Phi$. В силу $(W, S) \models \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$ имеем $o \in - - \Phi$. Далее, если $x \notin \Phi$, то $x \in - - \Phi$ и найдется $y \in \Phi$ такая, что $y > x$, откуда $y \succ x$, что противоречит условию. Если $d(x) = 1$, то по предложению 1.1.5 $d(h(x)) = 1$, откуда $h(x) = t$ и $x \in W_t$.

3) Если $d(x) = 3$, то $x \in W_r$ по пункту 2.3.2, а если $d(x) = 1$, то $x \in W_t$ по пункту 2.

4) Действительно, если $d(x) = 3$, то из пункта 2.3.2 следует $W_r \cap W_t \neq \varnothing$, что противоречит определениям множеств W_t и W_r.

5) Если $d(x) = 1$, то $x \in \Phi$ по пункту 2, что приводит к противоречию.

$\square$

Лемма 2.3.3. *Если* $W_r \cap \Phi \neq \varnothing$, *то* $\Phi = W$.

Доказательство. Достаточно показать, что $o \in \Phi$. Если $o \notin \Phi$, по условию найдется $x \in W_r \cap \Phi$ такая, что $o \prec x$, откуда $d(o) > 3$ (quod non).

$\square$

Лемма 2.3.4. *Пусть* $x, y \in W$ *и* $\Phi \neq \varnothing$.

(1) *Если* $x \in W_i \cap \Phi$ *и* $y \in W_i \setminus \Phi$ *для* $i \in [1, n]$, *то* x *и* y *несравнимы.*

(2) *Если* $x \in W_i$ *и* $y \in W_t \setminus \Phi$ *для* $i \in [1, n]$, *то* $x \nleqslant y$.

Доказательство. **1)** По условию $x \in \Phi$, $y \notin \Phi$, значит $x \neq y$. Случай $x < y$ невозможен, так как Φ есть конус. Случай $y < x$ также невозможен, так как иначе $y \prec x$, откуда $d(y) > d(x) = 2$, что противоречит пункту 3 леммы 2.3.2.

2) Если $x \leqslant y$, то W_t отделяет x от y, значит $x \prec y$, откуда $d(x) > d(y)$, что противоречит пунктам 3 и 5 леммы 2.3.2. $\square$

Лемма 2.3.5. *Пусть* $x \in W$ *и* $\Phi \neq \varnothing$.

(1) *Если* $x \in W_r$ *и* $W_i \cap \Phi \neq \varnothing$ *для* $i \in [1, n]$, *то* x *видит какую-то точку из* $W_i \cap \Phi$.

(2) *Если* $x \in W_r$ *и* $W_i \setminus \Phi \neq \varnothing$ *для* $i \in [1, n]$, *то* x *видит какую-то точку из* $W_i \setminus \Phi$.

(3) *Если* $x \in W_r$ *и* $W_t \setminus \Phi \neq \varnothing$, *то* x *видит какую-то точку из* $W_t \setminus \Phi$.

(4) *Точка* x *видит какую-то точку из множества* $W_t \cap \Phi$.

Доказательство. **1)** Пусть не существует $y \in W_i \cap \Phi$ такого, что x видит y. Тогда $x \in ((W_i \cup W_t) \cap \Phi) \supset W_t$, однако $o \notin ((W_i \cup W_t) \cap \Phi) \supset W_t$, при этом $((W_i \cup W_t) \cap \Phi) \supset W_t \in S$. Получаем $o \prec x$, откуда $d(o) > 3$, что противоречит пункту 2.3.2 леммы 2.3.2.

2) Пусть не существует $y \in W_i \setminus \Phi$ такого, что x видит y. Тогда $x \in (W_i \cup W_t) \supset (W_t \cup \Phi)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям пункта 1).

3) Пусть не существует $y \in W_t \setminus \Phi$ такого, что x видит y. Тогда для произвольного $z \geqslant x$: если $z \in W_t$, то $z \in \Phi$. Значит $x \in W_t \supset \Phi$, но $o \notin W_t \supset \Phi$, откуда $o \prec x$ (quod non).

4) По свойству конусности h найдется точка $y \geqslant x$ такая, что $y \in W_t$. Если $y \in W_t \cap \Phi$, то требуемое доказано. Если $y \in W_t \setminus \Phi$, то $d(x) = 2$ по пункту 5 леммы 2.3.2, значит найдется точка $z \geqslant y$ такая, что $d(z) = 1$, откуда $z \in W_t \cap \Phi$ по пункту 2 леммы 2.3.2. $\square$

Дальнейшие рассуждения и построения зависят от распределения конуса Φ по компонентам разбиения W, а так же строения W_t.

Если $\Phi = \varnothing$, то «перенос» цвета на D_n производится непосредственно: $f := h$, $\Psi := \varnothing$ и $\mathcal{D}_n := (D_n; \varnothing)$, при этом условие согласованности цветов выполнено: $f^{-1}(\Psi) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing = \Phi$.

Если $W_r \cap \Phi \neq \varnothing$, тогда по лемме 2.3.3 получаем $\Phi = W$, откуда, аналогично предыдущему абзацу, $f := h$, $\Psi := D_n$, $f^{-1}(\Psi) = f^{-1}(D_n) = W = \Phi$.

Далее предположим, что $\Phi \neq \varnothing$ и $W_r \cap \Phi = \varnothing$. Напомним, что в W имеется n прообразов точек миддла. Пусть, без ограничения общности, $W_1, \ldots, W_k$ — частично окрашенные прообразы (если таких прообразов нет, то $k := 0$); $W_{k+1}, \ldots, W_s$ — полностью окрашенные прообразы (если таковых нет, то $s := k$); $W_{s+1}, \ldots, W_n$ — полностью неокрашенные прообразы (если таковых нет, то $s := n$). Прообраз топа может быть либо частично окрашен либо окрашен полностью.

Зададим множество $\{t, m_1, \ldots, m_n, r\} \cup \{m'_1, \ldots, m'_k\} \cup \{m_0\}$ попарно различных элементов. Множество $\{m_0\}$ добавляем, только если $W_t \setminus \Phi \neq \varnothing$. Для всякого $x \in W$ положим

$$f(x) = \begin{cases} t, & x \in W_t \cap \Phi; \\ m_i, & x \in W_i \cap \Phi \text{ для } i \in [1, k]; \\ m'_i, & x \in W_i \setminus \Phi \text{ для } i \in [1, k]; \\ m_i, & x \in W_i \text{ для } i \in [k+1, n]; \\ r, & x \in W_r. \end{cases}$$

Если $W_t \setminus \Phi \neq \varnothing$, то для $x \in W_t \setminus \Phi$ полагаем $f(x) = \{m_0\}$. Ясно, что: $r \in f(W)$; $m_0 \in f(W)$, если $W_t \setminus \Phi \neq \varnothing$; для $i \in [1, k]$ имеем $m_i \in f(W)$, если $W_i \cap \Phi \neq \varnothing$ и $m'_i \in f(W)$, если $W_i \cap \Phi \neq \varnothing$; для $i \in [k+1, n]$ имеем $m_i \in f(W)$, если $W_i \neq \varnothing$; Наконец, $t \in f(W)$ по пункту 4 леммы 2.3.5.

Далее зададим даймонд D_l с множеством точек $f(W)$, где t — вершина, r — корень, а все остальные точки образуют миддл; $l := n + k$, если $W_t \backslash \Phi = \varnothing$; и $l := n + k + 1$, если $W_t \backslash \Phi \neq \varnothing$.

Убедимся, что f является p-морфизмом из (W, S) на D_l.

Сюръективность очевидна.

Монотонность. Предположим, что $x \leqslant y$ для $x, y \in W$. Проведем разбор всех возможных случаев взаимного расположения образов этих точек при отображении f.

Случай, когда $h(x) = h(y)$, исчерпывается следующими вариантами:

(1) $f(x) = f(y)$;

(2) $x \in W_t \setminus \Phi$, $y \in W_t \cap \Phi$;

(3) $x \in W_t \cap \Phi$, $y \in W_t \setminus \Phi$;

(4) $x \in W_i \setminus \Phi$, $y \in W_i \cap \Phi$ для $i \in [1, n]$;

(5) $x \in W_i \cap \Phi$, $y \in W_i \setminus \Phi$ для $i \in [1, n]$.

Случай **1)** тривиален. В случае **2)** имеем: $f(x) = m_0 \leqslant t = f(y)$. Случай **3)** не возможен, поскольку Φ — конус. Случаи **4)** и **5)** не возможны в силу пункта 1 леммы 2.3.4.

Случай, когда $h(x) \neq h(y)$, исчерпывается следующими вариантами:

(1) $x \in W_r$;

(2) $x \in W_t \cap \Phi$;

(3) $h(x) \nleqslant h(y)$;

(4) $x \in W_i$, $y \in W_t \setminus \Phi$.

Случай **1)** тривиален, так как $f(x) = r$ — наименьший элемент в D_l. Аналогично случай **2)**. Случай **3)** не возможен, поскольку h — p-морфизм. Случай **4)** не возможен в силу пункта 2 леммы 2.3.4.

Конусность. Пусть $f(x) \leqslant m$. Докажем, что в этом случае найдется $y \geqslant x$ такая, что $f(y) = m$. Рассмотрим случай, когда $f(x) = r$ и m — точка миддла. Возможны следующие варианты:

(1) $m = m_i$ для $i \in [1, n]$ — существование такого y следует из пункта 1 леммы 2.3.5;

(2) $m = m_i'$ для $i \in [1, n]$ — существование такого y следует из пункта 2 леммы 2.3.5.

(3) $m = m_0$ — существование y следует из пункта 3 леммы 2.3.5.

В случае, когда $m = t$, существование y следует из пункта 4 леммы 2.3.5.

Непрерывность. Достаточно показать, что следующие множества лежат в S : $f^{-1}(D_l)$, $f^{-1}\{t\}$, $f^{-1}\{m_0, t\}$, $f^{-1}\{m_i, t\}$, $f^{-1}\{m_i', t\}$, где $i \in [1, n]$.

Сразу имеем $f^{-1}(D_l) = W \in S$, $f^{-1}(\{t\}) = W_t \cap \Phi \in S$, $f^{-1}(\{m_0, t\}) = W_t \in S$; $f^{-1}(\{m_i, t\}) = W_i \cup W_t \in S$ для $i \in [k+1, n]$. А для $i \in [1, k]$ имеем $f^{-1}(\{m_i, t\}) = (W_i \cap \Phi) \cup (W_t \cap \Phi) = (W_i \cup W_t) \cap \Phi \in S$.

Далее $f^{-1}\{m_i', t\} = (W_i \setminus \Phi) \cup (W_t \cap \Phi)$ для $i \in [1, k]$. Покажем, что $f^{-1}(\{m_i', t\}) = X$, где $X := (W_i \cup W_t) \cap (\Phi \supset W_t) \cap (W_t \supset \Phi)$ и $X \in S$.

Пусть $x \in f^{-1}(\{m_i', t\})$. Если $x \in W_t \cap \Phi$, то ясно, что $x \in X$. Допустим, что $x \in W_i \setminus \Phi$, тогда из $x \in W_i$ следует $x \in W_i \cap W_t$. Если $y \geqslant x$ и $y \in \Phi$, то, с одной стороны, $y \in W_i \cup W_t$, а с другой, по пункту 1 леммы 2.3.4 получаем $y \notin W_i$, значит $y \in W_t$, откуда $x \in \Phi \supset W_t$. Далее, если $z \geqslant x$ и $z \in W_t$, то $z \in \Phi$ по пункту 2 леммы 2.3.4, откуда $x \in W_t \supset \Phi$. Таким образом, $x \in X$.

Наоборот, пусть $x \in X$. Тогда $x \in W_i \cup W_t$. Если $x \in W_t$, тогда из $x \in W_t \supset \Phi$ следует $x \in \Phi$, откуда $x \in W_t \cap \Phi$ и $x \in f^{-1}(\{m_i', t\})$. Пусть теперь $x \in W_i$. Если $x \in \Phi$, то из $x \in (\Phi \supset W_t)$ следует $x \in W_t$, чего быть не может. Значит $x \notin \Phi$, откуда $x \in W_i \setminus \Phi$ и $xf^{-1}(\{m_i', t\})$.

Теперь убедимся, что отображение f является p_φ-морфизмом из $(W, S; \Phi)$ на (D_l, Ψ), где $\Psi := \{t, m_1, \ldots, m_k, m_{k+1}, \ldots, m_s\}$.

Нетрудно проверить, что $\Psi = f(\Phi)$. Нужно убедиться, что $f^{-1}(\Psi) = f^{-1}(f(\Phi)) = \Phi$. Включение $f^{-1}(f(\Phi)) \supseteq \Phi$ является известным теоретико-множественным законом. Проверим обратное включение $f^{-1}(f(\Phi)) \subseteq \Phi$. Если $x \notin \Phi$, то $x \in W_r$ или $W_i \setminus \Phi$ для $i \in [1, k]$ или W_i для $i \in [s+1, n]$ по определению Φ, откуда видно, что $f(x) \notin \Psi = f(\Phi)$, значит $x \notin f^{-1}(\Psi)$.

Таким образом, $f\colon (W, S, \Phi) \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{D}_l$. Теорема доказана.

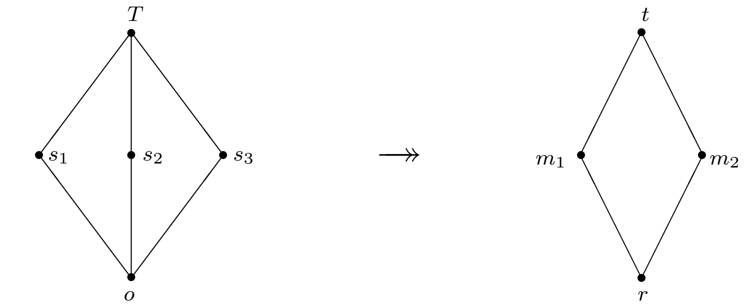
Следствие 2.3.6. *Пусть φ-логика $\mathfrak{L}$ — консервативное расширение $L3$. Тогда найдется конфинальный подкласс $\mathfrak{D}'$ класса $\mathfrak{D}$ всех φ-даймондов такой, что $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{D}')$.*

Доказательство. Пусть φ-логика $\mathfrak{L}$ — консервативное расширение $L3$. По теореме 1.3.2 найдется класс $\mathfrak{M}$ обобщенных φ-шкал такой, что $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{L}$. Тогда, с одной стороны, для класса $\mathfrak{M}' = \{(W, S) \mid (W, S, \Phi) \in \mathfrak{M}\}$ имеем $L(\mathfrak{M}') = L3$, а с другой, по теореме 1.1.3 $L3 = L(\mathfrak{D})$, значит $L(\mathfrak{M}') = L(\mathfrak{D})$, откуда по обратной теореме сравнения $\mathfrak{M}' \succeq \mathfrak{D}$. По теореме 2.3.1 получаем $\mathfrak{M} \overset{\varphi}{\succeq} \mathfrak{D}'$ для некоторого конфинального класса φ-даймондов $\mathfrak{D}'$. Наконец, по прямой теореме сравнения φ-логик получаем $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{D}')$. $\square$

п. 2. Классификация полных по Новикову расширений логики $L3$

Приведем два типичных примера p-морфизмов даймонда D_k на даймонд D_n $(k > n)$.

Пример 2.3.1. *«Склеивание» нескольких точек миддла в одну. Пусть* $k = 3$, $n = 2$:

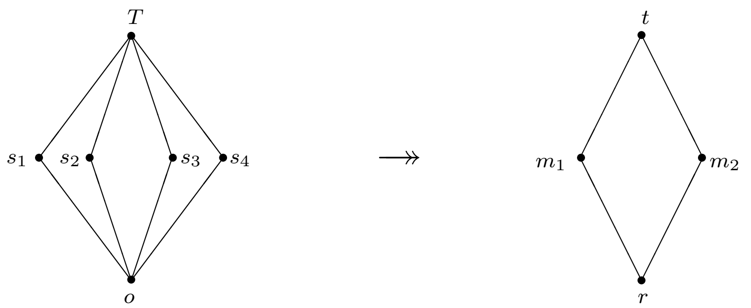


$h(s_1) = h(s_2) = m_1;$

$h(s_3) = m_2;$

$h(T) = t; h(o) = r.$

Пример 2.3.2. *«Подклеивание» нескольких точек миддла к топу. Пусть* $k = 4$, $n = 2$:



$h(s_1) = h(s_2) = h(T) = t;$

$h(s_3) = m_1; h(s_4) = m_2;$

$h(o) = r.$

Введем в рассмотрение пять следующих классов φ-даймондов:

$\mathfrak{D}^1 := \{\mathcal{D}_n^1 | n \in \omega, n > 0\}$, где $\mathcal{D}_n^1 = (D_n, \varnothing)$ — «φ нигде»;

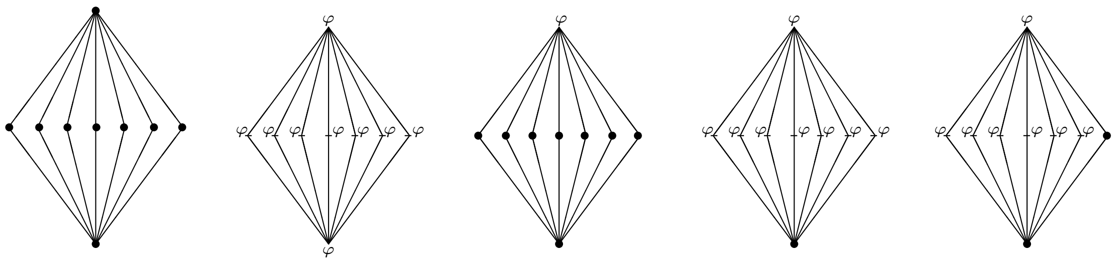
$\mathfrak{D}^2 := \{\mathcal{D}_n^2 | n \in \omega, n > 0\}$, где $\mathcal{D}_n^2 = (D_n, D_n)$ — «φ везде»;

$\mathfrak{D}^3 := \{\mathcal{D}_n^3 | n \in \omega, n > 0\}$, где $\mathcal{D}_n^3 = (D_n, \{t\})$ — «φ в топе»;

$\mathfrak{D}^4 := \{\mathcal{D}_n^4 | n \in \omega, n > 0\}$, где $\mathcal{D}_n^4 = (D_n, D_n \setminus \{r\})$ — «φ везде, кроме корня»;

$\mathfrak{D}^5 := \{\mathcal{D}_n^5 | n \in \omega, n > 1\}$, где $\mathcal{D}_n^5 = (D_n, \{m_1, t\})$ — «φ везде в миддле, кроме единственной точки».

Типичные представители этих классов имеют следующий вид:



1 2 3 4 5

φ-Логики этих классов обозначим $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^4$, $\mathcal{L}^5$ соответственно.

Лемма 2.3.7. *Для каждого $i \in [1,5]$ и произвольного конфинального подкласса $\mathfrak{D}'$ класса $\mathfrak{D}^i$ имеет место равенство $\mathcal{L}^i = \mathcal{L}(\mathfrak{D}')$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}^i$, тогда $\mathcal{L}^i \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{D}')$. С другой стороны, $\mathfrak{D}^i \overset{\varphi}{\succeq} \mathfrak{D}'$, по прямой теореме сравнения φ-логик, имеем $\mathcal{L}(\mathfrak{D}') \subseteq \mathcal{L}^i$. $\square$

Теорема 2.3.8. *Любая консервативная над L3 φ-логика включена в одну из пяти φ-логик $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$, $\mathcal{L}^4$, $\mathcal{L}^5$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.3.2 существует характеристический класс $\mathfrak{M}$ обобщенных φ-шкал такой, что $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathfrak{M})$. Согласно предыдущему разделу, $\mathcal{L}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{D}')$, где $\mathfrak{D}'$ — некоторый конфинальный подкласс класса $\mathfrak{D}$. Дальнейшие рассуждения зависят от того, φ-даймонде каких видов преобладают в классе $\mathfrak{D}'$.

Если $\mathfrak{D}'$ содержит конфинальный подкласс $\mathfrak{D}''$ φ-даймондов типа «φ-нигде», то по прямой теореме сравнения φ-логик $\mathcal{L}(\mathfrak{D}') \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{D}'')$, а по лемме 2.3.7 получим $\mathcal{L}(\mathfrak{D}'') = \mathcal{L}^1$, откуда $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^1$.

Если $\mathfrak{D}'$ содержит конфинальный подкласс φ-даймондов типа «φ-везде», то, аналогичным образом, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^2$.

Если $\mathfrak{D}'$ содержит бесконечный подкласс φ-даймондов типа «φ в топе», то $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^3$.

Если $\mathfrak{D}'$ содержит бесконечный подкласс φ-даймондов типа «φ везде, кроме корня», то $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^4$.

Пусть ни один из предыдущих случаев для $\mathfrak{D}'$ не выполнен, то есть каждый φ-даймонд из $\mathfrak{D}'$ имеет в миддле как окрашенные, так и неокрашенные точки.

Если в $\mathfrak{D}'$ имеются φ-даймонды со сколь угодно длинными неокрашенными частями миддла, образующие конфинальный подкласс $\mathfrak{D}''$, то $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{D}'')$. В каждом φ-даймонде из $\mathfrak{D}''$ окрашенные точки миддла можно «подклеить» к топу (см. пример 2). Получим класс $\mathfrak{D}'''$ типа «φ в топе» такой, что $\mathfrak{D}'' \overset{\varphi}{\succeq} \mathfrak{D}'''$, следовательно, по прямой теореме сравнения φ-логик $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}'') \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{D}''')$. С другой стороны, $\mathfrak{D}'''$ конфинален в $\mathfrak{D}^3$ поэтому по лемме 2.3.7 $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}''') = \mathfrak{L}^3$, следовательно, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}^3$.

Если же в $\mathfrak{D}'$ имеются φ-даймонды со сколь угодно длинными окрашенными частями миддла, образующие конфинальный подкласс $\mathfrak{D}''$, то снова имеет место $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{D}'')$. Далее в каждом из этих φ-даймондов неокрашенные точки миддла можно «склеить» в одну (см. пример 1), получив подкласс $\mathfrak{D}'''$ φ-даймондов типа «φ везде в миддле, кроме одной точки» такой, что $\mathfrak{D}'' \overset{\varphi}{\succeq} \mathfrak{D}'''$, откуда $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}'') \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{D}''')$ и, кроме того, $\mathfrak{D}''' \subseteq \mathfrak{D}^5$. В силу конфинальности класса $\mathfrak{D}'''$ и леммы 2.3.7 получаем, что $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}''') = \mathfrak{L}^5$, откуда $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}^5$. $\square$

Теорема 2.3.9. *φ-Логики $\mathfrak{L}^1$, $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L}^3$, $\mathfrak{L}^4$, $\mathfrak{L}^5$ попарно несравнимы.*

Доказательство. Для доказательства попарной несравнимости пяти φ-логик приведем для любых $i, j \in [1, 5]$ $(i \neq j)$ такую формулу A, что $A \in \mathfrak{L}^i \setminus \mathfrak{L}^j$. Введем в рассмотрение следующие формулы:

$bd_2 = (p_1 \vee (p_1 \to (p_2 \vee \neg p_2)))$; $\mathbf{B} = ((p \to \varphi) \wedge ((\varphi \to p) \to p)) \to (\varphi \vee \neg p)$;

$\mathbf{C} = ((p \wedge q) \to \varphi) \to ((p \to \varphi) \vee (q \to \varphi))$.

В таблице 5 на пересечении i-той строки и j-того столбца указана формула $A \in \mathfrak{L}^i \setminus \mathfrak{L}^j$.

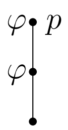
Таблица 5.

–	$\mathfrak{L}^1$	$\mathfrak{L}^1$	$\mathfrak{L}^3$	$\mathfrak{L}^4$	$\mathfrak{L}^5$
$\mathfrak{L}^1$	–	$\neg\varphi$	$\neg\varphi$	$\neg\varphi$	$\neg\varphi$
$\mathfrak{L}^2$	φ	–	φ	φ	φ
$\mathfrak{L}^3$	$\neg\neg\varphi$	$\varphi \to (p \vee \neg p)$	–	$\varphi \to (p \vee \neg p)$	$\varphi \to (p \vee \neg p)$
$\mathfrak{L}^4$	$\neg\neg\varphi$	$\varphi \to bd_2$	$p \vee (p \to \varphi)$	–	$p \vee (p \to \varphi)$
$\mathfrak{L}^5$	$\neg\neg\varphi$	$\varphi \to bd_2$	**C**	**B**	–

Большинство утверждений о формулах, приведенных в таблице, проверяется непосредственно. Наиболее трудное рассуждение связано с формулой **B**. Докажем, что $\mathbf{B} \in \mathfrak{L}^5 \setminus \mathfrak{L}^4$.

Сначала покажем, что $\mathbf{B} \in \mathfrak{L}^5$. Предположим противное. Тогда найдутся некоторый φ-даймонд $(\mathcal{D}^5_n; \Psi)$, где $\mathcal{D}^5_n = \{t, m_1, \ldots, m_n, r\}$; $\Psi = \{t, m_2, \ldots, m_n\}$ и некоторая оценка $v : v(p) = P$, $v(\varphi) = \Psi$. Найдется точка x данного φ-даймонда такая, что $x \in (P \supset \Psi) \cap ((\Psi \supset P) \supset P)$ и $x \notin (\Psi \cup -P)$. Откуда имеем: **(1)** $x \in P \supset \Psi$; **(2)** $x \in (\Psi \supset P) \supset P$; **(3)** $x \notin \Psi$; **(4)** $x \notin -P$. Из (4) получаем $t \in P$, а из (3) получаем, что $x = m_1$ или $x = r$. Ясно, что в любом случае $m_1 \notin P$, потому что в противном случае $m_1 \in \Psi$ по (1), чего быть не может. С другой стороны, для любого $y \geqslant m_1$ имеем $y \notin \Psi$ или $y \in P$, откуда $m_1 \in \Psi \supset P$, значит по (2) получаем $m_1 \in P$, что приводит к противоречию.

Теперь покажем, что $\mathbf{B} \notin \mathfrak{L}^4$. Приведем пример φ-даймонда класса $\boldsymbol{\mathfrak{D}}^4$ с заданной на нем оценкой, в котором формула **B** опровергается, поэтому $\mathbf{B} \notin \mathfrak{L}^4$.



Таким образом, существует ровно пять полных по Новикову расширений с. и. логики $L3$. Более точно, каждая консервативная над $L3$ φ-логика включена в одну из попарно несравнимых φ-логик $\mathfrak{L}^1$, $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L}^3$, $\mathfrak{L}^4$, $\mathfrak{L}^5$. $\square$

Глава 3. Вопросы аксиоматики и алгоритмической разрешимости

В предыдущей главе была дана исчерпывающая классификация полных по Новикову расширений предтабличных суперинтуиционистских логик. В этой главе дается явная аксиоматика гильбертовского типа для каждого из указанных расширений соответствующей предтабличной с. и. логики в языке с одной константой.

3.1. Построение канонической φ-модели

п. 1. Исчисления в расширенном языке

Мы основываются на исчислении $Int(\varphi)$ гильбертовского типа в языке $Fm(\varphi)$. Оно определяется схемами аксиом Int (A1)–(A10) [7]:

(A1) $A \to (B \to A)$;

(A2) $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$;

(A3) $(A \wedge B) \to A$;

(A4) $(A \wedge B) \to B$;

(A5) $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$;

(A6) $A \to (A \vee B)$;

(A7) $B \to (A \vee B)$;

(A8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$;

(A9) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$;

(A10) $\neg A \to (A \to B)$

и правилом вывода *modus ponens*: $A, A \to B \ / \ B$.

Отметим, что в работах [8], [3] доказано, что

$$LC = Int + Lin; \quad L2 = Int + bd_2; \quad L3 = Int + kc + bd_3.$$

Аксиомы Lin, bd_2, bd_3 и kc приведены в § 1.3.

Исчисления $LC(\varphi)$, $L2(\varphi)$, $L3(\varphi)$ задаются аксиомами[1] (A1)–(A10), а так же специфическими аксиомами соответствующего исчисления.

К каждому из рассматриваемых исчислений можно добавлять некоторые формулы в качестве *дополнительных аксиом исчисления.* Исходя из цели данного параграфа, дополнительные аксиомы для каждого из исчислений будем выбирать из следующего списка:

1°. $\neg\varphi$;

2°. φ;

3°. $\neg\neg\varphi$;

4°. $\varphi \to (A \vee \neg A)$;

5°. $\neg\varphi \to (A \vee \neg A)$;

6°. $Irr(\varphi) \rightleftharpoons (\varphi \to (A \vee B)) \to ((\varphi \to A) \vee (\varphi \to B))$
(*неразложимость* φ);

7°. $Irr(\neg\varphi) \rightleftharpoons (\neg\varphi \to (A \vee B)) \to ((\neg\varphi \to A) \vee (\neg\varphi \to B))$
(*неразложимость* $\neg\varphi$);

8°. $\varphi \to bd_2$;

9°. $A \vee (A \to \varphi)$.

Пусть $\mathfrak{I}$ — некоторое исчисление, полученное добавлением в какое-то из исчислений LC, $L2$, $L3$ некоторых схем аксиом из списка 1°– 9°.

В исчислении $\mathfrak{I}$ *выводом из множества гипотез* Γ называется конечная последовательность формул $B_1, B_2, \ldots, B_l$ такая, что для любого i $(1 \leqslant i \leqslant l)$ B_i есть либо аксиома, либо гипотеза из Γ, либо получается из двух предшествующих формул последовательности по правилу вывода modus ponens. Формула A *выводима из* Γ в исчислении $\mathfrak{I}$ (обозначение $\Gamma \vdash_{\mathfrak{I}} A$), если существует вывод из Γ, заканчивающийся формулой A. Если $\varnothing \vdash_{\mathfrak{I}} A$, то говорят, что формула A *выводима в* $\mathfrak{I}$ (обозначение $\vdash_{\mathfrak{I}} A$).

[1] Мы рассматриваем вариант бесподстановочного вывода [10], то есть под *аксиомой* понимаем частный случай схемы аксиом.

Теорема 3.1.1 (о дедукции). $\Gamma, A \vdash_{\mathfrak{J}} B$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{J}} A \to B$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы для Int (см. [4]).

Исчисление $\mathfrak{J}$ называется *противоречивым*, если $\vdash_{\mathfrak{J}} A \wedge \neg A$ для некоторой формулы A. Заметим, что противоречивость $\mathfrak{J}$ равносильна выводимости любой формулы в $\mathfrak{J}$.

Часть этих исчислений, содержащих в том числе аксиомы списка $1^\circ - 9^\circ$ приведенного выше списка, являются противоречивыми, например исчисления, содержащие формулы 1° и 2°.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующее

Предположение. *Рассматриваемое в общем виде исчисление* $\mathfrak{J}$ *предполагается непротиворечивым, то есть не все формулы выводимы.*

Непротиворечивость конкретного исчисления $\mathfrak{J}$ будет устанавливаться путем построения семантики Крипке, в которой будут тождественно истинны все аксиомы $\mathfrak{J}$.

п. 2. Непротиворечивые пары и типы

Пусть $\mathfrak{J}$ — некоторое исчисление. Произвольные подмножества множества $Fm(\varphi)$ обозначим буквами $\Gamma, \Delta, \ldots$. Вместо $\Gamma \cup \{A\}$ для краткости пишем ΓA или Γ, A.

Пусть $\Gamma, \Delta \subseteq Fm(\varphi)$. Упорядоченная пара $(\Gamma; \Delta)$ называется *непротиворечивой (относительно* $\mathfrak{J}$*)*, если для любых конечных подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Gamma$ и $B_1, B_2, \ldots, B_k \in \Delta$ формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$ невыводима в $\mathfrak{J}$; иначе пара называется *противоречивой*. Здесь при $n = 0$ (то есть $\Gamma = \varnothing$) имеется в виду формула $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$, при $k = 0$ (то есть $\Delta = \varnothing$) имеется в виду формула $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$, при $n = k = 0$ — формула $\mathsf{0}$.

Замечание 3.1.1. В силу предположения о непротиворечивости $\mathfrak{I}$ хотя бы одна непротиворечивая относительно $\mathfrak{I}$ пара существует (например пара $(\varnothing; \varnothing)$).

Лемма 3.1.2. *Пусть $(\Gamma; \Delta)$ — непротиворечивая пара и $C \in Fm(\varphi)$, тогда хотя бы одна из пар $(\Gamma, C; \Delta)$, $(\Gamma; \Delta, C)$ непротиворечива.*

По существу, это утверждение является вариантом известного правила сечения [17, с. 379] и доказывается с использованием некоторых аксиом списка 1–10 (см., например, [4]).

Пару $(\Gamma; \Delta)$ будем называть *максимальной*, если для любой формулы A выполнено $A \in \Gamma$ или $A \in \Delta$.

Лемма 3.1.3. *Любую непротиворечивую пару $(\Gamma; \Delta)$ можно дополнить до максимальной непротиворечивой пары $(\Gamma'; \Delta')$ такой, что $\Gamma \subseteq \Gamma'$ $\Delta \subseteq \Delta'$.*

Доказательство. Строим по индукции две возрастающие последовательности Γ_n и Δ_n следующим образом: зафиксируем пересчет $Fm(\varphi) = \{C_1, C_2, \ldots\}$ и положим $\Gamma_0 := \Gamma$, $\Delta_0 := \Delta$. Пара (Γ_0, Δ_0) непротиворечива по условию. Пусть построена непротиворечивая пара (Γ_n, Δ_n). Если пара $(\Gamma_{n+1}, C_{n+1}; \Delta_{n+1})$ непротиворечива, то положим $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n, C_{n+1}$; $\Delta_{n+1} := \Delta_n$; иначе $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n$, $\Delta_{n+1} := \Delta_n, C_{n+1}$. В силу леммы 3.1.2 пара $(\Gamma_{n+1}, \Delta_{n+1})$ тоже непротиворечива. Далее положим $\Gamma' := \bigcup_{n\in\omega} \Gamma_n$, $\Delta' := \bigcup_{n\in\omega} \Delta_n$. Проверим, что пара Γ', Δ' — искомая максимальная пара. Ясно, что $\Gamma \subseteq \Gamma'$, $\Delta \subseteq \Delta'$. Пусть $C \in Fm(\varphi)$; $C = C_n$ при некотором n в зафиксированном выше пересчете. Тогда по построению $C \in \Gamma_{n+1} \subset \Gamma'$ или $C \in \Delta_{n+1} \subset \Delta'$. Наконец, пара Γ', Δ' непротиворечива, так как иначе найдутся индекс s и конечные множества $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \Gamma_s \subset \Gamma'$ и $B_1, B_2, \ldots, B_l \in \Delta_s \subset \Delta'$ такие, что в исчислении $\mathfrak{I}$ выводима формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_l$, что означает противоречивость пары (Γ_s, Δ_s). Коллизия с тем, что все пары, построенные на каждом конечном шаге индукции, являются непротиворечивыми. $\square$

Максимальные непротиворечивые пары будем в дальнейшем называть *типами* (*исчисления* $\mathfrak{I}$) и обозначать $\sigma, \tau, \varkappa, \ldots$, при этом $\sigma = (\sigma^0; \sigma^1)$. Частичный порядок на множестве типов этого исчисления задается по включению левых компонент: $\sigma \leqslant \tau \rightleftharpoons \sigma^0 \subseteq \tau^0$. Рефлексивность и транзитивность этого отношения очевидны, антисимметричность следует из максимальности пар.

Пусть $M = (\{\sigma \mid \sigma \text{ есть тип}\}, \leqslant)$ есть множество типов из $\mathfrak{I}$ с заданным выше отношением порядка. В силу замечания 3.1.1 хотя бы один тип для исчисления $\mathfrak{I}$ существует, то есть $M \neq \varnothing$. Строго говоря, у буквы M должен быть атрибут, указывающий на исчисление $\mathfrak{I}$, но, избегая громоздкости обозначений, мы его опускаем; о каком $\mathfrak{I}$ идет речь, будет далее ясно из контекста.

Множество M называется *канонической* $\mathfrak{I}$*-шкалой.*

Лемма 3.1.4 (свойства типов). *Для любого типа σ и произвольных $A, B \in Fm(\varphi)$ выполнено:*

(1) $A \wedge B \in \sigma^0 \Rightarrow A \in \sigma^0$ *и* $B \in \sigma^0$;

(2) $A \wedge B \in \sigma^1 \Rightarrow A \in \sigma^1$ *или* $B \in \sigma^1$;

(3) $A \vee B \in \sigma^0 \Rightarrow A \in \sigma^0$ *или* $B \in \sigma^0$;

(4) $A \vee B \in \sigma^1 \Rightarrow A \in \sigma^1$ *и* $B \in \sigma^1$;

(5) $A \to B,\ A \in \sigma^0 \Rightarrow B \in \sigma^0$;

(6) $A \to B \in \sigma^1 \Rightarrow \exists \tau \geqslant \sigma : A \in \tau^0 \wedge B \in \tau^1$; *если при этом* $\max_M \sigma$, *то* $A \in \sigma^0$ *и* $B \in \sigma^1$;

(7) $\neg A \in \sigma^0 \implies A \in \sigma^1$;

(8) $\neg A \in \sigma^1 \implies \exists \tau \geqslant \sigma : A \in \tau^0$; *если при этом* $\max_M \sigma$, *то* $A \in \sigma^0$.

Предложение 3.1.5. *Если в исчислении $\mathfrak{I}$ присутствует аксиома $Lin := (A \to B) \vee (B \to A)$, то в шкале M каждый корневой конус является линейно упорядоченным.*

Доказательство. Допустим найдутся типы σ, τ_1, τ_2 такие, что $\sigma \leqslant \tau_1$, $\sigma \leqslant \tau_2$ и $\tau_1 \nleqslant \tau_2$, $\tau_2 \nleqslant \tau_1$. Найдутся формулы A, B такие, что:

$$A \in \tau_1^0,\ B \in \tau_1^1; \quad B \in \tau_2^0,\ A \in \tau_2^1.$$

Тогда $A \to B \in \tau_1^1$, $B \to A \in \tau_2^1$. Значит $A \to B \in \sigma^1$, $B \to A \in \sigma^1$. Тогда $(A \to B) \vee (B \to A) \in \sigma^1$. Противоречие с тем, что формула Lin выводима в $\mathfrak{I}$ (то есть σ оказался противоречивым). $\square$

Предложение 3.1.6. *Если в исчислении $\mathfrak{I}$ присутствует аксиома bd_2, то в шкале M не существует цепей длины более 2.*

Доказательство (от противного). Пусть нашлись $\sigma, \tau, \varkappa \in M$ такие, что $\sigma < \tau < \varkappa$. Так как $\sigma < \tau$, то найдется $A \in \sigma^1$ такая, что $A \in \tau^0$. Так как $\tau < \varkappa$, то найдется $B \in \tau^1$ такая, что $B \in \varkappa^0$: откуда $\neg B \in \varkappa^1$. Тогда $B \in \sigma^1$, откуда $B \vee \neg B \in \sigma^1$. Значит $(A \to (B \vee \neg B)) \in \tau^1$ откуда получаем, что $(A \to (B \vee \neg B)) \in \sigma^1$. По предположению $A \in \sigma^1$, тогда $A \vee (A \to (B \vee \neg B)) \in \sigma^1$. Противоречие с тем, что формула bd_2 — аксиома в $\mathfrak{I}$. $\square$

В такой шкале любой конус, порожденный точкой σ глубины 2, является веером, возможно с бесконечной крышей.

Предложение 3.1.7. *Если в исчислении $\mathfrak{I}$ присутствуют аксиомы bd_3 и kc, то для любого типа $\sigma \in M$ существует единственный тип $\varkappa \geqslant \sigma$ такой, что $\max_M \varkappa$.*

Доказательство. В силу леммы 3.1.6 глубина всех точек в M ограничена числом. Зафиксируем σ. Далее предположим, что существует два различных типа $\varkappa_1 \geq \sigma\,(\max_M \varkappa_1)$ и $\varkappa_2 \geq \sigma\,(\max_M \varkappa_2)$. Тогда найдется формула A такая, что $A \in \varkappa_1^0$, $A \in \varkappa_2^1$. По лемме 3.1.4 $\neg A \in \varkappa_1^1$, в силу $\max_M \varkappa_1$, а значит и $\neg A \in \sigma^1$. Далее $A \in \varkappa_2^0$ в силу $\max_M \varkappa_2$. Тогда имеем $\neg\neg A \in \varkappa_2^1$, а значит $\neg\neg A \in \sigma^1$. В итоге получили, что $\neg\neg A \vee \neg A \in \sigma^1$. Противоречие с тем, что $\neg A \vee \neg\neg A$ аксиома исчисления $\mathfrak{I}$. $\square$

Если в исчислении $\mathcal{J}$ присутствуют аксиомы bd_3 и kc, то в канонической шкале M любой конус, порожденный точкой σ глубины 3, является даймондом, возможно с бесконечным миддлом.

п. 3. Каноническая φ-модель

Зададим *каноническую* $\mathcal{J}$-*φ-шкалу*, определив интерпретацию константы φ следующим образом: $\sigma \in \Phi \;\rightleftharpoons\; \varphi \in \sigma^0$. Тем самым в шкале задан выделенный конус $\Phi = \{\sigma \in M \mid \sigma \in \sigma^0\}$. Заметим, что Φ действительно является конусом, так как это множество замкнуто относительно увеличения: если $\varphi \in \sigma^0$ и $\sigma < \tau$, то $\varphi \in \tau^0$. Полученную φ-шкалу $\mathcal{M} := (M, \Phi)$ называем *канонической φ-шкалой исчисления* $\mathcal{J}$.

Лемма 3.1.8. *Если исчисление $\mathcal{J}$ содержит аксиому $\neg\varphi$, то $\Phi = \varnothing$. Если исчисление содержит аксиому φ, то $\Phi = M$.*

Доказательство. Если $\neg\varphi$ — аксиома $\mathcal{J}$, то $\neg\varphi \in \sigma^0$. По лемме 3.1.4, имеем $\varphi \in \sigma^1$. В силу непротиворечивости типов $\varphi \notin \sigma^0$. Аналогично доказываем для φ. $\square$

Лемма 3.1.9. *Если в исчислении $\mathcal{J}$ есть аксиома $\varphi \to (A \vee \neg A)$, то для любого $\sigma \in M$ из $\varphi \in \sigma^0$ следует $\max_M \sigma$. Если в исчислении $\mathcal{J}$ есть аксиома $\neg\varphi \to (A \vee \neg A)$, то для любого $\sigma \in M$ из $\neg\varphi \in \sigma^0$ следует $\max_M \sigma$.*

Доказательство (от противного). Пусть $\varphi \in \sigma^0$ и при этом σ — не максимальный элемент. Тогда найдутся тип $\tau > \sigma$ такой, что $\varphi \in \tau^0$, и формула A такая, что $A \in \tau^0$ и $A \notin \sigma^0$. Откуда получим, что $A \in \sigma^1$, $\neg A \in \tau^1$ и $\neg A \in \sigma^1$. Получили $\varphi \in \sigma^0$, $A, \neg A \in \sigma^1$. По условию $\varphi \to (A \vee \neg A)$ — аксиома $\mathcal{J}$. Получили, что σ — противоречивый тип (quod non). Для $\neg\varphi$ доказательство аналогично. $\square$

Лемма 3.1.10. *Если исчисление $\mathcal{J}$ содержит аксиому $\neg\neg\varphi$, то для любого $\sigma \in M$ из $\max_M \sigma$ следует $\varphi \in \sigma^0$.*

Доказательство. Пусть σ — максимальный элемент и при этом $\varphi \notin \sigma^0$, то есть $\varphi \in \sigma^1$. Так как $\neg\neg\varphi$ — аксиома $\mathcal{J}$, то $\neg\neg\varphi \in \sigma^0$. Откуда $\neg\varphi \in \sigma^1$ и $\varphi \in \sigma^0$ (quod non). $\square$

Теперь зададим *каноническую оценку* $\Vdash$ переменных из Var на $\mathcal{M}$:

$$\sigma \Vdash p \rightleftharpoons p \in \sigma^0 \, \text{для всех} \, p \in Var.$$

Полученная модель называется *канонической моделью* исчисления $\mathcal{J}$.

Лемма 3.1.11 (семантическая). *Для любой формулы* $A \in Fm(\varphi)$ *и любой* $\sigma \in \mathcal{M}$ *выполнено*

$$A \in \sigma^0 \implies \sigma \Vdash A,$$
$$A \in \sigma^1 \implies \sigma \nVdash A.$$

Доказательство. Докажем индукцией по построению формулы A. Пусть A есть $p \in Var$. Тогда, если $p \in \sigma^0$, то $\sigma \Vdash p$ (по определению канонической оценки); если же $p \in \sigma^1$, то $p \notin \sigma^0$ (в силу непротиворечивости пар) то есть $\sigma \nVdash p$. Аналогично доказываем, если A есть φ. Шаги индукции для составных формул обоснованы леммой 3.1.4. □

В канонической модели истинны все аксиомы исчисления $\mathcal{J}$, но каноническая оценка есть лишь одна из возможных оценок. Для нас важна общезначимость дополнительных аксиом исчисления $\mathcal{J}$, в соответствующей канонической φ, которую будем устанавливать отдельно для каждого исчисления $\mathcal{J}$.

3.2. Аксиоматика полных по Новикову расширений предтабличных суперинтуиционистских логик

п. 1. Аксиоматика φ-расширений логики LC

Для каждой полной по Новикову φ-логики, описанных в параграфе 2.1 главы 2, зададим соответствующее исчисление и цветовое описание соответствующего класса φ-цепей:

$\mathcal{I}_1 = LC(\varphi) + \neg\varphi$ (класс «φ — нигде»);

$\mathcal{I}_2 = LC(\varphi) + \varphi$ (класс «φ — везде»);

$\mathcal{I}_3 = LC(\varphi) + \neg\neg\varphi + \varphi \to (A \vee \neg A)$ (класс «φ — только в топе»).

Теорема 3.2.1 (корректности). *Каждое из исчислений $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ корректно относительно соответствующего класса φ-цепей.*

Доказательство. Общезначимость специфических аксиом исчислений $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ в соответствующем классе φ-цепей очевидна. $\square$

Теорема 3.2.2 (полноты). *Пусть A — произвольная формула. Если A общезначима в классе φ-цепей типа «φ — нигде», то $\mathcal{I}_1 \vdash A$. Если A общезначима в классе φ-цепей типа «φ — везде», то $\mathcal{I}_2 \vdash A$. Если A общезначима в классе φ-цепей типа «φ — только в топе», то $\mathcal{I}_3 \vdash A$.*

Доказательство (от противного). Пусть $\mathcal{I}$ — одно из исчислений $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$. Зафиксируем формулу A, невыводимую в $\mathcal{I}$. Пара $(\varnothing; A)$ непротиворечива, значит, найдется тип $\sigma : A \in \sigma^1$, откуда, по лемме 3.1.11, в канонической $\mathcal{I}$-φ-модели $(\mathcal{M}, v)$ в точке σ имеем $\sigma \not\Vdash A$. Рассмотрим корневую подмодель $\mathcal{M}^\sigma$ с наследуемой оценкой v^σ. В силу теоремы 1.1.4 $\mathcal{M}^\sigma \not\models A$.

Теперь покажем, что для каждого исчисления $\mathcal{I} = \mathcal{I}_k$ для $k \in [1, 3]$, корневая φ-шкала $\mathcal{M}^\sigma$ имеет соответствующий цветовой тип.

Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1$, тогда $\neg\varphi$ есть аксиома исчисления $\mathcal{I}_1$. По лемме 3.1.8, получим $\Phi = \varnothing$, то есть $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — нигде».

Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}_2$, тогда φ есть аксиома исчисления $\mathcal{I}_2$. По лемме 3.1.8, получим $\Phi = \mathcal{M}^\sigma$, то есть $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — везде».

Пусть $\mathcal{J} = \mathcal{J}_3$. Так как $\neg\neg\varphi$ — аксиома исчисления $\mathcal{J}_3$, тогда найдется $\tau \geqslant \sigma$ такой, что $\varphi \in \tau^0$.

Покажем, что $\varkappa \not\Vdash \varphi$ для любого $\varkappa < \tau$. Допустим, что $\varphi \in \varkappa^0$. Найдется формула A такая, что $A \in \varkappa^1$ и $A \in \tau^0$. Из аксиомы $\varphi \to (A \vee \neg A)$ получаем $(A \vee \neg A) \in \varkappa^0$. По лемме 3.1.4, имеем $A \in \varkappa^0$ или $\neg A \in \varkappa^0$, но первый случай невозможен в силу непротиворечивости типа $\varkappa$, во втором случае $\neg A \in \tau^0$, что тоже невозможно в силу непротиворечивости типа τ.

Поэтому $\varphi \notin \sigma^0$, то есть $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — только в топе». $\square$

п. 2. Аксиоматика φ-расширений логики $L2$

Для каждой полной по Новикову φ-логики $\mathcal{L}^1, \ldots, \mathcal{L}^5$, описанных в § 2.2 главы 2, зададим соответствующее исчисление:

$\mathcal{J}_1 = L2(\varphi) + \neg\varphi$;

$\mathcal{J}_2 = L2(\varphi) + \varphi$;

$\mathcal{J}_3 = L2(\varphi) + \neg\neg\varphi + \varphi \to (A \vee \neg A)$;

$\mathcal{J}_4 = L2(\varphi) + \varphi \to (A \vee \neg A) + \neg\varphi \to (A \vee \neg A) + (\varphi \to (A \vee B)) \to ((\varphi \to A) \vee (\varphi \to B))$;

$\mathcal{J}_5 = L2(\varphi) + \varphi \to (A \vee \neg A) + \neg\varphi \to (A \vee \neg A) + (\neg\varphi \to (A \vee B)) \to ((\neg\varphi \to A) \vee (\neg\varphi \to B))$.

Теорема 3.2.3 (корректности). *Каждое из исчислений $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_5$ корректно относительно соответствующего класса φ-вееров $\boldsymbol{\mathcal{F}}^1, \ldots, \boldsymbol{\mathcal{F}}^5$, введенных в п.3 §2.2 .*

Доказательство состоит в проверке общезначимости специфических аксиом исчислений $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_5$ в соответствующем классе φ-вееров. Покажем для примера общезначимость аксиомы неразложимости $Irr(\varphi)$ в классе $\boldsymbol{\mathcal{F}}^4$. Рассмотрим φ-веер $\mathcal{F}^4_n = \{o, m_1, \ldots, m_n\}$ с $\Phi = \{m_1\}$ и некоторой оценкой на нем. Пусть найдется $x \in \mathcal{F}^4_n$ такая, что $x \Vdash \varphi \to (p \vee q)$ и $x \not\Vdash (\varphi \to p) \vee (\varphi \to q)$. Отсюда найдется $y \geqslant x$ такая, что $y \Vdash \varphi$ и $y \not\Vdash p$. Аналогично найдется $z \geqslant x$

такой, что $z \Vdash \varphi$ и $z \nVdash q$. В силу строения φ-веера $\mathcal{F}_n^4$ получим $y = z = m_1$, то есть $m_1 \Vdash \varphi, m_1 \nVdash p$ и $m_1 \nVdash q$, что противоречит $x \Vdash \varphi \to p \vee q$, так как $m_1 \geqslant x$. $\square$

Лемма 3.2.4. (1) $\mathcal{J}_4 \vdash (\varphi \to A) \vee (\varphi \to \neg A)$*;*

(2) $\mathcal{J}_5 \vdash (\neg\varphi \to A) \vee (\neg\varphi \to \neg A)$*.*

Доказательство. (1) В формуле $(\varphi \to (A \vee B)) \to ((\varphi \to A) \vee (\varphi \to B))$ положим $B := \neg A$. Тогда $(\varphi \to (A \vee \neg A)) \to ((\varphi \to A) \vee (\varphi \to \neg A))$, $\varphi \to (A \vee \neg A)$ — аксиома $\mathcal{J}_4$ и $(\varphi \to A) \vee (\varphi \to \neg A)$ выводима в $\mathcal{J}_4$. (2) Доказывается аналогично. $\square$

Лемма 3.2.5. *Пусть* $\mathcal{J} = \mathcal{J}_4$*. Тогда для любого* σ *существует не более одного* $\tau \geqslant \sigma$ *такого, что* $\varphi \in \tau^0$*.*

Доказательство (от противного, с применением пункта 1 леммы 3.2.4). Пусть $\sigma \leqslant \tau$, $\sigma \leqslant \varkappa$, $\tau \neq \varkappa$. В силу разности типов τ и $\varkappa$ найдется формула A и возможны следующие два распределения формул $A, \neg A, \varphi$:

$$A,\ \varphi \in \tau^0,\ \neg A \in \tau^1; \quad \neg A,\ \varphi \in \varkappa^0,\ A \in \varkappa^1.$$

Пусть $\varphi \to A \in \sigma^0$, тогда $\varphi \to A \in \varkappa^0$. Так как $\varphi \in \varkappa^0$, то и $A \in \varkappa^0$; при этом $\neg A \in \varkappa^0$. Откуда получаем, что $\varkappa$ — противоречивый тип, следовательно, $\varphi \to A \in \sigma^1$.

Допустим, что $\varphi \to \neg A \in \sigma^0$, тогда $\varphi \to \neg A \in \tau^0$. Так как $\varphi \in \tau^0$, то и $\neg A \in \tau^0$; при этом $A \in \tau^0$. Откуда получаем, что τ — противоречивый тип, следовательно, $\varphi \to \neg A \in \sigma^1$. В итоге получили, что $(\varphi \to A) \vee (\varphi \to \neg A) \in \sigma^1$. Противоречие с тем, что формула $(\varphi \to A) \vee$ $\vee (\varphi \to \neg A)$ выводима в $\mathcal{J}_4$. $\square$

Лемма 3.2.6. *Пусть* $\mathcal{J} = \mathcal{J}_5$*. Тогда для любого* σ *существует не более одного* $\tau \geqslant \sigma$ *такого, что* $\neg\varphi \in \tau^0$*.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.2.5.

Далее докажем полноту каждого из исчислений $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_5$ относительно соответствующих классов φ-вееров $\boldsymbol{\mathcal{F}}^1 \ldots, \boldsymbol{\mathcal{F}}^5$.

Теорема 3.2.7 (полноты). *Пусть A — произвольная формула. Для каждого $k \in [1,5]$ выполнено следующее: если $\boldsymbol{\mathcal{F}}^k \models A$, то $\mathcal{I}_k \vdash A$.*

Доказательство (от противного). Пусть $\mathcal{I}$ — одно из исчислений $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_5$. Зафиксируем формулу A, невыводимую в $\mathcal{I}$. Пара $(\varnothing; A)$ непротиворечива, значит, найдется тип $\sigma : A \in \sigma^1$, откуда, по лемме 3.1.11, в канонической $\mathcal{I}$-φ-модели $(\mathcal{M}, v)$ в точке σ имеем $\sigma \not\Vdash A$. Рассмотрим корневую подмодель $\mathcal{M}^\sigma$ с наследуемой оценкой v^σ. В силу теоремы 1.1.4 $\mathcal{M}^\sigma \not\models A$.

Теперь покажем, что для каждого исчисления $\mathcal{I} = \mathcal{I}_k$ для $k \in [1,5]$, корневая φ-шкала $\mathcal{M}^\sigma$ имеет цветовой тип $\boldsymbol{\mathcal{F}}^k$.

Если $\max_{\mathcal{M}} \sigma$, то в $\mathcal{I}_1$ цветовой тип точки σ — «φ — нигде» — соответствует максимальным точкам вееров класса «φ — нигде». В $\mathcal{I}_2$ цветовой тип точки σ — «φ–везде» — соответствует максимальным точкам вееров класса «φ — везде». Для $\mathcal{I}_3$ цветовой тип точки σ — «φ — во всех точках крыши» — соответствует максимальным точкам вееров класса «φ — во всех точках крыши». Для $\mathcal{I}_4$ и $\mathcal{I}_5$ цветовой тип точки σ не важен, так как в классах $\boldsymbol{\mathcal{F}}^4$ и $\boldsymbol{\mathcal{F}}^5$ есть φ-веера как с окрашенными, так и с неокрашенными точками крыши.

Пусть σ — точка глубины 2. Тогда $\mathcal{M}^\sigma$ является веером, возможно с бесконечным числом точек крыши.

Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1$, тогда $\neg\varphi$ есть аксиома исчисления $\mathcal{I}_1$. По лемме 3.1.8, получим $\Phi = \varnothing$, то есть $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — нигде».

Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}_2$, тогда φ есть аксиома исчисления $\mathcal{I}_2$. По лемме 3.1.8, получим $\Phi = \mathcal{M}^\sigma$, то есть $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — везде».

Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}_3$. Пусть $\tau > \sigma$, тогда $\max_{\mathcal{M}} \tau$ в силу аксиомы bd_2, отсюда, по лемме 3.1.10, получим $\varphi \in \tau^0$. Так как $\neg\neg\varphi$ — аксиома исчисления $\mathcal{I}_3$, то $\neg\neg\varphi \in \tau^0$ и, по лемме 3.1.4, получим $\neg\varphi \in \tau^1$, то есть крыша φ-веера $\mathcal{M}^\sigma$ полностью окрашена.

Покажем, что $\sigma \not\Vdash \varphi$. Предположим противное. Пусть $\varphi \in \sigma^0$. Тогда найдутся тип $\tau > \sigma$ и формула A такая, что $A \in \sigma^1$ и $A \in \tau^0$. Из аксиомы

$\varphi \to (A \vee \neg A)$ получаем $(A \vee \neg A) \in \sigma^0$. По лемме 3.1.4, имеем $A \in \sigma^0$ или $\neg A \in \sigma^0$, но первый случай невозможен в силу непротиворечивости типа σ, во втором случае $\neg A \in \tau^0$, что тоже невозможно в силу непротиворечивости типа τ. Поэтому $\varphi \notin \sigma^0$, то есть $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — во всех точках крыши».

Пусть $\mathcal{J} = \mathcal{J}_4$. По лемме 3.2.5, существует не более одной точки $\tau \geqslant \sigma$ такой, что $\varphi \in \tau^0$. Убедимся, что хотя бы одна такая точка существует. Поскольку $d(\sigma) = 2$, то найдутся $\tau > \sigma$ и формула A такая, что $A \in \sigma^1$ и $A \in \tau^0$. Из аксиомы $(\varphi \vee \neg\varphi) \to (A \vee \neg A)$ получаем, что $\varphi \vee \neg\varphi \in \sigma^1$ и $\varphi \in \sigma^0$. По лемме 3.1.4, из $\neg\varphi \in \sigma^1$ получим, что найдется $\varkappa > \sigma$ такой, что $\varphi \in \varkappa^0$. Откуда $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — в единственной точке крыши».

Пусть $\mathcal{J} = \mathcal{J}_5$. По лемме 3.2.6, существует не более одного $\tau \geqslant \sigma$ такого, что $\neg\varphi \in \tau^0$. Все дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям предыдущего абзаца. $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — во всех точках крыши, кроме одной».

Таким образом, для каждого из пяти исчислений $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_5$, если $\mathcal{J}_k \nvdash A$, существует φ-веер соответствующего цветового типа, в котором формула A опровергается.

В каждом из пяти рассматриваемых случаев $\mathcal{M}^\sigma$ может иметь бесконечное число точек крыши. Сделаем переход от бесконечного веера к конечному, применив известный метод фильтрации [30] и отвлекаясь от конкретного вида полученной модели $\mathcal{M}^\sigma$.

Рассмотрим бесконечный φ-веер $\mathcal{W} = (W, \Phi)$ с корнем o одного из пяти рассматриваемых типов с заданной на нем оценкой v переменных из Var. Зафиксируем конечный набор переменных $\overline{p} = \{p_1, \ldots, p_s\}$.

Зададим на множестве точек крыши $\mathcal{W}$ отношение эквивалентности $x \sim y$:

$$x \in \Phi \Leftrightarrow y \in \Phi; \tag{3.1}$$

$$x \Vdash_v p_i \Leftrightarrow y \Vdash_v p_i \text{ для всех } p_i \in \overline{p}. \tag{3.2}$$

Свойства рефлексивности, транзитивности, симметричности выполнены. Тогда крыша φ-веера $\mathcal{W}$ разбивается не более чем на 2^{s+1} классов эквивалентности $W_1, \ldots, W_l$. Далее строим конечный веер $F_l = \{r, \omega_1, \ldots, \omega_l\}$, на котором задаем выделенный конус Ψ следующим образом:

$$w_k \in \Psi \rightleftharpoons \forall x \in W_k : x \in \Phi \, (\Leftrightarrow \exists x \in W_k : x \in \Phi) \text{ для } k \in [1, l]; \tag{3.3}$$

$$r \in \Psi \rightleftharpoons o \in \Phi. \tag{3.4}$$

Далее зададим оценку u переменных списка $\overline{p}$ на φ-веере $(\mathcal{F}_l; \Psi)$ следующим образом:

$$\omega_k \Vdash_u p_i \rightleftharpoons \forall x \in W_k : x \Vdash_v p_i \, (\Leftrightarrow \exists x \in W_k : x \Vdash_v p_i) \text{ для всех } p_i \in \overline{p}; \tag{3.5}$$

$$r \Vdash_u p_i \rightleftharpoons o \Vdash_v p_i \text{ для всех } p_i \in \overline{p}. \tag{3.6}$$

Лемма 3.2.8. *Для каждой формулы $B(\varphi; \overline{p})$ выполнено:*

(1) $\omega_k \Vdash_u B \Leftrightarrow \forall x \in W_k : v \Vdash_v B \Leftrightarrow \exists x \in W_k : x \Vdash_v B$ *для* $k \in [1, l]$;

(2) $r \Vdash_u B \Leftrightarrow o \Vdash_v B$.

Доказательство проводим индукцией по построению формулы $B(\varphi; \overline{p})$. Для константы φ и переменных списка $\overline{p}$ оба утверждения вытекают непосредственно из определений (3.1)–(3.6).

Проведем шаг индукции для формулы вида $B_1 \to B_2$, предполагая оба утверждения леммы для B_1 и B_2 верными.

Докажем (1). Пусть $w_k \Vdash_u B_1 \to B_2$. В силу максимальности точки w_k получаем $w_k \nVdash_u B_1$ или $w_k \Vdash_u B_2$. По предположению индукции $\forall x \in W_k : x \nVdash_v B_1$ или $\forall x \in x \Vdash_v B_2$. Отсюда $\forall x \in W_k : x \Vdash_v B_1 \to B_2$.

Импликация $\forall x \in W_k : x \Vdash_v B_1 \to B_2 \Rightarrow \exists x \in W_k : x \Vdash_v B_1 \to B_2$ очевидна.

Пусть $\exists x \in W_k : x \Vdash_v B_1 \to B_2$. Для подразумеваемой точки $x \in W_k$ в силу ее максимальности имеем $x \nVdash_v B_1$ или $x \Vdash_v B_2$. Из первого получаем $\neg\forall x \in W_k : x \Vdash_v B_1$ (в силу законов внешней логики), из второго, по индукционному предположению, получаем $\forall x \in W_k : x \Vdash_v B_2$. По предположению индукции имеем $w_k \nVdash_u B_1$ или $w_k \Vdash_u B_2$, из чего, в силу максимальности w_k, вытекает $w_k \Vdash_u B_1 \to B_2$.

Докажем (2). Пусть $r \nVdash_u B_1 \to B_2$. Найдется $z \geqslant r : z \Vdash_u B_1$ и $z \nVdash_u B_2$.

Если $z = r$, то, по предположению индукции (утверждение 2), получаем $o \Vdash_v B_1$ и $o \nVdash_v B_2$, то есть $o \nVdash_v B_1 \to B_2$. Если $z > r$, то $z = w_k$ для некоторого k и $w_k \Vdash_u B_1$ и $w_k \nVdash_u B_2$. В силу предположения индукции (утверждение 1) получаем $\forall x \in W_k : x \Vdash_v B_1$ и $\exists x \in W_k : x \nVdash_v B_2$. Отсюда $\exists x \in W_k : x \Vdash_v B_1$ и $x \nVdash_v B_2$, поэтому $o \nVdash_v B_1 \to B_2$.

В обратную сторону аналогично. □

Заметим также, что если исходный φ-веер $\mathcal{W}$ относится к одному из указанных пяти типов, то и полученный из него φ-веер $\mathcal{F}_l$ имеет тот же цветовой тип.

Завершим доказательство теоремы о полноте. Пусть формула A не содержит других переменных, кроме как из списка $\overline{p}$, и невыводима в исчислении $\mathcal{I}_k$. По описанному выше, существует φ-веер k-го цветового типа, опровергающий A. По лемме 3.2.8, существует конечный веер цветового типа k, опровергающий A, то есть $\mathfrak{F}^k \not\models A$, что и требовалось доказать. □

п. 3. Аксиоматика φ-расширений логики $L3$

Для полных по Новикову φ-логики $\mathcal{L}^1, \ldots, \mathcal{L}^4$, описанных в § 2.3 главы 2, зададим соответствующее исчисление:

$\mathcal{I}_1 = L3(\varphi) + \neg\varphi$;

$\mathcal{I}_2 = L3(\varphi) + \varphi$;

$\mathcal{I}_3 = L3(\varphi) + \neg\neg\varphi + \varphi \to (A \vee \neg A)$;

$\mathcal{I}_4 = L3(\varphi) + \neg\neg\varphi + \varphi \to bd_2 + (A \vee (A \to \varphi))$.

Теорема 3.2.9 (корректности). *Каждое из исчислений $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_4$ корректно относительно соответствующего класса φ-даймондов $\mathfrak{D}^1, \ldots, \mathfrak{D}^4$.*

Доказательство. Общезначимость специфических аксиом исчислений $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_4$ в соответствующем классе φ-даймондов очевидна.

Лемма 3.2.10. *Если исчисление $\mathcal{J}$ содержит аксиому $\varphi \to bd_2$, то любая окрашенная точка $\sigma \in M$ имеет глубину $\leqslant 2$.*

Доказательство (от противного).

Пусть $\varphi \in \sigma^0$ и $d(\sigma) > 2$. Тогда найдутся $\sigma, \tau, \varkappa \in M$ такие, что $\sigma < \tau < \varkappa$ и формулы A, B такие, что $A \in \sigma^1$ и $A \in \tau^0$; $B \in \tau^1$ такая, что $B \in \varkappa^0$. Рассуждая далее так же как и в предложении 3.1.6 получим, что $\varphi \to bd_2 \in \sigma^1$ (quod non). $\square$

Лемма 3.2.11. *Если исчисление $\mathcal{J}$ содержит аксиому $A \vee (A \to \varphi)$, то любая точка, расположенная выше корня окрашена.*

Доказательство (от противного). Пусть $d(\sigma) = 3$. Тогда найдутся $A \in \sigma^1$ и $\tau > \sigma$ такие, что $\varphi \in \tau^1$ и $A \in \tau^0$. Откуда $A \to \varphi \in \tau^1$ и, значит $A \vee (A \to \varphi) \in \sigma^1$ (quod non). $\square$

Теорема 3.2.12 (полноты). *Пусть A — произвольная формула. Для каждого $k \in [1, 4]$ выполнено следующее: если $\mathfrak{D}^k \models A$, то $\mathcal{J}_k \vdash A$.*

Доказательство (от противного). Пусть $\mathcal{J}$ — одно из исчислений $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_4$. Зафиксируем формулу A, невыводимую в $\mathcal{J}$. Пара $(\varnothing; A)$ непротиворечива, значит, найдется тип $\sigma : A \in \sigma^1$, откуда, по лемме 3.1.11, в канонической $\mathcal{J}$-φ-модели $(\mathcal{M}, v)$ в точке σ имеем $\sigma \nVdash A$. Рассмотрим корневую подмодель $\mathcal{M}^\sigma$ с наследуемой оценкой v^σ. В силу теоремы 1.1.4 $\mathcal{M}^\sigma \not\models A$.

Теперь покажем, что для каждого исчисления $\mathcal{J} = \mathcal{J}_k$ для $k \in [1, 4]$, корневая φ-шкала $\mathcal{M}^\sigma$ имеет цветовой тип $\mathfrak{D}^k$.

Пусть $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1$, тогда $\neg\varphi$ есть аксиома исчисления $\mathcal{J}_1$. По лемме 3.1.8, получим $\Phi = \varnothing$, то есть $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — нигде».

Пусть $\mathcal{J} = \mathcal{J}_2$, тогда φ есть аксиома исчисления $\mathcal{J}_2$. По лемме 3.1.8, получим $\Phi = \mathcal{M}^\sigma$, то есть $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — везде».

Пусть $\mathcal{J} = \mathcal{J}_3$. Так как $\neg\neg\varphi$ — аксиома исчисления $\mathcal{J}_3$, то найдется $\tau \geqslant \sigma$ такой, что $\varphi \in \tau^0$ и, по лемме 3.1.4, получим $\neg\varphi \in \tau^1$, то есть топ φ-даймонда $\mathcal{M}^\sigma$ окрашен.

Покажем, что для любого $\varkappa < \tau$ выполнено $\varphi \in \varkappa^1$. Предположим противное, то есть, что $\varphi \in \varkappa^0$. Так как $\varphi \to (A \vee \neg A)$ — аксиома $\mathcal{I}_3$, то получаем, что $\max_M \varkappa$ — противоречие. Таким образом, $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — в топе».

Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}_4$. Леммы 3.2.11, 3.2.10 гарантируют, что только корень не окрашен, поэтому $\mathcal{M}^\sigma$ имеет тип «φ — везде кроме корня».

Таким образом, для каждого из пяти исчислений $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_4$, если $\mathcal{I}_k \nvdash A$, существует φ-даймонд соответствующего цветового типа, в котором формула A опровергается.

В каждом из четырех рассматриваемых случаев $\mathcal{M}^\sigma$ может иметь бесконечное число точек миддла. Сделаем переход от бесконечного даймонда к конечному, применив известный метод фильтрации [30] и отвлекаясь от конкретного вида полученной модели $\mathcal{M}^\sigma$.

Рассмотрим бесконечный φ-даймонд $\mathcal{W} = (W, \Phi)$ с корнем o одного из пяти рассматриваемых типов с заданной на нем оценкой v переменных из Var. Зафиксируем конечный набор переменных $\overline{p} = \{p_1, \ldots, p_s\}$.

Зададим на множестве точек миддла $\mathcal{W}$ отношение эквивалентности $x \sim y$:

$$x \in \Phi \Leftrightarrow y \in \Phi; \tag{3.7}$$

$$x \Vdash_v p_i \Leftrightarrow y \Vdash_v p_i \text{ для всех } p_i \in \overline{p}. \tag{3.8}$$

Свойства рефлексивности, транзитивности, симметричности выполнены. Тогда миддл φ-даймонда $\mathcal{W}$ разбивается не более чем на 2^{s+1} классов эквивалентности $W_1, \ldots, W_l$. Строим конечный даймонд $D_l = \{r, \omega_1, \ldots, \omega_l, t\}$, на котором задаем выделенный конус Ψ следующим образом:

$$t \in \Psi \rightleftharpoons \mathcal{I} = \mathcal{I}_k \text{ для } k \in [2, 4]; \tag{3.9}$$

$$w_k \in \Psi \rightleftharpoons \forall x \in W_k : x \in \Phi \, (\Leftrightarrow \exists x \in W_k : x \in \Phi) \text{ для } k \in [1, l]; \tag{3.10}$$

$$r \in \Psi \rightleftharpoons o \in \Phi. \tag{3.11}$$

Далее зададим оценку u переменных списка $\overline{p}$ на φ-даймонде $(\mathcal{D}_l;\Psi)$ следующим образом:

$$t \Vdash_u p_i \rightleftharpoons v(p_i) \neq \varnothing \tag{3.12}$$

$$\omega_k \Vdash_u p_i \rightleftharpoons \forall x \in W_k : x \Vdash_v p_i\, (\Leftrightarrow \exists x \in W_k : x \Vdash_v p_i) \text{ для всех } p_i \in \overline{p}; \tag{3.13}$$

$$r \Vdash_u p_i \rightleftharpoons o \Vdash_v p_i \text{ для всех } p_i \in \overline{p}. \tag{3.14}$$

Лемма 3.2.13. *Для каждой формулы $B(\varphi;\overline{p})$ выполнено:*

(1) $t \Vdash_u B \Leftrightarrow v(B) \neq \varnothing$.

(2) $\omega_k \Vdash_u B \Leftrightarrow \forall x \in W_k : v \Vdash_v B \Leftrightarrow \exists x \in W_k : x \Vdash_v B$ *для* $k \in [1,l]$;

(3) $r \Vdash_u B \Leftrightarrow o \Vdash_v B$.

Доказательство утверждений (1), (2), (3) проведем одновременно индукцией по построению формулы $B(\varphi;\overline{p})$.

Для константы φ и переменных списка $\overline{p}$ все три утверждения вытекают непосредственно из определений (3.7)–(3.14).

Проведем шаг индукции для формулы вида $B_1 \to B_2$, предполагая все три утверждения леммы для B_1 и B_2 верными.

Докажем (1). Пусть $t \Vdash_u (B_1 \to B_2)$. В силу максимальности точки t получаем $t \nVdash_u B_1$ или $t \Vdash_u B_2$. Тогда $v(B_1) = \varnothing$ или $v(B_2) \neq \varnothing$, а значит имеет место $v(B_1) \supset v(B_2) \neq \varnothing$. Откуда заключаем, что $v(B_1 \to B_2) \neq \varnothing$.

Докажем (2). Пусть $w_k \nVdash_u B_1 \to B_2$. Тогда найдется $z \in W_k$ такая, что $z \geqslant w_k$ и $z \Vdash_v B_1$, $z \nVdash B_2$.

Если $z = w_k$ то для некоторого k имеем $w_k \Vdash_u B_1$ и $w_k \nVdash_u B_2$. В силу предположения индукции (утверждение 2), получаем $\forall x \in W_k : x \Vdash_v B_1$ и $\exists x \in W_k : x \nVdash_v B_2$. Отсюда $\exists x \in W_k : x \Vdash_v B_1$ и $x \nVdash_v B_2$, поэтому $w_k \nVdash_v B_1 \to B_2$.

Если $z = t$, то, в силу предположения индукции (утверждение 2), получаем $v(B_1) \neq \varnothing$, $v(B_2) = \varnothing$. Следовательно $v(B_1 \to B_2) = \varnothing$.

Докажем (3). Пусть $r \nVdash_u B_1 \to B_2$. Найдется $z \geqslant r : z \Vdash_u B_1$ и $z \nVdash_u B_2$.

Если $z = r$, то, по предположению индукции (утверждение 3), получаем $o \Vdash_v B_1$ и $o \nVdash_v B_2$, то есть $o \nVdash_v B_1 \to B_2$.

Пусть $z > r$, тогда $z = w_k$ или $z = t$. Если $z = w_k$, то для некоторого k имеем $w_k \Vdash_u B_1$ и $w_k \nVdash_u B_2$. В силу предположения индукции (утверждение 2), получаем $\forall x \in W_k : x \Vdash_v B_1$ и $\exists x \in W_k : x \nVdash_v B_2$. Отсюда $\exists x \in W_k : x \Vdash_v B_1$ и $x \nVdash_v B_2$, поэтому $o \nVdash_v B_1 \to B_2$. Если $z = t$, то, в силу предположения индукции (утверждение 1), получаем $v(B_1) \neq \varnothing$, $v(B_2) = \varnothing$. Следовательно $v(B_1 \to B_2) = \varnothing$.

В обратную сторону аналогично. $\square$

Заметим также, что если исходный φ-даймонд $\mathcal{W}$ относится к одному из указанных пяти цветовых типов, то и полученный из него конечный φ-даймонд $\mathcal{D}_l$ имеет тот же цветовой тип.

Завершим доказательство теоремы о полноте. Пусть формула A не содержит других переменных, кроме как из списка $\overline{p}$, и невыводима в исчислении $\mathcal{I}_k$. По описанному выше, существует (возможно бесконечный) φ-даймонд k-го цветового типа, опровергающий A. По лемме 3.2.13, существует конечный φ-даймонд цветового типа k, опровергающий A, то есть $\mathfrak{D}^k \not\models A$, что и требовалось доказать. $\square$

3.3. О некоторых алгоритмических вопросах

В этом параграфе мы рассматриваем вопросы разрешимости и алгоритмической проблемы распознавания консервативности полных по Новикову расширений предтабличных суперинтуиционистских логик.

Определение 3.3.1. φ-Логика L называется *разрешимой*, если существует алгоритм, который по произвольной формуле $A \in Fm(\varphi)$ определяет, $A \in L$ или $A \notin \mathcal{L}$.

Определение 3.3.2. Под проблемой *распознавания консервативности* будем понимать следующую массовую проблему:

Пусть L — одна из логик LC, $L2$, $L3$. Пусть $A \in Fm(\varphi)$;

является ли φ-логика $L + A$ консервативным расширением логики L?

В главе 2 было показано, что каждое пополнение L финитно аппроксимируемо, так как характеризуется подходящими классами конечных φ-цепей, φ-вееров и φ-даймондов соответственно. В § 3.2 настоящей главы получена конечная аксиоматизация каждого пополнения соответствующей логики $L = LC$ и $L = L2$, а также первых 4-х пополнений логики $L3$.

Известен критерий Харропа (см. [16], теорема 16.13): если логика имеет конечную аксиоматизацию и финитно аппроксимируема, то она разрешима.

Теорема 3.3.1. *Все полные по Новикову расширения логик LC, $L2$ в языке $Fm(\varphi)$ являются разрешимы; расширения $\mathfrak{L}^1$, $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L}^3$, $\mathfrak{L}^4$ для логики $L3$ разрешимы.*

Пятое пополнение логики $L3$ является разрешимым, так как посредством метода фильтрации для данной формулы можно ограничить число точек миддла, то есть свести проверку общезначимости данной формулы в классе $\mathfrak{D}^5$ к проверке тождественной истинности в конечной числе φ-даймондов.

Теорема 3.3.2. *Проблема распознавания консервативности расширений предтабличной суперинтуиционистской логики L в языке $Fm(\varphi)$ алгоритмически разрешима.*

Доказательство. Логика $L + A$ консервативна над $L \Leftrightarrow L + A$ включена в какую-то из полных над L φ-логик. Таковых конечное число (три, пять, пять для $LC, L2, L3$ соответственно). Вопрос принадлежности формулы A решается алгоритмически, поскольку каждая из полных φ-логик разрешима. $\square$

Список литературы

1. Григолия, Р.Ш. Свободные S4.3-алгебры с конечным числом образующих / Р.Ш. Григолия // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. — М.: Наука, 1983. — С. 281–287.
2. Ершов, Ю.Л. Математическая логика / Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Наука, 1987. — 336 с.
3. Захарьящев, М.В. Синтаксис и семантика суперинтуиционистских логик/ М.В. Захарьящев // Алгебра и логика. — 1989. — Т. 28, № 4. — С. 402–429.
4. Клини, С.К. Введение в метаматематику / С.К. Клини. — М.: Иностранная литература, 1957. — 526 с.
5. Кузнецов, А.В. Некоторые свойства структуры многообразий псевдобулевых алгебр / А.В. Кузнецов // XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Резюме сообщ. и докл. Кишинев. — 1971. — С. 255-256.
6. Кузнецов, А.В. О суперинтуиционистских логиках и финитной аппроксимируемости / А.В. Кузнецов, В.Я. Герчиу // Доклады АН СССР. — 1970. — Т. 195, № 5. — С. 1029–1032. (Исправление опечаток: там же. — 1971. — Т. 199, №6. — С. 1222.)
7. Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. — М.: Физматлит, 2004. — 256 с.
8. Максимова, Л.Л. Предтабличные суперинтуиционистские логики / Л.Л. Максимова // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 5. — С. 558–570.
9. Максимова, Л.Л. Алгоритмы распознавания табличности и предтабличности в расширениях интуиционистского исчисления / Л.Л. Максимова, П.А. Шрайнер // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. — 2006. — Т. 6, № 3. — С. 49—58.

10. Новиков, П.С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической / П.С. Новиков. — М. Наука, 1977. — 328 с.
11. Плиско, В.Е. Интуиционистская логика /В.Е.Плиско, В.Х. Хаханян. — М.: Изд-во при мех.-мат. ф-те МГУ, 2009. — 159 с.
12. Расева, Е. Математика метаматематики / Е. Расева, Р. Сикорский. — М.: Наука, 1972. — 592 с.
13. Скворцов, Д.П. Об интуиционистском исчислении высказываний с дополнительной логической связкой / Д.П. Скворцов // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. — М.: Наука, 1983. — С. 154–173.
14. Сметанич, Я.С. О полноте исчисления высказываний с дополнительной операцией от одной переменной / Я.С. Сметанич // Труды Московского математического общества. — 1960. Т. 9. — С. 357–371.
15. Сметанич, Я.С. Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией / Я.С. Сметанич // Доклады АН СССР. — 1961. Т. 139, № 2. — С. 309–312.
16. Чагров, А.В. Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик / А.В.Чагров // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5: сб. статей под ред. С.В. Яблонского. — М. : Физматлит. 1994. — С. 62–108.
17. Шютте, К. Полные системы модальной и интуиционистской логики // Модальная логика / Р. Фейс. — М.: Наука, 1974. — С. 324–421.
18. Эсакиа, Л.Л. Алгебры Гейтинга / Л.Л. Эсакиа. — Тбилиси: Мецниереба, 1985. — 104 с.
19. Янков, В.А. Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений / В.А. Янков // Доклады АН СССР. — 1968. Т. 181, № 1. — С. 33–34.

20. Яшин, А.Д. Новая регулярная константа в интуиционистской логике высказываний / А.Д. Яшин // Сиб. матем. журнал. — 1996. Т. 37, № 6. — С. 1413–1432.

21. Яшин, А.Д. О новой константе в интуиционистской логике высказываний / А.Д. Яшин // Фундаментальная и прикладная математика. — 1999. Т. 5, № 3. — С. 903–926.

22. Яшин, А.Д. Классификация полных по Новикову логик с дополнительными логическими константами / А.Д. Яшин // Алгебра и логика. — 2003. Т. 42, № 3. — С. 366–383.

23. Яшин, А.Д. О новых константах в двух предтабличных суперинтуиционистских логиках / А.Д. Яшин // Алгебра и логика. — 2011. Т. 50, № 2. — С. 246–267.

24. Bezhanishvili, N. Intuitionistic logic / N. Bezhanishvili, D. de Jongh http://www.illc.uva.nl/Research/Publications/Reports/PP-2006-25.text.pdf

25. Chagrov, A. Modal logic / A. Chagrov, M. Zakharyaschev. Oxford: Oxford University Press. 1997. 605 p.

26. Dubashi, D.P. On decidable varieties of Heyting algebras / D.P. Dubashi // Journal Symb. Logic. 1992. Vol. 57, № 3. P. 988–991.

27. Dummett, M.A. A propositional calculus with denumerable matrix / M.A. Dummett // Journal Symb. Log. 1959. Vol. 24, № 2. P. 97–106.

28. Dunn, J.M. Algebraic completeness results for Dummet's LC and its extensions / J.M. Dunn, R.K. Meyer // Zeitschr. math. Log. und Grundl. Math. 1971. Vol. 17. P. 225–230.

29. Fitting, M. Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing. / M. Fitting. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics North-Holland Publishing Company: Amsterdam. 1969.

30. Gabbay, D. M. On some new intuitionistic propositional connectives. I / D. M. Gabbay // Stud. Log. 1977. Vol. 36, № 1-2. P. 127–139.

31. Goldblatt, R.I. Metamathematics of modal logics. Part I / R.I. Goldblatt // Rep. on Math. Logic. 1976. V. 6. P. 41-78.

32. Goldblatt, R.I. Metamathematics of modal logics. Part II / R.I. Goldblatt // Rep. on Math. Logic. 1976. Vol. 7. P. 21-52.

33. Hosoi, T. On intermediate logics, I / T. Hosoi // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1. 1967. № 14. P. 293–312.

34. Hosoi, T. The intermediate logics of the second slice / T. Hosoi, H. Ono // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1. 1970. №. 17. P. 457–461.

35. Kirk, R.E. A characterization of the classes of finite tree frames which are adequate for the intuitionistic logic / R.E. Kirk // Zeitschr. Math. Logic und Grundl. Math. 1980. Vol. 26, № 6. P. 497–501 .

36. Kolmogoroff, A.N. Zur Deutung der Intuitionistischen Logik / A.N. Kolmogoroff. Math. Ztschr. 1932. Bd. 35. P. 58-65 (рус. пер.: К толкованию интуиционистской логики. — В кн.: Колмогоров, А.Н. Избр. тр. Математика и механика/ А.Н. Колмогоров. — М.: Наука, 1985. — С. 142–148).

37. Ono, H. Kripke models and intermediate logics / H. Ono // Publs. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 1970. Vol. 6, № 71. P. 461–476.

38. Yashin, A.D. New intuitionistic logical constants and Novikov completeness / A.D. Yashin // Stud. Log. 1999. Vol. 63. № 2. P. 151–180.

39. Zakharyaschev, M. Advanced Modal Logic / M. Zakharyaschev, F. Wolter, and A. Chagrov // D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.). Handbook of Philosophical Logic. 2nd ed. Vol. 3. Kluver Academic Publishers, 2001. P. 83-266.

Работы автора по теме диссертации

40. Яшин, А.Д. Новые константы в суперинтуиционистской логике $L2$ / А.Д. Яшин, А.К. Кощеева // Матем. заметки. — 2013. Т. 94, № 6. — С. 918–932.
41. Кощеева, А.К. Аксиоматика полных по П.С. Новикову расширений суперинтуиционистской логики $L2$ в языке с одной дополнительной константой / А.К. Кощеева // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. — 2014. — № 3. — С. 28–39.
42. Кощеева, А.К. Новая константа в суперинтуиционистской логике $L3$ / А.К. Кощеева // Алгебра и логика. — 2015 Т. 54, № 1. — С. 94–113.
43. Яшин, А.Д. Новые константы в суперинтуиционистской логике $L2$ / А.Д. Яшин, А.К. Кощеева // Седьмые Смирновские чтения по логике: материалы междунар. науч. конф., Москва, 22–24 июня 2011 г. — М.: Соврем. тетради, 2011. — С. 43–45.
44. Кощеева, А.К. Новая константа в суперинтуиционистской логике $L2$: аксиоматика / А.К. Кощеева // Алгебра и математическая логика: материалы междунар. конф., посвящ. 100-летию со д. р. проф. В.В. Морозова, и молод. шк. конф. «Совр. пробл. алг. и матем. логики»; Казань, 25–30 сент. 2011 г.— Казань: КФУ, 2011. — С. 117–119.
45. Кощеева, А.К. Новая константа в суперинтуиционистской логике $L3$ / А.К. Кощеева // Международная конференция «Мальцевские чтения», посв. 60-летию со д.р. С.С. Гончарова, 11–14 октября 2011 г.: тез. докл. — Новосибирск: ИМ СО РАН. 2011. — С. 137.
46. Кощеева, А.К. Об алгоритмической проблеме распознавания консервативных расширений суперинтуиционистской логики $L2$ с дополнительными константами / А.К. Кощеева // Технол. информ-и проф. деят-ти (в науке, обр. и пром-ти) – ТИПД-2011: тр. 3 Всерос. науч. конф. с междунар. участием, Ижевск, 8–12 ноября 2011 г. — Ижевск: Удмурт. ун-т, 2011. Т. 1. — С. 49–50.

47. Кощеева, А.К. Аксиоматика полных по П.С. Новикову расширений суперинтуиционистской логики $L2$ в языке с одной дополнительной константой/ А.К. Кощеева // Электрон. сб. тез. докл. междунар. конф. «Мальцевские чтения», 12–16 ноября 2012 г. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2012. — С. 151.
48. Кощеева, А.К. Новые константы в суперинтуиционистской логике $L3$ / А.К. Кощеева // Алгебра и логика: теория и приложения: тез. докл. междунар. конф., посвящ. памяти В.П. Шункова, Красноярск, 21–27 июля 2013 г. — Красноярск: Сиб. фед. ун-т, 2013. — С. 77–78.
49. Кощеева, А.К. Аксиоматика полных по П.С. Новикову расширений суперинтуиционистской логики $L1$ в языке с несколькими дополнительными константами / А.К. Кощеева // Электрон. сб. тез. докл. междунар. конф. «Мальцевские чтения», Новосибирск, 11–15 ноября 2013 г. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2013. — С. 50.
50. Кощеева, А.К. Об алгоритмической проблеме распознавания консервативных расширений предтабличных суперинтуиционистских логик с дополнительными константами / А.К. Кощеева // Материалы междунар. конф. «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», (г. Казань, 2–6 июня 2014 г.) и сопут. мол. летн. шк. «Вычислимость и вычислимые структуры». — Казань: КФУ, 2014. — С. 86.