Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Сибирский государственный университет науки
и технологий имени академика М. Ф. Решетнёва»

На правах рукописи

Егорушкин Олег Игоревич

РАЗРЕШИМОСТЬ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГРАММАТИК И СИНТАКСИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОНТЕКСТНО — СВОБОДНЫХ ЯЗЫКОВ НА ОСНОВЕ КОММУТАТИВНЫХ ОБРАЗОВ

05.13.17 — Теоретические основы информатики

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
доктор физико–математических
наук, профессор А. М. Попов

Красноярск — 2018

Оглавление

Введение

0.1 Проблематика исследования

В теории формальных языков и грамматик исходным объектом является алфавит, т. е. множество символов $z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_m$. Над этими символами определена некоммутативная операция умножения (конкатенации) и коммутативная операция формальной суммы; алфавит вместе с этими операциями образует полукольцо [28, 96, 99, 100, 110].

Символы $x_1, \dots, x_m$ называются терминальными символами и интерпретируются как словарь формального языка, а символы $z_1, \dots, z_n$ называются нетерминальными и нужны для задания совокупности грамматических правил (грамматики), которые порождают язык. По этим правилам определяются «правильные» мономы от терминальных символов $x_1, \dots, x_m$, которые интерпретируются как правильные предложения языка [24, 25, 28, 110].

Определим также коммутативную операцию умножения символов на комплексные числа, тогда можно рассматривать символьные многочлены и формальные степенные ряды (ФСР) с числовыми коэффициентами. Формальным языком является такой ФСР, членами которого являются все правильные мономы, определенные данной грамматикой [28, 110].

Отметим важное обстоятельство: порождающую грамматику для основных классов формальных языков можно записать в виде некоторой системы символьных полиномиальных уравнений.

Так например, для наиболее значимого с точки зрения приложений класса контекстно-свободных языков (кс-языков) определяющую систему символьных полиномиальных уравнений можно записать в виде системы полиномиальных уравнений специального вида, называемой (собственной) системой уравнений Хомского — Щутценберже

$$z_j = Q_j(z, x), j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где правые части удовлетворяют естественным условиям: $Q_j(0, 0) = 0$ и многочлены $Q_j(z, 0)$ не содержат линейных членов [17, 24, 25, 28, 110].

Эта система решается относительно символов $(z_1, \ldots, z_n) = z$ в виде ФСР, зависящих от символов $(x_1, \ldots, x_m) = x$:

$$z = z(x) = (z_1(x), \ldots, z_n(x)).$$

При этом ФСР $z_1(x)$ и является формальным языком, который задаётся этой грамматикой [24, 25, 28, 110].

Особая роль символа z_1 предопределяется тем, что он рассматривается как начальный символ, из которого при помощи правил подстановки выводятся все правильные мономы данного кс-языка (в естественных языках такие мономы интерпретируются как предложения).

Прикладная значимость кс-языков состоит также том, что этому классу принадлежит большинство языков программирования, что является их фундаментальным свойством. По этой причине можно рассматривать программы, написанные на языках программирования, как мономы кс-языков [1, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 16, 59].

Кс-языки были введены в 50-х годах прошлого века выдающимся американским лингвистом Ноамом Хомским, заложившим основы теории этих языков, которая адекватно описывает как естественные языки, так и языки программирования [85—91].

Теория кс-языков начала интенсивно развиваться, о чём свидетельствуют, например, работы [4, 8, 12, 13, 14, 17, 30, 57, 58, 83, 84, 95, 101, 102]; так, значительный вклад в эту теорию внесли работы [20—26]. Отметим её связь с теорией автоматов [14, 51, 99].

Активные исследования различных классов формальных языков продолжались в последующие годы, проводятся они и в настоящее время [12, 53, 54, 65—72, 74, 75, 103—106, 111, 112].

Итак, приведённая выше система полиномиальных уравнений Хомского — Щутценберже получается из системы грамматических правил следующим образом. По определению, кс-язык задаётся совокупностью правил подстановки (совокупностью продукций), которая называется (порождающей) грамматикой кс-языка.

Пусть, как отмечалось выше, $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ — конечное множество терминальных символов языка, например, слов, операторов языка программирования и т. д., а $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ — множество нетерминальных символов, необходимых для задания грамматики языка, при этом z_1 — начальный символ (аксиома), означающий начало вывода программы (предложения). Над алфавитом $X \cup Z$, как уже отмечалось, определены операции конкатенации и формальной суммы, а также умножения на комплексные числа, удобные тем, что образуют алгебраически замкнутое поле.

Рассмотрим кс-язык, порожденный грамматикой, заданной в виде совокупности продукций (правил вывода):

$$z_j \to q_{j1}(z,x), \ldots, z_j \to q_{jq_j}(z,x),\ j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $q_{jk}(z,x)$ — мономы от некоммутативных символов над алфавитом $X \cup Y$, интерпретируемые как предложения [28].

Заметим, что левая часть каждого правила подстановки содержит единственный символ z_j и применяется независимо от контекста, окружения этого символа, а потому грамматика называется контекстно-свободной грамматикой [28].

Используя совокупность правил подстановки, заменяющих один символ на целый моном, Н. Хомский смоделировал возможность включения в тексты на естественных языках или языках программирования новых текстовых фрагментов, что отражает возможность итерирования в языках сложноподчинённых и сложносочиненных предложений или программ, содержащих вложенные подпрограммы.

Далее, кс-грамматике в виде совокупности продукций сопоставляется система полиномиальных символьных уравнений Хомского — Щутценберже (1), где

$$Q_j(z,x) = q_{j1}(z,x) + \ldots + q_{jq_j}(z,x),$$

называемая также грамматикой в форме Хомского — Щутценберже [110].

Система уравнений (1) называют собственной, если соответствующая ей грамматика не содержит правил подстановки вида

$$z_j \to z_k,$$

$$z_j \to e,$$

где e — пустая цепочка, играющая роль единицы относительно конкатенации мономов [110]. Понятно, что порождающая способность грамматики из-за отсутствия этих правил подстановки не уменьшится, поскольку любой кс-язык можно задать без их использования.

Обозначим $\langle r, w\rangle$ числовой коэффициент, с которым моном w от некоммутативных переменных входит в ФСР или многочлен s. Тогда для собственной системы уравнений Хомского — Щутценберже выполнены условия на коэффициенты системы:

$$\langle Q_j, e\rangle = 0,$$

$$\langle Q_j, z_k\rangle = 0,$$

$$j, k = 1, \ldots, n.$$

Благодаря такой структуре многочленов $Q_j(z, x)$, систему уравнений (1) можно решить методом последовательных приближений, который состоит в следующем.

Получая итерации символьного решения системы

$$z_j^{(k+1)} = Q_j(z^{(k)}, x),$$

$$z^{(k)} = (z_1^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)}),$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

$$z^{(0)} = (0, \ldots, 0),$$

можно получить решение в виде ФСР, в частности, первую компоненту z_1 как кс-язык:

$$z_1 = \sum_i \langle z_1, w_i \rangle \cdot w_i.$$

Мономы w_i от $x_1, \ldots, x_m$ представляют собой всевозможные правильные предложения этого кс-языка.

Нетрудно видеть, что коэффициент $\langle z_1, w_i \rangle$ равен числу выводов монома w_i при неограниченном применении грамматических правил подстановки (любое число раз в любом порядке) [110].

Следующий класс языков, для которых грамматику можно записать в виде системы полиномиальных уравнений — линейные, или регулярные, языки, которые образуют подмножество множества кс-языков.

Для таких языков все многочлены системы (1) являются линейными относительно символов $z_j,\ j = 1, \ldots, n$; в частности, рассматриваются леволинейные и праволинейные языки.

В качестве простого примера собственной системы уравнений (системы Хомского — Щутценберже) рассмотрим систему уравнений

$$z_1 = x_1 z_1 + x_1 z_2,$$

$$z_2 = x_2 z_2 x_3 + x_2 x_3.$$

Метод последовательных приближений даёт следующие итерации решения системы:

$$z^{(0)} = (0, 0),$$

$$z^{(1)} = (0;\ x_2 x_3),$$

$$z^{(2)} = (x_1 x_2 x_3;\ x_2^2 x_3^2 + x_2 x_3),$$

$$z^{(3)} = (x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_2^2 + x_1 x_2 x_3;\ x_2^2 x_3^2 + x_2^3 x_3^3),$$

$$\ldots$$

Отсюда легко видеть, что первая компонента решения этой системы представляется рядом

$$z_1 = s = \sum_{i,j \geq 1} x_1^i x_2^j x_3^j,$$

рассматриваемый кс-язык над словарем $\{x_1, x_2, x_3\}$ состоит из предложений, имеющих вид

$$x_1^i x_2^j x_3^j,\ i,j \geq 1.$$

Ещё один класс формальных языков с полиномиальной грамматикой образуют важные языки непосредственно составляющих [18, 20, **?**, 61, 63, 80, 81].

Для этих языков определяющую систему уравнений можно записать в виде:

$$m_j(z,x) = M_j(z,x),$$

$$j = 1, \ldots, k,$$

где $m_j(z,x)$ — моном, а $M_j(z,x)$ — многочлен [28]. Очевидно, что класс языков непосредственно составляющих содержит класс кс-языков.

Наконец, отметим языки в нормальной форме Грейбах, которые также можно задать полиномиальной грамматикой в виде системы символьных полиномиальных уравнений второй степени, вводя при необходимости новые терминальные и нетерминальные символы [18, 28].

Таким образом, можно сделать вывод о том, что грамматики, порождающие основные классы формальных языков, могут быть записаны в виде системы полиномиальных уравнений с некоммутативными переменными

$$P_j(z, x) = 0,\ P_j(0, 0) = 0,\ j = 1, \ldots, k, \tag{3}$$

которые решаются относительно символов $(z_1, \ldots, z_n) = z$ в виде ФСР, зависящих от символов $(x_1, \ldots, x_m) = x$.

Становится понятным, что можно изучать свойства различных формальных языков из различных классов, исследуя систему полиномиальных уравнений с некоммутативными символами для различных типов многочленов $P_j(z, x)$, входящих в систему (3), а также изучая общие свойства полиномиальных систем.

По этой причине целесообразно исследовать формальные языки, заданные системой произвольных полиномиальных уравнений (3), назвав такие языки *полиномиальными* языками, а систему уравнений (3) *полиномиальной* грамматикой; полиномиальные языки обобщают важные классы формальных языков.

Разработав методы исследования полиномиальных грамматик и языков, можно использовать их для изучения известных классов формальных языков, конкретизируя вид многочленов, входящих в систему полиномиальных уравнений (3).

Однако, важно отметить, что свойства некоммутативной системы уравнений (3) изучены мало, несмотря на её важность в теории формальных языков и грамматик. Так, в частном случае системы уравнений Хомского — Щутценберже (1) известно, что она имеет единственное решение $z = (z_1(x), \ldots, z_n(x))$ в виде ФСР, но в общем случае для системы уравнений (3) условия разрешимости неизвестны.

Трудности исследования системы уравнений связаны с отсутствием подходящих методов, поскольку исключению неизвестных препятствует как некоммутативность умножения, так и отсутствие операции деления.

Известно, что в теории формальных языков и грамматик важную роль традиционно играют методы алгебры и дискретной математики, в частности теории графов, которые позволили получить ряд важных результатов, составляющих основу этой теории. Например, анализ деревьев вывода мономов помогает исследовать структуру формальных языков.

Однако, эти методы не вполне приспособлены для исследования систем полиномиальных уравнений, определяющих формальные языки.

Системы полиномиальных уравнений обычно изучаются в рамках алгебраической геометрии методами коммутативной алгебры [29]. Если при этом рассматривать неизвестные над алгебраически замкнутым полем комплексных чисел [15, 55], то эффективными становятся также методы многомерного комплексного анализа [3, 29].

Однако, для изучения систем полиномиальных уравнений (3) с некоммутативными по умножению неизвестными методы коммутативной алгебры и комплексного анализа, конечно же, не выглядят удобными.

Таким образом, дальнейшее развитие теории формальных языков и грамматик (каждая грамматика может быть рассмотрена как система полиномиальных уравнений) затрудняется отсутствием подходящих методов как в дискретной математике, так и коммутативной алгебре и комплексном анализе.

И всё же привлечь в теорию формальных языков и грамматик методы многомерного комплексного анализа можно на основе следующего подхода.

Рассмотрим сначала коммутативный образ системы уравнений (3), считая, что терминальные и нетерминальные символы являются коммутативными переменными, принимающими значения из поля комплексных чисел. Приводя подобные, получим коммутативный образ этой системы уравнений, который является системой полиномиальных уравнений в пространстве $\mathbb{C}^{n+m}_{z,x}$. При этом коммутативным образом формального языка становится кратный степенной ряд, представляющий алгебраическую функцию в $\mathbb{C}^m_x$, которая является решением этой системы.

Далее можно исследовать коммутативный образ системы уравнений (3), применяя методы многомерного комплексного анализа.

При этом коммутативным образом формального языка становится кратный степенной ряд, представляющий алгебраическую функцию в $\mathbb{C}^m_x$, которая является решением этой системы.

Наконец, следует установить, какие свойства некоммутативной системы уравнений (3) вытекают из свойств её коммутативного образа.

Отметим, что впервые такой подход был предложен и стал реализовываться в работе [76], хотя продуктивная идея использовать методы математического анализа в теории кс–языков была высказана А. Л. Семёновым ещё в 1973 году в работе [79], которая придала импульс дальнейшему развитию этой теории.

Настоящее исследование посвящено проблематике, связанной с реализацией указанного подхода.

В заключение раздела дадим общую характеристику диссертационной работы.

Объект исследования. Формальные языки и грамматики.

Предмет исследования. Полиномиальные языки и грамматики.

Целью диссертационной работы является установление условий разрешимости полиномиальных грамматик, а также разработка нового метода синтаксического анализа мономов контекстно–свободных языков, как подкласса полиномиальных языков, на основе исследования коммутативных образов полиномиальных языков и граматик.

Поставленная цель достигается путем решения следующих **задач** диссертационного исследования:

а) установить связь между множеством решений полиномиальной грамматики и множеством решений её коммутативного образа;

б) найти условие существования и единственности полиномиального языка, порождённого полиномиальной грамматикой;

в) исследовать полиномиальные грамматики, порождающие бесконечное число языков, а также несовместные полиномиальные грамматики;

г) разработать новый метод синтаксического анализа мономов контекстно–свободных языков, образующих подкласс полиномиальных языков.

Соответствие диссертации паспорту специальности. Диссертационная работа соответствует области исследований специальности 05.13.17 — Теоретические основы информатики по п. 10 «*Разработка основ математической теории языков и грамматик*, теории конечных автоматов и теории графов».

Методы исследования диссертационной работы. Основные результаты получены на основе методов алгебры, в том числе алгебры многочленов, дискретной математики, теории формальных языков и грамматик, а также комплексного анализа, включая методы теории интегральных представлений и теории вычетов.

Научная новизна:

а) впервые установлена связь между множествами решений полиномиальной грамматики и её коммутативного образа, которая позволяет исследовать полиномиальные языки и грамматики методами комплексного анализа и алгебраической геометрии;

б) найдено новое условие существования и единственности полиномиального языка, порождённого полиномиальной грамматикой в терминах её коммутативного образа. Условие легко проверяется при исследовании полиномиальных грамматик;

в) введено и исследовано понятие полиномиальной грамматики, порождающей бесконечное число языков, получены новые свойства несовместных полиномиальных грамматик, не имеющие аналогов для коммутативных переменных. Тем самым расширена совокупность исследуемых языков и грамматик;

г) разработан новый метод синтаксического полинома (который получен в виде интеграла по циклу от рациональной функции) для решения задачи синтаксического анализа мономов контекстно–свободных языков программирования. Метод отличается от существующих и может быть использован на практике.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы в теоретическом программировании, при разработке трансляторов. Предложенный метод синтаксического полинома может быть использован при разработке языков прорамирования.

Положения, выносимые на защиту диссертационной работы. На защиту выносятся следующие основные результаты:

а) описание связи между множествами полиномиальных языков, порождённых полиномиальной грамматикой, и решений её коммутативного образа;

б) условие существования и единственности полиномиального языка, порождённого полиномиальной грамматикой в терминах её коммутативного образа;

в) совокупность свойств полиномиальных грамматик, порождающих бесконечное число языков, а также несовместных полиномиальных грамматик;

г) метод синтаксического полинома для решения задачи синтаксического анализа языков программирования.

Достоверность результатов работы подтверждается математическими доказательствами основных положений.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы были доложены автором на следующих всероссийских и международных конференциях:

— Всероссийской конференции «Сибирская научная школа–семинар с международным участием "Компьютерная безопасность и криптография"» — Sibecrypt (Томск, 2006 г.; Новосибирск, 2016, 2017 гг.; Абакан 2018 г.);

— Международной научно–практической конференции «Решетнёвские чтения» (Красноярск, 2009, 2015 — 2018 гг.).

Результаты работы обсуждались на научно-исследовательских семинарах:

— в Сибирском федеральном университете;

— Сибирском государственном университете науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнёва;

— Национальном–исследовательском Томском государственном университе.

Публикации по теме диссертационной работы. По результатам диссертационного исследования опубликовано 16 работ, из которых:

— 5 изданы в журналах, рекомендованных ВАК (из них 2 журнала входят также в базы цитирования Web of Science и Scopus);

— 11 работ издано в трудах и материалах конференций.

Из статей, написанных в соавторстве, в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объём работы. Диссертационная работа изложена на 105 страницах и состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

0.2 О содержании диссертации

Для того, чтобы в данном разделе начать изложение основных результатов диссертации, полученных в главе 1, рассмотрим коммутативный образ ФСР и системы полиномиальных уравнений, считая, что терминальные и нетерминальные символы являются переменными, принимающими значения из поля комплексных чисел.

В этом случае коммутативный образ системы уравнений является системой полиномиальных уравнений в пространстве $\mathbb{C}^{n+m}_{z,x}$, а коммутативный образ ФСР (формального языка) становится кратным степенным рядом, представляющим алгебраическую функцию в $\mathbb{C}^m_x$, которая является решением этой системы.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если*

$$z = z(x) = (z_1(x), \ldots, z_n(x))$$

— решение некоммутативной системы уравнений (3) в виде символьных ФСР, то коммутативные кратные степенные ряды

$$z = ci(z(x)) = (ci(z_1(x)), \ldots, ci(z_n(x)))$$

над полем комплексных чисел сходятся в окрестности нуля, определяя ростки голоморфных алгебраических функций, и являются решением коммутативной системы уравнений

$$ci(P_j(z, x)) = 0, \; ci(P_j(0, 0)) = 0, \; j = 1, \ldots, k. \tag{4}$$

По данной теореме, если некоммутативная система (3) совместна, то коммутативная система (4) имеет голоморфное в начале координат решение. Обратное, вообще говоря, неверно.

В самом деле, система уравнений

$$z_1 - z_2 = x_1 x_2,$$

$$z_1 - z_2 = x_2 x_1$$

является несовместной, тем не менее её коммутативный образ имеет решение:

$$z_1 = s + x_1 x_2,\ z_2 = s,$$

где s — произвольный коммутативный ФСР.

Таким образом, можно сделать следующие замечания.

Во–первых, множество решений системы уравнений (4), вообще говоря, шире, чем множество коммутативных образов решений системы уравнений (3), и из совместности системы уравнений (4) не следует совместность исходной некоммутативной системы (3).

Во–вторых, естественная гипотеза о том, что система (3) совместна тогда и только тогда, когда система (4) имеет голоморфное в начале координат решение $z = z(x)$ неверна.

Обозначим два множества ростков аналитических множеств в начале координат (множеств нулей аналитических функций в сколь угодно малых окрестностях нуля):

$$ci(S_P) = \{z = ci(z(x)) :\ P_j(z(x), x) = 0,\ j = 1, \ldots, k\},$$

$$S_{ci(P)} = \{z = z(x) :\ ci(P_j(z(x), x)) = 0,\ j = 1, \ldots, k\}.$$

Основываясь на последнем примере и сделанных обозначениях, сформулируем теорему следующим образом.

Теорема 1.2. *Имеет место включение*

$$ci(S_P) \subseteq S_{ci(P)}.$$

Далее, нам понадобится рассмотреть простейший случай полиномиальной зависимости, какой является линейная зависимость.

В связи с этим мы называем рангом матрицы A наибольшее число её строк, линейно независимых над полем комплексных чисел; обозначим его $rank(A)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть*

$$A = (a_{ij}(x))_{i=1, j=1}^{k, n}$$

— матрица, элементы которой являются многочленами от символьных некоммутативных переменных $x = (x_1, \ldots, x_m)$, *и матрица*

$$ci(A) = (ci(a_{ij}(x)))_{i=1, j=1}^{k, n}$$

является её коммутативным образом. Тогда выполнено неравенство

$$rank(ci(A)) \leq rank(A).$$

Отметим также, что теореме 1.1 эквивалентна следующая теорема.

Теорема 1.4. *Если коммутативная система уравнений (4) не имеет решения, голоморфного в начале координат, то некоммутативная система (3) несовместна.*

Таким образом, условия несовместности системы уравнений (3) также представляют интерес в теории формальных языков и грамматик.

Конечно, наибольший интерес для приложений представляют условия, которые обеспечивают совместность системы некоммутативных символьных уравнений (3), а также единственность её решения.

Согласно сформулированным выще замечаниям, таким условием не может быть существование голоморфного в начале координат решения системы коммутативных уравнений (4).

Это условие даёт такой инструмент, как якобиан системы функций.

Рассмотрим систему уравнений (3) в случае, когда $k = n$.

Пусть

$$
\begin{gathered}
J(z,x) = \\
= \det\left(\frac{\partial ci(P_i(z,x))}{\partial z_j}\right) = \\
= \det((ci(P_i(z,x)))'_{z_j})
\end{gathered}
$$

— якобиан системы уравнений (3) относительно переменных $z_1, \ldots, z_n$.

Символьным, или дискретным аналогом известной теоремы о неявном отображении является следующая теорема.

Теорема 1.5. *Если для полиномиальной грамматики (некоммутативной символьной системы уравнений) (3) выполнено неравенство*

$$
J(0,0) \neq 0,
$$

то она имеет единственное решение в виде ФСР.

Неравенство нулю якобиана является условием теоремы о неявном отображении для коммутативной системы уравнений (4) с переменными в пространстве $\mathbb{C}^{n+m}_{z,x}$ и влечёт существование и единственность её голоморфного решения. Тем не менее оказывается, что это неравенство влечёт также существование и единственность решения исходной некоммутативной символьной системы уравнений (3).

Неравенство $J(0,0) \neq 0$ обусловлено свойствами линейных частей некоммутативных многочленов из системы уравнений, а они совпадают со своими коммутативными образами. По этой причине неравенство влечёт совместность не только коммутативной, но и некоммутативной системы уравнений.

Далее рассмотрен вопрос о полиномиальных грамматиках, которые могут порождать более одного полиномиального языка.

Уравнения различной природы часто обладают тем свойством, что для них имеет место альтернатива: имеется единственное решение, либо бесконечно много решений. В связи с этим рассмотрен случай, когда полиномиальная грамматика, т. е. система некоммутативных уравнений (3), имеет бесконечно много решений (порождает бесконечно много полиномиальных языков).

Для уравнений с числовыми неизвестными наличие бесконечного числа решений обычно означает, что общее решение этого уравнения зависит от одного или нескольких числовых параметров. Для полиномиальных грамматик ситуация в определённом смысле аналогичная, однако смысл параметров иной.

Дадим следующее определение.

Определение. *Будем говорить, что полиномиальная грамматика (3) имеет бесконечно много решений (порождает бесконечно много языков), если множество решений системы (3) зависит хотя бы от одного произвольного ФСР от символов* $x_1, \ldots, x_m$.

Так, система из двух одинаковых уравнений

$$x_1 z_1 - z_2 x_2 = 0$$

имеет бесконечно много решений, поскольку её решения можно записать в виде

$$z_1 = s x_2,\ z_2 = x_1 s$$

, где s — произвольный ФСР от $x_1,\ x_2$.

Пусть, как выше,

$$J(z,x) = \det\left(\frac{\partial(ci(P_i(z,x)))}{\partial z_j}\right).$$

— якобиан системы уравнений (4) относительно переменных $z_1, ..., z_n$.

Для систем уравнений уравнений комплексными переменными известна следующая теорема [3].

Теорема. *Пусть выполнено равенство*

$$J(z,x) \equiv 0,$$

тогда система уравнений (4) либо не имеет решения для каждого x в пространстве $\mathbb{C}^n_z$, либо все её решения в этом пространстве — неизолированные.

Прежде всего, рассмотрим вопрос об аналоге этой теоремы для случая полиномиальных грамматик и языков, представленные ФСР.

Показано, что для некоммутативной системы уравнений (3) такая альтернатива (нет решений — бесконечно много решений) не имеет места.

В самом деле, рассмотрим систему, состоящую из двух одинаковых уравнений:

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 - x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0.$$

Коммутативный образ этой системы имеет якобиан, тождественно равный нулю, тем не менее исходная некоммутативная система имеет единственное решение.

В самом деле, записывая систему уравнений в виде

$$x_1(z_1 - x_2) + x_2(z_2 - x_1) = 0,$$

получим, что первое слагаемое в этой сумме принадлежит левому идеалу, порождённому x_1, и второе слагаемое принадлежит левому идеалу, порождённому x_2. Очевидно, что сумма этих слагаемых может быть равной нулю только в случае, когда оба слагаемых равны нулю:

$$z_1 - x_2 = 0, z_2 - x_1 = 0.$$

Следовательно, исходная система уравнений имеет единственное решение

$$z_1 = x_2, z_2 = x_1.$$

Кроме того, пример системы из двух одинаковых уравнений

$$x_1(z_1 - x_1)(z_1 - x_2) + x_2(z_2 - x_1)(z_2 - x_2) = 0,$$

имеющей четыре решения

$$z_1 = x_1,\ z_2 = x_1,$$

$$z_1 = x_1,\ z_2 = x_2,$$

$$z_1 = x_2,\ z_2 = x_1,$$

$$z_1 = x_2,\ z_2 = x_2,$$

показывает, что число рещений некоммутативной системы (коммутативный образ которой имеет якобиан, тождественно равный нулю) может быть любым.

Таким образом, в случае, когда рассматриваемый якобиан тодественно равен нулю, исходная система некомутативных уравнений может: не иметь решений, иметь любое конечное число решений, иметь бесконечно много решений.

Кроме того, учитывая, что система из n одинаковых уравнений с n некоммутативными неизвестными $z_1, \ldots, z_n$

$$f = 0,$$

$$\ldots$$

$$f = 0,$$

имеющая тождественно равный нулю якобиан, эквивалентна одному уравнению $f = 0$, сформулируем следующее замечание.

Одно уравнение с некоммутативными неизвестными

$$P_1(z.x) = 0$$

может: не иметь решений, а также иметь конечное и бесконечное число решений; в этом состоит фундаментальное отличие от одного уравнения над полем комплексных чисел, которое всегда имеет решения.

Подтверждением того, что одно уравнение может не иметь решений, является следующий пример.

Так, уравнение

$$x_1(z_1 - x_1) + x_2(z_1 - x_2) = 0,$$

в котором первое слагаемое принадлежит левому идеалу, порождённому x_1, а второе — левому идеалу, порождённому x_2.

Очевидно, что сумма этих слагаемых может быть равной нулю только в случае, когда оба слагаемых равны нулю:

$$z_1 - x_1 = 0,$$

$$z_2 - x_2 = 0.$$

Значит, уравнение имеет решение

$$z_1 = x_1, z_1 = x_2,$$

что невозможно, т. е. уравнение не имеет решений.

Причина этого эффекта состоит в том, что некоммутативное полиномиальное уравнение может быть эквивалентно системе полиномиальных уравнений, а система уравнений может быть несовместной.

Так, рассмотренное уравнение вида

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 = 0$$

равносильно системе полиномиальных уравнений

$$A_1 = 0,$$

$$A_2 = 0.$$

В случае комплексных переменных, как было отмечено выше, такого эффекта нет.

В главе 2 рассмотрена одна из важных проблем, связанных с разработкой систем и языков программирования — проблема синтаксического анализа программ [28].

Как отмечено выше, большинство языков программирования является кс-языками, которые можно представить в виде ФСР, поэтому каждая программа, написанная на языке программирования, может рассматриваться как моном соответствующего ФСР.

Для того, чтобы сформулировать проблему синтаксического анализа мономов кс-языка, рассмотрим подробнее систему полиномиальных уравнений Хомского — Щутценберже (1), которая определяет кс-язык. Как известно, грамматика кс-языка является множеством правил подстановки (2), которые можно применять к начальному символу z_1, а затем к другим мономам в любом порядке неограниченное число раз, что позволяют выводить новые мономы, образующие кс-язык; многочлены, стоящие в правой части системы уравнений Хомского — Щутценберже (1), определяются равенствами:

$$Q_j(z,x) = \ q_{j1}(z,x) + \ \cdots \ + q_{jp_j}(z,x),$$

$$j = 1, \ \ldots \ , n.$$

Итак, проблема синтаксического анализа мономов состоит в том, чтобы определить, принадлежит ли моном данному кс-языку, т. е. может ли быть получен из начального символа z_1 при помощи правил подстановки (2), а также установить, какие правила подстановки и сколько раз использовались при выводе этого монома; при этом порядок использования правил подстановки не имеет значения [28].

В работе [76] предложен метод мономиальных меток, который позволяет провести беступиковый синтаксический анализ монома v от терминальных символов $x_1, \ldots, x_m$.

Метод мономиальных меток состоит в следующем. Сначала каждое правило подстановки

$$z_j \to q_{jk}(z, x)$$

заменяется правилом

$$z_j \to t_{jk} q_{jk}(z, x),$$

имеющим мономиальную метку t_{jk}, которая является символом из расширенного алфавита, и для новых правил вывода рассматривается соответствующая система уравнений Хомского — Щутценберже:

$$z_j = Q_j^*(z, x, t) \stackrel{\text{def}}{=} t_{j1} q_{j1}(z, x) + \ \cdots \ + t_{jp_j} q_{jp_j}(z, x), \ j = 1, \ \ldots \ , n. \quad (5)$$

Решение этой системы можно получить методом последовательных приближений, о котором говорилось выше:

$$z^{(k+1)}(x, t) = Q^*(z^{(k)}(x, t), x, t);$$

$$k = 0, 1, \ldots;$$

$$z^{(0)} = 0.$$

В результате решение получается в виде ФСР

$$z_j = z_j^*(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle z_j^*, w_i \rangle \ w_i; \ j = 1, \ldots, n, \quad (6)$$

где w_i — мономы от символов $x_1, \ldots, x_m, t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{np_n}$.

Заметим, что если каждый символ t_{jk} в ФСР (6) заменить пустой цепочкой e, то решения систем уравнений (5) и (1) совпадают:

$$z_j^*(x, e) = z_j(x);$$

$$j = 1, \ldots, n.$$

Итерации метода последовательных приближений для системы уравнений (5) дают многочлены возрастающей степени относительно всех символов $x_1, \ldots, x_m, t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{np_n}$, при этом мономы степени не выше $\deg_x(v)$ относительно символов $x_1, \ldots, x_m$ после конечного числа итераций стабилизируются, не меняясь при последующих итерациях.

Таким образом, можно получить начальные члены решения системы (5) в виде ФСР (6) до любой, сколь угодно высокой степени, в том числе члены ФСР, представляющего первую компоненту этого решения:

$$z_1 = z_1^*(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle z_j^*, w_i \rangle \; w_i \tag{7}$$

Наконец, синтаксический анализ монома v кс-языка $z_1(x)$ можно провести следующим образом. Считывая мономы степени $\deg_x(v)$ относительно символов $x_1, \; \ldots \; , x_m$ и пропуская символы t_{jk}, можно установить, есть ли среди них моном v, а значит, можно ли вывести его с помощью системы продукций (6). Каждая мономиальная метка t_{jk}, содержащаяся в таком мономе, показывает, что при его выводе использовалось правило

$$z_j \to t_{jk} \; q_{jk}(z, x).$$

В самом деле, из системы уравнений (5) и метода последовательных приближений нетрудно видеть, что, применяя это правило вывода к моному, мы умножаем его слева на символ t_{jk}.

Следовательно, мономиальные метки монома решают проблему его синтаксического анализа, показывая, какие правила вывода кс-языка и сколько раз использовались при выводе этого монома, с точностью до порядка их применения. А именно, доказано [76], что метод мономиальных меток позволяет провести за конечное число шагов беступиковый синтаксический анализ любого монома (программы) кс-языка, заданного грамматикой (2).

Очевидно, что недостатком метода мономиальных меток является большое число громоздких итераций метода последовательных приближений, необходимых для получения начальных членов ФСР (7), причём это число возрастает вместе с ростом степени монома v. В связи с этим в диссертации предложен другой путь для получения мономиальных меток некоммутативного монома.

Рассмотрим коммутативный образ ФСР (7)

$$ci(z_1^*(x,t)) = \sum_{\alpha} s_\alpha(t)\ x^\alpha\ , \tag{8}$$

сгруппированный по степеням x^α в кратный ряд Гартогса.

Доказано, что при всех мультииндеках α голоморфные в нуле коэффициенты ряда Гартогса $s_\alpha(t)$ являются полиномами и дано следующее определение.

Определение. *Синтаксическим полиномом монома* v *относительно кс-языка* $z_1(x) = z_1^*(x,e)$ *называется коэффициент* $s_\alpha(t)$ *ряда Гартогса (8), такой, что* $x^\alpha = ci(v)$.

Мономиальные метки, содержащиеся в некоммутативных мономах кс-языка, не исчезают при переходе от ФСР (7) к его коммутативному образу (8) и сохраняются в виде мономов синтаксических полиномов, поскольку все коэффициенты ФСР (7) являются целыми положительными числами. Следовательно, если синтаксический полином монома относительно кс-языка равен нулю, то моном не принадлежит этому языку.

Для проведения синтаксического анализа монома v, такого, что

$ci(v) = x^\alpha$, следует найти синтаксический полином $s_\alpha(t)$. Каждый моном полинома $s_\alpha(t)$ является произведением мономиальных меток правил подстановки, которые позволяют получить некоторые мономы, имеющие тот же коммутативный образ x^α, поэтому для завершения синтаксического анализа монома v остаётся проверить, можно ли получить его с помощью правил подстановки, соответствующих всем мономам синтаксического полинома $s_\alpha(t)$.

Доказано, что синтаксические полином $s_\alpha(t)$ монома, а значит, и содержащиеся в нём мономиальные метки этого монома можно получить в виде интеграла фиксированной кратности $(n+m)$ по циклу, где числа n и m не зависят от степени монома и равны соответственно числу нетерминальных и терминальных символов грамматики кс-языка.

А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2. *При всех t, достаточно близких к нулю, и всех мультииндексах α синтаксический полином $s_\alpha(t)$ задаётся равенством*

$$s_\alpha(t) = \frac{1}{(2\pi i)^{n+m}} \int\limits_{\gamma_z \times \Gamma_x} \frac{z_1 \det\bigl(\delta_{ij} - (ci(Q_i^*(z,x,t)))'_{z_j}\bigr)\ dz \wedge dx}{(z - ci(Q^*(z,x,t)))\ x^{\alpha+I}}, \tag{9}$$

где $\gamma_z = \{|z_1| = \cdots = |z_n| = \epsilon\}$ *и* $\Gamma_x = \{|x_1| = \cdots = |x_m| = \delta\}$ *— циклы интегрирования,* $0 < \delta \ll \epsilon \ll 1$,

$$dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n,$$

$$dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

$$x^{\alpha+I} = x_1^{\alpha_1+1} \cdot\ \cdots\ \cdot x_m^{\alpha_m+1},$$

$$(z - ci(Q^*(z,x,t))) =$$

$$= (z_1 - ci(Q_1^*(z,x,t))) \cdot\ \cdots\ \cdot (z_n - ci(Q_n^*(z,x,t))),$$

и δ_{ij} — дельта Кронекера.

Ещё одно интегральное представление синтаксического многочлена даёт следующая теорема.

Теорема 2.3. *При всех t, достаточно близких к нулю, и всех мультииндексах α синтаксический полином $s_\alpha(t)$ задаётся равенством*

$$s_\alpha(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n \alpha!} \int\limits_{\gamma_z} \frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x^\alpha} \Big(\frac{z_1 \det\big(\delta_{ij} - (ci(Q_i^*(z,x,t)))'_{z_j}\big)}{(z - ci(Q^*(z,x,t)))} \Big)\Big|_{x=0} \, dz, \quad (10)$$

где $\gamma_z = \{|z_1| = \cdots = |z_n| = \epsilon\}$ — цикл интегрирования, $0 < \epsilon \ll 1$,

$$dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \ \cdots \ \cdot \alpha_m!,$$

$$(z - ci(Q^*(z,x,t))) =$$

$$= (z_1 - ci(Q_1^*(z,x,t))) \cdot \ \cdots \ \cdot (z_n - ci(Q_n^*(z,x,t))),$$

$$\frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ \cdot \ \cdots \ \cdot \ \partial x_m^{\alpha_m}},$$

и δ_{ij} — дельта Кронекера.

Формулы (9) и (10) из теорем 2.2. и 2.3 дают практическую возможность проводить синтаксический анализ монома (программы), что подтверждает пример, рассмотренный в разделе 2.4.

Глава 1

Условия разрешимости полиномиальных грамматик

1.1 Полиномиальные грамматики и порождаемые ими языки

Как отмечалось во введении, рассматривается алфавит, состоящий из символов $z_1, \ldots, z_n, x_1, \ldots, x_m$, над которыми определим некоммутативную операцию умножения (конкатенации) и коммутативную операцию формальной суммы. Легко убедиться, что алгебраическая структура, которой является алфавит вместе с данными операциями, — полукольцо.

Как отмечено выше, множество терминальных символов $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ понимается как словарь формального языка, а множество нетерминальных ссимволов $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ играет вспомогательную роль: его символы нужны для задания грамматики, т. е. совокупности грамматических правил, порождающих язык. В свою очередь, по грамматическим правилам определяются «правильные» мономы от терминальных символов $x_1, \ldots, x_m$, которые чаще всего интерпретируются как предложения этого языка.

Полезно определить также коммутативную операцию умножения элементов указанного полукольца, т. е. мономов от символов $z_1, \ldots, z_n, x_1, \ldots, x_m$, на комплексные числа, образующие алгебраически замкнутое поле, тогда можно рассматривать как символьные многочлены, так и формальные степенные ряды (ФСР) с комплексными коэффициентами.

Формальным языком является такой ФСР, членами которого являются все правильные мономы, определенные данной грамматикой [28, 110].

Вновь отметим, что для важных классов формальных языков порождающую грамматику можно записать в виде системы символьных полиномиальных уравнений.

Так например, для наиболее значимого с точки зрения приложений класса контекстно-свободных языков (кс-языков) определяющую систему символьных полиномиальных уравнений можно записать в виде системы уравнений Хомского — Щутценберже

$$z_j = Q_j(z, x), j = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

где правые части удовлетворяют естественным условиям: $Q_j(0, 0) = 0$ и многочлены $Q_j(z, 0)$, естественно, не содержат линейных членов [28, 110].

Действительно, пусть кс-язык, порождается грамматикой в виде системы продукций (правил подстановки, правил вывода):

$$z_j \to q_{j1}(z, x), \ldots, z_j \to q_{jq_j}(z, x),\ \ j = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

где $p_{jk}(z, x)$ — мономы от некоммутативных символов из алфавита

$$Z \cup X = \{z_1, \ldots, z_n, x_1, \ldots, x_m\}$$

.

Особую роль играет начальный символ z_1, к нему применяются правила вывода, содержащие этот символ в левой части, в результате получаются новые мономы из правых частей правил вывода. Далее преобразуем эти мономы, применяя к любому нетерминальному символу в мономах правила подстановки, заменяющие один символ на целый моном, в любом порядке неограниченное число раз. Когда в мономе все нетерминальные символы заменены на терминальные, его преобразование завершено. Таким образом, из начального символа выводятся все правильные мономы данного кс-языка (в естественных языках эти мономы понимаются как предложения, в языках программирования — как программы или подпрограммы).

Как видно, левая часть каждого правила подстановки содержит единственный нетерминальный символ z_j, т. е. правило подстановки применяется независимо от окружения этого символа (контекста), а потому грамматика называется кс-грамматикой.

Известно, что кс-грамматике сопоставляется система полиномиальных символьных уравнений Хомского — Щутценберже (1.1), где

$$Q_j(z,x) = q_{j1}(z,x) + \ldots + q_{jq_j}(z,x),$$

называемая также грамматикой в форме Хомского — Щутценберже [28, 110].

Обозначим $\langle r, w \rangle$ числовой коэффициент, с которым моном w от некоммутативных переменных входит в ФСР или многочлен s. Система уравнений (1.1) называют собственной, если соответствующая ей грамматика не содержит правил подстановки вида

$$z_j \to z_k,\ z_j \to e,$$

где e — пустая цепочка, играющая роль единицы относительно конкатенации мономов.

Понятно, что порождающая способность грамматики из-за отсутствия этих правил подстановки не уменьшится, поскольку любой кс-язык можно задать без их использования, поэтому всегда можно предполагать, что выполнены условия на коэффициенты системы:

$$\langle Q_j, e\rangle = 0,\ \langle Q_j, z_k\rangle = 0,$$

$$j, k = 1, \ldots, n.$$

Именно благодаря этой особенности многочленов $Q_j(z, x)$, систему уравнений (1.1) можно решить методом последовательных приближений, который состоит в следующем.

Получая итерации символьного решения системы

$$z_j^{(k+1)} = Q_j(z^{(k)}, x),$$

$$z^{(k)} = (z_1^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)}),$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

$$z^{(0)} = (0, \ldots, 0),$$

можно получить решение в виде ФСР, в частности, компоненту z_1 как кс-язык:

$$z_1 = \sum_i \langle z_1, w_i\rangle \cdot w_i.$$

Мономы w_i от $x_1, \ldots, x_m$ представляют собой всевозможные правильные предложения этого кс-языка; очевидно, что коэффициент $\langle z_1, w_i \rangle$ равен числу выводов монома w_i при неограниченном применении грамматических правил подстановки (любое число раз в любом порядке) [110].

Эта система решается относительно символов $(z_1, \ldots, z_n) = z$ в виде ФСР

$$z = z(x) = (z_1(x), \ldots, z_n(x)),$$

зависящих от символов $(x_1, \ldots, x_m) = x$. При этом первая компонента решения, ФСР $z_1(x)$, и является формальным языком, который задаётся этой грамматикой.

Выше отмечалась прикладная значимость кс-языков, состоящая в том, что этому классу принадлежит большинство языков программирования, что является их фундаментальным свойством. По этой причине можно рассматривать программы, написанные на языках программирования, как мономы кс-языков [49, 50, 52, 56, 59, 60, 62, 64, 107, 108].

В качестве примера рассмотрим задание кс-грамматикой идентификатора в некоторых известных языках программирования, отмеченный К. В. Сафоновым.

Для большинства языков программирования структура идентификаторов определяется тем, что его самый левый символ обязательно является буквой. Понятно, что структура идентификатора может усложняться за счёт приписывания к нему справа как цифр, так и букв.

Таким образом, идентификатор определяется следующими правилами:

<идентификатор>::=<буква>

или

<идентификатор><буква>

или

<идентификатор><цифра>.

Минуя запись правил вывода (продукции), эти правила можно сразу переформулировать в виде несобственной системы трёх уравнений Хомского — Щутценберже:

$$z_1 = z_2 + z_1 z_2 + z_1 z_3,$$

$$z_2 = A + B + C + D + E + F + G + H + I + J + K + L +$$

$$+ M + N + O + P + Q + R + S + T + U + V + W + X + Y + Z +$$

$$+ a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l +$$

$$+ m + n + o + p + q + r + s + t + u + v + w + x + y + z,$$

$$z_3 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 0.$$

Заметим, что идентификатор можно задать и собственной системой Хомского-Щютценберже, состоящей из одного собственного уравнения, а именно:

$$z_1 = A + B + \cdots + y + z +$$

$$+ z_1(A + B + \cdots + y + z) +$$

$$+ \ z_1(0 + 1 + \cdots + 9).$$

Кс-языки были введены в 50-х годах прошлого века выдающимся американским лингвистом Ноамом Хомским, заложившим основы теории, которая адекватно описывает как естественные языки, так и языки программирования [85—91]; эта теория получила дальнейшее развитие [113—123].

Кроме того, Н. Хомским был введён важный подкласс кс-языков, который образуют линейные (регулярные) языки.

Для таких языков все многочены системы (1.1) являются линейными по z_j, $j = 1, \ldots, n$; в частности, рассматриваются леволинейные и праволинейные языки.

В качестве простого примера собственной системы уравнений (системы Хомского — Щутценберже) рассмотрим систему уравнений

$$z_1 = x_1 z_1 + x_1 z_2,$$

$$z_2 = x_2 z_2 x_3 + x_2 x_3.$$

Метод последовательных приближений даёт следующие итерации решения системы:

$$z^{(0)} = (0, 0),$$

$$z^{(1)} = (0;\ x_2 x_3),$$

$$z^{(2)} = (x_1 x_2 x_3;\ x_2^2 x_3^2 + x_2 x_3),$$

$$z^{(3)} = (x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_2^2 + x_1 x_2 x_3;\ x_2^2 x_3^2 + x_2^3 x_3^3),$$

$$\ldots$$

Отсюда легко видеть, что первая компонента решения этой системы представляется рядом

$$z_1 = s = \sum_{i,j \geq 1} x_1^i x_2^j x_3^j,$$

который является кс-языком над словарем $\{x_1, x_2, x_3\}$ и состоит из предложений, имеющих вид

$$x_1^i x_2^j x_3^j,\ i, j \geq 1.$$

Для более широкого класса языков непосредственно составляющих определяющую систему можно записать в виде:

$$m_j(z, x) = M_j(z, x),$$

$$j = 1, \ldots, k,$$

где $m_j(z, x)$ — моном, а $M_j(z, x)$ — многочлен [28].

Таким образом, язык непосредственно составляющих порождается правилами подстановки, в левой части которых стоит не единственный нетерминальный символ, как в кс-языках, а группа нетерминальных и терминальных символов, образующая моном. В результате эта группа символов заменяется на другой моном, как правило, большей длины.

Наконец, отметим языки в нормальной форме Грейбах, которые также можно задать системой символьных полиномиальных уравнений второй степени, вводя при необходимости новые терминальные и нетерминальные символы [28].

Таким образом, можно сделать вывод о том, что грамматики, порождающие важные классы формальных языков, можно задать в виде системы полиномиальных уравнений с некоммутативными переменнными

$$P_j(z, x) = 0,\ P_j(0, 0) = 0,\ j = 1, \ldots, k, \tag{1.3}$$

которые решаются относительно символов $(z_1, \ldots, z_n) = z$ в виде ФСР, зависящих от символов $(x_1, \ldots, x_m) = x$.

Понятно, что можно исследовать свойства различных классов формальных языков, исследуя системы полиномиальных уравнений (1.3) с некоммутативными символами для различных видов многочленов $P_j(z, x)$.

Рассмотрим более подробно ФСР, которые удовлетворяют системе символьных полиномиальных уравнений (1.3).

Для того, чтобы определить некоторый порядок суммирования ФСР s, упорядочим его члены следующим образом. Пусть все мономы от $x_1, \ldots, x_m$ сгруппированы в однородные многочлены, расположенные по возрастанию степеней, затем перенумеруем мономы каждого из многочленов в лексикографическом порядке, переходя от меньшей степени к большей. При этом номер, равный нулю, присваевается моному нулевой степени (единице кольца), номера $1, \ldots, m$ присваиваются соттветственно мономам $x_1, \ldots, x_m$, линейная комбинация которых образует однородный многочлен первой степени, затем продолжаем нумеровать в лексикографическом порядке всевожможные мономы однороднородного многочлена второй степени и т. д.

При таком упорядочении все возможные мономы от символов $x_1, \ldots, x_m$ будут единственным образом записаны в виде последовательности мономов $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$, которая играет роль универсального базиса ФСР от символов $x_1, \ldots, x_m$.

Теперь каждый ряд s можно однозначно записать в виде разложения по этому базису:

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} \langle s, u_i \rangle \; u_i, \tag{1.4}$$

где $\langle s, u_i \rangle$ — числовой коэффициент при мономе u_i.

Итак, рассмотрим систему произвольных полиномиальных уравнений (1.3), также её решения в виде ФСР.

Определение 1.1. *Систему полиномиальных уравнений (1.3) с некоммутативными символами, решаемую относительно нетерминальных символов в виде ФСР* $z = z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))$ *от терминальных символов, назовём полиномиальной грамматикой, а первую компоненту решения, т. е. ФСР* $z_1(x)$ *назовём полиномиальным языком.*

Подчеркнём, что полиномиальные языки являются естественным обобщением важных классов формальных языков, поэтому методы исследования полиномиальных грамматик и языков можно использовать для изучения известных классов формальных языков, конкретизируя вид многочленов, входящих в систему полиномиальных уравнений (1.3).

Кроме того, можно с общих позиций рассмотреть вопросы разрешимости полиномиальных грамматик, т. е. вопросы существования полиномиальных языков, единственности, или, наоборот, бесконечности числа полиномиальных языков, порождённых полиномиальной грамматикой.

Однако, свойства некоммутативной системы уравнений (1.3) изучены мало, несмотря на её важность в теории формальных языков и грамматик. Так, в частном случае системы уравнений Хомского — Щутценберже (1.1) известно, что она имеет единственное решение $z = (z_1(x), \dots, z_n(x))$ в виде ФСР, но в общем случае для системы уравнений (1.3) условия разрешимости неизвестны.

Трудности исследования системы уравнений связаны с отсутствием подходящих методов, поскольку исключению неизвестных препятствует как некоммутативность умножения, так и отсутствие операции деления.

Известно, что в теории формальных языков и грамматик важную роль традиционно играют методы дискретной математики, в частности теории графов, которые позволили получить ряд важных результатов, составляющих основу этой теории. Например, анализ деревьев вывода мономов помогает исследовать структуру формальных языков.

Однако, эти методы не вполне приспособлены для исследования систем полиномиальных уравнений, определяющих формальные языки. Системы полиномиальных уравнений изучаются в рамках алгебраической геометрии методами коммутативной алгебры. Если при этом рассматривать неизвестные над алгебраически замкнутым полем комплексных чисел, то эффективны также методы многомерного комплексного анализа [29]. Тем не менее, методы коммутативной алгебры и комплексного анализа не выглядят удобными для изучения систем полиномиальных уравнений с некоммутативными по умножению неизвестными.

Таким образом, дальнейшее развитие теории формальных языков и грамматик (каждая грамматика может быть рассмотрена как система полиномиальных уравнений) затрудняется отсутствием подходящих методов, возникающих как в дискретной математике, так и коммутативной алгебре и комплексном анализе. В настоящем исследовании предлагается привлечь в теорию формальных языков и грамматик методы многомерного комплексного анализа на основе следующего подхода.

Рассмотрим сначала коммутативный образ системы уравнений (1.3), считая, что терминальные и нетерминальные символы являются переменными, принимающими значения из поля комплексных чисел; при этом коммутативный образ этой системы уравнений является системой полиномиальных уравнений в пространстве $\mathbb{C}^{n+m}_{z,x}$, а коммутативный образ формального языка становится кратным степенным рядом, представляющим алгебраическую функцию в $\mathbb{C}^{m}_{x}$, которая является решением этой системы. Далее предлагается исследовать коммутативный образ системы уравнений (1.3), применяя методы многомерного комплексного анализа. Наконец, необходимо установить, какие свойства некоммутативной системы уравнений (1.3) вытекают из свойств её коммутативного образа.

Отметим, что впервые такой подход был предложен и стал реализовываться для решения несколько иных вопросов в работе [76], хотя продуктивная идея использовать методы математического анализа в теории кс-языков восходит к значительно более ранней работе А. Л. Семёнова [79].

Настоящее исследование посвящено проблематике, связанной с реализацией указанного подхода.

В следующем разделе более подробно рассмотрим коммутативные образы ФСР и полиномиальных систем.

1.2 Коммутативные образы формальных языков и полиномиальных грамматик

Поставим в соответствие ФСР s его коммутативный образ $ci(s)$ — кратный степенной ряд, который получается из s в предположении, что символы $x_1, \ldots, x_m$ (равно как и $z_1, \ldots, z_n$) обозначают коммутативные переменные, принимающие значения из поля комплексных чисел.

В этом предположении любой моном u_i от символов $x_1, \ldots, x_m$ можно записать в виде

$$x_1^{\alpha_1} \cdot \ \cdots \ \cdot x_m^{\alpha_m},$$

где $\alpha_j = \deg_{x_j}(u_i)$ — число вхождений (степень) символа x_j в этот моном. Если обозначить мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, то можно записать равенство $\alpha = \deg_x(u_i)$, с учётом которого получаются следующие равенства:

$$ci(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle s, u_i \rangle \cdot ci(u_i) =$$

$$= \sum_{\alpha} \Bigg(\sum_{\alpha = \deg_x(u_i)} \langle s, u_i \rangle \Bigg) x^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}.$$

Впервые коммутативный образ ФСР рассмотрел А. Л. Семёнов [79], используя методы вещественного анализа для решения алгоритмических проблем, связанных с кс-языками. Указанная статья А. Л. Семёнова открыла дорогу для приложений как вещественного, так и многомерного комплексного анализа в теории формальных языков и грамматик.

Возникает вопрос о мнжестве точек сходимости кратного степенного ряда. Вообще говоря, этот вопрос нетривиален [47], однако, известно, что степенные ряды, удовлетворяющие системе полиномиальных уравнений, имеют непустую область сходимости [79].

Так, методы многомерного комплексного анализа позволили существенно продвинуться в решении следующего фундаментального вопроса (проблемы): как по заданному ФСР определить, является ли он кс-языком, т. е. порожден ли он кс-грамматикой — некоторой полиномиальной системой уравнений вида, как отличить его от формальной суммы мономов, не обраующих кс-язык?

Фактически, это — проблема, поставленная в 1973 году академиком В. М. Глушковым и его соавторами Г. Е. Цейтлиным и Е. Л. Ющенко, которые отмечали, что в теории кс-языков «важную роль играет установление критериев, с помощью которых можно выяснить, является ли данный язык кс-языком» [28, с. 196].

В простейшем случае, когда набор мономов из терминальных символов конечен,

$$w_1, \ldots, w_t,$$

ответ на вопрос о том, образуют ли эти мономы кс-язык, тривиален.

А именно, существует конечный кс-язык, заданный системой правил подстановки

$$z_1 \to w_1,$$

$$\ldots$$

$$z_1 \to w_t,$$

а также соответсвующей системой Хомского — Щутценберже

$$z_1 = w_1 + \cdots + w_t,$$

равный сумме этих мономов, а потому имеет смысл рассматривать вопрос лишь о бесконечном кс-языке.

В работах К. В. Сафонова были получены условия, которые полностью характеризуют коммутативный образ формального степенного ряда, который является кс-языком [73, 74, 78, 109].

Заметим также, что в случае комплексных переменных $z \in \mathbb{C}^n, x \in \mathbb{C}^m$ собственная система (1.1) имеет в окрестности нуля $(0,0) \in \mathbb{C}^{n+m}$ единственное голоморфное решение $(z_1(x), \ldots, z_n(x))$, компоненты $z_j(x)$ которого — алгебраические функции.

Действительно, записывая систему (1.1) в виде

$$P_j(z,x) = z_j - Q_j(z,x) = 0,$$

$$j = 1, \ldots, n,$$

видим, что условия того, что система уравнений является собственной, равносильны тому, что

$$P_j(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial P_i(0,0)}{\partial z_j} = \delta_{ij},$$
$$i, j = 1, \ldots, n,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Следовательно, собственная система, удовлетворяя условию теоремы о неявном отображении, имеет единственное и голоморфное решение, а метод последовательных приближений даёт в этом случае тейлоровские разложения голоморфных в окрестности нуля функций $z_j(x),\ j = 1, \ldots, n$.

Отметим, что методы алгебры и дискретной математики были использованы в теории кс-языков при решении, например, следующих проблем:

1) по заданной кс-грамматике в форме системы уравнений Хомского — Щутценберже (1.1), т. е. по коэффициентам полиномов из этой системы, определить, содержит ли порождаемый ею кс-язык заданный моном с ненулевым коэффициентом (алгоритмически разрешимая проблема);

2) порождают ли две заданные грамматики, а фактически — две различные системы уравнений вида (1.1), один и тот же кс-язык (алгоритмически не разрешимая проблема) и др.

При этом В. М. Глушков и его соавторы отмечали, что важно получить необходимые и, отдельно, достаточные условия, позволяющие в определенных случаях установить принадлежность языка классу кс-языков [28].

Естественно, что аналитический подход (применение методов многомерного комплексного анализа, сравнительно новых для теории формальных языков) мог бы способствовать её дальнейшему развитию.

Однако, в рамках аналитического подхода было отмечено, что из совместности некоммутативной системы уравнений следует совместность её коммутативного образа, но обратное утверждение неверно, т. е. из свместности коммутативного образа не следует совместность исходной некоммутативной системы.

Из-за этого вопрос об исследовании некоммутативной системы по свойствам её коммутативного образа оставался открытым, поскольку неясно, какие свойства коммутативного образа трансформируются в свойства некоммутативной системы и порождаемого ею языка.

Отметим, что возможность применения коммутативного образа ФСР при решении рассмотренной выше проблемы академика В. М. Глушкова об установлении критериев, с помощью которых можно выяснить, является данный ФСР кс-языком или нет, обусловлена тем, что коммутативный образ кс-языка является кратным степенным рядом, представляющим алгебраическую функцию многих комплексных переменных.

Таким образом, возможно получить частичное решение этой проблемы, используя некоторые критерии алгебраичности для суммы степенного ряда [74, 78].

Прежде всего отметим, что алгебраичность функции нескольких переменных, в силу известной теоремы Гартогса, эквивалентна алгебраичности по каждой переменной в отдельности при фиксированных значениях остальных переменных, поэтому достаточно опираться на критерии для степенного ряда с одной переменной

$$a(x) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k x^k. \tag{1.5}$$

Для простейших алгебраических функций, какими являются рациональные функции, вопрос о хорошо известен критерий Кронекера, согласно которому рациональность суммы стененного ряда (1.5) равносильна тому, что при $j \geq j_0,\ l \geq l_0$, равны нулю определители Ганкеля

$$H_j^{(l)} = \begin{vmatrix} a_j & a_{j+1} & \dots & a_{j+l} \\ a_{j+1} & a_{j+2} & \dots & a_{j+l+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{j+l} & a_{j+l+1} & \dots & a_{j+2l} \end{vmatrix}.$$

Вопрос об обобщении критерия Кронекера на степенные ряды агебраических функций, был решен в работе [78], и решение этого вопроса состоит в следующем.

Обозначим

$$a_k^{(1)} = \sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i},$$

$$a_k^{(j)} = \sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i}^{(j-1)},$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

$$j = 2, 3, \ldots,$$

тогда имеет место следующая теорема: для того чтобы функция (1.5) была алгебраической, необходимо и достаточно существование чисел d, j_0, l_0, таких, что при всех $j \geq j_0, l \geq l_0$ выполнены равенства

$$H_j^{(l)} = 0,$$

где

$$H_j^{(l)}(d) = \begin{vmatrix} a_j & \ldots & a_{j+l} & a_j^{(1)} & \ldots & a_{j+l}^{(1)} & \ldots & a_j^{(d-1)} & \ldots & a_{j+l}^{(d-1)} \\ a_{j+1} & \ldots & a_{j+l+l} & a_{j+1}^{(1)} & \ldots & a_{j+l+1}^{(1)} & \ldots & a_{j+1}^{(d-1)} & \ldots & a_{j+l+1}^{(d-1)} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{j+q} & \ldots & a_{j+q+l} & a_{j+q}^{(1)} & \ldots & a_{j+q+l}^{(1)} & \ldots & a_{j+q}^{(d-1)} & \ldots & a_{j+q+l}^{(d-1)} \end{vmatrix}$$

– обобщенный определитель Ганкеля степени d, а число $q = (l+1)d - 1$.

Данная теорема действительно обобщает критерий Кронекера о рациональности: если функция — рациональная, то степень определяющего ее многочлена $d = 1$, и имеет место равенство

$$H_j^{(l)}(d) = H_j^{(l)},$$

т.е. в этом случае получается равенство нулю классического определителя Ганкеля.

Известен ещё один критерий алгебраичности суммы степенного ряда функции нескольеих переменных [74].

А именно, рассмотрим m–кратный степенной ряд

$$a(x) = \sum_{\alpha \in I_1} a_\alpha x^\alpha, \tag{1.6}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ – целочисленный мультииндекс, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^m$, $I_1 = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) : \ \alpha_1 \geq 1\}$, который сходится в окрестности нуля.

Пусть степенной ряд

$$R(x_0, x) = \sum_{\alpha \geq 0, \alpha \in I_1} R_{\alpha_0, \alpha} x_0^{\alpha_0} x^\alpha \tag{1.7}$$

также сходится в окрестности начала координат; здесь α_0 — целочисленный скалярный индекс, $x_0 \in \mathbb{C}^1$ и

$$R_{\alpha_0,\alpha} x_0^{\alpha_0} x^\alpha = R_{\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_m^{\alpha_m}.$$

Коэффициенты степенных рядов алгебраических функций от m переменных тесно связаны с коэффициентами степенных рядов рациональных от $m+1$ переменных.

А именно, имеет место следующая теорема [74]: для того чтобы голоморфная в окрестности нуля функция (1.6) являлась алгебраической достаточно существование голоморфной в окрестности начала координат рациональной функции (1.7), такой, что для всех $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ имело место равенство

$$a_\alpha = R_{\alpha_1, \alpha},$$

и необходимо существование голоморфной в нуле рациональной функции (1.7), такой, что при всех α

$$a_\alpha = R_{\beta_1,\beta}\Big|_{\beta=\alpha A}, \tag{1.8}$$

здесь $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, A – унимодулярная матрица порядка n с неотрицательными целыми элементами.

Ряд (1.6) называется диагональю ряда (1.7), если при некоторой унимодулярной матрице A для этих рядов выполнено условие (1.8).

Если $A = E$, E — единичная матрица, то условие (1.8) имеет вид $a_\alpha = R_{\alpha_1,\alpha}$; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

В случае $m = 1$ теорему можно сформулировать следующим образом: для того, чтобы голоморфная в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^1$ функция

$$a(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$$

была алгебраической, необходимо и достаточно существование симметричной относительно переменных z_1, z_2 рациональной функции

$$R(z_1, z_2) = \sum_{k_1,k_2\geq 0} R_{k_1,k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

голоморфной в окрестности точки $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, такой, что

$$\sum_{k\geq 0} a_k z^k = \sum_{k\geq 0} R_{kk} z^k.$$

Таким образом, можно установить, что коммутативный образ формального языка является алгебраической функцией, что частично решает проблему академика В. М. Глушкова.

1.3 Существование и единственность языка, порождаемого полиномиальной грамматикой

Выше отмечалась целесообразность рассмотрения с общих позиций вопросов разрешимости полиномиальных грамматик, т. е. вопросов, связанных с условиями существования полиномиальных языков, порождённых данной полиномиальной грамматикой, единственности таких языков, а также бесконечности их числа.

Перейдём к рассмотрению вопроса о существовании и единственности полиномиального языка.

Для этого рассмотрим коммутативный образ системы символьных полиномиальных уравнений, представляющий собой систему полиномиальных уравнений в $\mathbb{C}^{n+m}_{z,x}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если*

$$z = z(x) = (z_1(x), \ldots, z_n(x))$$

— решение некоммутативной системы уравнений (1.3) в виде символьных ФСР, то коммутативные кратные степенные ряды

$$z = ci(z(x)) = (ci(z_1(x)), \ldots, ci(z_n(x)))$$

над полем комплексных чисел сходятся в окрестности нуля, определяя ростки голоморфных алгебраических функций, и являются решением коммутативной системы уравнений

$$ci(P_j(z, x)) = 0,\ ci(P_j(0, 0)) = 0,\ j = 1, \ldots, k. \tag{1.9}$$

Доказательство. Пусть решение

$$z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))$$

системы (1.3), представленное ФСР :

$$z_1(x) = \sum_i \langle z_1, u_i \rangle \ u_i \ ,$$

$$\dots$$

$$z_n(x) = \sum_i \langle z_n, u_i \rangle \ u_i \ .$$

Отметим, что, подставляя это решение системы (1.3) в многочлен $P_j(z, x)$, стоящий в левой части уравнений, получаем ФСР в виде разложения по универсальному базису с нулевыми коэффициентами:

$$l_j = \sum_i \langle l_j, u_i \rangle \ u_i \ =$$

$$= \sum_i \ 0 \cdot u_i;$$

$$j = 1, \dots, k.$$

Тогда имеют место равенства:

$$ci(P_j(z, x))|_{z=ci(z(x))} =$$

$$= ci(P_j(z(x), x)) =$$

$$= ci(l_j) = \sum_i \ 0 \cdot ci(u_i),$$

$$j = 1, \dots, k,$$

т. е. совокупность коммутативных ФСР удовлетворяет системе уравнений (1.5).

Далее, покажем, что все ФСР $ci(z(x))$ сходятся в некоторой окрестности нуля. В самом деле, если ФСР над полем комплексных чисел удовлетворяет уравнению с голоморфными коэффициентами (функциями, представленными абсолютно сходящимися в окрестности нуля степенными рядами), то он также абсолютно сходится в некоторой окрестности нуля, представляя голоморфную функцию [92, 93]. Следовательно, коммутативные ФСР $ci(z(x))$ сходятся в некоторой окрестности нуля, порождая ростки алгебраической вектор-функции, а решения (z, x) системы (1.5), рассматриваемые как точки в комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n+m}_{z,x}$, можно записать с помощью этой вектор-функция в виде $(z(x), x)$.

Подчеркнём, что совместность понимается для некоммутативной системы (1.3) и коммутативной системы (1.5) по-разному: в первом случае решением являются символьные ФСР от $x_1, \ldots, x_m$, а во втором — точки в комплексном пространстве, параметризованные алгебраическим отображением $z = z(x)$; его голоморфные в нуле ветви являются коммутативными образами символьных ФСР, представляющих компоненты решения системы (1.3).

По теореме 1.1, если некоммутативная система (1.3) совместна, то коммутативная система (1.5) имеет голоморфное в начале координат решение. Обратное, вообще говоря, неверно, что показывает следующий пример.

Пример 1.1. Система уравнений

$$z_1 - z_2 = x_1 x_2,$$

$$z_1 - z_2 = x_2 x_1$$

является несовместной, тем не менее её коммутативный образ имеет решение:

$$z_1 = s + x_1 x_2, \ z_2 = s,$$

где s — произвольный коммутативный ФСР.

Таким образом, можно сделать следующие замечания.

Замечание 1.1. Множество решений системы уравнений (1.5), вообще говоря, шире, чем множество коммутативных образов решений системы уравнений (1.3), и из совместности системы уравнений (1.5) не следует совместность исходной некоммутативной системы (1.3).

Замечание 1.2. Естественная гипотеза о том, что система (1.3) совместна тогда и только тогда, когда система (1.5) имеет голоморфное в начале координат решение $z = z(x)$ неверна.

Обозначим два множества ростков аналитических множеств в начале координат (множеств нулей аналитических функций в сколь угодно малых окрестностях нуля):

$$ci(S_P) = \{z = ci(z(x)) : \ P_j(z(x), x) = 0, \ j = 1, \ldots, k\},$$

$$S_{ci(P)} = \{z = z(x) : \ ci(P_j(z(x), x)) = 0, \ j = 1, \ldots, k\}.$$

Основываясь на последнем примере и сделанных обозначениях, сформулируем теорему 1.1 следующим образом.

Теорема 1.2. *Имеет место включение*

$$ci(S_P) \subseteq S_{ci(P)}.$$

Далее, нам понадобится рассмотреть простейший случай полиномиальной зависимости, какой является линейная зависимость.

В связи с этим мы называем рангом матрицы A наибольшее число её строк, линейно независимых над полем комплексных чисел; обозначим его $rank(A)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть*

$$A = (a_{ij}(x))_{i=1,j=1}^{k,\,n}$$

— матрица, элементы которой являются многочленами от символьных некоммутативных переменных $x = (x_1, \ldots, x_m)$, и матрица

$$ci(A) = (ci(a_{ij}(x)))_{i=1,j=1}^{k,\,n}$$

является её коммутативным образом. Тогда выполнено неравенство

$$rank(ci(A)) \le rank(A).$$

Доказательство. Пусть, для определённости, линейно независимыми являются строки с номерами $1, \ldots, r$, следовательно, $rank(A) = r$. Приравнивая к нулю линейную комбинацию этих строк с коэффициентами $z_1, \ldots, z_r$, получим систему полиномиальных уравнений

$$z_1 a_{1j}(x) + \cdots + z_r a_{rj}(x) = 0,$$

$$j = 1, \ldots, n,$$

которая имеет единственное решение в виде ФСР: $z_1 = \cdots = z_r = 0$.

Коммутативный образ этой системы уравнений

$$z_1 ci(a_{1j}(x)) + \cdots + z_r ci(a_{rj}(x)) = 0,$$

$$j = 1, \ldots, n,$$

в соответствии с замечанием 1.1, может иметь более широкое множество решений, включающее решение $z_1 = \cdots = z_r = 0$. В этом случае коммутативные образы исходных строк являются линейно зависимыми, следовательно,

$$rank(ci(A)) \leq rank(A).$$

Отметим также, что теореме 1.1 эквивалентна следующая теорема.

Теорема 1.4. *Если коммутативная система уравнений (1.5) не имеет решения, голоморфного в начале координат, то некоммутативная система (1.3) несовместна.*

Таким образом, условия несовместности системы уравнений (1.3) также представляют интерес в теории формальных языков и грамматик.

Конечно, наибольший интерес для приложений представляют условия, которые обеспечивают совместность системы некоммутативных символьных уравнений (1.3), а также единственность её решения.

Согласно замечанию 1.2, таким условием не может быть существование голоморфного в начале координат решения системы коммутативных уравнений (1.5).

Тем не менее, это условие можно получить с помощью такого инструмента, как якобиан системы функций.

Рассмотрим систему уравнений (1.3) в случае, когда $k = n$.

Пусть

$$J(z,x) = \det\left(\frac{\partial ci(P_i(z,x))}{\partial z_j}\right) =$$
$$= \det((ci(P_i(z,x)))'_{z_j})$$

— якобиан системы уравнений (1.3) относительно переменных $z_1, \ldots, z_n$.

Символьным, или дискретным аналогом известной теоремы о неявном отображении является следующая теорема.

Теорема 1.5. *Если для полиномиальной грамматики (некоммутативной символьной системы уравнений) (1.3) выполнено неравенство*

$$J(0,0) \neq 0$$

, то она имеет единственное решение в виде ФСР.

Замечание 1.3. Неравенство

$$J(0,0) \neq 0$$

является условием теоремы о неявном отображении для коммутативной системы уравнений (1.5) с переменными в $\mathbb{C}^{n+m}_{z,x}$ и влечёт существование и единственность её голоморфного решения; тем не менее оказывается, что это неравенство влечёт также существование и единственность решения исходной некоммутативной символьной системы уравнений (1.3).

Доказательство. Обозначим

$$L_1(z), \dots, L_n(z)$$

линейные части многочленов

$$P_1(z,x), \dots, P_n(z,x)$$

соответственно, зависящие только от $z_1, \dots, z_n$:

$$L_j(z) = a_{j1}z_1 + \dots + a_{jn}z_n,$$

$$j = 1, \dots, n.$$

Далее, обозначая многочлены

$$S_j(z,x) = L_j(z) - P_j(z,x),$$

запишем исходную систему уравнений в виде:

$$a_{j1}z_1 + \cdots + a_{jn}z_n = S_j(z,x);\; j = 1,\ldots,n. \tag{1.10}$$

Рассмотрим число $J(0,0)$; легко видеть, что имеют место равенства

$$J(0,0) =$$

$$\det((ci(L_i(z)))'_{z_j}) =$$

$$= \det(((L_i(z))'_{z_j}) =$$

$$= \det(a_{ij}).$$

Поскольку

$$\det(a_{ij}) \neq 0,$$

матрицу (a_{ij}) можно привести к диагональному виду, умножая уравнения системы (1.6) на числа и складывая их [27].

При этом система (1.6) перейдёт в эквивалентную собственную систему уравнений Хомского — Щутценберже (1.1), в которой правые части уравнений не содержат линейных членов.

Как отмечалось выше, эта система имеет единственное решение, которое можно получить методом последовательных приближений:

$$z^{(k+1)}(x) = Q(z^{(k)}(x), x),$$

$$k = 0, 1, \ldots;$$

$$z^{(0)} = 0;$$

$$Q(z,x) = (Q_1(z,x), \ldots, Q_n(z,x)),$$

$$z(x) = \lim_{k\to\infty} z^{(k)}(x).$$

Теорема 1.5 доказана.

Замечание 1.4. Неравенство

$$J(0,0) \neq 0$$

обусловлено свойствами линейных многочленов

$$L_1(z), \ldots, L_n(z),$$

а они совпадают со своими коммутативными образами. По этой причине неравенство влечёт совместность не только коммутативной, но и некоммутативной системы уравнений.

1.4 Полиномиальные грамматики, порождающие бесконечное число языков

Рассмотрим вопрос о полиномиальных грамматиках, которые могут порождать более одного полиномиального языка.

Уравнения различной природы часто обладают тем свойством, что для них имеет место альтернатива: имеется единственное решение, либо бесконечно много решений.

Применительно к полиномиальным грамматикам, случаю единственного решения посвящён предыдущий раздел.

Теперь рассмотрим случай, когда полиномиальная грамматика (система некоммутативных уравнений (1.3)) имеет бесконечно много решений (порождает бесконечно много полиномиальных языков).

Для уравнений с числовыми неизвестными наличие бесконечного числа решений обычно означает, что общее решение этого уравнения зависит от одного или нескольких числовых параметров. Для полиномиальных грамматик ситуация в определённом смысле аналогичная, однако смысл параметров иной.

Дадим следующее определение.

Определение 1.2. *Будем говорить, что полиномиальная грамматика (1.3) имеет бесконечно много решений (порождает бесконечно много языков), если множество решений системы (1.3) зависит хотя бы от одного произвольного ФСР от символов* $x_1, \ldots, x_m$.

Так, система из двух одинаковых уравнений

$$x_1 z_1 - z_2 x_2 = 0$$

имеет бесконечно много решений, поскольку её решения можно записать в виде

$$z_1 = sx_2,\ z_2 = x_1 s$$

, где s — произвольный ФСР от $x_1,\ x_2$.

Пусть, как в предыдущем разделе,

$$J(z,x) = \det\left(\frac{\partial(ci(P_i(z,x)))}{\partial z_j}\right).$$

— якобиан системы уравнений (1.5) относительно переменных $z_1, ..., z_n$.

Для систем уравнений уравнений комплексными переменными известна следующая теорема.

Теорема ([3], с. 39)**.** *Пусть выполнено равенство*

$$\det\left(\frac{\partial(ci(P_i(z,x)))}{\partial z_j}\right) \equiv 0,$$

тогда система уравнений (1.5) либо не имеет решения для каждого x в пространстве $\mathbb{C}_z^n$, либо все её решения в этом пространстве — неизолированные.

Прежде всего, рассмотрим вопрос об аналоге этой теоремы для случая некоммутативных переменных, в котором решения системы — полиномиальные языки, представленные ФСР.

Оказывается, для некоммутативной системы уравнений (1.3) такая альтернатива (нет решений — бесконечно много решений) не имеет места, что показывают следующие два примера.

Пример 1.2. Рассмотрим систему, состоящую из двух одинаковых уравнений:

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 - x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0.$$

Коммутативный образ этой системы имеет якобиан, тождественно равный нулю, тем не менее исходная некоммутативная система имеет единственное решение.

В самом деле, записывая систему уравнений в виде

$$x_1(z_1 - x_2) + x_2(z_2 - x_1) = 0,$$

мы получаем, что первое слагаемое в этой сумме принадлежит левому идеалу, порождённому x_1, и второе слагаемое принадлежит левому идеалу, порождённому x_2. Очевидно, что сумма этих слагаемых может быть равной нулю только в случае, когда оба слагаемых равны нулю:

$$z_1 - x_2 = 0, z_2 - x_1 = 0.$$

Следовательно, исходная система уравнений имеет единственное решение

$$z_1 = x_2, z_2 = x_1.$$

Пример 1.3. Система из двух одинаковых уравнений

$$x_1(z_1 - x_1)(z_1 - x_2) + x_2(z_2 - x_1)(z_2 - x_2) = 0,$$

имеющая четыре решения

$$z_1 = x_1,\ z_2 = x_1,$$

$$z_1 = x_1,\ z_2 = x_2,$$

$$z_1 = x_2,\ z_2 = x_1,$$

$$z_1 = x_2,\ z_2 = x_2,$$

показывает, что число рещений некоммутативной системы (коммутативный образ которой имеет якобиан, тождественно равный нулю) может быть любым.

Таким образом, можно сделать следующее замечание.

Замечание 1.5. В случае, когда рассматриваемый якобиан тодественно равен нулю, исходная система некомутативных уравнений может: не иметь решений, иметь любое конечное число решений, иметь бесконечно много решений.

Кроме того, учитывая, что система из n одинаковых уравнений с n некоммутативными неизвестными $z_1, \dots, z_n$

$$f = 0,$$

$$\dots$$

$$f = 0,$$

имеющая тождественно равный нулю якобиан, эквивалентна одному уравнению $f = 0$, сформулируем следующее замечание.

Замечание 1.6. Одно уравнение с некоммутативными неизвестными

$$P_1(z.x) = 0$$

может: не иметь решений, а также иметь конечное и бесконечное число решений; в этом состоит фундаментальное отличие от одного уравнения над полем комплексных чисел, которое всегда имеет решения.

Для подтверждения того, что одно уравнение может не иметь решений, приведём следующий пример.

Пример 1.4. Расмотрим уравнение

$$x_1(z_1 - x_1) + x_2(z_1 - x_2) = 0,$$

в котором первое слагаемое принадлежит левому идеалу, порождённому x_1, а второе — левому идеалу, порождённому x_2. Очевидно, что сумма этих слагаемых может быть равной нулю только в случае, когда оба слагаемых равны нулю:

$$z_1 - x_1 = 0,$$

$$z_2 - x_2 = 0.$$

Значит, уравнение имеет решение

$$z_1 = x_1, z_1 = x_2,$$

что невозможно, т. е. уравнение не имеет решений.

Причина этого эффекта состоит в том, что некоммутативное полиномиальное уравнение может быть эквивалентно системе полиномиальных уравнений, в частности, как было показано, уравнение

$$x_1A_1 + x_2A_2 = 0$$

равносильно системе полиномиальных уравнений $A_1 = A_2 = 0$.

В случае комплексных переменных, как было отмечено выше, такого эффекта нет.

Глава 2

Синтаксический анализ языков программирования методом интегрального представления синтаксических полиномов

2.1 Проблема синтаксического анализа контекстно–свободных языков и метод мономиальных меток

Для того, чтобы сформулировать проблему синтаксического анализа программ, написанных на языке программирования, отметим следующее.

Во–первых, большинство языков программирования являются, как отмечалось выше, кс–языками, поэтому имеет смысл говорить о проблеме синтаксического анализа мономов кс–языка.

Во–вторых, необходимо напомнить, как строится система полиномиальных уравнений Хомского — Щутценберже, которая определяет кс-язык.

Итак, рассмотрим подробно грамматику кс-языка, которая представляет собой множество правил подстановки

$$z_j \to \ q_{j1}(z,x),\ \dots\ , z_j \to \ q_{jp_j}(z,x),\ j = 1,\ \dots\ , n, \tag{2.1}$$

где $q_{jk}(z,x)$ является мономом от некоммутативных символьных переменных с числовым коэффициентом, равным единице.

Правила подстановки применяются к начальному символу z_1, а затем к другим мономам в любом порядке и неограниченное число раз, что позволяют выводить новые «правильные» мономы, образующие кс-язык.

Как отмечалось выше, многочлены, стоящие в правой части системы уравнений Хомского — Щутценберже

$$z_j = Q_j(z,x),\ j = 1,\ \dots\ , n, \tag{2.2}$$

определяются равенствами:

$$Q_j(z,x) = \ q_{j1}(z,x) + \ \cdots\ + q_{jp_j}(z,x),$$

$$j = 1,\ \dots\ , n.$$

Итак, проблема синтаксического анализа мономов состоит в том, чтобы определить, принадлежит ли моном данному кс-языку, т.е. может ли быть получен из начального символа z_1 при помощи правил подстановки (2.1), а также установить, какие правила подстановки и сколько раз использовались при выводе этого монома. Важно отметить, что при этом порядок использования правил подстановки не имеет значения [28].

В работе [76] предложен метод мономиальных меток, который позволяет провести беступиковый синтаксический анализ монома v от терминальных символов $x_1, \dots, x_m$.

Метод мономиальных меток состоит в следующем.

Сначала каждое правило подстановки $z_j \to q_{jk}(z, x)$ заменяется правилом $z_j \to t_{jk} q_{jk}(z, x)$, имеющим мономиальную метку t_{jk}, которая является символом из расширенного алфавита. Затем для новых правил вывода рассматривается соответствующая система уравнений Хомского — Щутценберже:

$$z_j = Q_j^*(z, x, t) \stackrel{\text{def}}{=} t_{j1} q_{j1}(z, x) + \ \cdots \ + t_{jp_j} q_{jp_j}(z, x), \ j = 1, \ \ldots \ , n. \quad (2.3)$$

Далее, решение системы (2.3) можно получить методом последовательных приближений, о котором говорилось в главе 1:

$$z^{(k+1)}(x, t) = Q^*(z^{(k)}(x, t), x, t);$$

$$k = 0, 1, \ldots; \ z^{(0)} = 0.$$

Как результат, решение получается в виде ФСР

$$z_j = z_j^*(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle z_j^*, w_i \rangle \ w_i; \ j = 1, \ldots, n, \quad (2.4)$$

где w_i — мономы от символов

$$x_1, \ldots, x_m, t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{np_n}$$

.

Заметим, что если каждый символ t_{jk} заменить пустой цепочкой e, то решения систем уравнений (2.2) и (2.3) совпадают:

$$z_j^*(x, e) = z_j(x); \ j = 1, \ldots, n. \quad (2.5)$$

Теперь итерации метода последовательных приближений для системы уравнений (2.3) дают многочлены возрастающей степени относительно всех символов

$$x_1, \ldots, x_m, t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{np_n},$$

при этом мономы степени не выше $\deg_x(v)$ относительно символов

$$x_1, \ldots, x_m$$

после конечного числа итераций стабилизируются, не меняясь при последующих итерациях. Таким образом, можно получить начальные члены решения системы (2.3) в виде ФСР (2.4) до любой, сколь угодно высокой степени, в том числе члены ФСР, представляющего первую компоненту этого решения:

$$z_1 = z_1^*(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle z_j^*, w_i \rangle \; w_i \tag{2.6}$$

Наконец, синтаксический анализ монома v кс-языка $z_1(x)$ можно провести следующим образом. Считывая мономы степени $\deg_x(v)$ относительно символов $x_1, \ \ldots \ , x_m$ и пропуская символы t_{jk}, можно установить, есть ли среди них моном v, а значит, можно ли вывести его с помощью системы продукций (2.1).

При этом каждая мономиальная метка t_{jk}, содержащаяся в таком мономе, показывает, что при его выводе использовалось правило

$$z_j \to t_{jk} \; q_{jk}(z, x)$$

. В самом деле, из системы уравнений (2.3) и метода последовательных приближений нетрудно видеть, что, применяя это правило вывода к моному, мы умножаем его слева на символ t_{jk}.

Следовательно, мономиальные метки монома решают проблему его синтаксического анализа, показывая, какие правила вывода кс-языка и сколько раз использовались при выводе этого монома, с точностью до порядка их применения.

Как итог, было доказано [76], что метод мономиальных меток позволяет провести за конечное число шагов беступиковый синтаксический анализ любого монома (программы) кс-языка, заданного грамматикой (2.1).

Очевидно, что недостатком метода мономиальных меток является большое число громоздких итераций метода последовательных приближений, необходимых для получения начальных членов ФСР (2.5), причём это число возрастает вместе с ростом степени монома v.

В связи с этим ниже предлагается другой путь для получения мономиальных меток некоммутативного монома.

2.2 Синтаксический анализ контекстно-свободных языков и синтаксический полином программы

В предыдущем разделе было сказано, как получить мономиальные метки монома, решающие вопрос о его сиптаксическом анализе. Для этого необходимо получить большое число мономов кс-языка, растущее вместе со степенью данного монома, что трудно осуществлять на практике.

В связи с этим целесообразно найти способ «извлечь» из грамматики кс-языка мономиальные метки данного монома, не выписывая множество других мономов.

Рассмотрим коммутативный образ ФСР (2.6). Сгруппируем его в кратный ряд Гартогса по степеням x^α с коэффициентами от t:

$$ci(z_1^*(x,t)) = \sum_\alpha s_\alpha(t)\ x^\alpha\ . \tag{2.7}$$

Символы t, от которых зависят коэффициенты ряда Гартогса (2.7), являются мономиальными метками некоторых мономов из ФСР (2.6). Выясним, какую информацию несут в себе коэффициенты $s_\alpha(t)$.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *При всех мультииндеках α голоморфные в нуле коэффициенты ряда Гартогса $s_\alpha(t)$ являются полиномами.*

Доказательство. Как отмечено выше, числовые коэффициенты системы уравнений (2.3) равны единице, поэтому коэффициенты ФСР (2.6) являются целыми и положительными числами. Отсюда следует, что коэффициенты каждого степенного ряда также являются целыми и положительными числами, а число $s_\alpha(e)$ равно сумме этих коэффициентов.

Из равенств (9) и (11) следует равенство

$$ci(z_1(x)) = \sum_{\alpha} s_\alpha(e)\ x^\alpha\ ,$$

которое влечёт неравенство $s_\alpha(e) < \infty$.

Это значит, что сумма неотрицательных целых коэффициентов степенного ряда функции $s_\alpha(e)$ конечна, следовательно, эта функция является полиномом. Лемма 2.1 доказана.

Определение 2.1. *Синтаксическим полиномом монома* v *относительно кс-языка* $z_1(x) = z_1^*(x, e)$ *называется коэффициент* $s_\alpha(t)$ *ряда Гартогса (2.7), такой, что* $x^\alpha = ci(v)$.

Далее рассмотрим, может ли исчезнуть информация, которую несут мономиальные метки, содержащиеся в некоммутативных мономах ФСР (2.6), при переходе к его коммутативному образу (2.7), имеющему в качестве коэффициентов синтаксические полиномы.

Так, если бы ФСР (2.6) содержал, к примеру, мономы

$$5t_1x_1t_2x_2$$

и

$$-5t_2x_2t_1x_1,$$

то при переходе к коммутативному образу суммы этих мономов

$$ci(5t_1x_1t_2x_2 - 5t_2x_2t_1x_1) = 0$$

они бы сократились, а информация о синтаксическом анализе этих мономов, заложенная в мономиальные метки, исчезла.

Однако, в случае кс-грамматик и кс-языков полной потери мономиальных меток происходить не может. Это обусловлено тем, что, как отмечалось выше, все коэффициенты ФСР (2.6), порождённого кс-грамматикой, являются целыми положительными числами и при переходе к коммутативному образу мономы не сокращаются.

В частности, отсюда следует, что если синтаксический полином монома относительно кс-языка равен нулю, то моном не принадлежит этому языку.

Тем не менее, частичная потеря информации о синтаксическом анализе мономов может происходить.

Так, если коэффициент ряда Гартогса (2.7) при мономе x_1x_2 (т. е. синтаксический полином некоторого монома, имеющего коммутативный образ x_1x_2) равен

$$s_{11}(t_1, t_2) = 3t_1t_2,$$

то это значит, что t_1 и t_2 — мономиальные метки, соответствующие моному x_1x_2, либо моному x_2x_1, либо обоим мономам одновременно.

Таким образом, для проведения синтаксического анализа монома v, такого, что

$$ci(v) = x^\alpha$$

, следует найти соответствующий синтаксический полином $s_\alpha(t)$.

Далее, каждый моном полинома $s_\alpha(t)$ является произведением мономиальных меток правил подстановки, которые позволяют получить некоторые мономы, имеющие тот же коммутативный образ x^α.

Это значит, что для завершения синтаксического анализа монома v остаётся проверить, можно ли его действительно получить с помощью правил подстановки, соответствующих всем мономам синтаксического полинома $s_\alpha(t)$.

Такая процедура эффективно выполняется, поскольку сводтся к последовательному применению конечного числа правил вывода и сравнению полученного монома с тем, который анализируется.

Возникает задача нахождения синтаксического полинома для любого монома данного кс-языка.

В следующем разделе будет показано, что синтаксический полином, содержащий информацию о мономиальных метках монома, можно получить в виде $(n+m)$-кратного интеграла по циклу, где числа n и m не зависят от степени монома и равны числу нетерминальных и терминальных символов грамматики кс-языка соответственно.

2.3 Интегральные представления синтаксического полинома

Следующая теорема даёт принципиальную возможность получить синтаксические полиномы $s_\alpha(t)$ в виде кратного интеграла по циклу, который может быть вычислен с помощью многомерных вычетов.

Теорема 2.2. *При всех t, достаточно близких к нулю, и всех мультииндексах α синтаксический полином $s_\alpha(t)$ задаётся равенством*

$$s_\alpha(t) = \frac{1}{(2\pi i)^{n+m}} \int\limits_{\gamma_z \times \Gamma_x} \frac{z_1 \det\bigl(\delta_{ij} - (ci(Q_i^*(z,x,t)))'_{z_j}\bigr)\ dz \wedge dx}{(z - ci(Q^*(z,x,t)))\ x^{\alpha+I}}, \qquad (2.8)$$

где

$$\gamma_z = \bigl\{|z_1| = \cdots = |z_n| = \epsilon\bigr\}$$

и

$$\Gamma_x = \bigl\{|x_1| = \cdots = |x_m| = \delta\bigr\}$$

— циклы интегрирования, $\quad 0 < \delta \ll \epsilon \ll 1,$

$$dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n,$$

$$dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

$$x^{\alpha+I} = x_1^{\alpha_1+1} \cdot\ \cdots\ \cdot x_m^{\alpha_m+1},$$

$$(z - ci(Q^*(z,x,t))) =$$

$$= (z_1 - ci(Q_1^*(z,x,t))) \cdot\ \cdots\ \cdot (z_n - ci(Q_n^*(z,x,t))),$$

и δ_{ij} — дельта Кронекера.

Ещё одно интегральное представление синтаксического многочлена даёт следующая теорема.

Теорема 2.3. *При всех t, достаточно близких к нулю, и всех мультииндексах α синтаксический полином $s_\alpha(t)$ задаётся равенством*

$$s_\alpha(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n \alpha!} \int\limits_{\gamma_z} \frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x^\alpha} \Big(\frac{z_1 \det\big(\delta_{ij} - (ci(Q_i^*(z,x,t)))'_{z_j}\big)}{(z - ci(Q^*(z,x,t)))} \Big)\Big|_{x=0} \, dz, \quad (2.9)$$

где

$$\gamma_z = \{|z_1| = \cdots = |z_n| = \epsilon\}$$

— цикл интегрирования, $0 < \epsilon \ll 1$,

$$dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \ \cdots \ \cdot \alpha_m!,$$

$$(z - ci(Q^*(z,x,t))) =$$

$$= (z_1 - ci(Q_1^*(z,x,t))) \cdot \ \cdots \ \cdot (z_n - ci(Q_n^*(z,x,t))),$$

$$\frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ \cdot \ \cdots \ \cdot \ \partial x_m^{\alpha_m}},$$

и δ_{ij} — дельта Кронекера.

Для доказательства теорем 2.2 и 2.3 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.4. *При всех (x,t), достаточно близких к нулю, голоморфная в нуле алгебраическая функция $ci(z_1^*(x,t))$, представленная рядом Гартогса (2.7), задаётся формулой*

$$ci(z_1^*(x,t)) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma_z} \frac{z_1 \det\big(\delta_{ij} - (ci(Q_i^*(z,x,t)))'_{z_j}\big)}{(z - ci(Q^*(z,x,t)))} \, dz. \quad (2.10)$$

Доказательство. Во–первых, отметим, что

$$\det\big(\delta_{ij} - (ci(Q_i^*(z,x,t)))'_{z_j}\big) =$$

$$= J_1(z,x)$$

— якобиан системы функций

$$\big(z_1 - ci(Q_1^*(z,x,t)),\ \dots\ , z_n - ci(Q_n^*(z,x,t)\big)$$

по переменным $z_1,\ \dots\ , z_n$.

Так как

$$\det\big((ci(Q_i^*(0,0,0)))'_{z_j}\big) = 0,$$

то $J_1(0,0) = 1$, следовательно, по теореме о неявном отображении, система уравнений

$$z_j - ci(Q_j^*(z,x,t)) = 0;$$

$$j = 1,\ \dots\ , n,$$

имеет в окрестности начала координат единственное и голоморфное решение

$$z_j = ci(z_j^*(x,t)) = ci\Big(\sum_{i=o}^{\infty}\langle z_j^*, w_j\rangle\, w_j\Big);$$
$$j = 1,\ \dots\ , n.$$

Далее, если $z \in \gamma_z$, то при всех (x,t), достаточно близких к нулю, выполнены неравенства

$$|z_j| \geq |ci(Q_j^*(z,x,t))|;$$

$$j = 1,\ \dots\ , n,$$

поэтому на цикле интегрирования знаменатель подынтегральной рациональной функции в интеграле (2.10) не обращается в нуль.

Наконец, из формулы многомерного логарифмического вычета следует [**?**, 45, 94], что формула (2.10) верна. Лемма 2.4 доказана.

Доказательство теорем 2.2 и 2.3. Коэффициенты ряда Гартогса, сходящегося в окрестности нуля, могут быть представлены формулой Коши

$$s_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_x} \frac{ci(z_1^*(x,t))\ dx}{x^{\alpha+I}}, \tag{2.11}$$

либо формулой Тейлора

$$s_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x^\alpha} (ci(z_1^*(0,t))). \tag{2.12}$$

Из формул (2.10), (2.11) и (2.12) с учетом теоремы Фубини, утверждающей равенство кратного и повторного интеграла, следует, что формулы (2.8) и (2.9) верны. Теоремы 2.2 и 2.3 доказаны.

2.4 Пример синтаксического анализа программы методом интегрального представления синтаксического полинома

Следуя монографии Глушкова В. М., Цейтлина Г. Е., Ющенко Е. Л. [28], рассмотрим кс-язык арифметических выражений, порождённый грамматикой с системой правил подстановки

$$z_1 \to (z_1 * z_2), \tag{2.13}$$

$$z_1 \to (a + b), \tag{2.14}$$

$$z_2 \to b. \tag{2.15}$$

В монографии [28] рассмотрено также выражение

$$(((a + b) * b) * b)$$

как программа, написаннаю на этом языке, и проведён её синтаксический анализ.

Известные методы синтаксического анализа (свёрткой и развёрткой) показывают [28, с. 247], что для получения этой программы необходимо два раза использовать правило подстановки (2.13), один раз правило (2.14) и два раза правило (2.15).

Так, синтаксический анализ программы можно провести известным методом свёртки [28, с. 247]. Для этого считывается программа

$$(((a + b) * b) * b)$$

и определяется какая-либо группа символов, совпадающая с правой частью одного из правил вывода (2.13) — (2.15). Такой группой символов является выражение $(a + b)$, стоящее в правой части правила вывода (2.14); заменяем её в программе левой частью этого правила, т. е. выражением z_1.

Считывая полученное выражение

$$((z_1 * b) * b)$$

и снова выявляя в нём правые части правил вывода (2.13) — (2.15), установим, что такой правой частью является первый слева символ b.

Заменяя его на левую частью продукции (2.15), т. е. на символ z_2, получим новую программу

$$((z_1 * z_2) * b).$$

Далее, содержащееся в преобразованной программе выражение

$$z_1 * z_2$$

сворачивается до символа z_1. Тогда полученная на этом шаге программа

$$z_1 * b$$

заменяется сначала на

$$z_1 * z_2,$$

а затем на начальный символ вывода z_1.

Это означает, что программа

$$(((a + b) * b) * b)$$

правильна, выводится в данном языке арифметических выражений, и её синтаксический анализ показал, какие правила подстановки использованы для её вывода.

Кроме того, известен метод развёртки, в котором из начального символа выводятся всевозможные цепочки, среди которых отыскивается данная программа [28, с. 247].

Тем не менее, проблема синтаксического анализа, состоящая в разработке беступикового (безостановочного) алгоритма, осуществляющего синтаксический анализ любой программы, написанной на произвольном кс-языке, актуальна и в настоящее время.

Следует отметить, что рассмотренные методы свёртки и развёртки используют большое число операций, которое растёт вместе с длиной монома, что затрудняет разработку беступикового алгоритма. В любом случае, синтаксический анализ методом свёртки или развёртки является весьма громоздким.

Перейдём к рассмотрению синтаксичекого анализа методом синтаксического полинома.

Для того, чтобы подчеркнуть, что интеграл (2.8), имеющий одну и ту же размерность $n+m$, позволяет анализировать мономы с неограниченными степенями (длинами), рассмотрим обобщение указанной программы, длина которой теперь может быть сколь угодно большой.

Пример 2.1. Проведём синтаксический анализ обобщённой программы

$$(\cdots((a+b)*b)\cdots*b), \tag{2.16}$$

где символ $*$ использован q раз, а символ $($ использован $q+1$ раз. Легко проверить, что эта программа содержит всего $4q+5$ символов.

По аналогии с предыдущей программой можно понять, что обобщенную программу (2.16) можно получить, используя правила подстановки

(2.13) и (2.15) по q раз каждое, а правило (2.14) один раз.

Сначала мы переобозначим терминальные символы

$$+,\ *,\ (,\ ),\ a,\ b$$

символами

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6$$

соответственно, тогда система уравнений Хомского — Щутценберже для этого кс-языка примет вид

$$z_1 = t_{11}x_3z_1x_2z_2x_4 + t_{12}x_3x_5x_1x_6x_4,$$

$$z_2 = t_{21}x_6.$$

Теперь перепишем программу (2.16) как моном

$$x_3\cdots x_3x_3x_5x_1x_6x_4x_2x_6x_4\cdots x_2x_6x_4,$$

имеющий степень $4q+5$, которая может быть сколь угодно большой.

Коммутативный образ этого монома равен

$$x_1x_2^qx_3^{q+1}x_4^{q+1}x_5x_6^{q+1}, \tag{2.17}$$

поэтому мультииндекс α в формуле (2.8) равен

$$(1, q, q+1, q+1, 1, q+1).$$

Далее, якобиан коммутативного образа системы уравнений

$$z_1 = t_{11}x_3z_1x_2z_2x_4 + t_{12}x_3x_5x_1x_6x_4,$$

$$z_2 = t_{21}x_6.$$

равен

$$\det(\delta_{ij} - (ci(Q_i^*(z,x,t)))'_{z_j}) =$$

$$= 1 - t_{11}x_2x_3x_4z_2.$$

Теперь мы вычислим кратный интеграл (2.8) как повторный, сначала вычисляя интеграл (2.10), а затем интеграл (2.11).

А именно, интеграл (2.10) в нашем случае равен

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|z_1|=|z_2|=\epsilon} \frac{z_1(1 - t_{11}x_2x_3x_4z_2)\, dz_1 \wedge dz_2}{(z_1 - t_{11}x_2x_3x_4z_1z_2 - t_{12}x_1x_3x_4x_5x_6)(z_2 - t_{21}x_6)}. \quad (2.18)$$

Вычислим этот интеграл по формуле Коши по переменной z_2:

$$ci(z_1^*(x,t)) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|z_1|=|z_2|=\epsilon} \frac{z_1(1 - t_{11}x_2x_3x_4z_2)\, dz_1 \wedge dz_2}{(z_1 - t_{11}x_2x_3x_4z_1z_2 - t_{12}x_1x_3x_4x_5x_6)(z_2 - t_{21}x_6)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z_1|=\epsilon} \frac{z_1(1 - t_{11}t_{21}x_2x_3x_4x_6)\, dz_1}{z_1 - t_{11}t_{21}x_2x_3x_4x_6z_1 - t_{12}x_1x_3x_4x_5x_6}\ .$$

Для того, чтобы вычислить полученный интеграл по формуле Коши по переменной z_1, преобразуем его:

$$ci(z_1^*(x,t)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z_1|=\epsilon} \frac{z_1(1 - t_{11}t_{21}x_2x_3x_4x_6)\, dz_1}{z_1 - t_{11}t_{21}x_2x_3x_4x_6z_1 - t_{12}x_1x_3x_4x_5x_6} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z_1|=\epsilon} \frac{z_1(1 - t_{11}t_{21}x_2x_3x_4x_6)\, dz_1}{z_1(1 - t_{11}t_{21}x_2x_3x_4x_6) - t_{12}x_1x_3x_4x_5x_6} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z_1|=\epsilon} \frac{z_1(1 - t_{11}t_{21}x_2x_3x_4x_6)\, dz_1}{(z_1 - \frac{t_{12}x_1x_3x_4x_5x_6}{1 - t_{11}t_{21}x_2x_3x_4x_6})(1 - t_{11}t_{21}x_2x_3x_4x_6)}\ .$$

Сократив множитель в числителе и знаменателе, можно вычислить последний интеграл по формуле Коши по переменной z_1:

$$ci(z_1^*(x,t)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z_1|=\epsilon} \frac{z_1\ dz_1}{(z_1 - \frac{t_{12}x_1x_3x_4x_5x_6}{1-t_{11}t_{21}x_2x_3x_4x_6})} =$$

$$= \frac{t_{12}x_1x_3x_4x_5x_6}{1 - t_{11}t_{21}x_2x_3x_4x_6}\ .$$

Здесь учтено, что

$$\Big|\frac{t_{12}x_1x_3x_4x_5x_6}{1 - t_{11}t_{21}x_2x_3x_4x_6}\Big| < \epsilon,$$

если точки (x, t) достаточно близки к началу координат.

Теперь мы вычислим интеграл (2.11), где

$$\alpha = (1,\ q,\ q+1,\ q+1,\ 1,\ q+1),$$

$$\Gamma_x = \{|x_1| = \cdots = |x_6| = \delta\},$$

$$t = (t_{11}, t_{12}, t_{21}),$$

т. е. вычислим интеграл

$$s_\alpha(t) = \frac{1}{(2\pi i)^6} \int\limits_{\Gamma_x} \frac{t_{12}x_1x_3x_4x_5x_6\ dx_1 \wedge\ \cdots\ \wedge dx_6}{(1 - t_{11}t_{21}x_2x_3x_4x_6)\ x_1^2x_2^{q+1}x_3^{q+2}x_4^{q+2}x_5^2x_6^{q+2}}\ .$$

Для этого разложим подинтегральную рациональную функцию в кратный степенной ряд, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{t_{12}x_1x_3x_4x_5x_6}{1 - t_{11}t_{21}x_2x_3x_4x_6} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\ t_{11}^k t_{12} t_{21}^k x_1 x_2^k x_3^{k+1} x_4^{k+1} x_5 x_6^{k+1}.$$

Подставим это разложение в интеграл, представляющий $s_\alpha(t)$, и почленно проинтегрируем:

$$\frac{1}{(2\pi i)^6}\int\limits_{\Gamma_x}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} t_{11}^k t_{12} t_{21}^k x_1 x_2^k x_3^{k+1} x_4^{k+1} x_5 x_6^{k+1}\Big)\frac{dx_1\wedge\ \cdots\ \wedge dx_6}{x_1^2 x_2^{q+1} x_3^{q+2} x_4^{q+2} x_5^2 x_6^{q+2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t_{11}^k t_{12} t_{21}^k}{(2\pi i)^6}\int\limits_{\Gamma_x} x_2^{k-q} x_3^{k-q} x_4^{k-q} x_6^{k-q}\ \frac{dx_1\wedge\ \cdots\ \wedge dx_6}{x_1\cdot\ \cdots\ \cdot x_6}\ .$$

Очевидно, что интегралы от всех слагаемых равны нулю, кроме случая $k = q$, когда интеграл равен $(2\pi i)^6$.

Итак, синтаксический полином мономов, имеющих коммутативный образ (2.17), равен

$$t_{11}^q t_{12} t_{21}^q.$$

Теперь, как было отмечено выше, необходимо проверить единственный путь для получения нашей программы: q раз использовать правило подстановки

$$z_1 \to (z_1 * z_2),$$

один раз правило

$$z_1 \to (a + b)$$

и q раз правило

$$z_2 \to b,$$

начиная с исходного символа z_1.

Очевидно, что этот путь в самом деле позволяет получить программу (2.16), что и завершает её синтаксический анализ. Отметим также, что указанная проверка не предсталяет трудности.

Таким образом, синтаксический анализ методом интегрального представления синтаксического полинома (интеграл фиксированной кратности) позволяет осуществлять синтаксический анализ мономов (программ), степени (длины) которых неограничены.

Заключение

Основные результаты и выводы диссертационной работы состоят в следующим.

Установлена связь между множествами решений полиномиальной грамматики и её коммутативного образа (**Определение 1.1**, **Теоремы 1.1 — 1.4**, **Пример 1.1**, **Замечания 1.1** и **1.2**).

Тем самым в теорию формальных языков и грамматик привлечены новые для этой теории математические методы: комплексного анализа и алгебраической геометрии.

Найдено условие существования и единственности полиномиального языка, порождённого полиномиальной грамматикой (системой уравнений с некоммутативными символьными переменными) в терминах её коммутативного образа (**Теорема 1.5**, **Замечания 1.2** и **1.3**).

Условие формулируется как теорема о неявном отображении, которая обычно используется в случае коммутативных переменных.

Введено и исследовано понятие полиномиальной грамматики, порождающей бесконечное число языков, а также получены новые свойства несовместных полиномиальных грамматик, не имеющие аналогов для коммутативного случая (**Определение 1.2**, **Примеры 1.2 — 1.4**, **Замечание 1.5** и **1.6**).

Таким образом, расширяется совокупность полиномиальных грамматик, исследуемых в теории формальных языков и грамматик.

Разработан метод синтаксического полинома для решения задачи синтаксического анализа мономов контекстно–свободных языков программирования (**Леммы 2.1** и **2.4**, **Определение 2.1**, **Теоремы 2.2** и **2.3**, **Пример 2.1**).

Синтаксический полином получен в виде интеграла по циклу от рациональной функции и может быть использован на практике в процессе синтаксического анализа программ.

Таким образом, все задачи диссертационного исследования решены, цель достигнута.

Полученные результаты позволяют вести дальнейшие исследования в терии формальных языков и грамматик в следующих направлениях:

– выявления новых условий существования полиномиальных языков и изучения их свойств, включая поиск критерия существования решения полиномиальных грамматик в виде ФСР;

– разработка новых методов синтаксического анализа формальных языков, которые могут применяться как в теоретическом программировании, так и при практическом осуществлении синтаксического анализа.

Литература

[1] Адаменко А. Н., Кучуков А. М. Логическое управление программирование и Visual Prolog. — СПб.: БХВ–Петербург. 2003. 992 с.

[2] Алексеева А. Г. Применение итераций конечных языков в алгоритмических задачах теории формальных языков: дисс. ... канд. физ. – матем. наук. — 2012. Тольятти. 123 с.

[3] Айзенберг Л. А., Южаков А. П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. — Новосибирск: Наука. 1979. 366 с.

[4] Арутюнова Н. Д. Предложение и его смысл. Логико-семантические проблемы. — М.: Наука. 1976. 380 с.

[5] Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. — М.: Мир. 1978. 352 с.

[6] Ахо А., Хопфорт Д. Э., Ульман Дж. Структура данных и алгоритмы. — М.: Вильямс. 2000. С. 225—257.

[7] Ахо А., Сети Р., Ульман Дж. Компиляторы. Принципы, технологии, инструменты. — М.: Вильямс. 2001. 135 с.

[8] Бар-Хиллел И., Кашер А., Шамир Е. Меры синтаксической сложности. Кибернетический сборник. Нов. серия. Вып. 4. — Мир. 1967. С. 219—227.

[9] Бауэр Ф. Л., Гооз Г. Информатика. Т. 1. — М: Мир. 1990. 324 с.

[10] Бауэр Ф. Л., Гооз Г. Информатика. Т. 2. — М: Мир. 1990. 410 с.

[11] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. — М.: Наука. 1965. 294 с.

[12] Белецкий М. И. Бесконтекстные и доминационные грамматики и связанные с ними алгоритмические проблемы. // Кибернетика. Вып. 4. — 1967. С. 90—97.

[13] Белоногов Г. Г., Кузнецов Б. А. Языковые средства автоматизированных информационных систем. — М.: Наука. 1983. 380 с.

[14] Брауэр В. Введение в теорию конечных автоматов. — М.: Радио и связь. 1987. 122 с.

[15] Ван-дер-Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука. 1973. 368 с.

[16] Вирт Н. Алгоритм + структуры данных = программы. — М.: Мир. 1985. 342 с.

[17] Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков. — М. Мир. 1970. 325 с.

[18] Гинзбург С., Грейбах Ш. Об инвариантности классов Нс-языков относительно некоторых отображений // Кибернетический сборник. Нов. серия. Вып. 5. — М.: Мир. 1968. С. 167—188.

[19] Гинзбург С., Райс Х. Два класса языков типа АЛГОЛ // Кибернетический сборник. Нов. серия. Вып. 6. 1969. С. 114—145.

[20] Гладкий А. В. Алгоритмическая природа инвариантных свойств грамматик непосредственно составляющих // Алгебра и логика. —- 1964. Т. 3. Вып. 2. С. 17—32.

[21] Гладкий А. В. О сложности выводов в грамматиках непосредственно составляющих // Алгебра и логика. — 1964. Т. 3. Вып. 5—-6. С. 29—44.

[22] Гладкий А. В. Алгоритмическая нераспознаваемость существенной неопределенности КС-языков // Алгебра и логика. — 1965. Т. 4. Вып. 4. С. 53—64.

[23] Гладкий А. В. Некоторые алгоритмические проблемы для КС-грамматик // Алгебра и логика. — 1965. Т. 4. Вып. 1. С. 3—13.

[24] Гладкий А. В. Лекции по математической лингвистике для студентов НГУ. — Новосибирск: НГУ. 1966. 256 с.

[25] Гладкий А. В., Мельчук И.А. Элементы математической лингвистики. — М.: Наука. 1969. 436 с.

[26] Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки. — М.: Наука. 1973. 337 с.

[27] Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А. Алгебра. — СПб., М., Краснодар: Лань, 2015. 608 с.

[28] Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. Алгебра, языки, программирование. — Киев: Наукова думка. 1974. 328 с.

[29] Грифитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Т. 1, 2. — М.: Мир. 1982. 852 с.

[30] Демьянков В. З. Универсальная грамматика. Краткий словарь когнитивных терминов / Кубрякова Е.С., Демьянков В.З., Панкрац Ю.Г., Лузина Л. Г. / Под общ. ред. Е.С. Кубряковой. — М.: МГУ. 1997. 245 с.

[31] Егорушкин О.И., Колбасина И.В., Сафонов К.В. Синтаксический анализ программ методом интегральных представлений / Материалы 17 Всероссийской конференции «Сибирская научная школа-семинар с международным участием "Компьютерная безопасность и криптография"» — SIBECRYPT'18. Абакан. — 2018 // Прикладная дискретная математика. Приложение. — 2018. № 11. С. 128—130.

[32] Егорушкин О. И., Колбасина И. В., Сафонов К. В. О применении многомерного комплексного анализа в теории формальных языков и грамматик // Прикладная дискретная математика. — 2017. Т. 36. № 2. С. 76—89.

[33] Егорушкин О. И., Колбасина И. В., Сафонов К. В. Аналог теоремы о неявном отображении для формальных грамматик / Материалы 16 Всероссийской конференции «Сибирская научная школа-семинар с международным участием "Компьютерная безопасность

и криптография"» — SIBECRYPT'17. Новосибирск. — 2017 // Прикладная дискретная математика. Приложение. — 2017. № 10. С. 149—151.

[34] Егорушкин О. И., Колбасина И. В., Сафонов К. В. Интегральное представление синтаксического многочлена // Материалы XXI Международной научно-практической конференции «Решетнёвские чтения». Т. 2. Красноярск. — 2017. С. 75—76.

[35] Егорушкин О. И., Колбасина И. В., Сафонов К. В. On solvability of systems of symbolic polynomial equations // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. — 2016. Т. 9. № 2. С. 166—172.

[36] Егорушкин О. И., Колбасина И. В., Сафонов К. В. О совместности систем символьных полиномиальных уравнений и их приложении / Материалы 15 Всероссийской конференции «Сибирская научная школа-семинар с международным участием "Компьютерная безопасность и криптография"» — SIBECRYPT'16. Новосибирск. — 2016 // Прикладная дискретная математика. Приложение. — 2016. № 9. С. 119—121.

[37] Егорушкин О. И., Колбасина И. В., Попов А. М., Попов Н. А., Сафонов К. В. Символьный аналог теоремы о неявном отображении и его приложения в теоретической информатике // Материалы XX Международной научно-практической конференции «Решетнёвские чтения». Т. 2. Красноярск. — 2016. С. 98—99.

[38] Егорушкин О. И., Колбасина И. В., Попов А. М., Попов Н. А., Сафонов К. В. Об одном подходе к решению систем некоммутативных полиномиальных уравнений // Материалы XX Международной научно-практической конференции «Решетнёвские чтения». Т. 2. Красноярск. — 2016. С. 100—102.

[39] Егорушкин О. И., Колбасина И. В., Насыров И. Р., Сафонов К. В. О решении систем некоммутативных полиномиальных уравнений и приложении результатов // Материалы XIX Международной научно-практической конференции «Решетнёвские чтения». Т. 2. Красноярск. — 2015. С. 124—125.

[40] Егорушкин О. И., Колбасина И. В., Сафонов К. В. Условия совместности систем символьных уравнений и приложения // Материалы Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы авиации и космонавтики». Т. 1. Красноярск. — 2016. С. 504—506.

[41] Егорушкин О. И., Калугин-Балашов Д. А., Сафонов К. В. О разрешимости систем некоммутативных алгебраических уравнений, порождающих контекстно-свободные языки // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнёва. 2009. № 2 (23). С. 21—24.

[42] Егорушкин О. И. Контекстно-свободные языки в нормальной форме Грейбах: аналитический подход // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнёва. — 2008. № 2 (19). С. 24—25.

[43] Егорушкин О. И. Некоторые свойства контекстно-свободных языков / Материалы III Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: начало XXI века». Красноярск. — 2007. С. 65—67.

[44] Егорушкин О. И. О свойствах контекстно-свободных языков / Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и современные информационные технологии». Томск. — 2006. С. 94—95.

[45] Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск: Наука. 1977. 285 с.

[46] Ершов А. П. Программирующая программа для быстродействующей электронной счетной машины. М.: Изд-во АН СССР. 1958. 325 с.

[47] Знаменский С. В., Майергойз Л. С. О степенных рядах от многих комплексных переменных / Голоморфные функции многих комплексных переменных: Сборник научных трудов. Красноярск: Институт физики СО АН СССР. — 1972. С. 185—195.

[48] Искусственный интеллект. Книга 2. Модели и методы: Справочник / Под ред. Д. А. Поспелова. М.: Радио и связь. 1990. 304 с.

[49] Карпов Ю. Г. Теория и технология программирования. Основы построения трансляторов. — СПб.: БХВ-Петербург. 2005. 272 с.

[50] Кибрик А. Е. Проблема синтаксических отношений в универсальной грамматике. Вып. XI. М.: Прогресс. 1982. С. 5–36.

[51] Клини С. К. Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах / Автоматы: сборник научных трудов. М.: ИЛ. 1956. С. 15—67.

[52] Компаниец Р. И., Маньков Е. В., Филетов И. Е. Системное программирование. Основы построения трансляторов. — СПб: Коронапринт. 2000. 256 с.

[53] Кузнецов С. Л. О преобразовании контекстно-свободных грамматик в грамматики Ламбека // Труды МИАН. — 2015. Т. 290. С. 72—79.

[54] Кузнецов С. Л., Рыжкова Н. С. Фрагмент исчисления Ламбека с итерацией // Мальцевские чтения 2015. Тезисы докладов. Новосибирск. — 2015. С. 213.

[55] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.-Л.: Гостехиздат. 1962. 347 с.

[56] Ламбек И. Математическое исследование структуры предложений. Пер. с англ. // Математическая лингвистика: сб. пер. / Под ред. Ю. А. Шрейдера и др. — М.: Мир, 1964. С. 47–68.

[57] Летичевский А. А. Представление контекстно-свободных языков в автоматах с памятью типа push-down / Кибернетика. Вып. 2. — 1965. С. 80—84.

[58] Летичевский А. А. Синтаксис и семантика формальных языков / Кибернетика. Вып. 4. — 1968. С. 71—79.

[59] Льюис Ф., Розенкранц Д., Стринз Р. Теоретические основы проектирования компиляторов. — М.: Мир. 1979. 288 с.

[60] Мартыненко Б.И. Языки трансляции. — СПб.: СПбГУ. 2004. 234 с.

[61] Мэтьюз Д. Разрывность и асимметрия в грамматиках непосредственно составляющих / Математическая лингвистика. — М.: Мир. 1964. С. 150—159.

[62] Наур Н. Алгоритмический язык АЛГОЛ-60 / Пересмотренное сообщение. — М.: Мир. 1965. 245 с.

[63] Никитина С. Е. Семантический анализ языка науки. — М.: Наука. 1987. 128 с.

[64] Опалева Э. Языки программирования и методы трансляции. — СПб.: BHV. 2005. 480 с.

[65] Пентус А. Е., Пентус М. Р. Математическая теория формальных языков: Учебное пособие. — М.: МГУ. 2004. 80 с.

[66] Пентус М. Р. Полнота синтаксического исчисления Ламбека // Фунд. и прикл. математика. — 1999. Т. 5. № 1. С. 193—219.

[67] Пентус М. Р. Исчисление Ламбека и формальные грамматики // Фунд. и прикл. математика. — 1995. Т. 1. № 3. С. 729—751.

[68] Поляков В. Н. Синтез формальных моделей языка и смысла как проблема семантической обработки естественного языка // Новости искусственного интеллекта. — 1997. № 1. С. 6—63.

[69] Поспелов Д. А. Прикладная семантика и искусственный интеллект // Программные продукты и системы. — 1996. № 3. С. 24—28.

[70] Поспелов Д. А., Осипов Г.С. Введение в прикладную семиотику // Новости искусственного интеллекта. — 2002. № 6. С. 28–35.

[71] Саватеев Ю. В. Алгоритмическая сложность фрагментов исчисления Ламбека: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2009. 75 с.

[72] Саватеев Ю. В. Распознавание выводимости для исчисления Ламбека с одним делением // Вестн. Московск. ун-та. Сер. 1. Матем. механ. — 2009. № 2. С. 59—62.

[73] Сафонов К. В. О условиях алгебраичности и рациональности суммы степенного ряда // Матем. заметки. — 1987. Т. 41. Вып. 3. С. 325—332.

[74] Сафонов К. В. О возможности вычислительного распознавания контекстно-свободных языков // Вычислительные технологии. — 2005. Т. 10. № 4. С. 91—98.

[75] Сафонов К. В. О синтаксическом анализе и свойствах формальных языков программирования // Вычислительные технологии. — 2005. Т. 10. Специальный выпуск. С. 9—15.

[76] Сафонов К. В., Егорушкин О. И. О синтаксическом анализе и проблеме В. М. Глушкова распознавания контекстно-свободных языков Хомского // Вестник Томского государственного университета. Приложение. — 2006. № 17. С. 63—66.

[77] Сафонов К. В., Егорушкин О. И. Системы полиномиальных уравнений, порождающих контекстно-свободные языки // Материалы Международной конференции «Решетнёвские чтения». Т. 2. — 2009. Красноярск. С. 535.

[78] Сафонов К. В. Критерий алгебраичности суммы степенного ряда (обобщение критерия Кронекера) и его применение // Доклады Академии наук. — 2009. Т. 424. № 1. С. 19—21.

[79] Семёнов А. Л. Алгоритмические проблемы для степенных рядов и контекстно-свободных грамматик // Доклады АН СССР. — 1973. Т. 212. С. 50—52.

[80] Стоцкий Э. Д. О некоторых ограничениях на способ вывода непосредственно составляющих / Научно-техническая информация. Серия 2. Вып. 7. — 1967. С. 35—38.

[81] Стоцкий Э. Д. Управление выводом в формальных грамматиках // Проблемы передачи информации. — 1971. Т. 7. Вып. 3. С. 87—102.

[82] Стоцкий Э. Д. Понятие индекса в обобщенных грамматиках // Научно-техническая информация. Серия 2. Вып. 4. — 1969. С. 45—48.

[83] Херц М. М. Энтропия языков, порождаемая автоматной или контекстно-свободной грамматиками с однозначным выводом // Научно-техническая информация. Серия 2. Вып. 4. — 1969. С. 89—92.

[84] Херц М. М. Энтропия языков, порождаемая автоматной или контекстно-свободной грамматиками с однозначным выводом // Научно-техническая информация. Серия 2. Вып. 4. — 1969. С. 89—92.

[85] Хомский Н. Три модели описания языка: Пер. с англ. // Кибернетический сборник. Вып. 2. — 1961. С. 237—266.

[86] Хомский Н. О некоторых формальных свойствах грамматик // Кибернетический сборник. Нов. серия. Вып. 5. 1962. С. 279—311.

[87] Хомский Н. Заметка о грамматиках непосредственно составляющих // Кибернетический сборник. Нов. серия. Вып. 5. — М.: Мир. 1962. С. 312—316.

[88] Хомский Н. Синтаксические структуры // Новое в лингвистике. Вып. 2. С. 412—527.

[89] Хомский Н., Шютценберже М.Н. Алгебраическая теория контекстно-свободных языков // Кибернетический сборник. Нов. серия. Вып. 3. — 1966. С. 195—242.

[90] Хомский Н., Щютценберже М. П. Алгебраическая теория контекстно-свободных языков // Кибернетический сборник. Нов. серия. Вып. 2. — 1966. С. 121—230.

[91] Хомский Н. Логические основы лингвистической теории. — Биробиджан: ИП Тривиум. 2000. 146 с.

[92] Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. — М.: Наука. 1985. 272 с.

[93] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. — М.: Наука. 1976. 400 с.

[94] Южаков А. П. О применении кратного логарифмического вычета для разложения неявных функций в степенные ряды // Математический сборник. — 1975. Т. 97. № 2. С. 177—192.

[95] Bar-Hillel Y., Gaifman C., Shamir E. On the categorial and phrasestructure grammars. Bull. Res. Council Israel. Section F. — 1960. Vol. 9F. P. 1—16.

[96] Belov A. Y., Chernyat'ev A. L. Description of normal bases of boundary algebras and factor languages of slow growth // Mathematical Notes. 2017. V. 101. № 1-2. P. 203-207.

[97] Give'on Y. On some properties of the free monoids with applications to automata theory // J. of Computer and System Sciences. — 1977. № 2. P. 65—70.

[98] Graham R. Subsemigroups of 0-simple semigroups // Mathemetical System Theory. — 1967. № 3. P. 41-=-47.

[99] Give'on Y. On some properties of the free monoids with applications to automata theory. – J. of Computer and System Sciences. — 1977. № 2. P. 65—70.

[100] Graham R. Subsemigroups of 0-simple semigroups // Mathemetical System Theory. — 1967. № 3. P. 41—47.

[101] Heller A. Stohastic transformations and automata. – Mathemetical System Theory. — 1967. № 3. P. 68—73.

[102] Hibbard N., Gray J. and Harrison M. Scan limited automata and context limited grammars // Information and Control. — 1969. V. 11. № 1. P. 5—14.

[103] Morrill G. Categorial grammar. Logical Syntax, Semantics, and Processing. — Oxford: Oxford Univ. Press. 2011. 236 p.

[104] Pentus M. A polynomial-time algorithm for Lambek grammars of bounded order // Linguistic Analysis. — 2010. V. 36. № 1—4. P. 441—471.

[105] Pentus M. Lambek calculus is NP-complete // Theor. Comput. Sci. — 2006. V. 357. P. 186—201.

[106] Podolskii V. V. Circuit complexity meets ontology-based data access // Proc. 10th Intl. Comput. Sci. Symp. in Russia. — 2015. Berlin: Springer. P. 7—26. (Lect. Notes Comput. Sci. V. 9139).

[107] Rosenberg A. L. A machine realization of the linear context-free languages // Information and Control. — 1977. V. 10. P. 175—188.

[108] Rosenkrants D. Matrix equations and normal forms for context-free grammars // J. Assoc. Computing Machinery. V. 14. — 1967. P. 501—507.

[109] Safonov K. V. On power series of algebraic and rational functions in C^n // Journal of Math. Analysis and Applications. — 2000. V. 243. P. 261—277.

[110] Salomaa A., Soittola M. Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series. — N.Y.: Springer-Verlag. 1978. 288 p.

[111] Savateev Yu. Lambek grammars with one division are decidable in polynomial time // Computer Science Theory and Applications. Berlin: Springer. — 2008. P. 273—282. (Lect. Notes Comput. Sci. V. 5010).

[112] Savateev Yu. Product-free Lambek calculus is NP-complete // Ann. Pure Appl. Log. — 2012. V. 163. Iss. 7. P. 775—788.

[113] Schützenberger M. – P. On context-free languages and pushdown automata // Information and Control. — 1963. V. 6. № 3. P. 246—264.

[114] Scheinberg S. On property of context-free languages // Information and Control. — 1960. № 3. P. 372—375.

[115] Shamir E. A remark on discovery algorithms for grammars // Information and Control. — 1962. V. 5. P. 246—251.

[116] Shamir E. A. A presentation theorem for algebraic and context-free power series in non-commuting variables // Information and Control. — 1967. № 11. P. 65—78.

[117] Soitola M. Positive rational sequences // Theoretical Computer Science. — 1976. V. 2. P. 313—321.

[118] Thatcher J. W. Characterizing derivation trees of context-free grammars through a generalization of finite automata theory // J. Computer and System Sciences. — 1968. № 1. P. 132—138.

[119] Ullman J. D. Pushdown automata with bounded back-track / System Development Corp. Rept. — 1966. V. 9. P. 61—65.

[120] Ullman J. D. Partial algorithm problems for context-free languages // Information and Control. — 1967. V. 11. P. 80—101.

[121] Valiant L. G. General context-free recognition in less than cubic time // J. Comp. Syst. Sci. — 1975. V. 10. P. 308—315.

[122] Yntema M. K. Inclusion relations among families of context-free languages // Information and Control. — 1967. V. 10. P. 572—597.

[123] Younger D. H. Recognition and parsing of context-free languages in time // Information and Control. — 1967. V. 10. P. 598—605.