Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"Сибирский федеральный университет"

На правах рукописи

Башмаков Степан Игоревич

ВРЕМЕННЫЕ МНОГОАГЕНТНЫЕ ЛОГИКИ И ПРОБЛЕМА УНИФИКАЦИИ

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, профессор
Рыбаков Владимир Владимирович

Красноярск — 2017

Оглавление

Введение

Модальные логики знания и времени являются одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений исследования многомодальных логик, расположенным на стыке математической логики и информатики. Особое внимание исследователей в данной теории, как и в целом в нестандартных логиках, привлекает вопрос унификации формул. Ознакомиться с наиболее важными результатами в данных областях исследования можно по работам С. А. Крипке [43], Я. Хинтикка [34], С. Гиларди [27–31], В. В. Рыбакова [8; 9; 46; 53; 60–63; 66; 67], Ф. Баадера [5–7], Д. Габбая [22–26], Э. Ерабека [38–40] и В. Джика [15–17].

Теория модальных логик является сравнительно новым разделом математической логики, хотя идея *модальностей* и изучения их свойств уходит своими корнями в античные времена. Вплоть до середины XX века отдельные части данной дисциплины рассматривались только в области философии. Образованию логического модального исчисления теория обязана работам К. Льюиса [44; 45], позже — интенсивным исследованиям А. Тарского [72], Дж. Маккинси [50], И. Йохансcона [41], С. Крипке [43], К. Сегерберга [69; 70] и других.

Кратко *модальные логики* можно охарактеризовать, как логики, язык которых, помимо стандартных логических связок, включает символы *модальных операторов*, имеющие различную интерпретацию в зависимости от выбранной логической системы. Тем не менее, стандартными модальными операторами являются «необходимо, что» (символьно $\Box$) и «возможно, что» ($\Diamond$ соответственно) [14].

Модальные логики играют важную роль при проектировании систем, предусматривающих элементы рассуждений о знаниях и времени [18]. В последние десятилетия активное развитие получило направление многомодальных логик, призванное обогатить выразительную способность классического модального языка как множеством новых логических операторов, так и ограничением действия известных на определенные области действия. Примером такой системы может служить *временная логика*, расширенная посредством добавления операторов, представляющих будущее и прошлое [26].

Временные логики являются особым типом модальных, предусматривающим качественное описание и рассуждение о том, как истинностное значение определенного утверждения изменяется с течением времени, используя множество временных операторов или «модальностей». Стандартными временными операторами, соответствующими модальным, являются «иногда», означающий истинность утверждения в какой-то доступный момент времени в будущем, и «всегда», гарантирующий истинность в любой доступный в будущем момент. Временные логики активно развиваются в областях математической логики, философии, Computer Science [23–25].

Первым исследование временных логик как модальных систем предложил в 1950-е А. Прайор [54], за последующие полвека данная область стала сложной технической дисциплиной [24]. Значительные приложения в области Computer Science имеет, в частности, линейная временная логика $\mathcal{LTL}$ [47; 48; 74; 75]. Аксиоматизация для $\mathcal{LTL}$ была впервые предложена Д. Габбаем [22], решение проблемы допустимости правил в $\mathcal{LTL}$ было найдено В. В. Рыбаковым [61], базис допустимых правил — С. В. Бабёнышевым и В. В. Рыбаковым [8]. Наиболее распространенным является подход к моделированию модального времени как транзитивной процедуры [9;27–31;60;66], при котором любое временное состояние в будущем (или в прошлом и будущем) является доступным из текущего момента времени. Имеет место, однако, и идея возможного существования нетранзитивного времени, исходящая, в информационном аспекте, из наблюдения, что переход знаний из прошлого в будущее может не всегда проходить гладко: имеющееся знание в прошлом может не быть передано в настоящее. Подробное рассмотрение разных точек зрения на нетранзитивное время и его выражение при помощи логических систем предложено в работах [67; 68].

Другим примером многомодальных логик являются *логики Знания* [19; 20]: логики, дополненные модальностями K_i, представляющими знания особых элементов, интерпретируемых как *агенты*, предназначенными для моделирования эффектов и свойств знаний агентов в изменяющейся среде. Одной из наиболее знаковых работ, положивших начало идеи моделирования знания в терминах символической логики является книга Я. Хинтикка [34], в которой было предложено использование модальностей для описания семантики знания. Значительные приложения агентных логик найдены в различных областях знаний, таких как социология (для изучения и моделирования когнитивного мышления и условий неопределенности), биология и медицина (моделирование работы органов и систем в организме, эволюционных процессов), и, конечно, информатика. В работах [64; 65] В. В. Рыбаковым рассматривалась концепция *Chance Discovery* в многоагентной среде; исследовалась логика, моделирующая неопределенность с точки зрения агентов [51]. В 1990-е активное развитие получила концепция *Common Knowledge* (*общего знания*), наиболее полная формализация которой приведена в книге Р. Фагина [19]. В таком подходе в качестве базового было принято знание агентов, представленное как $\mathcal{S}5$-подобная модальность. В данной работе рассматриваются как чисто временные, так и временные многоагентные логики, т.е. сочетающие в себе одновременно операторы времени и знания. Подобные системы активно исследуются в последние десятилетия. В частности, Р. ван дер Мэйден и Н. В. Шилов [73] показали неразрешимость линейной модальной логики знания и времени с операторами *Until* и *Common Knowledge* при возможной разрешимости некоторых ее фрагментов, в [32] исследовалась комбинация $belief$-логики с линейной временной логикой (при помощи техники *расслоения*) в отношении моделей многоагентных систем, эволюционирующих с течением времени. В работах В. Ф. Юн [2–4] рассматривались вопросы аксиоматизируемости, финитной аппроксимируемости, разрешимости в линейных временных логиках индуктивных фреймов, рассматривался полимодальный случай [4]. В серии работ В. В. Рыбакова и Э. Калардо [11–13] изучалась логика $\mathcal{LTK}$ с операторами знаний агентов $\Box_i$, *Common Knowledge* $\Box_\sim$ и линейного времени $\Box_T$: построена аксиоматизация, доказана разрешимость по доказуемости формул и допустимости правил вывода. В. В. Рыбаковым и С. В. Бабёнышевым рассматривалась версия с оператором знания по взаимодействию с агентами $\Diamond_{\mathcal{R}}$ [62].

В основе используемых в работе методов и подходов лежит *реляционная семантика* (иначе — *семантика Крипке* [43], в честь знаменитого логика и философа С. А. Крипке) исследуемых логик. Это наиболее известная и (за исключением, возможно, алгебраической семантики) самая изученная модальная семантика. Идеи потока времени, переходов между вычислительными состояниями, сетей возможных миров могут быть представлены в виде простых графических структур. При этом, модальная логика, интерпретациями которой являются такие идеи, предоставляет интересный инструментарий для работы с этими структурами и выражения их внутренней информации. Такими графическими структурами являются *фреймы* (или *шкалы*) Крипке, представляющие собой множества с наборами отношений, используемыми для интерпретации логических символов [10; 14; 59], являющиеся центральным объектом семантики Крипке.

Одной из наиболее важных проблем, исследуемых в области нестандартных логик, является *допустимость правил вывода.* Правило называется допустимым в логике λ, если для любой подстановки ε, из $\alpha_1^\varepsilon, \dots, \alpha_n^\varepsilon \in \lambda$ следует $\beta^\varepsilon \in \lambda$. Наиболее значительные результаты в этой области принадлежат В. В. Рыбакову, положительно решившему в 1984 г. проблему Х. Фридмана [21] о существовании алгоритма, распознающего допустимость правил вывода интуиционистской логики [56]; а позднее проблему допустимости в широком классе модальных логик [57; 58] (все основные результаты до 1997 г. описаны в монографии [59]).

Теория унификации является важным приложением логики в Computer Science, на котором, в частности, основываются многие методы автоматической дедукции и баз данных [5; 71]. В очень упрощенном виде, *унификация* это попытка идентифицировать два символических выражения путем замены некоторых подвыражений (переменных) другими. Для более полного определения обычно используются формулы, построенные из функциональных символов [6] (к примеру f, a и b, где f — двуместный, а a и b — нульместные). В этих терминах унификационная проблема для формулы $s = f(a,x)$ и $t = f(y,b)$ формулируется в виде вопроса: возможно произвести замену переменных x, y в s и t на другие переменные таким образом, что s и t стали бы (синтаксически) эквивалентными. В данном конкретном примере, при подстановке b вместо x и a вместо y, мы получим унифицирующую формулу $f(a,b)$. Такая подстановка обозначается как $\sigma := \{x \mapsto b, y \mapsto a\}$ и применяется суффиксная запись: $s\sigma = f(a,b) = t\sigma$. Отметим, что различные вхождения тех же переменных в унификационную проблему должны всегда заменяться теми же формулами. По этой причине, формулы $s' = f(a, x)$ и $t' = f(x,b)$ не могут быть унифицированы, т.к. это бы потребовало замены вхождения x в s' на b, и вхождения x в t' на иную константу a.

С описанной точки зрения, с момента своего формирования в области Computer Science, унификационная проблема состояла в ответе на вопрос: возможна ли трансформация двух термов в один синтаксически эквивалентный заменой переменных другими термами [55]? Ключевые понятия «унификация» и «наиболее общий унификатор» были предложены в работе Д. Кнута и П. Бендикса 1970 г. [42] в качестве инструментов тестирования Term Rewriting Systems для локального слияния путем вычисления критических пар. Позже теория унификации вышла далеко за пределы описанных дисциплин и, в настоящее время, играет важную роль во многих областях информатики и математики.

В частности, применительно к алгебраической интерпретации, имеет место классификация эквациональных теорий или переменных алгебр, относительно типов унификации [15].

Пусть дана эквациональная теория E и конечное множество пар переменных, называемое E-унификационной проблемой:

(П): $(s_1,t_1), \ldots ,(s_n,t_n)$.

Унификатор (решение) для (П) это подстановка σ, такая что

$E \Vdash \sigma(s_1) = \sigma(t_1), \ldots , \sigma(s_n) = \sigma(t_n)$.

(П) называется унифицируемой (разрешимой), если существует по крайней мере один унификатор. Подстановка σ называется более общей, чем τ, если существует подстановка θ такая, что $E \Vdash \theta \circ \sigma = \tau$.

Наиболее общий унификатор (сокр. mgu — most general unifier) интерпретируется как «лучшее» решение унификационной проблемы (П).

Говорят, что эквациональная теория E имеет *унитарную* унификацию (или унификацию типа =1), если для любых двух унифицируемых переменных t_1, t_2, существует mgu σ такой, что $E \Vdash \sigma(t_1) = \sigma(t_2)$.

Другие унификационные типы принимаются «худшими» вариантами: если существует конечно (бесконечно) много максимальных унификаторов в стандартной формализации и в формализации со строгой импликацией, для некоторых переменных, тогда E имеет *финитарный* (*инфинитарный*) тип унификации. Если же не существует максимального унификатора, тогда E имеет унификационный тип $= 0$ (наихудший из возможных, *нульарный тип*). Следовательно, символьно типы унификации могут быть записаны как $= 1$ (унитарный), $= \omega$ (финитарный), $= \inf$ (инфинитарный) и $= 0$ (нульарный).

Вопросы унификации и унификационных типов многообразия алгебр могут быть переформулированы для многообразия соответствующих логик [28]. С этой точки зрения, в языке логики $\mathcal{L}$ рассматривается формула A, унификатором для которой в $\mathcal{L}$ называется подстановка σ такая, что $\Vdash_{\mathcal{L}} \sigma(A)$. Таким образом, в нестандартных логиках формула A называется *унифицируемой*, если такой унификатор σ существует, а базовая проблема унификациии эквивалентна (и чаще рассматривается в виде) возможности формулы стать теоремой после замены переменных, с сохранением значений коэффициентов-параметров [27; 28; 53; 57].

Классическое пропозициональное исчисление обладает лучшим унификационным типом — унитарной унификацией [49] (соответственно с унитарным типом E-унификации для булевых алгебр): для любой формулы A, если существует подстановка σ такая, что $\sigma(A)$ доказуема, тогда также существует «лучшая» подстановка с этим свойством, т.е. такая σ, что $\sigma(A)$ доказуема и любая подстановка τ такая, что $\tau(A)$ доказуема, относительно эквивалентности является конкретизацией σ. Унификационные алгоритмы поиска mgu в булевых алгебрах описаны в работе [49].

Существуют ли другие логические исчисления, обладающие тем же свойством, в частности модальные исчисления? Отрицательный ответ на этот вопрос был дан для всех модальных логик, обладающих дизъюнктивным свойством [35]: формула $\Box x \vee \Box\neg x$ унифицируема в соответствующей логике $\mathcal{L}$ и имеет следующие унификаторы:

$$\sigma_1 : x \mapsto \top \qquad \sigma_2 : x \mapsto \bot$$

и не существует более общего унификатора для них обоих, т.к., если

$$\Vdash_L \Box\sigma(x) \vee \Box\neg\sigma(x)$$

, тогда либо $\Vdash_{\mathcal{L}} \sigma(x)$ (в этом случае σ эквивалентна σ_1), либо $\Vdash_{\mathcal{L}} \neg\sigma(x)$ (и в этом случае σ эквивалентна σ_2). Однако, доказано [29], что многие известные системы, такие как, например, $\mathcal{K}4, \mathcal{S}4, \mathcal{S}4\mathcal{G}rz, \mathcal{GL}$, обладают «хорошим» — финитарным — типом унификации, т.е. существует конечно много лучших (или *максимальных*) унификаторов для любой унифицируемой формулы.

Интуиционистская логика $\mathcal{I}nt$ (или многообразие алгебр Гейтинга) также не имеет унитарного типа унификации [15]. К примеру, формула $x \vee \neg x$ имеет два максимальных унификатора: $x \mapsto (p \to p)$ и $x \mapsto \neg(p \to p)$, но mgu для $x \vee \neg x$ не существует. С. Гиларди показал [28], что $\mathcal{I}nt$ имеет финитарную унификацию, т.е. если формула унифицируемая, то существует конечно много максимальных унификаторов.

Используя алгебраический подход, Гиларди показал [27], что многообразие дистрибутивных решеток и многообразие дистрибутивных решеток с псевдодополнением имеют унификационный тип $= 0$.

Также как унификация в классической логике аналогична E-унификации для булевых алгебр, унификация в модальной логике $\mathcal{L}$ соответствует E-унификации для соответствующего многообразия L-модальных алгебр. С этой точки зрения, элементарная E-унификационная проблема

$$A_1 =_E A_1^{'}, \ldots, A_n =_E A_n^{'}$$

эквивалентна соответствующей

$$(A_1 \leftrightarrow A_1^{'}) \wedge \cdots \wedge (A_n \leftrightarrow A_n^{'}) =_E 1$$

и следовательно проблеме преобразования формулы в теорему в логике $\mathcal{L}$ [27–29].

В. В. Рыбаковым унификационная проблема решалась для модальных $\mathcal{S}4$, $\mathcal{G}rz$ и интуиционистской логик [59], предложен подход к определению всех неунифицируемых формул в широком классе модальных логик:

для расширений $S4$ и $[K4 + (\Box\bot \equiv \bot)]$ [60]. С. П. Одинцовым и В. В. Рыбаковым исследовалась проблема унификации в паранепротиворечивых логиках Нельсона $\mathcal{N}4$ и минимальной Йохансcона $\mathcal{J}$ [52; 53]. В частности, найден алгоритм построения конечных полных наборов унификаторов для $\sim$-свободных формул в $\mathcal{N}4$.

В конце 1990-х С. Гиларди предложил новый подход к исследованию унификации с помощью приложений идей проективных алгебр и техники, основанной на проективных формулах [28]. Этот подход позволил решить задачу построения конечных полных наборов унификаторов, предложив эффективные алгоритмы для целого ряда логик [27–31]. Основываясь на данном подходе, В. Джик и П. Войтылак установили проективную унификацию в расширениях $\mathcal{S}4.3$ [17]. В. В. Рыбаков исследовал модификацию линейной временной логики $\mathcal{LTL}$ с оператором $Until$, для которой была установлена проективность унификации [66]. Из проективности унификации в логике следует существование наиболее общего унификатора (mgu), но не наоборот. К примеру, в [9] доказано существование mgu для каждой унифицируемой формулы в $\mathcal{LTL}$ с операторами $Next$ и $Until$, и построен пример унифицируемой, но не проективной формулы.

В ряде работ было установлено решение проблемы допустимости при существовании вычислимых полных наборов унификаторов [36–39], что значительно увеличило важность подхода к унификации через проективные формулы.

Унификационная проблема редуцируема к проблеме допустимости [63]: унифицируема ли формула φ в логике $\mathcal{L}$, если правило вывода $\varphi/\bot$ не допустимо в $\mathcal{L}$? В некоторых случаях, когда логика имеет финитарный тип унификации, проблема допустимости также сводима к проблеме унификации [6; 7].

Широкую применимость демонстрирует подход, основанный на построении *граунд унификатора* (т.е. полученного подстановкой констант вместо всех переменных): как в качестве доказательства унифицируемости произвольной формулы, так и при построении проективных унификаторов [15; 66; 79]. Идея построения проективного унификатора с применением граунд унификатора, однако, не является универсальной и всеприменимой:

было показано, что не для каждой формулы в $\mathcal{I}nt$ [28] и в $\mathcal{S}4.3$ [17] граунд унификатор дает построение проективного унификатора. Не смотря на это, использование граунд унификатора при решении унификационных проблем является целесообразным: даже в случаях, когда логика имеет нулевой (худший) тип унификации и mgu для некоторых формул не существует, построение граунд унификатора остается возможным.

Одновременно с интенсивными исследованиями унификации в транзитивных логиках, остаются крайне малоизученными аналогичные вопросы для нетранзитивных случаев, где они, по всей видимости, несут гораздо большую сложность, а многие методы и даже определения оказываются неприменимыми или требуют значительной модификации. Однако, несправедливо было бы не отметить существование работ для логик с нестандартными отношениями. К примеру, Э. Ерабеком доказан нульарный тип унификации в минимальной нормальной логике $\mathcal{K}$ [40], а В. Джиком — лучший — унитарный тип для $\mathcal{S}5$ и ее расширений [15]. Ф. Вольтером и М. Захарьящевым доказана неразрешимость унификации над $\mathcal{K}$ с дополнительной универсальной модальностью [76].

Представленные в диссертации результаты являются продолжением исследований В. В. Рыбакова с коллегами, посвященных логикам знания и времени, унификационным проблемам в нестандартных логиках, а также правилам вывода. В работах [8; 9; 66] исследовалась линейная временная логика $\mathcal{LTL}$ с операторами $Until, Next$ и ее версия без $Next$, в ряде работ (например, [67]) рассматривалась версия с нетранзитивным временем. Была исследована линейная транзитивная временная логика со знаниями агентов $\mathcal{LTK}$ [11–13], а также ее нетранзитивный случай [46].

Целью настоящей работы является решение проблем унификации в ряде временных и многоагентных модальных логик.

В соответствии с поставленной целью, были сформулированы следующие задачи:

1. Найти критерии неунифицируемости для любой формулы в линейных временных логиках знания $\mathcal{LTK}$ (над множеством натуральных чисел) и $\mathcal{LFPK}$ (над множеством целых чисел, с обратными бинарными отношениями по времени).

2. Построить обобщенный критерий неунифицируемости для класса полных по Крипке логик с выразимой универсальной модальностью.
3. Доказать проективную унификацию в логике $\mathcal{LFPK}$ и некоторых расширениях, а также в линейной модальной логике нетранзитивного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITL}$. Найти алгоритм построения наиболее общего унификатора в данных логиках.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для линейных временных логик знания $\mathcal{LTK}$ (над множеством натуральных чисел) и $\mathcal{LFPK}$ (над множеством целых чисел, с обратными бинарными отношениями по времени):
   (a) найдены критерии для определения любой неунифицируемой формулы в логиках;
   (b) построены базисы пассивных правил вывода.
2. Для всех полных по Крипке логик с выразимой универсальной модальностью:
   (a) найден универсальный критерий для определения любой неунифицируемой формулы;
   (b) построен универсальный базис пассивных правил вывода.
3. Для логики $\mathcal{LFPK}$ и ее расширений наборами модальных операторов $Until+, Until-$ и $Next, Previous$:
   (a) доказана проективность унификации;
   (b) предложены алгоритмы построения наиболее общего унификатора для любой унифицируемой формулы.
4. Для линейной модальной логики нетранзитивного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITL}$:
   (a) доказана возможность эффективно установить унифицируемость произвольной формулы путем построения граунд унификаторов;
   (b) доказана проективность унификации;
   (c) предложены алгоритмы построения наиболее общего унификатора для любой унифицируемой формулы.

Методы исследования. Используется язык многомодальных логик. Основным инструментом исследования является реляционная семантика Крипке, расширенная на случаи временных и многоагентных систем. При решении унификационной проблемы применяются подходы через отрицание унифицируемости, построение граунд унификаторов, метод основанный на проективных формулах. Также используются общие методы теоретико-модельной и алгебраической семантики для пропозициональных нестандартных логик.

Научная новизна, теоретическая и практическая значимость. Все результаты, представленные в диссертации, получены впервые, носят теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях как унификационных проблем, так и других вопросов модальных логик транзитивного и нетранзитивного времени, логик знаний агентов (допустимости, аксиоматизируемости), а также в различных областях математики (нестандартные логики, теория моделей, теория графов) и информатики (Computer Science, Term Rewriting Systems, Artificial Intelligence) и многих других. Результаты диссертации также могут быть использованы при составлении программ специальных курсов по математической логике для студентов, магистрантов и аспирантов математических и инженерных специальностей, в том числе кафедры алгебры и математической логики ИМиФИ СФУ.

Личный вклад. Результаты, представленные в главах 2 и 6, а именно Теоремы 2.1, 2.2, 6.1 и 6.2, Предложения 2.1, 6.1 и Лемма 6.1 получены соискателем лично. Основные результаты глав 3, 4 и 5, а именно теоремы 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, 5.3 и Лемма 5.1 получены в нераздельном соавторстве с В. В. Рыбаковым и А. В. Кошелевой. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 14 работах [77–90], среди которых 5 статей в рецензируемых журналах [77–81]. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях [77–79; 81] в изданиях, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Работа изложена на 83 страницах и включает 6 глав, введение, заключение и список литературы (90 наименований). Нумерация определений и утверждений в работе имеет вид $X.Y$, где X соответствует номеру текущей главы, а Y — номеру определения или утверждения внутри главы, в соответствии с его типом.

В **Главе 1** даются основные определения теории модальных логик знания и времени, правил вывода, реляционной семантики Крипке, унификации, приводится обзор наиболее важных существующих результатов. Основные результаты диссертации изложены в главах 2–6.

Глава 2 посвящена исследованию вопроса унификации через поиск критериев неунифицируемости и базиса пассивных правил в линейной временной логике знания $\mathcal{LTK}$, дается семантическое построение логики. Основными результатами Главы 2 являются приведенные в §2.2 и §2.3 **Теорема 2.1**, **Предложение 2.1** и **Теорема 2.2**.

В **Главе 3** рассматриваются вопросы, аналогичные представленным в **Главе 2**, для линейной временной логики знания $\mathcal{LFPK}$. Основные результаты Главы 3 приведены в §3.2 — **Теорема 3.1**, и в §3.3 — **Теорема 3.2**.

Глава 4 посвящена обобщению полученных в **Главе 3** результатов для случая произвольной полной по Крипке временной логики с выразимой в языке универсальной модальностью. Главными в данной главе следует считать **Теоремы 4.1** и **4.2**.

В **Главе 5**, следуя работам [28;29;66], исследован вопрос унификации в логике $\mathcal{LFPK}$ и ее модификациях через проективные формулы, доказывается, что любая унифицируемая в данных логиках формула является проективной. Основными результатами данной главы являются **Теоремы 5.1, 5.2, 5.3** из §5.2.

В **Главе 6** дано семантическое построение линейной логики нетранзитивного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITL}$. Основным результатом данной главы являются **Теорема 6.1**, в которой доказывается эффективная определимость унифицируемости, и **Теорема 6.2** о проективности унификации в логике $\mathcal{ULITL}$.

Апробация работы. Результаты диссертации апробировались на семинарах кафедры алгебры и математической логики ИМиФИ СФУ по нестандартным логикам, «Красноярском алгебраическом семинаре», международных конференциях «Алгебра и логика: теория и приложения» (Красноярск, 2016), «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2016, 2017), «Математика в современном мире» (Новосибирск, 2017), всероссийских научных мероприятиях: конференции «Математики — Алтайскому краю (МАК)» (Барнаул, 2017) и школе-семинаре «Синтаксис и семантика логических систем» (Улан-Удэ, 2017), а также ряде молодежных конференций: «Ломоносов» (Москва, 2016); «МНСК» (Новосибирск, 2016); «Проспект Свободный» (Красноярск, 2016).

Благодарности.

Я глубоко признателен научному руководителю Рыбакову Владимиру Владимировичу за постановку задач и неизменную помощь в работе.

Я благодарен моим коллегам и, в особенности, Голованову Михаилу Ивановичу, за ценные советы и обсуждение результатов.

Также хочу поблагодарить сотрудников кафедры алгебры и математической логики и Института математики и фундаментальной информатики СФУ за поддержку и теплую атмосферу.

Глава 1. Определения и известные результаты

Следуя книгам [14] и [59], в данной главе приведены основные определения из теории модальных логик и унификации. Также сформулирован ряд известных результатов в данных областях со ссылками на источники.

1.1 Пропозициональная логика

Язык L пропозициональной логики $\mathcal{L}$ состоит из множеств: $C_{\mathcal{L}}$ и $P_{\mathcal{L}}$, и скобок $(,)$. $C_{\mathcal{L}}$ представляет собой множество функциональных символов, которые называются *логическими связками* (или *логическими операторами*), $P_{\mathcal{L}}$ — счетное бесконечное множество (пропозициональных) переменных. Для каждой конкретной логики набор логических связок фиксирован. В частности, для классической пропозициональной логики $\mathcal{CPC}$ определены три бинарных: $\wedge$, $\vee$ и $\rightarrow$, а также один унарный: $\neg$ операторы. Пропозициональные переменные из $P_{\mathcal{L}}$ могут интерпретироваться как переменные для произвольного логического выражения. Будем обозначать такие переменные малыми латинскими буквами (с индексами и без).

Определение 1.1. *Выражения данного языка L называются правильно построенными формулами (сокращенно п.п.ф.), если они они построены по следующим правилам:*

- *Любая пропозициональная переменная является п.п.ф.;*
- *Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — набор п.п.ф., а f — n-арная логическая связка, то выражение $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ также является п.п.ф.*

Множеством WFF_L правильно построенных формул в языке L называется наименьшее множество выражений, содержащих пропозициональные переменные из $P_{\mathcal{L}}$) и замкнутое относительно логических связок из $C_{\mathcal{L}}$.

Определение 1.2. *Аксиомой называется выражение вида* $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, *полученное из некоторой п.п.ф.* $\varphi(p_1,\ldots,p_n)$ *путем замены пропозициональных переменных* $p_1,\ldots,p_n$ *на формульные переменные* $x_1,\ldots,x_n$.

Аксиоматическая система AS пропозициональных логик логического языка L включает в себя наборы аксиом Ax и правил вывода Ir.

Определение 1.3. *(Структурным) правилом вывода называется выражение вида*

$$r := \frac{\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_m(x_1,\ldots,x_n)}{\psi(x_1,\ldots,x_n)},$$

где $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ *и все* $\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)$ *являются п.п.ф., построенными из пропозициональных переменных* $p_1,\ldots,p_n$, *которые заменены в* r *на новые формульные переменные* $x_1,\ldots,x_n$.

Таким образом, аксиомы могут интерпретироваться как правила вывода с пустыми посылками. Определим выводимость в некоторой AS.

Определение 1.4. *Конечная последовательность формул* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in WFF_L$ *в языке* L *называется выводимой в данной* AS *тогда и только тогда, когда каждая* α_i*:*

- *получена из некоторой* $Ax \in AS$ *подстановкой п.п.ф. вместо ее переменных;*
- *получена из некоторых предыдущих формул* $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ *последовательности при помощи некоторого правила вывода* $r \in Ir$.

П.п.ф. α *выводима* (или доказуема) в AS, если существует вывод в AS, содержащий α в качестве заключительной формулы. Выводимые формулы любой AS называются теоремами в AS. Множество всех теорем аксиоматической системы AS будем обозначать $Th(AS)$ ($Th(AS)$ — *теория* системы AS).

Предложение 1.1. *(1.1.5 из [59]) Если* α *— выводимая в* AS *формула и* α_1 *— некоторая п.п.ф., полученная из* α *путем замены некоторыми п.п.ф. произвольного числа переменных в* α, *то* α_1 *также выводима в* AS. *Т.е.,* *если* $\beta_1, \ldots, \beta_m \in WFF_L$, *то*

$$\alpha(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m) \in Th(AS) \Rightarrow \alpha(p_1, \ldots, p_n, \beta_1, \ldots, \beta_m) \in Th(AS).$$

Аксиоматическая система, имеющая конечное число аксиом, называется *логическим исчислением.*

1.2 Правила вывода

Определение 1.5. *Правило вывода*

$$r := \frac{\alpha_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \alpha_m(x_1, \ldots, x_n)}{\beta(x_1, \ldots, x_n)}$$

называется допустимым в логике $\mathcal{L}$ *языка* L *тогда и только тогда, когда для любой подстановки* $x_i \mapsto \gamma_i \in WFF_{L^{\mathcal{L}}}$ *всегда выполняется* $\beta(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathcal{L}$ *когда* $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$ $\alpha_j(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathcal{L}$.

Определение 1.6. *Правило вывода* $r := \alpha_1, \ldots, \alpha_m/\beta$ *называется выводимым в логике* $\mathcal{L}$, *если* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \vdash_{\mathcal{L}} \beta$.

Предложение 1.2. *(1.4.3 из [59]) Любое выводимое правило вывода в логике* $\mathcal{L}$ *допустимо в* $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $\alpha_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \alpha_m(x_1, \ldots, x_n) \vdash_{\mathcal{L}} \beta(x_1, \ldots, x_n)$. Положим постановку v: $v(x_i) := \gamma_i \in WFF_{L^{\mathcal{L}}}$ такую, что $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$ $\alpha_j(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathcal{L}$. Возьмем произвольный вывод $\mathbb{S}$ формулы $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ из $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ в $\mathcal{L}$. Более того, выберем подстановку w совпадающую с v на области означивания $Dom(v)$ и отобразим все переменные не лежащие в $Dom(v)$ на β. Последовательность $\mathbb{S}^w$, полученная из $\mathbb{S}$ после применения w к каждому ее члену, будет выводом в $\mathcal{L}$ из пустого множества гипотез. Действительно, после подстановки w все гипотезы стали теоремами в $\mathcal{L}$, множество всех теорем $\mathcal{L}$ замкнуто относительно подстановок и все правила вывода являются структурными (в соответствии с подстановками). Таким образом, $\vdash_{\mathcal{L}} \beta^v$, т.е. $\beta(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathcal{L}$. $\square$

Определение 1.7. *Правило* $r := \alpha/\beta$ *является следствием правил* $r_1 := \alpha_1/\psi_1, \ldots, r_n := \alpha_n/\psi_n$ *в логике* $\mathcal{L} \Leftrightarrow \forall A \in Var(L) = \{A | A \vDash (\varphi = \top), \forall \varphi \in \mathcal{L}\}$*: если*

$$\forall i A \vDash (\alpha_i = \top) \Rightarrow (\beta_i = \top),$$

то

$$A \vDash (\alpha = \top) \Rightarrow (\beta = \top).$$

Определение 1.8. *Набор правил вывода* (G) *в языке* $L^{\mathcal{L}}$ *называется базисом в* $\mathcal{L}$ *для множества правил* $\mathbb{X}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{X}$ *и каждое правило* $r \in \mathbb{X}$ *является следствием из* $\mathbb{G}$ *в* $\mathcal{L}$.

Определение 1.9. *Пусть* $r := \alpha_1, ..., \alpha_n/\beta$ *— правило вывода в логике* $\mathcal{L}$*. Правило* r *называется пассивным для* $\mathcal{L}$ *если для любой подстановки* g *формул вместо переменных в* r *никогда не выполняется* $g(\alpha_1) \in \mathcal{L} \& \ldots \& g(\alpha_n) \in \mathcal{L}$.

Определение 1.10. *Логика* $\mathcal{L}$ *называется пассивно структурно полной (кратко* PSC*), если каждое пассивное правило выводимо в* $\mathcal{L}$.

Определение 1.11. *Логика* $\mathcal{L}$ *называется почти структурно полной (кратко* ASC*), если каждое (структурное) допустимое не пассивное правило выводимо в* $\mathcal{L}$.

Определение 1.12. *Логика* $\mathcal{L}$ *называется структурно полной (кратко* SC*), если она пассивно и почти структурно полна.*

Иначе говоря, $SC = ASC + PSC$.

1.3 Модальная пропозициональная логика

Перейдем к рассмотрению модальной пропозициональной логики. Кроме набора логических связок классического пропозиционального исчисления, модальный язык L_m дополнен новым унарным логическим оператором $\Box$, который читается как «необходимо». Множество всех формул модального пропозиционального языка замкнуто относительно правила нормализации: если α формула, то $\Box\alpha$ также формула. Парный к $\Box$ оператор $\Diamond$ (буквально означающий «возможно») выражается следующим образом: $\Diamond\alpha := \neg\Box\neg\alpha$.

Относительно модальной аксиоматической системы, выделяют минимальную нормальную модальную логику $\mathcal{K}$: ее аксиоматическая система включает все аксиомы $\mathcal{CPC}$ (аксиоматическая система Гильберта AS_1) и аксиому Крипке:

$$\Box(x \to y) \to (\Box x \to \Box y).$$

Правила вывода в $\mathcal{K}$ включают:

$$\text{(R1) } \frac{x, x \to y}{y} \text{ (modus ponens);}$$
$$\text{(R2) } \frac{\alpha(p)}{\alpha(x)} \text{ (правило подстановки);}$$
$$\text{(R3) } \frac{x}{\Box x} \text{ (правило нормализации).}$$

Ниже приведем ряд известных модальных формул, отражающих определенное специфическое свойство модальности, с их стандартными обозначениями [33; 59]:

Таблица 1.1 — Соответствие некоторых известных модальные формул и свойств.

$$\begin{aligned}
T &:= \Box p \to p; \\
4 &:= \Box p \to \Box\Box p; \\
D &:= \Box p \to \Diamond p; \\
E &:= \Diamond p \to \Box\Diamond p; \\
B &:= p \to \Box\Diamond p; \\
Tr &:= (\Box p \to p) \wedge (p \to \Box p); \\
V &:= \Box p; \\
M &:= \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p; \\
G &:= \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p; \\
Crz &:= \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p; \\
Dum &:= \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to (\Diamond\Box p \to p); \\
W &:= \Box(\Box p \to p) \to \Box p.
\end{aligned}$$

Аксиоматические системы большинства известных нормальных модальных логик могут быть получены добавлением некоторых из перечисленных формул или их комбинаций к системе аксиом логики $\mathcal{K}$ (Табл. 1.2).

Таблица 1.2 — Некоторые известные нормальные модальные логики.

For_m	$\mathcal{K} \oplus \{p\}$;
$\mathcal{T}$	$\mathcal{K} \oplus \{\Box p \to p\}$;
$\mathcal{B}$	$\mathcal{T} \oplus \{p \to \Box\Diamond p\}$;
$\mathcal{D}$	$\mathcal{K} \oplus \{\Box p \to \Diamond p\}$;
$\mathcal{K}4$	$\mathcal{K} \oplus \{\Box p \to \Box\Box p\}$;
$\mathcal{S}4$	$\mathcal{K}4 \oplus \{\Box p \to p\}$;
$\mathcal{S}4.1$	$\mathcal{S}4 \oplus \{\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p\}$;
$\mathcal{S}4.2$	$\mathcal{S}4 \oplus \{\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p\}$;
$\mathcal{S}4.3$	$\mathcal{S}4 \oplus \{\Box(\Box p \to \Box q) \vee \Box(\Box q \to \Box p)\}$;
$\mathcal{S}5$	$\mathcal{S}4 \oplus \{\Diamond p \to \Box\Diamond p\}$;
$\mathcal{G}rz$	$\mathcal{S}4 \oplus \{\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p\}$;
$\mathcal{GL}$	$\mathcal{K}4 \oplus \{\Box(\Box p \to p) \to \Box p\}$;
$\mathcal{K}4\mathcal{D}um$	$\mathcal{K}4 \oplus \{\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to (\Diamond\Box p \to p)\}$;
$\mathcal{K}4.1$	$\mathcal{K}4 \oplus \{\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p\}$;
$\mathcal{K}4.2$	$\mathcal{K}4 \oplus \{\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p\}$.

Определение 1.13. *Нормальной модальной пропозициональной логикой называют множество формул языка модальной системы $\mathcal{K}$, содержащее все теоремы $\mathcal{K}$ и замкнутое относительно правил $R1$–$R3$.*

Основное отличие нормальных логик от не нормальных состоит в наличии правила нормализации (или Гёделя), которое для не нормального случая, зачастую заменяется на более слабое. В качестве примеров таких правил можно привести следующие:

$$(R3^1)\ \frac{x \to y}{\Box x \to \Box y}; \qquad (R3^2)\ \frac{\Box(x \to y)}{\Box(\Box x \to \Box y)}.$$

Наиболее известные примеры не нормальных модальных логик приведены в таблице 1.3. Будем обозначать далее $Ax(AS)$ как множество аксиом из аксиоматической системы AS, а $Ir(AS)$ как множество правил вывода из AS.

Таблица 1.3 — Некоторые известные не нормальные модальные логики.

$$
\begin{array}{r|l}
\mathcal{C}2 & Ax(\mathcal{K}) \oplus \{Ir(R1, R3^1\}; \\
\mathcal{D}2 & Ax(\mathcal{K}) \oplus \{\Box p \to \Diamond p\} \oplus Ir(R1, R3^1); \\
\mathcal{E}2 & Ax(\mathcal{K}) \oplus \{\Box p \to p\} \oplus Ir(R1, R3^1); \\
\mathcal{E}3 & Ax(\mathcal{E}2) \oplus \{\Box p \to \Box(\Box q \to \Box p)\} \oplus Ir(R1, R3^1); \\
\mathcal{ET} & Ax(\mathcal{E}2) \oplus \{\Box p \to \Box\Box p\} \oplus Ir(R1, R3^1); \\
\mathcal{E}4 & Ax(\mathcal{E}3) \oplus \{\Box p \to \Box\Box p\} \oplus Ir(R1, R3^1); \\
\mathcal{S}2 & \{\Box A : A \in Th(K)\} \oplus \{\Box(\Box p \to p)\} \oplus Ir(R1, R3^2); \\
\mathcal{S}3 & Ax(\mathcal{S}2) \oplus \{\Box p \to \Box(\Box q \to \Box p)\} \oplus Ir(R1).
\end{array}
$$

1.4 Временная пропозициональная логика

Временную пропозициональную логику можно рассматривать как некоторую разновидность бимодальной логики. Язык L_t, как и модальный L_m, является расширением языка $\mathcal{CPC}$ двумя унарными логическими временны́ми связками: F и P. Правило построения для п.п.ф. дополняется данными связками: если α является правильно построенной формулой, то $F\alpha$ и $P\alpha$ также п.п.ф. Формула $F\alpha$ читается: «в некоторый момент времени в будущем выполнится α»; $P\alpha$, в свою очередь: «в некоторый момент времени в прошлом выполнялось α». Как и в модальном случае, для данных связок также существуют двойственные: G — «всегда будет выполнятся» и H — «всегда ранее выполнялось», которые выражаются через базовые стандартно: $G\alpha := \neg F \neg\alpha$, $H\alpha := \neg P \neg \alpha$.

Аксиоматическую систему AS минимальной временной пропозициональной логики $\mathcal{T}_0$ определяют как совокупность всех аксиом $\mathcal{CPC}$, а также четырех следующих:

$$G(p \to q) \to (Gp \to Gq);$$

$$H(p \to y) \to (Hp \to Hq);$$

$$p \to HFp; \qquad p \to GPp,$$

вместе с тремя правилами вывода:

$$\frac{x, x \to y}{y}; \quad \frac{x}{Gx}; \quad \frac{x}{Hx}.$$

По аналогии с нормальными модальными логиками, аксиоматическая система временной логики в языке L_t содержит все аксиомы и правила вывода минимальной $\mathcal{T}_0$.

Определение 1.14. *Временной логикой называют множество формул языка L_t, содержащее $\mathcal{T}_0$ и замкнутое относительно правила подстановки и правил вывода логики $\mathcal{T}_0$.*

1.5 Семантика Крипке возможных миров для модальных логик

Изначально идея семантики возможных миров принадлежала Г.Ф. Лейбницу, утверждавшему, что необходимая истина это истинна во всех возможных мирах. Именно эта мысль стала основополагающей в теории моделей модальной логики в работе С. Крипке [43], начиная с которой модели возможных миров стали широко использоваться в модальных исследованиях, во-первых благодаря их удобному техническому инструменту, во-вторых в связи с достаточной интуитивной ясностью и привлекательностью. В общем виде, модель возможных миров для пропозициональной логики это пара, состоящая из множества элементов (миров) и бинарного отношения на этом множестве, моделирующего взаимодействие этих возможных миров. В данном разделе мы определим необходимую реляционную семантику для нормальных модальных логик, а в последующем рассмотрим случай временных логик.

Определение 1.15. *Фреймом Крипке F (шкалой или просто фреймом) называется пара $\langle W, R \rangle$, где W — непустое множество элементов, а R — бинарное отношение на W, такое что $R \subseteq W^2$.*

Неформально, множество W можно рассматривать как множество всех возможных состояний, симулируемых элементами данного фрейма, а R как отношение достижимости между этими состояниями или переход от одного состояния (мира) к другому. Такой переход может иметь множество различных интерпретаций: поток времени, взаимодействие возможностей, движение в пространстве и т.п. Важным в теории возможных миров является геометрическое понимание фрейма: если для элементов $a,b \in W$ выполнено aRb, то говорят a «R-видит» b. Элемент $a \in W$ называется R-максимальным (или квази-максимальным) во фрейме F, если $\forall b \in W$ $(aRb) \Rightarrow (bRa)$.

Определение 1.16. *Пусть $\{p_1, \ldots ,p_n\} = P$ — множество пропозициональных переменных, а $F = \langle W, R\rangle$ фрейм Крипке. Означиванием V множества пропозициональных переменных P на фрейме F называется отображение, ставящее в соответствие каждой переменной $p_i \in P$ подмножество $V(p_i) \subseteq W$ $(V : P \mapsto 2^W)$.*

Иными словами, означивание V присваивает каждой переменной p_i множество всех возможных миров из W, в которых справедливо утверждение p_i.

Определение 1.17. *Моделью Крипке M (или просто моделью) называется тройка $\langle W, R, V\rangle$, где $\langle W, R\rangle$ — фрейм, а V — означивание пропозициональных переменных из множества $Dom(V) = \{p_1, \ldots ,p_n\}$, называемого областью означивания V. Для языка L_m отношение истинности $\Vdash$ в данной модели Крипке $M = \langle F,V\rangle$ для модальных формул $\forall w \in F$ задается индуктивно следующим образом:*

1. $\langle F, w\rangle \Vdash_V p \Leftrightarrow w \in V(p)$;
2. $\langle F, w\rangle \Vdash_V \varphi \vee \psi \Leftrightarrow [(\langle F, w\rangle \Vdash_V \varphi) \vee (\langle F, w\rangle \Vdash_V \psi)]$;
3. $\langle F, w\rangle \Vdash_V \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow [(\langle F, w\rangle \Vdash_V \varphi) \wedge (\langle F, w\rangle \Vdash_V \psi)]$;
4. $\langle F, w\rangle \Vdash_V \neg\varphi \;\Leftrightarrow\; [\neg (\langle F, w\rangle \Vdash_V \varphi)]$;
5. $\langle F, w\rangle \Vdash_V \varphi \to \psi \Leftrightarrow [(\langle F, w\rangle \nVdash_V \varphi) \vee (\langle F, w\rangle \Vdash_V \psi)]$;
6. $\langle F, w\rangle \Vdash_V \Diamond\varphi \;\Leftrightarrow\; [\exists v \in F : (wRv) \Rightarrow (\langle F, v\rangle \Vdash_V \varphi)]$;
7. $\langle F, w\rangle \Vdash_V \Box\varphi \;\Leftrightarrow\; [\forall v \in F : (wRv) \Rightarrow (\langle F, v\rangle \Vdash_V \varphi)]$.

Запись вида $\Vdash_V$ во введенных отношениях истинности означает зависимость их от соответствующего означивания V, и может быть прочитана следующим образом: формула φ истинна (или выполнима) на элементе w модели M при означивании V.

Говорят, что модальная пропозициональная формула α *истинна* (или *выполнима*) во фрейме F ($F \Vdash \alpha$), если для любого означивания V переменных из α и любого элемента $a \in W$ имеет место $\langle F, a\rangle \Vdash_V \alpha$.

Иными словами, класс фреймов K называется адекватным для нормальной модальной логики $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда все теоремы из $\mathcal{L}$ выполняются на фреймах из K.

Определение 1.18. *Фрейм $F = \langle W, R\rangle$ называется рефлексивным, если для каждого $a \in W$ aRa, т.е. отношение R рефлексивно; транзитивным, если для любых a,b,$c \in W$ $(aRb)\&(bRc) \to (aRc)$, т.е. отношение R транзитивно.*

Определение 1.19. *Для любого транзитивного фрейма $F = \langle W, R\rangle$ сгустком (в другой интерпретации кластером) называется подмножество $C \subseteq W$ взаимно сравнимых по R элементов:*

$$\forall x,y \in C(xRy)\&(yRx),$$

$$\forall x \in C, \forall y \in W[(xRy)\&(yRx) \Rightarrow y \in C],$$

либо $C := \{a\}$, где a иррефлексивный элемент: $\neg(aRa)$. Для любого элемента $a \in W$, $C(a)$ называется сгустком, содержащим a.

Имеет место следующая лемма:

Лемма 1.1. *(2.3.9 из [59]) Если все аксиомы нормальной модальной логики $\mathcal{L}$ выполняются на фрейме F и правила вывода: (R1), (R3) сохраняют истинность формул в F, то все теоремы $\mathcal{L}$ выполняются во фрейме F.*

Доказательство. Пусть α — теорема в $\mathcal{L}$ и выводима из схемы аксиом $\mathcal{L}$. Зафиксируем вывод $\mathbb{S}$ формулы α и докажем индукцией по длине вывода $\mathbb{S}$, что формулы из $\mathbb{S}$ выполнимы в F. Первая формула β из $\mathbb{S}$ должна быть из перечня аксиом. Пусть V — означивание на фрейме F пропозициональных переменных из β. Необходимо показать, что β выполнима в F при означивании V. В самом деле, пусть β подстановочным примером аксиомы γ логики $\mathcal{L}$, где $\gamma = \gamma(p_i)$ и $\beta = \gamma(\delta_i)$. Определим означивание V_1 всех переменных p_i на фрейме F следующим образом: V_1 присваивает каждой p_i множество $V(\delta_i)$ всех элементов из F, на которых δ_i выполняется при V. Очевидно, что истинностное значение γ при V_1 совпадает с истинностным значением $\gamma(\delta_i)$ при V. Имеем, что γ выполнима в F при любом означивании, следовательно, формула $\gamma(\delta_i)$ (совпадающая с β) выполнима в F при V. Таким образом, любая β из схемы аксиом логики $\mathcal{L}$ истинна в F при любом означивании. Также имеем, что (R1) и (R3) сохраняют истинность на F. Следовательно, индукцией по местам вхождений формул в $\mathbb{S}$, доказывается, что все формулы из $\mathbb{S}$ выполняются на фрейме F, в частности, и α выполняется на F. $\square$

Определение 1.20. *Пусть $\mathcal{L}$ — нормальная модальная логика. Модель Крипке $M := \langle W, R, V\rangle$ называется характеристической для логики $\mathcal{L}$, если для любой формулы α выполняется:*

$$\alpha \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{L}(M) := \{\beta | \beta \in WFF_{L^{\mathcal{L}}}, \forall a \in W : a \Vdash_V \beta\}.$$

Определение 1.21. *Нормальная модальная логика $\mathcal{L}$ называется полной по Крипке, если существует класс фреймов K, такой что*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(K) := \{\alpha | \alpha \in WFF_{L^{\mathcal{L}}}, \forall F \in K : F \Vdash \alpha\}.$$

Если α принадлежит $\mathcal{L}$, то говорим, что α — теорема $\mathcal{L}$.

Другими словами, модальная логика $\mathcal{L}$ полна, если для нее существует характеристических класс фреймов, а множество всех теорем любой такой логики совпадает с множеством всех формул, выполнимых на всех фреймах из характеристического класса.

Будем обозначать $\mathcal{L}(F)$ ($\mathcal{L}(K)$) модальную логику фрейма F (класса K соответственно). Очевидным примером полных по Крипке нормальных модальных логик являются логики произвольных классов фреймов. Однако, не все даже нормальные, модальные логики полны. Мы будем рассматривать только полные по Крипке логики.

Определение 1.22. *Пусть f — отображение фрейма $F_1 := \langle W_1, R_1\rangle$ на фрейм $F_2 := \langle W_2, R_2\rangle$. Отображение f называется p-морфизмом, если*

(i) $\forall a, b \in W_1 : aR_1b \Rightarrow f(a)R_2f(b)$;

(ii) $\forall a, b \in W_1 : f(a)R_2f(b) \Rightarrow (\exists c \in W_1)[aR_1c \wedge f(c) = f(b)]$.

Определение 1.23. *Пусть f — отображение фрейма $F_1 := \langle W_1, R_1\rangle$ модели $M_1 := \langle W_1, R_1, V_1\rangle$ на фрейм $F_2 := \langle W_2, R_2\rangle$ модели $M_2 := \langle W_2, R_2, V_2\rangle$. Говорим, что f — p-морфизм модели M_1 на модель M_2, если*

(I) f — p-морфизм фрейма F_1 на F_2;

(II) означивания V_1, V_2 определены на одном и том же множестве пропозициональных переменных;

(III) $\forall p \in Dom(V_1), \forall a \in W_1 : [a \Vdash_{V_1} p \Leftrightarrow f(a) \Vdash_{V_2} p]$.

Наиболее важным свойством p-морфизма является сохранение истинности формул:

Лемма 1.2. *(2.5.15 из [59]) Если f это p-морфизм модели Крипке $M_1 := \langle W_1, R_1, V_1\rangle$ на модель $M_2 := \langle W_2, R_2, V_2\rangle$, то для любой формулы $\alpha(p)$, где все $p \in Dom(V_1)$, выполняется:*

$$\forall a \in W_1 : \langle F_1, a\rangle \Vdash_{V_1} \alpha \Leftrightarrow f(a) \Vdash_{V_2} \alpha.$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по длине формулы α. Пусть $\alpha = p$, тогда утверждение леммы следует непосредственно из пункта (III) определения p-морфизма моделей. Доказательство для формул, построенных из логических связок $\vee, \wedge, \neg, \to$ очевидны. Покажем для $\alpha = \Box\beta$. Пусть $\langle F_1, a\rangle \Vdash_{V_1} \Box\beta$. Предположим, что $c \in W_2$ и $f(a)R_2c$. Т.к. f это отображение «на», то существует $b \in W_1$, такой что $f(b) = c$. Из $f(a)R_2f(b)$ и (ii) из определения p-морфизма фреймов, существует $d \in W_1$, такой что aR_1d и $f(d) = f(b)c$. Из того, что $\langle F_1, a\rangle \Vdash_{V_1} \Box\beta$ следует $\langle F_1, d\rangle \Vdash_{V_1} \beta$ и, по предположению индукции: $\langle F_2, f(d)\rangle \Vdash_{V_2} \beta$. Тогда $\langle F_2, c\rangle \Vdash_{V_2} \beta$, следовательно, $\langle F_2, f(a)\rangle \Vdash_{V_2} \Box\beta$. Пусть aR_1b, тогда по (i) из определения p-морфизма фреймов, $f(a)R_2f(b)$

и в силу $\langle F_2, f(a)\rangle \Vdash_{V_2} \Box\beta$, имеет место $\langle F_2, f(b)\rangle \Vdash_{V_2} \beta$. По индуктивному предположению $\langle F_1, b\rangle \Vdash_{V_1} \beta$. Таким образом, $\langle F_1, a\rangle \Vdash_{V_1} \Box\beta$. $\square$

Следствие 1.1. *(2.5.16 из [59]) Если F_1 и F_2 — фреймы и существует p-морфизм f фрейма F_1 на F_2, то $\mathcal{L}(F_1) \subseteq \mathcal{L}(F_2)$.*

Доказательство. Пусть α — формула из $\mathcal{L}(F_1)$, V_2 — означивание переменных формулы α на фрейм F_2. Введем означивание V_1 тех же переменных на фрейм F_1: $V_1(p) := f^{-1}(V_2(p))$. Тогда f является p-морфизмом модели $\langle F_1, V_1\rangle$ на $\langle F_2, V_2\rangle$. Применив лемму 2.5.15 выше, получим $\langle F_2, V_2\rangle \Vdash \alpha$. Следовательно, $\alpha \in \mathcal{L}(F_2)$. $\square$

1.6 Семантика Крипке для временных логик

В данном разделе уточняется семантика Крипке для случая временных логик. Как было описано ранее, временная логика может рассматриваться как разновидность модальной с двумя $\Box$-операторами и некоторыми законами, описывающими их взаимодействие. Следовательно, и семантика Крипке для временного случая строится на основе семантики нормальных модальных логик: элементы модели Крипке понимаются как временные состояния, а отношение достижимости как поток времени. Поэтому любой фрейм Крипке может рассматриваться как временной.

Здесь и далее в работе, временной фрейм будем обозначать буквой T, вместо F — модального случая.

Временная модель определяется следующим образом:

Определение 1.24. *Временной моделью Крипке M называется тройка $\langle W, R, V\rangle$, где $\langle W, R\rangle$ — временной фрейм T, а V — означивание пропозициональных переменных P на W, т.е. $V : P \mapsto 2^W, \forall p \in P[V(p) \subseteq W]$.*

Определение истинностного отношения $\Vdash$ для временных формул может быть дано следующим образом (как и в модальном случае, индукцией по длине формул): пусть дана временная модель $M = \langle T,V\rangle$, тогда $\forall w \in W$:

1. $\langle T, w\rangle \Vdash_V p \Leftrightarrow w \in V(p)$*;*
2. $\langle T, w\rangle \Vdash_V \varphi \vee \psi \Leftrightarrow [(\langle T, w\rangle \Vdash_V \varphi) \vee (\langle T, w\rangle \Vdash_V \psi)]$*;*
3. $\langle T, w\rangle \Vdash_V \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow [(\langle T, w\rangle \Vdash_V \varphi) \wedge (\langle T, w\rangle \Vdash_V \psi)]$*;*
4. $\langle T, w\rangle \Vdash_V \neg\varphi \Leftrightarrow \ [\neg(\langle T, w\rangle \Vdash_V \varphi)]$*;*
5. $\langle T, w\rangle \Vdash_V \varphi \to \psi \Leftrightarrow [(\langle T, w\rangle \nVdash_V \varphi) \vee (\langle T, w\rangle \Vdash_V \psi)]$*;*
6. $\langle T, w\rangle \Vdash_V G\varphi \Leftrightarrow \ [\forall v \in T : (wRv) \Rightarrow (\langle T, v\rangle \Vdash_V \varphi)]$*;*
7. $\langle T, w\rangle \Vdash_V H\varphi \Leftrightarrow \ [\forall v \in T : (vRw) \Rightarrow (\langle T, v\rangle \Vdash_V \varphi)]$*;*
8. $\langle T, w\rangle \Vdash_V F\varphi \Leftrightarrow \ [\exists v \in T : (wRv) \Rightarrow (\langle T, v\rangle \Vdash_V \varphi)]$*;*
9. $\langle T, w\rangle \Vdash_V P\varphi \Leftrightarrow \ [\exists v \in T : (vRw) \Rightarrow (\langle T, v\rangle \Vdash_V \varphi)]$.

Соответственно, истинность временных формул на моделях Крипке может интерпретироваться следующим образом:

1. $\langle T, w\rangle \Vdash_V G\varphi \Leftrightarrow$ во всех будущих временных состояниях φ будет истинной;
2. $\langle T, w\rangle \Vdash_V H\varphi \Leftrightarrow$ во всех временных состояниях в прошлом φ была истинной;
3. $\langle T, w\rangle \Vdash_V G\varphi \Leftrightarrow$ в некотором будущем временном состоянии φ будет истинной;
4. $\langle T, w\rangle \Vdash_V G\varphi \Leftrightarrow$ в некотором временном состоянии в прошлом φ была истинной.

Стандартным образом определяется выразимость двойственных операторов: $G := \neg F \neg$, $H := \neg P \neg$. Определения фрейма или класса фреймов адекватных временной логике, полноты по Крипке и другие связанные определения совпадают с аналогичными для модальных логик.

Уточнения требует определение p-морфизма во временном случае:

Определение 1.25. *Отображение* f *фрейма* $T_1 := \langle W_1, R_1\rangle$ *на фрейм* $T_2 := \langle W_2, R_2\rangle$ *называется p-морфизмом, если*

(i) $\forall a, b \in W_1 : aR_1b \Rightarrow f(a)R_2f(b)$*;*
(ii) $\forall a, b \in W_1 : f(a)R_2f(b) \Rightarrow (\exists c \in W_1)[aR_1c \wedge f(c) = f(b)]$*;*
(iii) $\forall a, b \in W_1 : f(b)R_2f(a) \Rightarrow (\exists c \in W_1)[cR_1a \wedge f(c) = f(b)]$.

Как видно из определения, временной p-морфизм отличается от заданного ранее наличием требования одновременно к прямому и обратному отношению. Если рассматривать временной p-морфизм моделей, как частный случай модального, то справедливо определить его так: отображение f модели Крипке $M_1 := \langle W_1, R_1, V_1 \rangle$ на модель $M_2 := \langle W_2, R_2, V_2 \rangle$ называется *временным p-морфизмом*, если имеют место следующие условия:

(I) f — временной p-морфизм фрейма $T_1 := \langle W_1, R_1 \rangle$ на $T_2 := \langle W_1, R_1 \rangle$;

(II) означивания V_1, V_2 определены на одном и том же множестве пропозициональных переменных;

(III) $\forall p \in Dom(V_1), \forall a \in W_1 : [a \Vdash_{V_1} p \Leftrightarrow f(a) \Vdash_{V_2} p]$.

Временной p-морфизм также сохраняет истинность временных формул. Потому имеет смысл ввести аналоги теорем для модальных логик, описанных в предыдущем разделе:

Лемма 1.3. *(2.5.43 из [59]) Если f это временной p-морфизм модели Крипке $M_1 := \langle W_1, R_1, V_1 \rangle$ на модель $M_2 := \langle W_2, R_2, V_2 \rangle$, то для любой временной формулы $\alpha(p)$, где все $p \in Dom(V_1)$, выполняется:*

$$\forall a \in W_1 : \langle T_1, a \rangle \Vdash_{V_1} \alpha \Leftrightarrow f(a) \Vdash_{V_2} \alpha.$$

Следствие 1.2. *(2.5.44 из [59]) Если T_1 и T_2 — фреймы и существует временной p-морфизм f фрейма T_1 на T_2, то $\mathcal{L}(T_1) \subseteq \mathcal{L}(T_2)$.*

Доказательства этих двух утверждений полностью аналогичны своим модальным аналогам с единственным отличием в рассмотрении двух модальных операторов, вместо одного.

1.7 Финитная аппроксимируемость временных и модальных логик

Удобным инструментом, предлагающим алгоритм распознания теорем в логике, является финитная аппроксимируемость. В алгебраической интерпретации, свойство финитной аппроксимируемости для данной алгебраической логики $\mathcal{L}$ означает, что каждая формула, не являющаяся теоремой в $\mathcal{L}$ опровергается в финитной алгебре $\mathbb{L}$ из $Var(\mathcal{L})$. Мы остановимся на непосредственно логической интерпретации данного свойства в семантике Крипке.

Определение 1.26. *Пусть $\mathcal{L}$ —модальная или временная логика. $\mathcal{L}$ называется финитно аппроксимируемой по Крипке, если*

$$\mathcal{L} = \{\alpha | \forall F := \langle W, R \rangle \, |W| < \omega \& F \Vdash \alpha\},$$

т.е. если $\mathcal{L}$ полна относительно некоторого класса конечных фреймов.

Известно следующее утверждение.

Следствие 1.3. *(2.6.6 из [59]) Любая финитно аппроксимируемая по Крипке модальная, временная или суперинтуиционистская логика $\mathcal{L}$ полна по Крипке.*

1.8 Характеристики модальных и временных формул

Для рассмотрения и оценки данной модальной (или, аналогично, временной) формулы существует ряд параметров, двумя наиболее важными из которых для нас будут *модальная степень* и *длина* (величина) формулы:

Определение 1.27. *Модальной (временной) степенью $d(\alpha)$ формулы α называется максимальное число вложенных модальных (временных) операторов $\Diamond$ и $\Box$ в α, т.е.: $d(p) = d(\top) = d(\bot) = 0; d(\neg\alpha) = d(\alpha)$; $d(\alpha \to \beta) = d(\alpha \wedge \beta) = d(\alpha \vee \beta) = max(d(\alpha), d(\beta)); d(\circ\alpha) = d(\alpha) + 1$, где $\circ \in \{\Diamond, \Box\}$.*

Определение 1.28. *Длиной $l(\alpha)$ формулы α называется число модальных (или временных) операторов и логических связок в α:*
$l(p) = 0$, где p пропозициональная переменная; $l(\alpha \circ \beta) = l(\alpha) + l(\beta) + 1$, где $\circ \in \{\vee, \wedge\}$; $l(\bigcirc\alpha) = l(\alpha) + 1$, где $\bigcirc \in \{\neg, \Diamond, \Box\}$.

1.9 Унификация

Данная работа посвящена исследованию различных аспектов унификации формул в линейных временных и многоагентных модальных логиках, поэтому особенно важно достаточно полно представить определения этой теории.

Пусть дана логика $\mathcal{L}$ и формула $\varphi(p,q)$ обозначающая эквивалентность (т.е. для пропозиционального исчисления PC $\varphi(p,q) := (p \to q)\&(q \to p)$). Говорят, что формула α эквивалентна формуле β в $\mathcal{L}$ (обозначается $\alpha \equiv_{\mathcal{L}} \beta$), если $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi(\alpha,\beta)$. Вместо $\varphi(\alpha,\beta)$ для обозначения эквивалентности будем использовать $\alpha \equiv \beta$.

Определение 1.29. *Формулы $\alpha(p_1,\ldots,p_n)$ и $\beta(p_1,\ldots,p_n)$ называются унифицируемыми в алгебраической логике λ тогда и только тогда, когда существует набор формул $\delta_1,\ldots,\delta_n$ такой, что $\vdash_\lambda \alpha(\delta_1,\ldots,\delta_n) \equiv \beta(\delta_1,\ldots,\delta_n)$. Тогда набор $\delta_1,\ldots,\delta_n$ называется унификатором этих двух формул.*

Определение 1.30. *Формула $\alpha(p_1,\ldots,p_s)$ называется унифицируемой в логике $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда существует подстановка $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i$ для каждой p_i такая, что $\alpha(\sigma_1,\ldots,\sigma_s) \in \mathcal{L}$. В этому случае, подстановка σ называется унификатором формулы α.*

Граунд унификатором называется унификатор, полученный путем подстановки констант $\{\top,\bot\}$ вместо переменных формулы.

Следствие 1.4. *(2.7 из [60]) Для всех логик SIL, $S4_{ext}$, $K4+\Box\bot\equiv\bot$ унификаторы для унифицируемых формул могут быть эффективно построены; если унификатор существует, некоторая подстановка заменяющая переменные на формулы $\top$ или $\bot$ будет унификатором.*

Наличие аксиомы $\Box\bot\equiv\bot$ в данном Следствии важно, т.к., в противном случае, возможные возрастающие цепочки операции $\Box$ примененные к $\bot$ не будут иметь конкретной вычислимой границы.

Доказательство аналогичного данному следствию утверждения, применительно к рассматриваемой логике, будет приведено в Главе 6. Однако, для того чтобы охарактеризовать всех неунифицируемые формулы, для получения общей математической теоремы, описывающей такие формулы, данного следствия оказывается недостаточно. Известен следующий результат:

Теорема 1.2. *(2.10 из [60]) Для любой модальной логики $\mathcal{L}$ расширяющей $S4$ и любой модальной формулы α, α не унифицируема в $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда формула*

$$\Box\alpha \to \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond p \wedge \Diamond\neg p\right]$$

доказуема в $\mathcal{L}$ (т.е. данная формула принадлежит $\mathcal{L}$).

Опираясь на данный факт, в Главах 2, 3 и 4 доказываются теоремы, описывающие все неунифицируемые формулы во временных логиках $\mathcal{LTK}$, $\mathcal{LFPK}$, а также во всех модальных и временных логиках с универсальной модальностью.

Определение 1.31. *Унификатор σ формулы $\alpha(p_1,\dots,p_s)$ называется более общим, чем σ^1 в логике $\mathcal{L}$, если существует постановка σ^2, такая что для любой переменной p_i: $\sigma^1(p_i) \equiv \sigma^2(\sigma(p_i)) \in \mathcal{L}$.*

Унификатор σ формулы $\alpha(p_1,\dots,p_s)$ называется наиболее общим унификатором (кратко mgu), если для любого другого σ^i унификатор σ является более общим.

Наиболее общий унификатор можно проинтерпретировать, как лучшее решение унификационной проблемы. Говорят, что логика имеет *унитарный* тип унификации, если для любой унифицируемой формулы существует mgu; *финитарный*, если существует конечное число таких лучших решений. В таком случае, каждое лучшее решение называется *максимальным унификатором.* Тип называется *инфинитарным* в случае бесконечного числа максимальных унификаторов. Худшим является *нульарный* тип унификации: некоторые унифицируемые формулы не имеют максимальных унификаторов [40].

Определение 1.32. *Набор унификаторов CU для данной формулы φ в логике $\mathcal{L}$назывется полным набором унификаторов, если для любого унификатора σ формулы φ существует унификатор σ_1 из набора CU такой, что σ_1 более общий, чем σ.*

Определение 1.33. *Формула $\alpha(p_1, \dots, p_s)$ называется проективной в логике $\mathcal{L}$, если существует унификатор τ (называемый проективным унификатором) для формулы α такой, что $\Box\alpha \to [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{L}$ для любой переменной p_i формулы α.*

Стоит отметить, что определение проективной формулы зависит от логики, для которой оно дается. В частности, представленная формулировка корректна для случая классической рефлексивной транзитивной мономодальной логики (например, модальной $\mathcal{S}4$ или временной $\mathcal{LTL}$). Случай же, например, не рефлексивной $\mathcal{K}4$, накладывает требование на посылку формулы из определения: $\Box\alpha \wedge \alpha \to [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{K}4$. В Главе 5 будет представлена и другая формулировка определения проективной формулы — для логики с альтернативными отношениями. Пока же ограничимся рассмотрением самого простого — сформулированного случая. Известна следующая Лемма:

Лемма 1.4. *[28] Если подстановка σ_p проективна для формулы φ в логике $\mathcal{L}$, то $\{\sigma_p\}$ является полным набором унификаторов для φ (т.е. σ_p является наиболее общим для φ).*

Доказательство. Пусть σ — унификатор для формулы φ в логике $\mathcal{L}$. Т.к. мы преполагаем, что σ_p является проективным унификатором для φ в $\mathcal{L}$, имеет место $\Box\varphi \to [x_i \equiv \sigma_p(x_i)] \in \mathcal{L}$ для каждой переменной x_i формулы φ. Подействовав подстановкой σ на $\Box\varphi \to [x_i \equiv \sigma_p(x_i)]$ получим $\sigma(\Box\varphi) \to [\sigma(x_i) \equiv \sigma(\sigma_p(x_i))] \in \mathcal{L}$, т.е. $[\sigma(x_i) \equiv \sigma(\sigma_p(x_i))] \in \mathcal{L}$. □

Проективность любой унифицируемой формулы является замечательным результатом, гарантирующим существование *mgu* для каждой такой формулы и, значит, унитарный тип унификации. Обратное однако, не верно: логика унитарного типа унификации может иметь формулы одновременно унифицируемые, но не проективные. Например, в работе [9] был предложен пример для той же линейной временной логики $\mathcal{LTL}$ с отношением $Until$, дополненной оператором $Next$, демонстрирующий существование в логике унифицируемых, но не проективных формул.

Пример 1.1. *[66] Формула $\varphi = \Box(\Box x \vee (\neg x \wedge N\Box x))$ унифицируема в логике $\mathcal{LTL}$, но не проективна.*

Доказательство. Постановка $x \mapsto \top$ является примером граунд унификатора для φ. Положим, что φ проективна и π проективный унификатор. Рассмотрим модель N_V (с началом в 0: $|N_V| := \{0, 1, 2, \dots\}$), представленную на рис.1.1.

$$\overset{x}{\bigcirc} \xrightarrow{\;N\;} \overset{\neg x}{\bigcirc} \xrightarrow{\;N\;} \overset{\Box x}{\bigcirc} \xrightarrow{\;N\;} \overset{\Box x}{\bigcirc} \cdots$$

Рисунок 1.1 — Пример модели в логике $\mathcal{LTL}$

Так как $(N_v, 1) \Vdash_V \Box\varphi$, то $(N_v, 1) \Vdash_V x \leftrightarrow \pi(x)$. Следовательно, вне зависимости от того $(N_v, 0) \Vdash_V \pi(x)$ или $(N_v, 0) \Vdash_V \neg\pi(x)$, имеет место $(N_v, 0) \Vdash_V \neg\Box\pi(x)$ и, в то же время, $(N_v, 0) \Vdash_V \neg N\Box\pi(x)$. Таким образом, $(N_v, 0) \Vdash_V \neg\pi(\varphi)$, а значит π не может быть φ-унификатором, что противоречит предположению доказательства. $\Box$

Важным следствием проективности унификации в логике является ее почти структурная полнота [16].

Следствие 1.5. *[16] Если логика имеет проективную унификацию, то она почти структурно полна.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}$ имеет проективную унификацию и правило $r := \alpha/\beta$ допустимое не пассивное в $\mathcal{L}$. Следовательно, α — унифицируема.

Пусть σ — проективный унификатор, т.е. $\vdash_{\mathcal{L}} \sigma\alpha$ и

$$\alpha \vdash_{\mathcal{L}} \sigma p \leftrightarrow p, \tag{$*$}$$

но r — допустимо, следовательно $\vdash_{\mathcal{L}} \sigma\beta$ и, по $(*)$, выполняется:

$\alpha \vdash_{\mathcal{L}} \sigma\beta \leftrightarrow \beta$, таким образом $\alpha \vdash_{\mathcal{L}} \beta$, т.е. r выводимо в $\mathcal{L}$. $\Box$

Глава 2. Унификация и базис пассивных правил в линейной временной логике знания $\mathcal{LTK}$

Результаты, представленные в Главе 2 опубликованы в статье [77].

2.1 Семантика $\mathcal{LTK}$

Алфавит языка $L^{\mathcal{LTK}}$ включает счетное множество пропозициональных переменных $P := \{p_1, \dots, p_n, \dots\}$, скобки (,) стандартные булевы операции и множество одноместных модальных операторов $\{\Box_{\leq}, \Box_e, \Box_1, \dots, \Box_n\}$. Если $\alpha \in WFF_{L^{\mathcal{LTK}}}$, то таковыми являются и $\Box_{\leq}\alpha, \Box_e\alpha, \Box_i\alpha, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Далее в тексте под *формулой* будем понимать формулу из множества $WFF_{L^{\mathcal{LTK}}}$. Логические операции $\Diamond_{\leq}$, $\Diamond_e$, $\Diamond_i$ определяются через $\Box_{\leq}$, $\Box_e$, $\Box_i$ следующим образом: $\Diamond_{\leq} = \neg\Box_{\leq}\neg$, $\Diamond_e = \neg\Box_e\neg$, $\Diamond_i = \neg\Box_i\neg$. Значения описанных модальных операторов определяются следующим образом: $\Box_{\leq}\alpha$: α истинна в текущий момент времени и во всех последующих; $\Box_e\alpha$: α истинна в рассматриваемый момент времени; $\Box_i\alpha$ означает, что α истинна во всех информационных точках, доступных агенту i. Семантика для языка $L^{\mathcal{LTK}}$ моделирует линейный дискретный поток вычислительного процесса, в котором каждый момент времени ассоциируется с натуральным числом n.

Определение 2.1. *k-модальным фреймом Крипке называется набор $F = \langle W_F, R_1, \dots, R_k \rangle$, где W_F — не пустое множество элементов (миров), а каждое R_i — некоторое бинарное отношение на W_F.*

Определение 2.2. *Пусть $F = \langle W_F, R_1, \dots, R_k \rangle$ — фрейм Крипке, и $\forall R_i$ R_i-сгусток это подмножество $C^{R_i} \in W_F$ такое, что $\forall v,z \in C^{R_i}$: $vR_iz \& zR_iv$ и $\forall z \in W_F, \forall v \in C^{R_i}$: $((vR_iz \& zR_iv) \Rightarrow z \in C^{R_i})$. Для любого отношения R_i, $C^{R_i}(v)$ это R_i-сгусток такой, что $v \in C^{R_i}$ или сгусток, порожденный элементом v. R_i-сгусток называется:* ***вырожденным****, если состоит из единственной R_i-иррефлексивной точки;* ***простым*** *— в* *случае одной R_i-рефлексивной точки;* ***правильным****, если он состоит по крайней мере из двух R_i-рефлексивных точек.*

Определение 2.3. *LTK-фреймом Крипке назовем $k+2$-модальный фрейм $F = \langle W_F, R_1, \dots, R_k, R_e, R_\leq \rangle$, где:*

1. *W_F — объединение непустых непересекающихся множеств (сгустков агентов) $t \in \mathbb{N}$: $W_F := \bigcup_{t \in N} C^t$ и $C^{t_1} \bigcap C^{t_2} = \varnothing$, если $t_1 \neq t_2$;*
2. *$R_1, ...R_k$ — некоторые отношения эквивалентности внутри каждого сгустка C^t;*
3. *R_e — универсальное $S5$-отношение эквивалентности на любом сгустке $C^t \in W_F$:*
$$\forall w, z \in W_F (wR_e z \Leftrightarrow (w \in C^t)\&(z \in C^t));$$
4. *$R_\leq$ — линейное, рефлексивное, транзитивное бинарное отношение по времени на W_F, задающее линейный порядок сгустков — простую цепь:*
$$\forall v, z \in W_F (vR_\leq z \Leftrightarrow \exists i, j \in N((v \in C^i)\&(z \in C^j)\&(i \leq j))).$$

Верны также следующие свойства согласования данных отношений:

1. *$wR_e z \Leftrightarrow (wR_\leq z)\&(zR_\leq w)$;*
2. *$wR_i z \Rightarrow wR_e z$.*

Класс всех таких фреймов обозначим LTK.

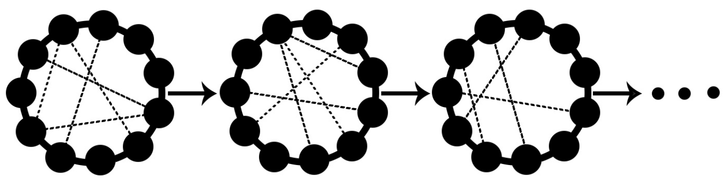

Рисунок 2.1 — LTK-фрейм

Определение 2.4. *Для двух $R_\leq$-сгустков C^m и C^j запись $C^m R_t C^j$ означает, что $\forall w \in C^m, \forall z \in C^j$ выполняется $(wR_\leq z)$. Таким образом, C^m является $R_\leq$-предшественником сгустка C^j, а C^j — $R_\leq$-последователем сгустка C^m.*

Фреймы этого класса моделируют ситуацию в которой каждый агент располагает всей информацией в текущем временном состоянии C^t. Любое временное состояние C^t (т.е. $R_{\leq}$-сгусток) состоит из множества информационных точек, доступных в момент t. Отношение $R_{\leq}$ - это соединение в линейный поток таких информационных точек, причем для двух точек w и z выражение $wR_{\leq}z$ означает, что либо w и z доступны в момент t, либо z будет доступна в последующих моментах по отношению к w. Отношение R_e связывает все информационные точки, потенциально доступные в один и тот же момент, тем самым оно представляет собой знание, которым потенциально доступное в один момент времени. Каждое отношение R_i, $i = 1,...,n$, выражает информацию, доступную конкретному агенту i.

Модель $M_F = \langle F,V \rangle$ на LTK-фрейме F определяется стандартным образом. Для любого элемента $w \in W_F$ модели $M_F = \langle F,V \rangle$ истинность формул с модальными операторами задается следующим образом:

1. $\langle F, w \rangle \Vdash_V \Box_{\leq}\alpha \Leftrightarrow \forall z \in W_F(wR_{\leq}z \Rightarrow < F, z > \Vdash_V \alpha)$;
2. $\langle F, w \rangle \Vdash_V \Box_e\alpha \Leftrightarrow \forall z \in W_F(wR_e z \Rightarrow < F, z > \Vdash_V \alpha)$;
3. $\forall i \in I, \langle F, w \rangle \Vdash_V \Box_i\alpha \Leftrightarrow \forall z \in W_F(wR_i z \Rightarrow < F, z > \Vdash_V \alpha)$.

Определение 2.5. *Логикой $\mathcal{LTK}$ называется множество всех формул языка $L^{\mathcal{LTK}}$ истинных на всех LTK-фреймах:*

$$\mathcal{LTK} := \{\alpha \in WFF_{L^{\mathcal{LTK}}} | \forall F \in LTK(F \Vdash \alpha)\}.$$

2.2 Критерий неунифицируемости в $\mathcal{LTK}$

Теорема 2.1. *Любая формула α не унифицируема в $\mathcal{LTK}$ тогда и только тогда, когда формула*

$$\Box_{\leq}\alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \Diamond_{\leq}p \wedge \Diamond_{\leq}\neg p \right]$$

является теоремой в $\mathcal{LTK}$.

Доказательство. Проведем доказательство от противного.

1. Допустим, что

$$\Box_{\leq}\alpha \to \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_{\leq} p \wedge \Diamond_{\leq} \neg p\right] \in \mathcal{LTK},$$

но, при этом, формула α унифицируема в $\mathcal{LTK}$.

Тогда, по определению унификатора, существует подстановка (унификатор) g такая, что $g(\alpha) \in \mathcal{LTK}$. В силу того, что $\mathcal{LTK}$ замкнута относительно подстановки, получаем

$$g(\Box_{\leq}\alpha \to \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_{\leq} p \wedge \Diamond_{\leq} \neg p\right]) \in \mathcal{LTK}.$$

Рассмотрим LTK-фрейм F_1 все сгустки которого одноэлементные (т.е. $\forall t$ $C^t = a$). Рассмотрим означивание V для всех переменных q формул $g(p)$, где $p \in Var(\alpha)$, на $F_1 : V(q) = \oslash$. Тогда индукцией по длине любой формулы β, построенной из переменных q, легко проверить, что:

$$\forall b \in F_1, \forall c \in F_1 : b \Vdash_V \beta \Leftrightarrow c \Vdash_V \beta.$$

Следовательно,

$$\forall b \in F_1 : b \nVdash_V \bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_{\leq} g(p) \wedge \Diamond_{\leq} \neg g(p).$$

В то же время,

$$\forall b \in F_1 : b \Vdash_V \Box_{\leq} g(\alpha).$$

Таким образом,

$$\forall b \in F_1 : b \nVdash_V g(\Box_{\leq}\alpha \to \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_{\leq} p \wedge \Diamond_{\leq} \neg p\right]),$$

что противоречит условию:

$$g(\Box_{\leq}\alpha \to \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_{\leq}p \land \Diamond_{\leq}\neg p\right]) \in \mathcal{LTK}.$$

2. Допустим, что формула α не унифицируема в $\mathcal{LTK}$, но при этом

$$\Box_{\leq}\alpha \to \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_{\leq}p \land \Diamond_{\leq}\neg p\right] \notin \mathcal{LTK}.$$

Тогда, в силу финитной аппроксимируемости $\mathcal{LTK}$, существует определенный корневой фрейм F, опровергающий данную формулу:

$$\exists a \in F : \langle F,a\rangle \nVdash_V \Box_{\leq}\alpha \to \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_{\leq}p \land \Diamond_{\leq}\neg p\right].$$

Т.е. $\langle F,a\rangle \Vdash_V \Box_{\leq}\alpha$ и $\langle F,a\rangle \nVdash_V \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_{\leq}p \land \Diamond_{\leq}\neg p\right]$. Положим данный элемент a корнем фрейма F_1 ($F_1 = a^{\leq}$). В силу

$$\langle F,a\rangle \nVdash_V \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_{\leq}p \land \Diamond_{\leq}\neg p\right], \forall p \in Var(\alpha):$$

либо

$$(1)\forall b \in F_1 aR_{\leq}b : b \Vdash_V p,$$

либо

$$(2)\forall b \in F_1 aR_{\leq}b : b \nVdash_V p.$$

Выбираем подстановку g для всех переменных p формулы α следующим образом: $\forall p \in Var(\alpha) : g(p) = \top$ если выполняется (1) и $g(p) = \bot$, в случае выполнения (2). Тогда g является унификатором формулы α. Действительно, если мы берем любой фрейм F_2, любой сгусток $a_2 \in F_2$ и любое означивание V_2:

$$a_2 \Vdash_{V_2} \alpha \Leftrightarrow a \Vdash_V \alpha.$$

Следовательно, формула α унифицируема в логике $\mathcal{LTK}$.

$\square$

2.3 Пассивные правила вывода в $\mathcal{LTK}$

Напомним введенное ранее определение пассивного правила вывода в логике. Правило $r := \alpha_1, ..., \alpha_n/\beta$ называется пассивным для $\mathcal{L}$ если для любой подстановки g формул вместо переменных в r никогда не выполняется $g(\alpha_1) \in \mathcal{L}\& \dots \& g(\alpha_n) \in \mathcal{L}$. В терминах унификационной теории, r — пассивное правило, если формулы из его посылки не имеют общих унификаторов.

Предложение 2.1. *Правила*

$$r_n := \frac{\bigvee_{1\leq i\leq n} \Diamond_{\leq} p_i \wedge \Diamond_{\leq} \neg p_i}{\perp}$$

формируют базис для всех пассивных правил в логике $\mathcal{LTK}$.

Доказательство. Справедливо, что

$$\Box_{\leq} \bigvee_{1\leq i\leq n} \Diamond_{\leq} p_i \wedge \Diamond_{\leq} \neg p_i \rightarrow \left[\bigvee_{1\leq i\leq n} \Diamond_{\leq} p \wedge \Diamond_{\leq} \neg p \right] \in \mathcal{LTK},$$

а значит по Теореме 3.1 формула $\alpha_n = \bigvee_{1\leq i\leq n} \Diamond_{\leq} p_i \wedge \Diamond_{\leq} \neg p_i$ не унифицируема в модальной логике $\mathcal{LTK}$, т.е. любое правило r_n пассивное. Положим, что правило $t_1 := \alpha_1, \dots, \alpha_n/\beta$ —пассивно для $\mathcal{LTK}$. Тогда правило $t_2 := \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n/\beta$ также пассивно для $\mathcal{LTK}$ и формула $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ не унифицируема в $\mathcal{LTK}$. По Теореме 4.1, получаем:

$$\Box_{\leq}(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \rightarrow \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_n)} \Diamond_{\leq} p \wedge \Diamond_{\leq} \neg p \right] \in \mathcal{LTK}.$$

Используя посылку правила t_2 выводим

$$\bigvee_{p\in Var(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n)} \Diamond_{\leq} p \wedge \Diamond_{\leq}\neg p$$

и затем, применяя правило r_n, где n — число переменных в конъюнкции $\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n$, выводится формула $\bot$. Из$\bot\to\beta\in\mathcal{LTK}$, в свою очередь, выводится β. Таким образом, r_n действительно представляют все пассивные правила в $\mathcal{LTK}$. $\square$

Далее будет рассмотрена возможность сведения полученного в Предложении 2.1 бесконечного (в силу счетного числа переменных) базиса пассивных правил в $\mathcal{LTK}$ к конечному и более простому виду.

Напомним, что правило r является следствием правил $r_i\in X$, $i\in I$ в логике $\mathcal{L}$, если для любой алгебры $A\in Var(\mathcal{L})$ и $\forall i\in I$: $A\vDash r_i\Rightarrow A\vDash r$. Соответственно, правило r не является следствием правил $r_i\in X$, $i\in I$ в противном случае. Правило r истинно на алгебре A, если для любой подстановки элементов алгебры вместо переменных правила r, если истинны все формулы из посылки правила r, то истинна и формула заключения r.

Теорема 2.2. *Правило*

$$r := \frac{\Diamond_{\leq} p\wedge\Diamond_{\leq}\neg p}{\bot}$$

является базисом для всех пассивных правил в логике $\mathcal{LTK}$.

Доказательство. В соответствии с Предложением выше, достаточно показать, что правила r_n $(\forall n)$ являются следствием r $(r\vdash r_n, \forall n)$.

Предположим, что это не верно:

$$r_n := \frac{\bigvee_{1\leq i\leq n}\Diamond_{\leq} p_i\wedge\Diamond_{\leq}\neg p_i}{\bot}$$

не является следствием правила r. Следовательно, существует конечно порожденная алгебра A, в которой правило r выполняется $(A\vDash r)$, а r_n не верно $(A\nvDash r_n)$, т.о. $\forall i\in(1,\ldots,n)$ существует $a_i\in A:\bigvee_{1\leq i\leq n}\Diamond_{\leq} a_i\wedge\Diamond_{\leq}\neg a_i=\top$. Породим подалгебру A_1 алгебры A порожденную такими элементами $a_i, 1\leq i\leq n$, $(A_1 = A_1(a_1,\ldots,a_n)\subseteq A)$. A_1 — $S4.3$ алгебра по $\Box_t$. По Лемме 4.3.18 из [59], фрейм Крипке A_1^+, ассоциированный с алгеброй A_1, имеет одноэлементный рефлексивный максимальный сгусток C.

По определению A_1^+, $\forall a \in A_1$ $a \subseteq A_1^+$. По предположению доказательства, $\bigvee_{1 \le i \le n} \Diamond_{\le} a_i \wedge \Diamond_{\le} \neg a_i \in A_1$, т.к. A_1 — подалгебра A, по построению. Тогда $\bigvee_{1 \le i \le n} \Diamond_{\le} a_i \wedge \Diamond_{\le} \neg a_i = \top = A_1^+$, но это невозможно на одноэлементом максимальном рефлексивном сгустке ($C \not\models \bigvee_{1 \le i \le n} \Diamond_{\le} a_i \wedge \Diamond_{\le} \neg a_i$), а значит $\bigvee_{1 \le i \le n} \Diamond_{\le} a_i \wedge \Diamond_{\le} \neg a_i \notin A_1^+$ что противоречит условиям доказательства. $\square$

Глава 3. Унификация и базис пассивных правил в линейной временной логике знания $\mathcal{LFPK}$

Все результаты, представленные в третьей главе опубликованы в [78].

3.1 Семантика $\mathcal{LFPK}$

Алфавит языка $L^{\mathcal{LFPK}}$ включает счетное множество пропозициональных переменных $P := \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$, скобки (,) стандартные булевы операции и множество одноместных модальных операторов $\{\Box_F, \Box_P, \Box_1, \ldots, \Box_n\}$. Если $A \in WFF_{L^{\mathcal{LFPK}}}$, то таковыми являются и $\Box_F A, \Box_P A, \Box_i A$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Логические операции $\Diamond_F$, $\Diamond_P$, $\Diamond_i$ определяются через $\Box_F$, $\Box_P$, $\Box_i$ следующим образом: $\Diamond_F = \neg\Box_F\neg$, $\Diamond_P = \neg\Box_P\neg$, $\Diamond_i = \neg\Box_i\neg$. Значения описанных модальных операторов могут интерпретироваться следующим образом: $\Box_P\alpha$: α была истинна во всех предыдущих и в текущем моментах времени; $\Box_F\alpha$: α истинна в текущий момент времени и во всех последующих; $\Box_i\alpha$ означает, что α истинна во всех информационных точках, доступных агенту i. Семантика для языка $L^{\mathcal{LTK}}$ моделирует линейный дискретный поток вычислительного процесса, в котором каждый момент времени ассоциируется с целым числом n (соответственно, поток не ограничен в оба направления: в прошлое и будущее).

Определение 3.1. *Временным k-модальным фреймом Крипке называется набор $T = \langle W_T, R_1, R_2, \ldots, R_k \rangle$, где W_T — не пустое множество миров, а $R_1, \ldots, R_k$ — некоторые бинарные отношения на W_T, где $R_2 = R_1^{-1} := \{(a,b) | (b,a) \in R_1\}$ является обратным отношением к R_1.*

Определение 3.2. *Пусть $T = \langle W_F, R_1, R_2, \ldots, R_k \rangle$ — временной фрейм Крипке, и $\forall R_i$ R_i-сгусток это подмножество $C^{R_i} \in W_T$ такое, что $\forall v,z \in C^{R_i} : (vR_iz)\&(zR_iv)$ и $\forall z \in W_T$, $\forall v \in C^{R_i} : ((vR_iz\&zR_iv) \Rightarrow z \in C^{R_i})$. Для любого отношения R_i, $C^{R_i}(v)$ это R_i-сгусток такой, что $v \in C^{R_i}$ или сгусток, порожденный элементом v.*

Определение 3.3. *$LFPK$-фреймом назовем временной $(n+2)$-модальный фрейм $T = \langle Z_T, R_F, R_P, R_1, \ldots, R_n \rangle$, где: $R_P = R_F^{-1}$ и:*

1. *Z_T — объединение непустых непересекающихся множеств (сгустков агентов) C^t, $t \in \mathbb{Z}$: $Z_T := \bigcup_{t \in Z} C^t$ и $C^{t_1} \bigcap C^{t_2} = \varnothing$, если $t_1 \neq t_2$;*
2. *$\forall t_1, t_2 \in Z$, если $t_1 \leq t_2$ тогда $\forall a \in C^{t_1}, \forall b \in C^{t_2} (aR_F b)$ и $(bR_P a)$.*
3. *$R_1, \ldots, R_n$ — некоторые отношения эквивалентности внутри каждого сгустка C^t.*

Класс всех таких фреймов обозначим $LFPK$.

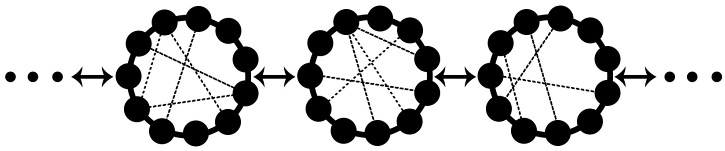

Рисунок 3.1 — $LFPK$-фрейм

Фреймы данного класса моделируют ситуации, в которых каждый агент имеет некоторые знания в текущем временном состоянии C^t. Любое временное состояние C^t состоит из набора информационных точек, доступных в момент t. Отношения R_F и R_P — временные связки линейного потока информационных точек, для которых $wR_F z$, где w и z — некоторые точки фрейма, означает, что либо w и z доступны в момент времени t, либо z станет доступной когда-то в будущем относительно w. Обратно, запись $wR_P z$ означает, что либо w и z также доступны в один и тот же момент времени t, либо z была доступна в прошлом относительно w. Каждое отношение R_i, $i = 1,...,n$ влечет доступность знания некоторому агенту i только в текущем временном состоянии t, однако t может быть любым.

Модель $M_T = \langle T,V \rangle$ на $LFPK$-фрейме T определяется стандартным образом. Означивание V задает для каждой переменной $p \in P$ подмножество из базового множества Z_T. Для любого элемента $w \in Z_T$ модели $M_T = \langle T,V \rangle$ истинность формул с модальными операторами задается следующим образом:

1. $\langle T, w \rangle \Vdash_V \Box_F A \Leftrightarrow \forall z \in Z_T (wR_F z \Rightarrow \langle T, z \rangle \Vdash_V A)$;
2. $\langle T, w \rangle \Vdash_V \Box_P A \Leftrightarrow \forall z \in Z_T (wR_P z \Rightarrow \langle T, z \rangle \Vdash_V A)$;

3. $\forall i \in I, \langle T, w\rangle \Vdash_V \Box_i A \Leftrightarrow \forall z \in Z_T(wR_i z \Rightarrow \langle T, z\rangle \Vdash_V A)$.

Определение 3.4. *Линейной временной Future/Past логикой знаний агентов $\mathcal{LFPK}$ будем называть множество всех формул языка $L^{\mathcal{LFPK}}$ выполнимых на всех $LFPK$-фреймах:*

$$\mathcal{LFPK} := \{\alpha \in WFF_{L^{\mathcal{LFPK}}} \mid \forall T \in LFPK(T \Vdash \alpha)\}.$$

3.2 Критерий неунифицируемости в $\mathcal{LFPK}$

Теорема 3.1. *Любая формула α не унифицируема в $\mathcal{LFPK}$ тогда и только тогда, когда формула*

$$\Box_F \Box_P \alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \neg \Box_F \Box_P p \wedge \neg \Box_F \Box_P \neg p \right]$$

является теоремой в $\mathcal{LFPK}$.

Доказательство. 1. Докажем данную теорему от противного. Положим, что

$$\Box_F \Box_P \alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \neg \Box_F \Box_P p \wedge \neg \Box_F \Box_P \neg p \right] \in \mathcal{LFPK},$$

но, одновременно с этим, формула α унифицируема в $\mathcal{LFPK}$.

В таком случае, по определению унификатора, существует подстановка g такая, что $g(\alpha) \in \mathcal{LFPK}$. В силу замкнутости $\mathcal{LFPK}$ относительно подстановки, получаем

$$g(\Box_F \Box_P \alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \neg \Box_F \Box_P p \wedge \neg \Box_F \Box_P \neg p \right]) \in \mathcal{LFPK}.$$

Положим T произвольным $LFPK$-фреймом и зададим означивание V для всех переменных q формул $g(p)$, где $p \in Var(\alpha)$, на фрейм T, где $V(q) =$

$\varnothing$. Тогда индукцией по длине формул β, построенных из переменных q, несложно проверить, что

$$\forall b \in T, \forall c \in T : b \Vdash_V \beta \Leftrightarrow c \Vdash_V \beta.$$

Вследствие этого,

$$\forall b \in T : b \nVdash_V \bigvee_{p \in Var(\alpha)} \neg\Box_F\Box_P g(p) \wedge \neg\Box_F\Box_P\neg g(p).$$

В то же время,

$$\forall b \in T : b \Vdash_V \Box_F\Box_P g(\alpha).$$

Таким образом,

$$\forall b \in T : b \nVdash_V g(\Box_F\Box_P\alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \neg\Box_F\Box_P p \wedge \neg\Box_F\Box_P\neg p\right]),$$

что противоречит предположению доказательства:

$$g(\Box_F\Box_P\alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \neg\Box_F\Box_P p \wedge \neg\Box_F\Box_P\neg p\right]) \in \mathcal{LFPK}.$$

2. Обратно, положим, что формула α неунифицируема в $\mathcal{LFPK}$, но в то же время $\Box_F\Box_P\alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \neg\Box_F\Box_P p \wedge \neg\Box_F\Box_P\neg p\right] \notin \mathcal{LFPK}$.

Тогда существует некоторый фрейм T, опровергающий формулу:

$$\exists a \in T : \langle T,a\rangle \nVdash_V \Box_F\Box_P\alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \neg\Box_F\Box_P p \wedge \neg\Box_F\Box_P\neg p\right].$$

Т.е. $\langle T,a\rangle \Vdash_V \Box_F\Box_P\alpha$ and $\langle T,a\rangle \nVdash_V \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \neg\Box_F\Box_P p \wedge \neg\Box_F\Box_P\neg p\right]$.

В силу $\langle T,a\rangle \nVdash_V \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \neg\Box_F\Box_P p \wedge \neg\Box_F\Box_P\neg p\right], \forall p \in Var(\alpha)$: либо

$$(1)\, \forall b \in T : (aR_F b \Rightarrow b \Vdash_V p)\&(aR_P b \Rightarrow b \Vdash_V p),$$

либо

$$(2)\, \forall b \in T : (aR_F b \Rightarrow b \Vdash_V \neg p)\&(aR_P b \Rightarrow b \Vdash_V \neg p).$$

Зададим подстановку g для всех переменных p формулы α следующим образом: $\forall p \in Var(\alpha) : g(p) = \top$, если выполняется (1), и $g(p) = \bot$ в случае (2). Тогда g является унификатором для формулы α, а α — унифицируема в $\mathcal{LFPK}$.

□

3.3 Пассивные правила вывода в $\mathcal{LFPK}$

Теорема 3.2. *Правила*

$$r_m := \frac{\bigvee_{1\le i\le m} \neg\Box_F\Box_P p_i \wedge \neg\Box_F\Box_P\neg p_i}{\bot}$$

формируют базис всех пассивных правил вывода в логике $\mathcal{LFPK}$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\Box_F\Box_P\left(\bigvee_{1\le i\le m} \neg\Box_F\Box_P p_i \wedge \neg\Box_F\Box_P\neg p_i\right) \to$$

$$\left(\bigvee_{1\le i\le m} \neg\Box_F\Box_P p_i \wedge \neg\Box_F\Box_P\neg p_i\right) \in \mathcal{LFPK},$$

и следовательно, согласно Теореме 3.1, формула

$$\alpha = \bigvee_{1\le i\le m} \neg\Box_F\Box_P p_i \wedge \neg\Box_F\Box_P\neg p_i$$

неунифицируема в логике $\mathcal{LFPK}$, т.е. правило r_m пассивно.

Пусть правило $R_1 := \alpha_1, \ldots, \alpha_k/\beta$ пассивно в $\mathcal{LFPK}$. Тогда правило $R_2 := \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k/\beta$ тоже пассивно, а формула $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ неунифицируема в $\mathcal{LFPK}$. Применяя критерий неунифицируемости (Теорема 3.1), заключаем:

$$\Box_F\Box_P(\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_k)\to\left[\bigvee_{p\in Var(\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_k)}\neg\Box_F\Box_P p\wedge\neg\Box_F\Box_P\neg p\right]\in\mathcal{LFPK}. \tag{1}$$

После применения правила Гёделя к посылке правила R_2, выводится

$$\Box_F\Box_P(\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_k) \qquad (2).$$

Из (1) и (2) по правилу modus ponens выводима формула

$$\bigvee_{p\in Var(\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_k)}\neg\Box_F\Box_P p\wedge\neg\Box_F\Box_P\neg p.$$

Из этой формулы, в результате применения правила r_m, где m — число переменных в конъюнкции $\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_k$, можно вывести формулу $\perp$, а из выполнения $\perp\to\beta\in\mathcal{LFPK}$, по modus ponens, имеем β. Таким образом, все правила r_n формируют базис правил пассивных в $\mathcal{LFPK}$. $\Box$

Глава 4. Унификация и базис пассивных правил в логиках с универсальной модальностью $\mathcal{L}^U$

В предыдущей главе был описан результат, полученный для линейной транзитивной модальной логики знания и времени с альтернативными отношениями. Данная глава посвящена обобщению результата для всех модальных логик с выразимой «универсальной» модальностью. Описанные результаты опубликованы в статье [80].

4.1 Семантика $\mathcal{L}^U$

Расширим языки многоагентных и временных (мономодальных или многомодальных) логик добавлением универсальной модальности следующим образом. Пусть язык логики содержит новый модальный оператор $\Box_U$ и правило определения истинности формул содержащих $\Box_U$ на модели $M = \langle F,V \rangle$ логики задается следующим образом:

$$\forall x \in F, \langle F, x \rangle \Vdash_V \Box_U \varphi \leftrightarrow [\forall y \in F, \langle F, y \rangle \Vdash_V \varphi] .$$

Модальный оператор $\Diamond_U$ выражается через парный $\Box_U$ стандартно: $\Diamond_U \varphi := \neg \Box_U \neg \varphi$.

Другими словами, $\Box_U \varphi$ означает, что формула φ всегда и всюду истинна. В таком случае $\Box_U$ называется универсальной модальностью.

Определение 4.1. *Логикой с универсальной модальностью $\mathcal{L}^U$ будем называть логику, язык которой содержит модальный оператор $\Box_U$ и $\mathcal{L}$ полна по Крипке (т.е. существует такой класс фреймов K , что $\mathcal{L} = L(K)$.*

Как уже отмечалось выше, в данной работе мы рассматриваем только полные по Крипке логики. Важно отметить также, что результаты данного раздела применимы только к таким логикам, со свойством $\neg \Box_j \bot \in \mathcal{L}$, для всех j ($\bot = p \wedge \neg p$, т.е. любой фрейм данной логики не имеет максимальных

R_j иррефлексивных миров (как и минимальных иррефлексивных миров в случае временных логик), что следует из техники нашего доказательства ниже, применимой только для таких логик. Свойство $\neg\Box_j\bot \in \mathcal{L}$ требуется для сохранения индуктивных шагов в доказательстве.

В работе [60] были построены критерии неунифицируемости для широкого класса логик: расширений $S4$ и $K4 + \Box\bot \equiv \bot$, однако, такие логики не содержат универсальной модальности.

4.2 Критерий неунифицируемости в $\mathcal{L}^U$

Теорема 4.1. *Формула α неунифицируема в $\mathcal{L}^U$ тогда и только тогда, когда*

$$\Box_U\alpha \to \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_U p \land \Diamond_U\neg p\right]$$

является теоремой в $\mathcal{L}^U$.

Доказательство. Доказательство будет проведено от противного. Положим, что

$$\Box_U\alpha \to \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_U p \land \Diamond_U\neg p\right] \in \mathcal{L}^U,$$

но, в то же время, формула α унифицируема в $\mathcal{L}^U$.

Тогда, по определению унификатора, существует подстановка g такая, что $g(A) \in \mathcal{L}^U$. В силу того, что $\mathcal{L}^U$ замкнута относительно подстановки, получаем

$$g(\Box_U\alpha \to \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_U p \land \Diamond_U\neg p\right]) \in \mathcal{L}^U.$$

По условию, $\mathcal{L} = L(K)$ для некоторого класса фреймов K. Возьмем произвольный фрейм $F \in K$ для логики $\mathcal{L}^U$. Рассмотрим означивание V для всех переменных q формул $g(p)$, где $p \in Var(\alpha)$, на фрейм F, где $V(q) = \varnothing$. Индукцией по длине формул β, построенных из переменных q, не сложно проверить, что:

$$\forall b \in F, \forall c \in F : b \Vdash_V \beta \Leftrightarrow c \Vdash_V \beta.$$

Индуктивные шаги для операции $\Box_j$ следуют из нашего предположения, что $\neg\Box_j\bot \in \mathcal{L}^U$. Поэтому,

$$\forall b \in F : b \nVdash_V \bigvee_{p \in Var(\alpha)} \Diamond_U g(p) \wedge \Diamond g(\neg p).$$

Одновременно с этим,

$$\forall b \in F : b \Vdash g(\Box_U \alpha),$$

т.к. $g(\alpha) \in \mathcal{L}^U$. Тем самым,

$$\forall b \in F : b \nVdash_V g(\Box_U \alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \Diamond_U p \wedge \Diamond_U \neg p \right]),$$

что противоречит преположению доказательства:

$$g(\Box_U \alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \Diamond_U p \wedge \Diamond_U \neg p \right]) \in \mathcal{L}^U.$$

Обратно, положим, что формула α неунифицируема в $\mathcal{L}^U$, но, в то же время,

$$\Box_U \alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \Diamond_U p \wedge \Diamond_U \neg p \right] \notin \mathcal{L}^U.$$

Тогда существует некоторый $\mathcal{L}^U$-фрейм $F \in K$, опровергающий данную формулу:

$$\exists a \in F : \langle F,a \rangle \not\Vdash_V \Box_U \alpha \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \Diamond_U p \wedge \Diamond_U \neg p \right].$$

Т.е. $\langle F,a \rangle \Vdash_V \Box_U \alpha$ и $\langle F,a \rangle \not\Vdash_V \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_U p \wedge \Diamond_U \neg p\right]$. Из того, что $\langle F,a \rangle \not\Vdash_V \left[\bigvee_{p\in Var(\alpha)} \Diamond_U p \wedge \Diamond_U \neg p\right]$ и $\Box_U$ является универсальной модальностью, немедленно следует, что для всех $p \in Var(\alpha)$

либо (1) $\forall b \in F(b \Vdash_V p)$,

либо (2) $\forall b \in F(b \Vdash_V \neg p)$.

Выберем подстановку g для всех переменных p формулы α следующим образом: $\forall p \in Var(\alpha) : g(p) = \top$ в случае если выполняется (1), и $g(p) = \bot$ в случае (2). Из того, что $\langle F,a \rangle \Vdash_V \Box_U A$, следует, что g является унификатором для формулы α (учитывая, что $\mathcal{L}^U = L(K)$ и $\neg\Box_j \bot \in \mathcal{L}^U$, для всех j). Следовательно, формула α унифицируема в $\mathcal{L}^U$. $\Box$

4.3 Пассивные правила вывода в $\mathcal{L}^U$

Теорема 4.2. *Правила*

$$r_n := \frac{\bigvee_{1\le i\le n} \Diamond_U p_i \wedge \Diamond_U \neg p_i}{\bot}$$

формируют базис всех пассивных правил вывода в любой логике $\mathcal{L}^U$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\Box_U \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \Diamond_U p \wedge \Diamond_U \neg p \right] \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \Diamond_U p \wedge \Diamond_U \neg p \right]$$

является теоремой $\mathcal{L}^U$. Следовательно, по Теореме 4.1, формула

$$\alpha := \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha)} \Diamond_U p \wedge \Diamond_U \neg p \right]$$

не унифицируема в $\mathcal{L}^U$, следовательно, любое правило r_n пассивно.

Положим, что правило $R_1 := \alpha_1, \dots, \alpha_n/\beta$ пассивно для $\mathcal{L}^U$. Тогда правило $R_2 := \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n/\beta$ также пассивно и формула $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ не унифицируема в $\mathcal{L}^U$. Применяя Теорему 4.1, заключаем:

$$(a) \quad \Box_U(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \to \left[\bigvee_{p \in Var(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)} \Diamond_U p \wedge \Diamond_U \neg p \right] \in \mathcal{L}^U.$$

Применяя правило Гёделя относительно $\Box_U$ к посылке правила R_2, мы можем вывести формулу $\Box_U(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)$. Используя это, (a) а также правило modus ponens, выводим формулу

$$\bigvee_{p \in Var(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)} \Diamond_U p \wedge \Diamond_U \neg p.$$

Из данной формулы, применяя правило r_n, где n — число переменных в конъюнкции $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$, можно вывести формулу$\perp$. Используя то, что $\perp \to B \in \mathcal{L}^U$ и modus ponens, выводим и β. Таким образом, все правила r_n формируют базис всех пассивных правил в любой $\mathcal{L}^U$. $\Box$

4.4 Унификация и базис пассивных правил для временных примеров логики $\mathcal{L}^U$

Рассмотрим приложение Теорем 4.1 и 4.2 к временным логикам, в случае, когда универсальная модальность не представлена в языке, но может быть смоделирована при помощи подходящих формул в естественном языке данных логик.

4.4.1 Линейная временная логика $\mathcal{LTL}$

Рассмотрим линейную временную логику $\mathcal{LTL}$ с операторами $Until$ и $Since$. Язык логики $\mathcal{LTL}$ является расширением языка булевой логики операторами $\mathbf{N}$ (Next), $\mathbf{U}$ (Until) и $\mathbf{S}$ (Since). Формулы $\mathcal{LTL}$ строятся из множества $Prop$ атомарных пропозициональных переменных; множество всех формул замкнуто относительно применения булевых операторов, унарного $\mathbf{N}$ и бинарных операторов $\mathbf{U}$, $\mathbf{S}$. Семантика для $\mathcal{LTL}$ основывается на *бесконечной системе переходов (ходов, вычислений)*, которая описываается в терминах линейных структур Крипке, основанных на натуральных числах. Эти структуры могут представляться в виде четверки

$$M := \langle \mathbb{N}, \leq, Next, V \rangle,$$

где $\mathbb{N}$— множество натуральных чисел, $\leq$ — стандартное отношение порядка на $\mathbb{N}$, $Next$ — бинарное отношение: $a\ Next\ b$ означает, что b — следующее за a натуральное число (не трудно, при необходимости, определить в логике и оператор $Previous$ — как обратный к $Next$, в этом случае все последующие результаты также будут верны). Фрейм, в таком случае, определяется как тройка $F := \langle \mathbb{N}, \leq, Next \rangle$. Означивание V любого множества переменных S задает значения истинности элементам из S, т.е. $\forall p \in S$, $V(p) \subseteq N$, $V(p)$ это множество всех n из $\mathbb{N}$, где p истинна при V.

Для любого элемента фрейма $a \in \mathbb{N}$ истинностные значения формул могут быть определены следующим образом:

1. $\forall p \in Prop\ \langle F,a \rangle \Vdash_V p \Leftrightarrow a \in V(p)$;
2. $\langle F,a \rangle \Vdash_V \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow [\langle F,a \rangle \Vdash_V \alpha \wedge \langle F,a \rangle \Vdash_V \beta]$;
3. $\langle F,a \rangle \Vdash_V \neg\alpha \Leftrightarrow [\langle F,a \rangle \nVdash_V \alpha]$;
4. $\langle F,a \rangle \Vdash_V N\alpha \Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{N}[(aNextb) \Rightarrow \langle F,b \rangle \Vdash_V \alpha]$;
5. $\langle F,a \rangle \Vdash_V \alpha U \beta \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{N}[(a \leq b) \wedge (\langle F,b \rangle \Vdash_V \beta) \wedge \forall c \in \mathbb{N}[(a \leq c < b) \Rightarrow \langle F,c \rangle \Vdash_V \alpha]]$;
6. $\langle F,a \rangle \Vdash_V \alpha S \beta \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{N}[(b \leq a) \wedge (\langle F,b \rangle \Vdash_V \beta) \wedge \forall c \in \mathbb{N}[(b \leq c < a) \Rightarrow \langle F,c \rangle \Vdash_V \alpha]]$.

Используя операторы U, S и N мы можем определить все стандартные временные и модальные операторы. В частности, $F\alpha$ (α *выполнится в будущем*, что, в стандартных обозначениях модальной логики означает α «возможно» (т.е. $\Diamond^+\alpha$)), может быть описано как $trueU\alpha$. Таким же образом можно определить и $G\alpha$ (а значит и модальный оператор $\Box$ — «необходимо») — через стандартное соотношение: $\Box^+\alpha := \neg\Diamond^+\neg\alpha$.

$P\alpha$ и соответствующий модальный оператор $\Diamond^-$ — обращенный в прошлое — может быть определен как $\Diamond^-\alpha := trueS\alpha$, а $H\alpha = \Box^-\alpha := \neg\Diamond^-\neg\alpha$.

Логику $\mathcal{LTL}$, стандартно, определяем, как множество формул истинных на всех таких моделях.

Теорема 4.3. *Теоремы 4.1 и 4.2 выполняются для* $\mathcal{LTL}$.

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что универсальная модальность выразима в логике $\mathcal{LTL}$. Действительно,

$$\Box_U p := \Box^+ p \wedge \Box^- p.$$

Следовательно, результат предыдущего раздела может быть перенесен и на случай данной логики. $\Box$

4.4.2 Обобщение для логики $\mathcal{LFPK}$

Очевидно, что случай рассмотренной ранее логики $\mathcal{LFPK}$ также является частным случаем данного обобщения: в $\mathcal{LFPK}$ формула $\Box_F p \wedge \Box_P p$ моделирует универсальную модальность. Таким образом, имеет место

Теорема 4.4. *Теоремы 4.1 и 4.2 выполняются для* $\mathcal{LFPK}$.

4.4.3 Зигзаг-временные логики $\mathcal{L}(n)$

Рассмотрим семантические модели для нелинейного ветвящегося времени. Пусть n — некоторое фиксированное натуральное число. Любая такая модель M является объединением произвольного набора моделей M_i основанных на некоторых $LFPK$-фреймах, которые склеиваются следующим образом. Для любых двух различных моделей M_{i_1} и M_{i_2}, из которых построена M, существуют два сгустка $C_a \subseteq M_{i_1}$ и $C_b \subseteq M_{i_2}$ таких, что существует зигзагообразный путь длины не менее n по времени в прошлое и будущее из C_a в C_b.

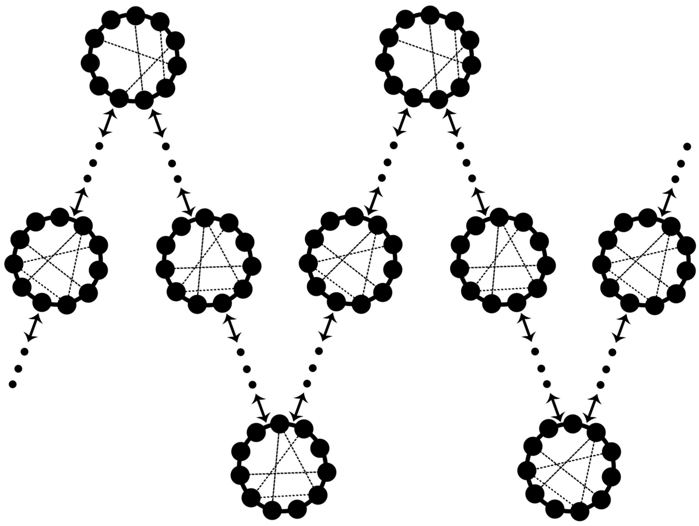

Рисунок 4.1 — Зиг-заг временной $L(n)$-фрейм

Отметим, что такие модели могут представлять собой достаточно сложные вариации соединений, возможно даже с общими интервалами. Истинностные значения формул с $\Box_F$ и $\Box_P$ могут быть вычислены также как и ранее для временных/модальных фреймов. Единственное отличие от предыдущих случаев заключается в том, что время здесь может быть ветвящимся, хотя ветвление не гарантировано для каждого сгустка.

Поскольку мы ограничены по времени числом n (минимальная длина временного зигзага), формула

$$(\Box_F\Box_P)^{n+1}p \wedge (\Box_P\Box_F)^{n+1}p$$

моделирует универсальную модальность во всех таких моделях с фиксированным n.

Многоагентной логикой ветвящегося ограниченного зигзагом времени $\mathcal{L}(n)$ будем называть любую логику, порожденную некоторым классом произвольных моделей, описанных выше.

Теорема 4.5. *Теоремы 4.1 и 4.2 выполняются для* $\mathcal{L}(n)$.

Доказательство. Поскольку мы ограничены по времени числом n (временного зигзага), формула

$$(\Box_F \Box_P)^{n+1} p \wedge (\Box_P \Box_F)^{n+1} p$$

моделирует универсальную модальность во всех моделях таких логик с фиксированным n. Следовательно, мы находимся в условиях Теорем 4.1 и 4.2. $\Box$

Глава 5. Проективная унификация в линейной временной модальной логике знания $\mathcal{LFPK}$ и ее модификациях

Основной результат, полученный в данной главе, основывается на подходе, предложенном в серии работ С. Гиларди [28; 29] для интуиционистских и ряда нормальных модальных логик, а позднее развитом В. В. Рыбаковым в работе [66] для временной логики $\mathcal{LTL}_{\mathcal{U}}$ (без отношений агентов). Описанные в главе результаты опубликованы в статье [79].

Все основные определения и семантика для логики представлены в Главе 3, поэтому предполагаем уже определенными понятия $LFPK$-фрейма, соответствующей модели M_T и самой логики $\mathcal{LFPK}$. Поэтому в разделе ниже мы остановимся только на некоторых важных дополнениях, а также опишем модификацию семантики $\mathcal{LFPK}$ для рассматриваемых случаев с дополнительными операторами.

5.1 Семантика модификаций $\mathcal{LFPK}$

5.1.1 Семантика $\mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+}_{\mathcal{U}_-}$

Язык временной логики $\mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+}_{\mathcal{U}_-}$ дополняет язык $L^{\mathcal{LFPK}}$ двумя логическими операторами: U_+ (оператор $Until$ направленный в будущее) и U_- ($Until$ направленный в прошлое).

Действие данных операторов $Until$ для данной модели $M_T = \langle T,V\rangle$ могут быть определены следующим образом: $\forall w \in Z_T$:

1. $\langle T, w\rangle \Vdash_V \alpha U_+ \beta \Leftrightarrow \exists j(wR_F j)\Big[\langle T, j\rangle \Vdash_V \beta \,\&\, \forall k : \Big(wR_F k \& \neg(jR_F k) \Rightarrow \langle T, k\rangle \Vdash_V \alpha\Big)\Big]$;
2. $\langle T, w\rangle \Vdash_V \alpha U_- \beta \Leftrightarrow \exists j(wR_P j)\Big[\langle T, j\rangle \Vdash_V \beta \,\&\, \forall k : \Big(wR_P k \& \neg(jR_P k) \Rightarrow \langle T, k\rangle \Vdash_V \alpha\Big)\Big]$.

Определение 5.1. *Линейной временной Future/Past логикой знания агентов* $\mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+}_{\mathcal{U}_-}$ *будем называть множество всех формул языка* $L^{\mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+}_{\mathcal{U}_-}}$ *истинных на всех* $LFPK$*-фреймах:*

$$\mathcal{LFPK}^{U_+}_{U_-} := \{\alpha \in WFF_{L^{\mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+}_{\mathcal{U}_-}}} \mid \forall T \in LFPK : (T \Vdash \alpha)\}.$$

5.1.2 Семантика $\mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+,\mathcal{N}}_{\mathcal{U}_-,\mathcal{P}}$

Временная логика $\mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+,\mathcal{N}}_{\mathcal{U}_-,\mathcal{P}}$ также является модификацией $\mathcal{LFPK}$. Помимо бинарных операторов U_+, U_-, как в предыдущем случае, ее язык содержит пару унарный операторов N ($Next$) и P ($Previous$). Формула $N\varphi$ означает: φ «выполняется в следующей временной точке»; $P\varphi$: φ «выполнялась в предыдущей временной точке».

Определим истинность операторов N и P для данной модели $M_T = \langle T,V\rangle$ следующим образом: $\forall w \in Z_T$:

1. $\langle T, w\rangle \Vdash_V N\alpha \Leftrightarrow \forall z \in Z_T(w \in C^i \& z \in C^{i+1}) \Rightarrow \langle T, z\rangle \Vdash_V \alpha)$;
2. $\langle T, w\rangle \Vdash_V P\alpha \Leftrightarrow \forall z \in Z_T(w \in C^i \& z \in C^{i-1}) \Rightarrow \langle T, z\rangle \Vdash_V \alpha)$.

Определение 5.2. *Линейной временной Future/Past логикой знания агентов* $\mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+,\mathcal{N}}_{\mathcal{U}_-,\mathcal{P}}$ *будем называть множество всех формул языка* $L^{\mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+,\mathcal{N}}_{\mathcal{U}_-,\mathcal{P}}}$ *истинных на всех* $LFPK$*-фреймах:*

$$\mathcal{LFPK}^{U_+,N}_{U_-,P} := \{\alpha \in WFF_{L^{\mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+,\mathcal{N}}_{\mathcal{U}_-,\mathcal{P}}}} \mid \forall T \in LFPK : (T \Vdash \alpha)\}.$$

5.2 Проективная унификация в $\mathcal{LFPK}$ и модификациях

В данном разделе, и только в нем, под $\mathcal{L}^F_P$, для краткости, будем понимать логику $\mathcal{LFPK}$, а также обе ее модификации: $\mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+}_{\mathcal{U}_-}$ и $\mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+,\mathcal{N}}_{\mathcal{U}_-,\mathcal{P}}$.

Переформулируем определение проективной формулы для рассматриваемых логик $\mathcal{L}^F_P$.

Определение 5.3. *Формула $\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ называется проективной в логике $\mathcal{L}^F_P$, если существует унификатор τ (называемый проективным унификатором) для формулы α такой, что $\Box_F \Box_P \alpha \to [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{L}^F_P$ для любой переменной p_i формулы α.*

Лемма 5.1. *Если подстановка σ_p проективна для формулы φ в логике $\mathcal{L}^F_P$, то $\{\sigma_p\}$ является полным набором унификаторов для φ (т.е. σ_p является наиболее общим для φ).*

Доказательство. Пусть σ — унификатор для формулы φ в логике $\mathcal{L}^F_P$. Т.к. мы предполагаем, что σ_p является проективным унификатором для φ в $\mathcal{L}^F_P$, имеет место $\Box_F \Box_P \varphi \to [x_i \equiv \sigma_p(x_i)] \in \mathcal{L}^F_P$ для каждой переменной x_i формулы φ. Подействовав подстановкой σ на $\Box_F \Box_P \varphi \to [x_i \equiv \sigma_p(x_i)]$ получим $\sigma(\Box_F \Box_P \varphi) \to [\sigma(x_i) \equiv \sigma(\sigma_p(x_i))] \in \mathcal{L}^F_P$, т.е. $[\sigma(x_i) \equiv \sigma(\sigma_p(x_i))] \in \mathcal{L}^F_P$. $\Box$

Докажем основной результат данной главы для логики $\mathcal{LFPK}$.

Теорема 5.1. *Любая унифицируемая в $\mathcal{LFPK}$ формула проективна.*

Доказательство. Для проверки унифицируемости любой данной формулы достаточно рассмотреть все возможные замены всех переменных формулы на константы $\top$, $\bot$ и мы получим унификатор для данной формулы, если он существует. Поэтому, необходимо проверить только существование таких граунд унификаторов для формулы в $\mathcal{LFPK}$.

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная унифицируемая формула в $\mathcal{LFPK}$ и подстановка σ_1, где $\sigma_1(x_i) := g_i$, является граунд-унификатором для $\varphi(x_1, \ldots, x_n) : (g_i \in \{\top, \bot\})$ и $\varphi(\sigma_1(x_1), \ldots, \sigma_1(x_n)) \in \mathcal{LFPK}$.

Так как φ унифицируема в $\mathcal{LFPK}$ по предположению доказательства, φ истинна на модели $M_0 := \langle F(1), V\rangle$, где $F(1)$ — фрейм, состоящий из одного сгустка, а V — специальное подходящее означивание (в силу существования некоторого граунд унификатора константами $\{\top, \bot\}$). Важно отметить, что не смотря на то, что такой фрейм состоит из одного одноэлементного сгустка, отношения агентов на нем могут быть заданы стандартным образом, по определению. Определим формулы $T(x_i)$ следующим образом: если $V(x_i) = \varnothing$, зададим $T(x_i) := \bot$, в противном случае $T(x_i) := \top$. Для любой переменной x_i формулы φ определим следующую постановку:

$$\sigma(x_i) := \Big(\Box_F\Box_P\varphi(x_1,\dots,x_n) \wedge x_i\Big) \vee \Big(\neg\Box_F\Box_P\varphi(x_1,\dots,x_n) \wedge T(x_i)\Big).$$

Подстановка σ проективна для φ, в силу первого дизъюнктивного члена $\sigma(x_i)$: очевидно, что $\Box_F\Box_P\varphi \to [x_i \equiv \sigma(x_i)] \in \mathcal{LFPK}$ для любой переменной x_i формулы φ.

Покажем, что подстановка σ является унификатором для φ. Для этого, зададим произвольную модель M_1 для $\mathcal{LFPK}$ и зафиксируем элемент w_1 с означиванием V_1 всех переменных формулы φ.

Если $w_1 \Vdash_{V_1} \Box_F\Box_P\varphi$, то всюду на фрейме выполняется φ, следовательно второй дизъюнктивный член $\sigma(x_i)$ всегда опровергается на модели. Поэтому истинностное значение переменных x_i при означивании V_1 всегда совпадает со значением $\sigma(x_i)$ при V_1. В этом случае, имеем $w_1 \Vdash_{V_1} \sigma(\varphi)$.

Если $w_1 \nVdash_{V_1} \Box_F\Box_P\varphi$, тогда где-то на фрейме выполняется $\neg\varphi$. Тогда на любом элементе w модели M_1, $(M_1, w) \Vdash_{V_1} \neg\Box_F\Box_P\varphi(x_1,\dots,x_n)$. Следовательно, по определению формулы $\sigma(x_i)$, истинностное значение формул $\sigma(x_i)$ при означивании V_1 всюду на M_1 то же, что и для формулы $T(x_i)$ при V на модели M_0. В этом случае, снова, $w_1 \Vdash_{V_1} \sigma(\varphi)$. $\Box$

Теорема 5.2. *Любая унифицируемая в $\mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+}_{\mathcal{U}_-}$ формула проективна.*

Доказательство. Схема доказательства данного утверждения полностью соответствует доказательству Теоремы 5.2 выше: добавление операторов $Until$ не влияет на определение проективной формулы, а значит и на проективность предложенного унификатора σ. $\Box$

Теорема 5.3. *Любая унифицируемая в $\mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+,\mathcal{N}}_{\mathcal{U}_-,\mathcal{P}}$ формула проективна.*

Доказательство. Доказательство также аналогично доказательству предыдущих теорем 5.1 и 5.2. $\Box$

Итак, подстановка

$$\sigma(x_i) := \Big(\Box_F \Box_P \varphi(x_1, \dots, x_n) \wedge x_i\Big) \vee \Big(\neg \Box_F \Box_P \varphi(x_1, \dots, x_n) \wedge T(x_i)\Big),$$

для каждой переменной $x_i \in Var(\varphi)$, является проективным унификатором для унифицируемой формулы φ в описанных логиках $\mathcal{L}_P^F$, следовательно, в силу доказанной Леммы 5.1, она дает и эффективный алгоритм построения наиболее общего унификатора для любой такой формулы φ в $\mathcal{L}_P^F$: достаточно выписать формулы $\sigma(x_i)$ для всех переменных. Существование mgu для каждой унифицируемой формулы дает, по классификации типов унификации, унитарный тип для описанных логик. Кроме того, замечательным следствием проективности унификации в логиках $\mathcal{L}_P^F$ также является ее почти структурная полнота [16]: каждое допустимое правило выводимо в $\mathcal{L}_P^F$.

Глава 6. Проективная унификация в линейной модальной логике нетранзитивного времени с универсальной модальностью.

Как уже отмечалось во введении работы, большинство исследований унификационных проблем для нестандартных логик затрагивают «хорошие» — транзитивные, рефлексивные — случаи, где известные подходы демонстрируют эффективную применимость, а формулировки определений не требуют значительных корректировок. Результат, представленный в данной главе посвящен исследованию линейной логики нетранзитивного (и иррефлексивного) времени, язык которой дополнен универсальной модальностью. Результаты, описанные в Главе 6 представлены в статье [81].

6.1 Семантика $\mathcal{ULITL}$

Зададим семантическое построение линейной модальной логики нетранзитивного времени с универсальной модальностью (здесь и ниже будем обозначать такую логику $\mathcal{ULITL}$).

Алфавит языка $L^{\mathcal{ULITL}}$ включает в себя счетное множество пропозициональных переменных $P = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$, скобки (,), стандартные булевы операции и два модальных оператора: нетранзитивная $\Diamond$ и универсальная $\Box_U$ модальности.

Применительно к данной логике, далее будет рассматриваться фреймы Крипке $F = \langle \mathbb{N}, Next_{inf} \rangle$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а $Next_{inf}$ — бинарное отношение «следующее натуральное число»: $\forall a,b \in \mathbb{N} : aNext_{inf}b \Leftrightarrow b = a + 1$.

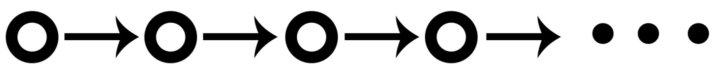

Рисунок 6.1 — Бесконечный $ULITL$-фрейм F

Модель на бесконечном фрейме $F = \langle \mathbb{N}, Next_{inf} \rangle$ будем обозначать $M = \langle F,V \rangle$.

В соответствии с определением, фрейм F линейный нетранзитивный с иррефлексивными элементами, поэтому истинность модальности $\Box$ на любой такой модели M совпадает с $\Diamond$, а значит, становятся корректными следующие преобразования: $\neg\Box\varphi = \Box\neg\varphi = \neg\Diamond\varphi = \Diamond\neg\varphi$.

Кроме нетранзитивной модальности $\Diamond$, язык логики $\mathcal{ULITL}$ содержит модальный оператор $\Box_U$, правило определения истинности формул содержащих $\Box_U$ на $M = \langle F,V \rangle$ зададим следующим образом:

$$\forall x \in F, \langle F, x \rangle \Vdash_V \Box_U \varphi \leftrightarrow [\forall y \in F, \langle F, y \rangle \Vdash_V \varphi] \, .$$

Модальный оператор $\Diamond_U$ выражается через парный $\Box_U$ стандартно: $\Diamond_U \varphi := \neg\Box_U \neg\varphi$.

Другими словами, $\Box_U \varphi$ означает, что формула φ всегда и всюду истинна. В таком случае $\Box_U$ называется универсальной модальностью, а содержащая $\Box_U$ логика $\mathcal{ULITL}$ называется линейной бимодальной логикой нетранзитивного времени с универсальной модальностью.

Определение 6.1. *Логикой $\mathcal{ULITL}$ будем называть множество всех формул языка $L^{\mathcal{ULITL}}$ истинных на фрейме F:*

$$\mathcal{ULITL} := \{\alpha \in WFF_{L^{\mathcal{ULITL}}} \mid F = \langle \mathbb{N}, Next_{inf} \rangle \ (F \Vdash_V \alpha)\}.$$

В связи с введением универсальной модальности в язык логики, требуется уточнить определения модальной степени и длины формулы.

Так, модальной степенью $d(\alpha)$ формулы α в логике $\mathcal{ULITL}$ назовем число вложенных нетранзитивных модальных операторов $\Diamond$ в α. Иными словами, $d(p) = 0, d(\neg\alpha) = d(\alpha)$, $d(\alpha \wedge \beta) = d(\alpha \vee \beta) = max(d(\alpha), d(\beta)), d(\Diamond\alpha) = d(\alpha) + 1$, $d(\Box_U \alpha) = d(\alpha)$.

Длину $l(\alpha)$ формулы α определим следующим образом: $l(p) = 0$, где p пропозициональная переменная; $l(\alpha \circ \beta) = l(\alpha) + l(\beta) + 1$, где $\circ \in \{\vee,\wedge\}$; $l(\bigcirc\alpha) = l(\alpha) + 1$, где $\circ \in \{\neg,\Diamond,\Box_U\}$.

6.2 Унификация в $\mathcal{ULITL}$

Прежде чем перейти к доказательству вопросов унификации в $\mathcal{ULITL}$, докажем вспомогательный, почти очевидный, факт.

Предложение 6.1. *Для любых $c_1,\dots,c_r \in \{\top,\bot\}$ и любой формулы $\delta(p_1,\dots,p_r)$ существует $c \in \{\top,\bot\}$ такая, что $\forall x \in F$*

$$\langle F, x\rangle \Vdash \delta(c_1,\dots,c_r) \equiv c.$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по длине формулы δ. Пусть $\delta = p$, тогда в результате подстановки получим $\delta = \top$, а значит $V(\top) = F$, либо $\delta = \bot$, а значит $V(\bot) = \varnothing$.

Если $\delta = c_1 \vee c_2$, где $c_1, c_2 \in \{\top,\bot\}$, то $\delta = max(c_1,c_2)$, если $\delta = c_1 \wedge c_2$, то $\delta = min(c_1,c_2)$ и, по индуктивному предположению $V(\delta) = F$ или $V(\delta) = \varnothing$.

Если $\delta = \neg c_1$, где $c_1 \in \{\top,\bot\}$, то $\delta = \top$, если $c_1 = \bot$, либо $\delta = \bot$, если $c_1 = \top$ и, снова, по предположению индукции $V(\delta) = F$ или $V(\delta) = \varnothing$.

Пусть $\delta = \bigcirc c_1$, где $\bigcirc = \{\Diamond,\Box_U\}$, а $c_1 \in \{\top,\bot\}$. Если $c_1 = \bot$ то, т.к. $V(\bot) = \varnothing$, то и $V(\bigcirc\bot) = \varnothing$. Если $c_1 = \top$ то, в силу $V(\top) = F$, имеем $V(\bigcirc\top) = F$. $\square$

Определим проективную формулу в логике $\mathcal{ULITL}$ и перепишем доказательство Леммы 5.1 для случая данной логики.

Определение 6.2. *Формула $\alpha(p_1,\dots,p_s)$ называется проективной в логике $\mathcal{ULITL}$, если существует унификатор τ (называемый проективным унификатором) для формулы α такой, что $\Box_U\alpha \to [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{ULITL}$ для любой переменной p_i формулы α.*

Лемма 6.1. *Если подстановка σ_p проективна для формулы φ в логике $\mathcal{ULITL}$, то $\{\sigma_p\}$ является полным набором унификаторов для φ (т.е. σ_p является наиболее общим для φ).*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательствам предыдущих версий Леммы. Пусть σ — унификатор для формулы φ в логике $\mathcal{L}$.

Т.к. мы предполагаем, что σ_p является проективным унификатором для φ в $\mathcal{L}$, имеет место $\Box_U\varphi \to [x_i \equiv \sigma_p(x_i)] \in \mathcal{ULITL}$ для каждой переменной x_i формулы φ. Подействовав подстановкой σ на $\Box_U\varphi \to [x_i \equiv \sigma_p(x_i)]$ получим $\sigma(\Box_U\varphi) \to [\sigma(x_i) \equiv \sigma(\sigma_p(x_i))] \in \mathcal{ULITL}$, т.е. $[\sigma(x_i) \equiv \sigma(\sigma_p(x_i))] \in \mathcal{ULITL}$ и Лемма доказана. $\Box$

Для произвольной формулы в логике $\mathcal{ULITL}$ возможно установить ее унифицируемость используя только граунд-унификаторы:

Теорема 6.1. *В логике $\mathcal{ULITL}$ унифицируемость произвольной формулы $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ может быть эффективно установлена при помощи подстановок $\sigma(\varphi)$ следующего вида: $\forall p_i \in Var(\varphi)$ $\sigma(p_i) \in \{\top, \bot\}$.*

Доказательство. Покажем, что для проверки унифицируемости любой данной формулы φ достаточно устанавливать только существование граунд унификаторов $gu := \{\top, \bot\}$, получаемых заменой переменных на константы.

Положим унифицируемой в $\mathcal{ULITL}$ формулу $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ и набор $\delta_1(q_1, \dots, q_r)$, $\dots$, $\delta_s(q_1, \dots, q_r)$ — ее унификатор. Тогда

$$\delta(\varphi) := \varphi(\delta_1(q_1, \dots, q_r), \dots, \delta_s(q_1, \dots, q_r)) \in \mathcal{ULITL}.$$

Заменим переменные $q_1, \dots, q_r$ на константы $c_i \in \{\top, \bot\}(i \in [1,r])$ произвольным образом. Т.к. мы имеем дело с истинной в логике формулой, то в результате подстановки получим вновь истинную формулу:

$$\varphi(\delta_1(c_1, \dots, c_r), \dots, \delta_s(c_1, \dots, c_r)) \in \mathcal{ULITL}.$$

Обозначим $gu(p_i) := \delta_i(c_1, \dots, c_r)$, тогда

$$\varphi(gu(p_1), \dots, gu(p_s)) \in \mathcal{ULITL},$$

где каждое $gu(p_i) \in \{\top, \bot\}$ — константа. Следовательно, $gu(\varphi)$ — граунд унификатор, построить который для произвольной формулы в логике $\mathcal{ULITL}$ можно следующим образом.

Т.к. $gu(p_1),\ldots,gu(p_s)$ есть не что иное, как набор констант при котором φ истинна, для произвольной (не обязательно унифицируемой) формулы $\psi(p_1,\ldots,p_s)$ достаточно перебрать не более чем 2^s вариантов подстановки $\{\top,\bot\}$ вместо переменных. Если среди них найдется такая, что $\varphi(gu(p_1),\ldots,gu(p_s)) \equiv_{\mathcal{ULITL}} \top$, значит формула ψ унифицируема в $\mathcal{ULITL}$, а $gu(\psi) \in \mathcal{ULITL}$ — ее граунд унификатор. В противном же случае, если, для всех 2^s наборов констант $gu(p_1),\ldots,gu(p_s)$, $\psi(gu(p_1),\ldots,gu(p_s)) \notin \mathcal{ULITL}$, то такая формула ψ не имеет граунд унификатора, а значит является неунифицируемой в логике $\mathcal{ULITL}$. $\square$

Теперь мы готовы к доказательству основного результата данной главы.

Теорема 6.2. *Любая унифицируемая в $\mathcal{ULITL}$ формула является проективной.*

Доказательство. Положим унифицируемой в $\mathcal{ULITL}$ формулу $\varphi(p_1,\ldots,p_s)$. Для любой переменной $p_i \in Var(\varphi)$ зададим следующую подстановку $\sigma(p_i)$:

$$\sigma(p_i) := (\Box_U\varphi \wedge p_i) \vee (\neg\Box_U\varphi \wedge gu(p_i)),$$

где $gu(p_1),\ldots,gu(p_s)$ — граунд-унификатор формулы $\varphi(p_1,\ldots,p_s)$, полученный по алгоритму предыдущей теоремы.

Пусть $M := \langle F,V\rangle$ — бесконечная модель с произвольным означиванием V. Если σ — унификатор для φ, то $\sigma(\varphi) \in \mathcal{ULITL}$ и $\forall x \in F$ $\langle M,x\rangle \Vdash_V \sigma(\varphi)$. Докажем, что подстановка σ является унификатором для данной унифицируемой формулы φ в логике $\mathcal{ULITL}$.

1. Пусть $\forall x \in F : \langle M,x\rangle \Vdash_V \varphi$. Тогда $\langle M,x\rangle \Vdash_V \Box_U\varphi$, а значит второй дизъюнктивный член опровергается на x. Пусть $\langle M,x\rangle \Vdash_V p_i$, тогда $\langle M,x\rangle \Vdash_V \Box_U\varphi \wedge p_i$, а значит $\langle M,x\rangle \Vdash_V \sigma(p_i)$. Пусть $\langle M,x\rangle \Vdash_V \neg p_i$, тогда $\langle M,x\rangle \nVdash_V \Box_U\varphi \wedge p_i$, а значит $\langle M,x\rangle \Vdash_V \neg\sigma(p_i)$. Следовательно, истинность $\varphi(p_1,\ldots,p_s)$ на точке x при означивании V совпадает с истинностью $\varphi(\sigma(p_1),\ldots,\sigma(p_s))$ на этой точке при V, а значит в этом случае $\langle M,x\rangle \Vdash_V \sigma(\varphi)$.

2. Пусть $\exists x \in F : \langle M,x\rangle \Vdash_V \neg\varphi$. Тогда $\langle M,x\rangle \nVdash_V \Box_U\varphi$, что возможно для второго дизъюнктивного члена, а первый сразу опровергается на x. Тогда значения истинности всех $\sigma(p_i)$ на x совпадают с $gu(p_i)$, а т.к. $\langle M,x\rangle \Vdash_V gu(\varphi)$ (в силу выбора граунд-унификатора $gu(\varphi) \in \mathcal{ULITL}$), следовательно снова $\langle M,x\rangle \Vdash_V \sigma(\varphi)$. Следовательно, $\sigma(\varphi) \in \mathcal{ULITL}$ для унифицируемой в $\mathcal{ULITL}$ формулы φ.

Проверим является ли σ проективным унификатором. По определению проективной формулы, σ — проективный унификатор для φ, если $\forall p_i \in Var(\varphi)$:

$$(\Box_U\varphi) \to (p_i \leftrightarrow [(\Box_U\varphi \wedge p_i) \vee (\neg\Box_U\varphi \wedge gu(p_i))]) \in \mathcal{ULITL}.$$

Предположим обратное: пусть σ не является проективной подстановкой. Тогда $\exists x$

$$\langle M,x\rangle \Vdash_V \Box_U\varphi, \tag{1}$$

но

$$\langle M,x\rangle \nVdash_V p_i \leftrightarrow [(\Box_U\varphi \wedge p_i) \vee (\neg\Box_U\varphi \wedge gu(p_i))]. \tag{2}$$

В этом случае

$$\langle M,x\rangle \nVdash_V p_i \to [(\Box_U\varphi \wedge p_i) \vee (\neg\Box_U\varphi \wedge gu(p_i))], \tag{3}$$

либо

$$\langle M,x\rangle \nVdash_V [(\Box_U\varphi \wedge p_i) \vee (\neg\Box_U\varphi \wedge gu(p_i))] \to p_i. \tag{4}$$

Пусть (3), тогда $\langle M,x\rangle \Vdash_V p_i$, но в этом случае $\langle M,x\rangle \Vdash_V \Box_U\varphi \wedge p_i$, в силу истинности (1) и p_i на x, а значит $\langle M,x\rangle \Vdash_V p_i \to [(\Box_U\varphi \wedge p_i) \vee (\neg\Box_U\varphi \wedge gu(p_i))]$.

Пусть (4), следовательно $\langle M,x\rangle \Vdash_V [(\Box_U\varphi \wedge p_i) \vee (\neg\Box_U\varphi \wedge gu(p_i))]$, но это возможно только при $\langle M,x\rangle \Vdash_V p_i$, т.к. $\langle M,x\rangle \Vdash_V \Box_U\varphi$ из требования (1), а значит в дизъюнкции $\sigma(p_i)$ может выполнится только 1-й член. Тогда и заключение (4) истинно и $\langle M,x\rangle \Vdash_V [(\Box_U\varphi \wedge p_i) \vee (\neg\Box_U\varphi \wedge gu(p_i))] \to p_i$. Следовательно, σ является проективным унификатором для φ в логике $\mathcal{ULITL}$, а значит φ — проективная формула. $\square$

В силу доказанного выше, для любой унифицируемой в $\mathcal{ULITL}$ формулы φ подстановка σ является проективным унификатором, а значит, по Лемме 6.1, и наиболее общим унификатором (или mgu) [28]. Кроме того, также по Лемме 6.1, из существования mgu для каждой унифицируемой формулы следует конечность всех полных наборов унификаторов в логике и все они могут быть получены из данной проективной подстановки σ, а значит, по классификации типов унификации С. Гиларди, логика $\mathcal{ULITL}$ имеет унитарный тип унификации [28].

Как и в предыдущей главе, важным следствием проективности унификации в $\mathcal{ULITL}$ является ее почти стуктурная полнота [16]: каждое допустимое не пассивное правило выводимо в $\mathcal{ULITL}$.

Заключение

Унификационные проблемы были и остаются одними из наиболее активно исследуемых задач современной математической логики. Область исследования унификации не ограничивается вопросом унифицируемости формулы. Если ответ положительный, требуется построение решения, т.е. унификатора. В общем случае, решений может существовать бесконечно много, однако, чаще не требуется найти каждое — достаточно одного лучшего, если оно существует: наиболее общий унификатор (mgu), из которого любой другой возможно получить определенной конкретизацией. Серьезные проблемы возникают, если оказывается, что унифицируемая формула имеет несколько (или бесконечно много) максимальных унификаторов, но не имеет mgu. В худшем случае формула может не иметь даже максимальных унификаторов. Поэтому дополнительной задачей является поиск «хороших» логических систем, в которых для каждой унифицируемой формулы существует mgu или, по крайней мере, конечное число максимальных.

Основными результатами данной работы являются унификационные алгоритмы, решающие унификационные проблемы в двух основных аспектах: через критерии неунифицируемости для любой формулы в логиках $\mathcal{LTK}$, $\mathcal{LFPK}$ и широкого класса логик с выразимой универсальной модальностью; а также через доказательство проективности унификации в логиках $\mathcal{LFPK}, \mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+}_{\mathcal{U}_-}, \mathcal{LFPK}^{\mathcal{U}_+,\mathcal{N}}_{\mathcal{U}_-,\mathcal{P}}$ и $\mathcal{ULITL}$.

Дальнейшие исследования также связаны с унификационными вопросами в области нестандартных логик. В частности, планируется исследовать проблему унификации в предтабличных модальных $\mathcal{PM}1$–$\mathcal{PM}4$ (для предтабличной $\mathcal{PM}5$, совпадающей с $\mathcal{S}5$, вопрос решен в [15]) и суперинтуиционистских $\mathcal{LC}, \mathcal{L}2, \mathcal{L}3$ логиках [1]; продолжить развитие унификационной теории для нетранзитивных многомодальных логик, в частности, ветвящегося времени, многоагентных и мультиозначиваемых систем [68].

Список литературы

1. Максимова, Л. Л. Предтабличные расширения логики S4 Льюиса / Л. Л. Максимова // Алгебра и логика. — 1975. — Т. 14, N. 1. — С. 28–55.

2. Юн, В. Ф. Временная логика линейных по времени фреймов с аксиомой индукции / В. Ф. Юн // Сибирские электронные математические известия. — 2009. — Т. 6. — С. 312–325.

3. Юн, В. Ф. Временная логика индуктивных фреймов с линейным временем / В. Ф. Юн // Сибирские электронные математические известия. — 2010. — Т. 7. — С. 445–457.

4. Юн, В. Ф. Полимодальная логика индуктивных линейных по времени фреймов / В. Ф. Юн // Сибирские электронные математические известия. — 2015. — Т. 12. — С. 421–431.

5. Baader F. Unification theory / F. Baader, J. H. Siekmann // Handbook of logic in artificial intelligence and logic programming. — Oxford University Press, 1994. — P. 41–125.

6. Baader, F. Unification theory / F. Baader, W. Snyder // Handbook of automated reasoning. — 2001. —- V. 1. — P. 445–532.

7. Baader, F. Unification in modal and description logics / F. Baader, S. Ghilardi // Logic J. IGPL. — 2011. — V. 19. — P. 705–730.

8. Babenyshev, S. Linear temporal logic LTL: basis for admissible rules / S. Babenyshev, V. Rybakov // Journal of Logic and Computation. — 2011. — V. 21. — P. 157–177.

9. Babenyshev, S. V. Unification in linear temporal logic LTL / S. V. Babenyshev, V. V. Rybakov // Annals of Pure and Applied Logic. — 2011. — V. 162. — P. 991–1000.

10. Blackburn, P. 1 Modal logic: a semantic perspective / P. Blackburn, J. Van Benthem // Studies in Logic and Practical Reasoning. — 2007. — V. 3. — P. 1–84.

11. Calardo, E. Combining time and knowledge, semantic approach / E. Calardo, V. V. Rybakov // Bulletin of the Section of Logic. — 2005. — V. 34, N. 1. — P. 13–21.

12. Calardo, E. Admissible inference rules in the linear logic of knowledge and time LTK / E. Calardo // Logic Journal of the IGPL. — 2006. — V. 14, N. 1. — P. 15–34.

13. Calardo, E. An axiomatisation for the multi-modal logic of knowledge and linear time LTK / E. Calardo, V. V. Rybakov // Logic Journal of the IGPL. — 2007. — V. 15, N. 3. — P. 239–254.

14. Chagrov, A. V. Modal logic / A. V. Chagrov, M. V. Zakharyaschev. — Oxford Press, 1997. — 605 p.

15. Dzik, W. Unitary Unification of S5 Modal Logic and its Extensions / W. Dzik // Bull. Section of Logic. — 2003. — V. 32, N. 1–2. — P. 19–26.

16. Dzik, W. Remarks on projective unifiers / W. Dzik // Bulletin of the Section of Logic. — 2011. — V. 40, N. 1. — P. 37–45.

17. Dzik, W. Projective unification in modal logic // W. Dzik, P. Wojtylak // Logic J. IGPL. — 2012. — V. 20, N. 1. — P. 121–153.

18. Emerson, E. A. Temporal and modal logics / E. A. Emerson // Handbook of Theoretical Computer Science. J. van Leenwen, ed., Elsevier Science, 1997. — P. 996–1072.

19. Fagin, R. Reasoning About Knowledge / R. Fagin, J. Y. Halpern, Y. Moses, M. Vardi. — MIT press, 1995. — 536 p.

20. Fagin, R. The hierarchical approach to modeling knowledge and common knowledge / R. Fagin, J. Geanakoplos, J. Halpern, M. Vardi // International Journal of Game Theory. — 1999. — V. 28, N. 3. — P. 331–365.

21. Fridman, H. One hundred and two problems in mathematical logic / H. Fridman // J. Symbolic Logic. — 1975. — V. 40, N. 3. — P. 113–130.

22. Gabbay, D. M. On the temporal analysis of fairness / D. Gabbay, A. Pnueli, S. Shelah, and J. Stavi // Proceedings of the 7th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages, ACM Press, 1980. — P. 163–173.

23. Gabbay, D. M. An axiomatisation of the temporal logic with Until and Since over the real numbers / D. M. Gabbay, I. M. Hodkinson // Journal of Logic and Computation. — 1990. — V. 1. — P. 229–260.

24. Gabbay, D. M. Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects / D. M. Gabbay, I. M. Hodkinson, M. A. Reynolds. — Oxford: Clarendon Press, 1994. — V.1. — 653 p.

25. Gabbay, D. M. Temporal Logic in Context of Databases / D.M. Gabbay, I.M. Hodkinson, // Logic and Reality, Essays on the legacy of Arthur Prior, Oxford : Oxford University Press, 1995. — P. 89–120.

26. Gabbay, D. Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications / D. Gabbay, A. Kurucz, F. Wolter, M. Zakharyaschev // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, New York–Amsterdam : Elsevier, North-Holland, 2003. — V. 148. — 768 p.

27. Ghilardi, S. Unification through Projectivity, / S. Ghilardi // J. of Logic and Computation. — 1997. — V. 7. — P. 733–752.

28. Ghilardi, S. Unification in Intuitionistic logic / S. Ghilardi // J. Symbolic Logic. — 1999. — V. 64, N. 2. — P. 859–880.

29. Ghilardi, S. Best solving modal equations / S. Ghilardi // Annals of Pure and Applied Logic. — 2000. — V. 102, N. 3. — P. 183–198.

30. Ghilardi, S. Unification, finite duality and projectivity in varieties of Heyting algebras / S. Ghilardi // Annals of Pure and Applied Logic. — 2004. — V. 127, N. 1–3. — P. 99–115.

31. Ghilardi, S. Filtering Unification and Most General Unifiers in Modal Logic / S. Ghilardi, L. Sacchetti // Journal of Symbolic Logic. — 2004. — V. 69, N. 3. — P. 879–906.

32. Governatori, G. Modal tableaux for verifying stream authentication protocols / G. Governatori, A. M. Orgun, C. Liu // Journal of Autonomous Agents and Multi Agent Systems. — 2008. — Режим доступа: https://pdfs.semanticscholar.org/54c5/9ac04f7792fe413ca8b5736cca8e287a70eb.pdf

33. Hamkins, J. The modal logic of forcing / J. Hamkins, B. Löwe // Transactions of the American Mathematical Society. — 2008. — V. 360, N. 4. — P. 1793–1817.

34. Hintikka, J. Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions / J. Hintikka. — Ithaca, NY : Cornell University Press, 1962. — 179 p.

35. Hughes, G. E. A Companion to Modal Logic / G. E. Hughes, M.J. Cresswell. — London : Methuen, 1984. — 203 p.

36. Iemhoff, R. On the admissible rules of intuitionistic propositional logic / R. Iemhoff // J. Symbolic Logic. — 2001. — V. 66, N. 1. — P. 281–294.

37. Iemhoff, R. Proof theory for admissible rules / R. Iemhoff, G. Metcalfe // Annals of Pure and Applied Logic. — 2009. — V. 159. — P. 171–186.

38. Jerábek, E. Admissible rules of modal logics / E. Jerábek // J. Logic Comput. — 2005. — V. 15. — P. 411–431.

39. Jerábek, E. Independent bases of admissible rules / E. Jerábek // Logic J. IGPL. — 2008. — V. 16. — P. 249–267.

40. Jerábek, E. Blending margins: the modal logic K has nullary unification type / E. Jerábek // J. Logic Comput. — 2015. — V. 25. — P. 1231–1240.

41. Johansson, I. Der minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer formalismus / I. Johansson // Compositio Mathematica. — 1936. — V. 4. — P. 119–136.

42. Knuth, D. E. Simple word problems in universal algebras / D. E. Knuth, P. B. Bendix // Computational problems in abstract algebra. — 1970. — P. 263–297.

43. Kripke, S. A. Semantical analysis of modal logic i normal modal propositional calculi / S. A. Kripke // Mathematical Logic Quarterly. — 1963. — V. 9, N. 5–6. — P. 67–96.

44. Lewis C. I. A survey of symbolic logic / C. I. Lewis. — University of California press, 1918. — 414 p.

45. Lewis C. I. Strict Implication, an Emendation / C. I. Lewis // The Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods. — 1920. — V. 17. — P. 300–302.

46. Luk'yanchuk, A. Admissible inference rules in the linear logic of knowledge and time LTK with intransitive time relation / A. Luk'yanchuk, V. Rybakov // Siberian Mathematical Journal. — 2015. — V. 56, N. 3. — P. 455–470.

47. Manna, Z. The Temporal Logic of Reactive and Concurrent Systems: Specification / Z. Manna, A. Pnueli. — Springer Science & Business Media, 1992. — 426 p.

48. Manna, Z. Temporal Verification of Reactive Systems: Safety / Z. Manna, A. Pnueli. — Springer Science & Business Media, 1995. — 511 p.

49. Martin, U. Boolean unification — the story so far / U. Martin, T. Nipkow // J. Symbolic Comput. — 1988. — V. 7. — P. 275–293.

50. McKinsey, J. C. C. On the syntactical construction of systems of modal logic / J. C. C. McKinsey // The journal of symbolic logic. — 1945. — V. 10, N. 3. — P. 83–94.

51. McLean, D. Multi-Agent Temporary Logic $TS4^U_{K_n}$ Based at Non-linear Time and Imitating Uncertainty via Agents' Interaction / D. McLean, V. Rybakov // International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2013. — P. 375–384.

52. Odintsov, S. P. Unification and admissible rules for paraconsistent minimal Johanssons logic J and positive intuitionistic logic IPC+ / S. P. Odintsov, V. V. Rybakov // Annals of Pure and Applied Logic. — 2013. — V. 164, N. 7-8. — P. 771–784.

53. Odintsov, S. P. Unification Problem in Nelson's Logic N4 / S. P. Odintsov, V. V. Rybakov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2014. — V. 11. — P. 434–443.

54. Prior, A. Time and Modality / A. Prior. — Oxford : Oxford University Press, 1957. — V. 2. — P. 215–217.

55. Robinson, A. A machine oriented logic based on the resolution principle / A. Robinson // J. of the ACM. — 1965. — V. 12, N. 1. — P. 23–41.

56. Rybakov, V. V. A criterion for admissibility of rules in the modal system S4 and the intuitionistic logic / V. V. Rybakov // Algebra and Logic. — 1984. — V. 23, N. 5. — P. 369—384.

57. Rybakov, V. V. Problems of substitution and admissibility in the modal system grz and in intuitionistic propositional calculus / V. V. Rybakov // Annals of Pure and Applied Logic. — 1990. — V. 50, N. 1. — P. 71–106.

58. Rybakov, V. V. Rules of inference with parameters for intuitionistic logic / V. V. Rybakov // J. Symbolic Logic. — 1992. — V. 57, N. 3. — P. 912–923.

59. Rybakov, V. V. Admissible Logical Inference Rules. Series: Studies in Logic and the Foundations of Mathematics / V. V. Rybakov. — North-Holland : Elsevier Sci. Publ., 1997. — 616 p.

60. Rybakov, V. V. An essay on unification and inference rules for modal logics / V. V. Rybakov, M. Terziler, C. Gencer // Bulletin of the Section of Logic. — 1999. — V. 28, N. 3. — P. 145–157.

61. Rybakov, V. V. Linear temporal logic with until and next, logical consecutions / V. V. Rybakov // Annals of Pure and Applied Logic. — 2008. V. 155. — P. 32–45.

62. Rybakov, V.V. A Hybrid of Tencse Logic S4T and Multi-Agent Logic with Interacting Agents / V. V. Rybakov, S. V. Babenyshev // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. — 2008. — V. 1, N. 4. — P. 399–409.

63. Rybakov, V. V. Multi-modal and temporal logics with universal formula — reduction of admissibility to validity and unification. / V.V. Rybakov // J. Logic Comput. — 2008. — V. 18, N. 4. — P. 509–519.

64. Rybakov, V. V. Chance discovery and unification in linear modal logic / V. V. Rybakov // International Conference on Knowledge-Based and Intelligent Information and Engineering Systems. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2011. — P. 478–485.

65. Rybakov, V. V. Logical Analysis for Chance Discovery in Multi-Agents' Environment / V. V. Rybakov // KES, Conference Proceedings. — Springer, 2012. — P. 1593–1601.

66. Rybakov, V. V. Projective formulas and unification in linear temporal logic LTLU / V.V. Rybakov // Logic J. IGPL. — 2014. — V. 22, N. 4. — P. 665–672.

67. Rybakov, V. V. Intransitive linear temporal logic, knowledge from past, decidability, admissible rules, / V. Rybakov // arXiv preprint arXiv:1503.08761. — 2015.

68. Rybakov, V. V. Nontransitive temporal multiagent logic, information and knowledge, deciding algorithms, / V. V. Rybakov // Siberian Math. Journal. — 2017. — V. 58, N. 5. — P. 875–886.

69. Segerberg, K. Propositional logics related to Heyting's and Johansson's / K. Segerberg // Theoria. — 1968. — V. 34, N. 1. — P. 26–61.

70. Segerberg, K. An essay in classical modal logic / K. Segerberg. — PhD thesis, Stanford University, 1971.

71. Siekmann, J. H. Unification Theory / J. H. Siekmann // J. of Symbolic Computation. — 1989. — V. 7. — P. 207–274.

72. Tarski, A. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen / A. Tarski // Studia Philosophica. — 1936. — V. 1. — P. 261–405.

73. van der Meyden, R. Model checking knowledge and time in systems with perfect recall / R. van der Meyden, N. N. Shilov // FSTTCS. — 1999. — V. 99. — P. 432–445.

74. Vardi, M. Y. An automata-theoretic approach to linear temporal logic / M. Y. Vardi // Logics for concurrency. — 1996. — P. 238–266.

75. Vardi, M. Y. Reasoning about the past with two-way automata, / M. Y. Vardi // Automata, Languages and Programming. — 1998. — P. 628–641.

76. Wolter, F. Undecidability of the unification and admissibility problems for modal and description logics / F. Wolter, M. Zakharyaschev // ACM Transactions on Computational Logic. — 2008. — V. 9, N. 4. — P. 25.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в рецензируемых научных изданиях

77. **Bashmakov, S. I.** Unification and inference rules in the multi-modal logic of knowledge and linear time LTK / S. I. Bashmakov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2016. — V. 9, N. 2. — P. 149–157.

78. **Bashmakov, S. I.** Non-unifiability in linear temporal logic of knowledge with multi-agent relations / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. Rybakov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2016. — V. 13. — P. 656-663.

79. **Bashmakov, S. I.** Projective formulas and unification in linear discrete temporal multi-agent logics / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. Rybakov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2016. — V. 13. — P. 923–929.

80. **Bashmakov, S. I.** Unification for multi-agent temporal logics with universal modality / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. Rybakov // IfCoLog Logics and Their Applications. Special issue to the memory of Grigori E. Mints. — 2017. — V. 4, N. 4. — P. 939–954. — Режим доступа: http://www.collegepublications.co.uk/downloads/ifcolog00013.pdf

81. **Bashmakov, S. I.** Unification in linear modal logic on non-transitive time with the universal modality / S. I. Bashmakov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2018. — V. 11, N. 1. — P. 3–9.

Прочие публикации

82. **Башмаков, С. И.** Вопрос унификации и базис пассивных правил в многомодальной логике LTK / С. И. Башмаков // Ломоносов 2016: материалы XXIII Междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и мол. ученых. Секция Вычислит. матем. и кибернетика (Москва, 11–15 апреля 2016 г.) / ред. Атамась Е.И., Месяц А.И., Шевцова И.Г. — Москва : Издат. отдел факультета ВМК МГУ, 2016. — С. 38–39.

83. **Башмаков, С. И.** Унификация в многомодальной логике LTK / С. И. Башмаков // Материалы 54-й международной студенческой конференции МНСК–2016. Математика (Новосибирск, 16–20 апреля 2016 г.). Новосибирск : Новосибирский государственный университет, 2016. — С. 6.

84. **Башмаков, С. И.** Критерий неунифицируемости в транзитивной временной линейной бимодальной логике на множестве целых чисел / С. И. Башмаков // Электр. сборник матер. междунар. конф. студентов, аспирантов и мол. ученых «Проспект Свободный», посвящ. году образования в СНГ: Матем., информ. Алгебра, матем. логика и дискр. матем. (15–25 апреля 2016 г.). — Красноярск : Библ.-издат. комплекс СФУ, 2016. — С.10. — Режим доступа: http://nocmu.sfu-kras.ru/digest2016/src/

85. **Bashmakov, S. I.** On unification and passive rules in multi-modal temporal logic of linear time and knowledge LFPK / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. V. Rybakov, // Алгебра и логика: теория и приложения: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию В. М. Левчука (Красноярск, 24–29 июля 2016 г.) / отв. за вып.: С. И. Башмаков, И. Н. Зотов, Я. Н. Нужин [и др.]. — Красноярск : Библ.-издат. комплекс СФУ, 2016. — С. 88–90.

86. **Bashmakov, S. I.** Unification through the projective formulas in linear discrete temporal logics of knowledge / S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. V. Rybakov // Мальцевские чтения: Междунар. конф.: Тез. докладов (Новосибирск, 21–25 ноября 2016 г.). — Новосибирск : Изд-во Института математики, 2016. — С. 218. — Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/16/malmeet16.pdf

87. **Башмаков, С. И.** Линейные транзитивные логики знания и времени, унификация и проективные формулы / С. И. Башмаков, А. В. Кошелева, В. В. Рыбаков // МАК : «Математики — Алтайскому краю» : сборник трудов всероссийской конференции по математике (Барнаул, 29 июня –2 июля 2017 г.). — Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. — С. 6–7.

88. **Башмаков, С. И.** Унификация во временных логиках / С. И. Башмаков, А. В. Кошелева // Синтаксис и семантика логических систем: мате-

риалы 5-й школы-семинара (Улан-Удэ, оз. Байкал, 8–12 августа 2017 г.). — Улан-Удэ : Из-во Бурятского госуниверситета, 2017. — С. 20–25.

89. **Башмаков, С. И.** Унификация во временных многоагентных логиках с универсальной модальностью / С. И. Башмаков, А. В. Кошелева, В. В. Рыбаков // Математика в современном мире. Междунар. конф., посвящ. 60-летию Института математики им. С. Л. Соболева (Новосибирск, 14–19 августа 2017 г.): Тез. докладов / под ред. Г.В. Демиденко. — Новосибирск : Изд-во Института математики, 2017. — С. 67.

90. **Bashmakov, S. I.** Projective unification in linear modal logic on nontransitive time with universal modality / S. I. Bashmakov // Мальцевские чтения: Междунар. конф.: Тез. докладов (Новосибирск, 20–24 ноября 2017 г.). — Новосибирск : Изд-во Института математики, 2017. — Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/17/malmeet17.pdf