Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Томский государственный
университет систем управления и радиоэлектроники»

На правах рукописи

Кручинин Дмитрий Владимирович

Метод получения явных выражений полиномов на основе степеней производящих функций

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор технических наук, профессор
Шелупанов Александр Александрович

Красноярск – 2015

Оглавление

Введение 4

Глава 1. Анализ предметной области 12

1.1. Обзор известных результатов теории специальных полиномов . . 12

1.2. Способы описания специальных полиномов 13

1.3. Производящие функции полиномов 14

1.4. Выводы по первой главе 20

Глава 2. Степени производящих функций и их свойства 21

2.1. Коэффициенты степеней производящих функций 21

2.2. Свойства и операции над коэффициентами степеней производящих функций 27

2.3. Коэффициенты обратных производящих функций 39

2.4. Выводы по второй главе 45

Глава 3. Нахождение явных формул для полиномов на основе композиции производящих функций 47

3.1. Определение выражений полиномов на основе композиции производящих функций 47

3.2. Полиномы Чебышева 48

3.3. Полиномы Лежандра 51

3.4. Полиномы Гегенбауэра 53

3.5. Полиномы Абеля 54

3.6. Полиномы Бернулли второго рода 55

3.7. Обобщенные полиномы Бернулли 57

3.8. Полиномы Эйлера 60

3.9. Обобщенные полиномы Лагерра 62

3.10. Обобщенные полиномы Эрмита 64

3.11. Обобщенные полиномы Хумберта 68
3.12. Полиномы Стирлинга 71
3.13. Полиномы Петерса 73
3.14. Полиномы Наруми 76
3.15. Полиномы Лерча 78
3.16. Полиномы Махлера 79
3.17. Полиномы Мотта 81
3.18. Выводы по третьей главе 85

Заключение 87

Список литературы 88

Приложение А. Акты использования 96

Введение

Актуальность исследования. Бесконечные ряды и интегральные представления являются основным инструментом математического анализа со второй половины XVII века и все этапы его развития теснейшим образом связаны с развитием аппарата рядов и интегральных представлений. Создание техники использования рядов для решения математических и прикладных задач является одной из важнейших задач математического анализа. Методы анализа, использовавшиеся в классических трудах таких авторов, как А.А. Марков, Т.И. Стилтьес, С.Н. Бернштейн, Г. Сеге, A. Erdelyi, R.P. Boas и R.C. Buck, S. Roman, П.К. Суетин, породили в своем применении к различным объектам теорию классических ортогональных многочленов. Важным средством их описания являются производящие функции (производящие степенные ряды).

Существенный вклад в развитие современных методов теории производящих функций для решения задач перечислительного комбинаторного анализа внесли J. Riordan, L. Comtet, Дж. Эндрюс, H.S. Wilf, R. Stanley, P. Flajolet и R. Sedgewick, Н.Я. Виленкин, Г.П. Егорычев, В.Н. Сачков, С.К. Ландо и другие ученые. Большое значение для теории производящих функций специальных полиномов перечислительного комбинаторного анализа имели работы канадского математика H.M. Srivastava и турецкого математика Y. Simsek. Также из обширного количества исследований, связанных с производящими функциями для специальных полиномов, можно выделить работы таких авторов, как T. Kim, B. Kurt, M. El–Mikkawy.

Со времен Эйлера задача о разложении функций в степенной ряд рассматривалась как задача об отыскании явных формул для коэффициентов этого ряда. Во многих случаях для тех функций, для которых удается найти явное выражение для коэффициентов ряда, можно найти и другие, более громоздкие формулы для коэффициентов. Такие случаи являются богатым источником весьма нетривиальных тождеств. Ключевым моментом метода производящих функций полиномов является применение процесса обращения, который приводит в ряде задач к явным формулам.

Исследованиями в области получения явных выражений для специальных полиномов занимались, например, H.M. Srivastava, K.N. Boyadzhiev и M. Cenkci. Однако, единого и прямого метода получения явных выражений полиномов до настоящего времени не было предложено. Поэтому разработка метода получения явных выражений специальных полиномов на основе степеней производящих функций является актуальной.

Цели и задачи диссертационной работы. Работа посвящена разработке методов оперирования производящими функциями специальных полиномов и их применениям к получению явных формул для некоторых классов специальных полиномов.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие задачи:

- провести обзор литературы в области методик получения явных формул для специальных полиномов;
- получить новый метод вычисления коэффициентов степеней производящих функций;
- применить разработанный метод к известным специальным полиномам, заданным производящими функциями.

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа, теневого анализа, теории степенных рядов, а также методы декомпозиции производящих функций.

Научная новизна. Основные результаты диссертационного исследования являются новыми и состоят в следующем:

- разработан метод получения явных формул для коэффициентов разложения в ряд степеней производящих функций, в частности, найдены формулы для коэффициентов степеней взаимных, обратных, суммы, произведения и композиции производящих функций;

- на основе разработанного метода получены явные формулы для полиномов Стирлинга, Петерса, Наруми, Лерча, Махлера и для многомерных обобщенных полиномов Эрмита;

- найдена производящая функция для обобщенных полиномов Мотта, учитывающая использование тригонометрических функций и явная формула, позволяющая эффективно вычислить значения коэффициентов полиномов Мотта.

Личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором или совместно с соавторами при его непосредственном участии.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты диссертационного исследования носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами в области математического анализа, перечислительного комбинаторного анализа, математической физики и математической статистики. Большая часть результатов может служить основой для дальнейших исследований в теории производящих функций специальных полиномов, использоваться при решении функциональных и дифференциальных уравнений, задач комбинаторики, защиты информации и в математической физике. Материалы диссертации могут быть использованы для спецкурсов по дополнительным вопросам математического анализа, комбинаторики, математической физики, предназначенных для магистров и аспирантов высших учебных заведений. Таким образом, исследования в направлении, намеченном в диссертации, могут быть продолжены.

Полученные результаты внедрены в учебный процесс ТУСУРа: в практические занятия по дисциплинам «Дискретная математика» и «Математический анализ».

Предлагаемый математический аппарат для работы с производящими функциями позволяет автоматизировать получение явных выражений коэффициентов производящих функций, что может послужить основой для дальнейшего развития математических пакетов и систем компьютерной алгебры. Так автором создана библиотека для системы компьютерной алгебры «Maxima», реализующая основные операции над коэффициентами степеней производящих функций и содержащая более 100 базовых выражений степеней производящих функций, основанных на радикалах, логарифмах, тригонометрических функциях и полиномах.

Положения, выносимые на защиту:

- разработан метод, позволяющий найти явные формулы для коэффициентов степеней производящих функций, полученных с помощью операций сложения, умножения, композиции и обращения;
- для полиномов Стирлинга, Петерса, Наруми, Лерча, Махлера и для многомерных обобщенных полиномов Эрмита получены явные формулы;
- для обобщенных полиномов Мотта, имеющих производящую функцию $e^{x((1-t^2)^\alpha-1)/t} = \sum_{n\geq 0} s_n(\alpha, x)\frac{t^n}{n!}$ найдена явная формула, учитывающая использование тригонометрических функций.

Степень достоверности и апробация результатов. Все полученные в диссертации результаты имеют строгое математическое обоснование.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- международная научная конференции «10th International conference of numerical analysis and applied mathematics» (сентябрь 2012 г., Греция);
- международная научная конференция «Commutative ring theory, integer-valued polynomials and polynomial functions» (декабрь 2012 г., технологический университет города Грац, Австрия);

- международная научная конференция «Palanga conference in combinatorics and number theory» (сентябрь 2013 г., Вильнюсский университет, Литва);

- всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 135-летию Томского государственного университета и 65-летию механико-математического факультета (октябрь 2013 г., НИ ТГУ, Томск);

- международная научная конференция «Дискретная математика, теория графов и их приложения» (ноябрь 2013 г., Институт математики НАН Беларусь);

- международная научная конференция «International conference on recent advances in mathematics» (январь 2014 г., PTM университет города Нагпур, Индия);

- международная научная конференция «International congress in honour of professor Ravi P. Agarwal» (июнь 2014 г., университет города Улудаг, Турция);

- международная научная конференция «International Indian statistical association (IISA) conference» (июль 2014 г., Калифорнийский университет в Риверсайде, США, докладчик профессор Алан Криник);

- томский IEEE-семинар «Интеллектуальные системы моделирования, проектирования и управления» под руководством профессора А.А. Шелупанова (2012–2014 гг., ТУСУР, Томск).

Полученные результаты были апробированы в онлайн энциклопедии целочисленных последовательностей **«www.oeis.org»**. Зарегистрировано более 10 новых последовательностей и добавлено 18 оригинальных формул.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в соответствии с Проект–1/12 «Разработка и исследование методов и технологий информационной безопасности в технических и высокопроизводительных вычислительных системах» 2012–2013 годов, государственным заданием ТУСУР № 1220 2014 года, государственным заданием ТУСУР № 3657 2015-2016 годов. Также работа была поддержана двумя тревел-грантами: грант РФФИ № 12-01-09350 2012 года по конкурсу моб–з «Конкурс научных проектов молодых ученых для представления на научных мероприятиях, проводимых за рубежом», который позволил принять участие в конференции «10th international conference of numerical analysis and applied mathematics»; грант ТУСУРа 2012 года «Совершенствование и развитие внутрироссийской и международной мобильности аспирантов и молодых научно-педагогических работников ТУСУРа», который позволил принять участие в конференции «Commutative ring theory, integer-valued polynomials and polynomial functions».

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 13 печатных работах, в том числе в одной монографии [1], в 10 статьях рецензируемых журналов [2–11],из них 9 статей в изданиях из перечня ВАК (6 в изданиях, индексируемых базами данных Scopus и Web of Science) и в 2 тезисах [12, 13].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации 97 страниц. Список литературы включает 92 наименование, в том числе 13 работ автора по теме диссертации.

В первой главе приводится анализ предметной области.

В разделе 1.1 дан аналитический обзор литературных данных по теории полиномов. Приводятся примеры некоторых специальных полиномов из различных областях математики и физики.

В разделе 1.2 описаны способы задания специальных полиномов. Показано, что производящие функции являются важным способом задания специальных полиномов.

В разделе 1.3 проведен анализ литературных данных в области исследования производящих функций специальных полиномов, а также приведена классификация их производящих функций. Проанализированы следующие варианты получения производящих функций из выражений для полиномов: техника перегруппировки рядов, техника декомпозиции, операторные методы и теневой анализ. Рассмотрены результаты в области получения явных формул для специальных полиномов, которые показали, что общего подхода для получения явных выражений специальных полиномов до настоящего времени не было предложено.

Во второй главе автором предлагается подход к определению явных формул для коэффициентов степеней производящих функций.

В разделе 2.1 проанализированы литературные данные в области исследования коэффициентов степеней производящих функций. Выявлено, что многие исследования, связанные с производящими функциями, используют коэффициенты степеней производящих функций. Однако, коэффициенты степеней производящих функций как самостоятельный объект исследования в известных работах не рассматриваются.

Дается определение k-й степени производящей функции. Рассматривается случай коэффициентов $F(n,k)$ для степеней производящих функций вида $F(x)^k = \sum_{n\geq 0} F(n,k)x^n$, у которых $F(0) = 0$. Эти коэффициенты названы композитами.

В разделе 2.2 приводятся теоремы об основных правилах вычисления композит и операций сдвига, сложения, умножения композит и взаимных композит.

Далее рассматривается применение композит для вычисления композиции обыкновенных производящих функций.

В разделе 2.3 решается задача нахождения композиты обратной производящей функции и, как следствие, – задача нахождения коэффициентов обратных производящих функций.

Третья глава посвящена вопросам доказательства достоверности результатов и применению разработанных математических методов для получения известных явных формул для полиномов Чебышева первого и второго родов, полиномов Лежандра, полиномов Гегенбауэра, полиномов Абеля, полиномов Эйлера.

В этой главе найдены новые явные формулы для полиномов Бернулли второго рода, обобщенных полиномов Бернулли, обобщенных полиномов Лагерра, обобщенных Голдом и Хоппером полиномов Эрмита и обобщенных полиномов Хумберта.

Впервые получены новые явные формулы и оригинальные явные представления для многомерных обобщенных полиномов Эрмита, полиномов Стирлинга, Петерса, Наруми, Лерча и Махлера.

Также автором получено обобщение полиномов Мотта, позволяющее применять найденное обобщение для тригонометрических функций. Для полученного обобщения найдены оригинальные явные формулы.

На основе формулы для композиты обратной производящей функции автором получены новые тождества для полиномов Мотта и полиномов Бернулли.

Также еще одним способом доказано тождество Теппера

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} (j+x)^n = n!.$$

Глава 1

Анализ предметной области

1.1. Обзор известных результатов теории специальных полиномов

Полиномом будем называть конечную линейную комбинацию мономов x^k с вещественными коэффициентами, точнее

Определение 1. *Полиномом степени n называется функция вида*

$$Y_n(x) = p_{(n,n)}x^n + p_{(n,n-1)}x^{n-1} + \cdots + p_{(n,1)}x + p_{(n,0)}, p_{(n,n)} \neq 0. \tag{1.1}$$

Двойная индексация коэффициентов $p_{(n,m)}$ полинома $Y_n(x)$ естественна при использовании метода производящих функций. Числа $p_{(n,m)}$ – это коэффициенты двойного степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_{(n,m)}t^n x^m$.

Набор коэффициентов $p_{(n,m)}$ однозначно определяет полином. Если все коэффициенты двух полиномов равны, то данные полиномы считаются одинаковыми.

Основы общей теории ортогональных полиномов были заложены П.Л. Чебышевым. Классические труды А.А. Маркова, Т.И. Стилтьеса, С.Н. Бернштейна, Г. Сеге [14] и других математиков значительно способствовали дальнейшему развитию общей теории и созданию принципиально новых методов исследования.

В настоящее время наблюдается значительный прогресс в области исследований специальных полиномов. Полиномы связаны с тригонометрическими, гипергеометрическими, бесселевыми и элиптическими функциями, с непрерывными дробями и с важными проблемами интерполирования, а также встречаются в теории дифференциальных и интегральных уравнений, в теории чисел, в комбинаторике, в квантовой механике, в математической физике и других областях.

Ниже приводится применение некоторых полиномов в различных областях математики и физики:

1. Полиномы Эрмита играют важную роль в прикладной математике и физике, например, в броуновском движении и волновом уравнении Шредингера;
2. Полиномы Лаггера используются в квантовой механике, в радиальной части решения уравнения Шредингера для атома с одним электроном;
3. Полиномы Бернулли применяются, например, в теории чисел (вычисление дзета-функции Гурвица, в обобщении известной дзета-функции Римана);
4. Полиномы Абеля имеют связь с геометрической вероятностью (случайное размещение непересекающихся дуг на окружности);
5. Центральные факториальные полиномы играют важную роль в интерполяции функций.

Обширное применение полиномов в различных областях математики отразилось на многочисленных исследованиях. На данный момент существует достаточно много больших обзорных работ по теории специальных полиномов, например, серия книг проекта «Bateman Project» под руководством английского математика A. Erdelyi [15–17], книги таких авторов, как R.P. Boas и R.C. Buck [18], книги таких отечественных авторов, как Я.Л. Геронимус [19], Н.Н. Лебедев [20], П.К. Суетин [21], В.В. Прасолов [22] и другие.

1.2. Способы описания специальных полиномов

Полиномы могут быть описаны разными путями:

1. Как решение дифференциальных уравнений, например, полиномы Эрмита $H_n(x)$ удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0;$$

2. С помощью дифференциальных операторов, например, обобщенные полиномы Лаггера $L_n^{(\alpha)}(x)$ удовлетворяют выражению

$$L_n^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha} e^x D^n e^{-x} x^{n+\alpha};$$

3. Как решения рекуррентного соотношения, например, экспоненциальные полиномы удовлетворяют выражению

$$\phi_{n+1}(x) = x(\phi_n(x) + \phi_n'(x));$$

4. С помощью производящих функций, например, обобщенные полиномы Бернулли $B_n^{(\alpha)}(x)$ характеризуются следующей производящей функцией

$$e^{xt}\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^{\alpha} = \sum_{n\geqslant 0} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!};$$

5. С помощью формул в явном виде, например, обобщенные полиномы Эрмита $g_n^m(x,h)$ определяются формулой

$$g_n^m(x,h) = n!\sum_{r=0}^{[\frac{n}{m}]} \frac{x^{n-mr}h^r}{r!(n-mr)!}.$$

Под явной формулой понимается формула, конечная по сумме и не содержащая рекурсии и величин, определение которых связано с самой формулой.

1.3. Производящие функции полиномов

В данной диссертации основное внимание уделяется производящим функциям полиномов.

Для начала дадим следующее определение производящей функции [23].

Определение 2. *Пусть* $f_0, f_1, f_2, \ldots$ *– произвольная (бесконечная) последовательность чисел. Производящей функцией (производящим степенным рядом) для этой последовательности будем называть выражение вида*

$$f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots$$

или, в сокращенной записи,

$$\sum_{n \geqslant 0} f(n) x^n.$$

Производящую функцию, как и обычную функцию, часто обозначают одной буквой, указывая в скобках ее аргумент:

$$F(x) = \sum_{n \geqslant 0} f(n) x^n.$$

Производящая функция представляет последовательность чисел в виде ряда по степеням формальной переменной. Поэтому наряду с термином «производящая функция» можно также пользоваться термином «формальный степенной ряд». Другими словами с символом x не связывают конкретных значений и вопросы сходимости и расходимости ряда при этом не обсуждаются.

Однако, в некоторых случаях можно производящему ряду поставить в соответствие некоторую аналитическую функцию $f(x)$. Например:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \cdots$$

или

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

Производящие функции являются мощным инструментом решения задач комбинаторики, статистики, математического анализа и прочих. Главное достоинство производящей функции заключается в том, что одной ею можно представить всю бесконечную последовательность. Впервые метод производящих функций использовал английский математик Абрахам де Муавр [24] в 1730г для решения рекуррентных уравнений. Затем Эйлер развил методы использования производящих функций для решения задач, связанных с изучением разбиений [25]. В дальнейшее развитие методов решения математических задач, на основе использования производящих функций, внесли вклад J. Riordan [26], L. Comtet [27], Дж. Эндрюс [25], H.S. Wilf [28], R. Stanley [29, 30], P. Flajolet и R. Sedgewick [31], Н.Я. Виленкин [32], Г.П. Егорычев [33], В.Н. Сачков [34], С.К. Ландо [23] и другие.

Аналогично можно рассматривать производящие функции многих переменных. Пусть $F(x,t)$ производящий степенной ряд по (формальной) переменной t:

$$F(x,t) = \sum_{n\geqslant 0} f_n(x)t^n,$$

где каждый коэффициент $f_n(x)$ является многочленом от x. Тогда говорят, что $F(x,t)$ есть производящая функция для последовательности полиномов $f_n(x)$.

Сходимость ряда не обязательна для отыскания коэффициентов в разложении, а также для получения различных свойств этих коэффициентов.

Большой вклад в исследование производящих функций полиномов внесли канадский математик H.M. Srivastava [35–38] и турецкий математик Y. Simsek [39–43]. Также из обширного количества исследований, связанных с производящими функциями для многих полиномов, можно выделить работы [44–47].

Отметим следующие виды производящих функций полиномов [35]:

1. Линейные производящие функции

Определение 3. *Функция от двух переменных $F(x,t)$, имеющая такое разложение в ряд по степеням формальной переменной, что*

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x)t^n, \tag{1.2}$$

где последовательность $\langle c_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ может содержать параметры функции $f_n(x)$ и $f_n(x)$ не зависит от t, называется линейной производящей функцией.

2. Билинейные производящие функции

Определение 4. *Функция от трех переменных $F(x, y, t)$, имеющая такое разложение в ряд по степеням формальной переменной, что*

$$F(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n f_n(x) f_n(y) t^n, \tag{1.3}$$

где последовательность $\langle \gamma_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ не зависит от x,y и t, называется билинейной производящей функцией для последовательности $\langle f_n(x) \rangle_{n=0}^{\infty}$.

3. Двумерные производящие функции

E.D. Rainville [48] и E.B. McBride [49] используют следующее классическое определение двумерных производящих функций полиномов:

Определение 5. *Функция от трех переменных $F(x, y, t)$, имеющая такое разложение в ряд по степеням формальной переменной, что*

$$H(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n f_n(x) g_n(y) t^n, \tag{1.4}$$

где последовательность $\langle h_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ не зависит от x,y и t, называется двумерной производящей функцией для последовательности $\langle f_n(x) \rangle_{n=0}^{\infty}$ или для последовательности $\langle g_n(x) \rangle_{n=0}^{\infty}$.

Данное определение было расширено H.L. Manocha и H.M. Srivastava [35] следующим образом:

Определение 6. *Функция от трех переменных $F(x, y, t)$, имеющая такое разложение в ряд по степеням формальной переменной, что*

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n f_{\alpha(n)}(x) g_{\beta(n)}(y) t^n, \tag{1.5}$$

где последовательность $\langle \psi_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ не зависит от x,y и t, функции $\langle f_{\alpha(n)} \rangle_{n=0}^{\infty}$ и $\langle f_{\beta(n)} \rangle_{n=0}^{\infty}$ разные, а $\alpha(n)$ и $\beta(n)$ не обязательно равны, называется двумерной производящей функцией для последовательности $\langle f_{\alpha(n)}(x) \rangle_{n=0}^{\infty}$.

4. Многомерные производящие функции

Определение 7. *Функция от $r+1$ переменных $G(x_1,\ldots,x_r,t)$, имеющая такое разложение в ряд по степеням формальной переменной, что*

$$G(x_1,\ldots,x_r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n g_n(x_1,\ldots,x_r)t^n, \qquad (1.6)$$

где последовательность $\langle c_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ не зависит от $x_1,\ldots,x_r$ и t, называется многомерной производящей функцией для последовательности $\langle g_n(x_1,\ldots,x_r)\rangle_{n=0}^{\infty}$.

Существуют достаточно много вариантов получения производящих функций из выражений полиномов. Можно выделить следующие методики.

1. Один из самых эффективных методов получения производящих функций полиномов – это техника перегруппировки рядов (или манипуляция рядами) [35]. Данная техника основана на следующих 4 леммах и их вариациях.

Лемма 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A(k,n-k)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}B(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}B(k,n+k).$$

Лемма 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]}A(k,n-2k)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]}B(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}B(k,n+2k).$$

Лемма 3. Для любого положительного целого числа m выполняется

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/m]}A(k,n-mk)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/m]}B(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}B(k,n+mk).$$

Лемма 4. Для положительных целых чисел $m_1 \ldots, m_r (r \geq 1)$, выполняется

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{\infty} \Theta(k_1,\ldots,k_r;n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{m_1k_1+\cdots+m_rk_r \leq n} \Theta(k_1,\ldots,k_r;n-m_1k_1-\cdots-m_rk_r)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{m_1k_1+\cdots+m_rk_r \leq n} \Phi(k_1,\ldots,k_r;n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{\infty} \Phi(k_1,\ldots,k_r;n+m_1k_1+\cdots+m_rk_r).$$

С использованием приведенных лемм, перегруппировка рядов позволяет вычислить производящие функции каждого ряда.

2. Техника декомпозиции. В своей работе H.L. Manocha [50] использовал технику декомпозиции для получения производящих функций для полиномов Якоби и полиномов Лагерра. Идея данной методики заключается в том, что заданный ряд разбивается на 2 части с четными и нечетными элементами, после чего применяются тождества на основе обобщенных гипергеометрических рядов для получения искомой производящей функции.

3. Операторные методы. Они основаны на одинарных, двукратных и многократных интегральных преобразованиях и на некоторых операторах, использующих частные производные. Подробно данные методы описаны в работах A. Erdelyi [15–17], H.L. Manocha и H.M. Srivastava [35].

4. Теневой анализ. Теневой анализ изучает связи между различными последовательностями полиномов и степенными рядами. Первым этапом становления теневого исчисления считают вторую половину 19 века. Его родоначальниками можно считать таких ученых как Сильвестр, Кейли и Блиссар [51]. В то время термин «Теневой анализ» понимался как набор правил для манипулирования индексами в последовательностях [52]. Данные правила хорошо работали на практике, но не имели должного теоретического фундамента.

Второй этап развития был в 1970–1980 годах. S. Roman [53] и G.-C. Rota [54, 55] ввели современное понятие «Теневого анализа». Современный теневой анализ имеет дело с линейными функционалами на пространствах полиномов, изучает последовательности Аппеля и Шеффера, включая последовательности полиномов биномиального типа.

Теневой анализ применяется во многих областях математики. Например, в математическом анализе, теории графов, теории вероятностей, физике, теории инвариантов и других областях. Большая библиография (более 500) по применению теневого анализа представлена в работе A. Di Bucchianico и D. Loeb [56].

Интересные результаты в области получения явных формул для конкретных полиномов можно найти в некоторых последних работах H.M. Srivastava [57, 58], K.N. Boyadzhiev [59] и M. Cenkci [60]. Однако, единого и прямого метода получения явных выражений полиномов с использованием производящих функций до настоящего времени не было предложено.

1.4. Выводы по первой главе

Необходимость разработки методов получения явных формул для полиномов заключается в отсутствии подобных способов в настоящее время. Направление развито слабо и единого подхода в получении явных формул для полиномов не предложено. Производящие функции являются важным элементом описания полиномов. Поэтому разработка метода получения явных выражений полиномов на основе степеней производящих функций является актуальной и востребованной математической задачей.

Глава 2

Степени производящих функций и их свойства

2.1. Коэффициенты степеней производящих функций

Получение выражений коэффициентов степеней производящих функций впервые осуществил Леонард Эйлер, он нашел конкретный вид коэффициентов производящей функции $(1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots)^k$ [61]

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]^k = \sum_{n\geqslant 0} \binom{n+k-1}{k-1} x^n.$$

Однако, задолго до Эйлера была известна формула бинома Ньютона

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n,$$

которая является степенью производящей функции $(1+x)$. Другие важные коэффициенты степеней производящих функций нашел L. Comtet [27]:

$$(e^x - 1)^k = \sum_{n>0} \frac{k!}{n!} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n$$

и

$$\ln(1+x)^k = \sum_{n>0} \frac{k!}{n!} \left[{n \atop k} \right] x^n,$$

где $\left[{n \atop k} \right]$ и $\left\{ {n \atop k} \right\}$ числа Стирлинга первого и второго родов, соответственно.

Важное значение коэффициенты степеней производящих функций приобретают при выполнении операции композиции производящих функций. Вот что писал А.И. Маркушевич [62]: «...для того чтобы получить тейлоровское разложение функции $f(z) = F(\phi(z))$ следует ...выполнить возведение, т.е. умножение рядов, и, наконец, сложить коэффициенты членов, содержащие одинаковые степени z ...» иными словами

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(n,k) F(k),$$

где $F(z) = \sum_{n>0} F(n)z^n$, $\phi(z)^k = \sum_{n\geqslant k} \Phi(n,k)z^n$. Коэффициенты степеней производящих функций являются основой для выполнения операции композиции производящих функций.

Еще одной операцией, где коэффициенты степеней производящих функций играют важнейшую роль, является операция обращения производящей функции. Известен [30] вариант формулы Лагранжа, в которой связаны коэффициенты степеней прямой и обратной производящих функций.

Коэффициенты степеней производящих функций играют также важную роль при определении полиномов Белла второго рода, поскольку

$$(f(x+z)-f(z))^k = \sum_{n>k} \frac{k!}{n!} B(n,k,x) z^n,$$

где $B(n,k,x)$ – полиномы Белла второго рода.

Можно выделить следующие математические объекты, основанные на степенях производящих функций: потенциальные полиномы, введенные L. Comtet [27], и массивы Риордана [63].

Потенциальный полином – это комплексная степень экспоненциальной производящей функции, у которой нулевой член в общем случае не равен нулю. L. Comtet нашел связь коэффициентов потенциальных полиномов с полиномами Белла, однако, операций сложения, умножения и др. над такими полиномами не рассматривал.

Массивы Риордана в последнее время получили некоторое распространение [63–66]. Истоки массивов Риордана относятся к идеи использования треугольника Паскаля для нахождения коэффициентов производящей функции вида $A(x) = \frac{1}{1-x} F\left(\frac{x}{1-x}\right)$. Тогда

$$a(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F(k),$$

где $A(x) = \sum_{n\geqslant 0} a(n)x^n$ и $F(x) = \sum_{n>0} F(n)x^n$. L.W. Shapiro и др. [63] предложили назвать треугольники, обладающими такими свойствами, массивами Риордана и обозначать парой функций $(f(x), g(x))$. Однако, большинство результатов относится к массивам Риордана вида $(f(x), xf(x))$, где $f(0) \neq 0$ или вида $(1, h(x))$, где $h(0) = 0$, что является завуалированной формой $[xf(x)]^k$ или $[h(x)]^k$.

Несмотря на то, что недавно появились такие математические объекты, как, например, массивы Риордана, потенциальные полиномы или пирамиды Паскаля [67], использующие коэффициенты степеней производящих функций, сами коэффициенты не рассматривались как отдельные математические объекты. В общем виде применение коэффициентов степеней производящих функций не развито. В данной диссертации в качестве основного и отдельного математического объекта выделяются именно коэффициенты степеней производящих функций, на множестве которых можно задать операции сложения, умножения, композиции и другие операции.

Исследование проводится с помощью коэффициентов степеней производящей функции вида $F(x)^k = \sum_{n \geq k} F(n,k)x^n$, где $F(0) = 0$. Поэтому сначала рассмотрим вопрос о нулевой степени производящей функции.

Определение 8. *Для произвольной производящей функции* $A(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a(n)x^n$ *ее нулевая степень равна единице:* $\big[A(x)\big]^0 = 1$.

Данное определение позволяет оперировать нулевой степенью производящей функции. Например, рассмотрим композицию производящих функций

$$A(x) = G\big(F(x)\big) = \sum_{n \geq 0} g_n F(x)^n.$$

Откуда $F(x)^0 = 1$, даже в случае $F(x) = 0$, поскольку $A(0) = G(0)$.

Рассмотрим степени производящей функции, когда $k > 0$. Покажем, что для любой производящей функции $A(x) = \sum_{n \geq 0} a(n)x^n$ ее степень $A(x)^k$, где $k > 0$, всегда можно представить в виде

$$A(x)^k = \sum_{n \geq 0} A(n,k)x^n.$$

Для этого докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть задана производящая функция $A(x) = \sum_{n \geq 0} a(n)x^n$, тогда для производящей функции $A(x)^k = \sum_{n \geq 0} A(n,k)x^n$ справедливо рекуррентное выражение*

$$A(n,k) = \begin{cases} a(n), & k = 1; \\ \sum\limits_{i=0}^{n} a(i)A(n-i,k-1), & k > 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Доказательство. *Запишем соотношение $A(x)^k = A(x)\big[A(x)\big]^{k-1}$, где $k > 0$. Используя индукцию по k и правило Коши для произведения производящих функций, получим искомое рекуррентное соотношение. При $k = 1$ получим $A(n,1) = a(n)$. Пусть формула (2.1) справедлива для k. Тогда при $k+1$ имеем $A(n,k+1) = \sum_{i=0}^{n} a(i)A(n-i,k)$, что и требовалось доказать.*

Таким образом, k-ю степень производящей функции $A(x)$ можно рассматривать как производящую функцию, коэффициенты которой имеют два параметра n и k. Кроме того, по приведенном выше утверждении о нулевой степени производящей функции будем иметь $A(0,0) = 1$ и $A(n,0) = 0$ при $n > 0$. Это означает, что, если k-я степень производящей функции $A(x)$ будет иметь выражение

$$A(n,k) = \frac{k}{n}\binom{2\,n-k-1}{n-1},$$

то значение $A(0,0) = 1$, а $A(n,0) = 0$ для $n > 0$.

Рассмотрим теперь производящую функцию $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$, у которой отсутствует свободный член $f(0) = 0$ и дадим следующее определение.

Определение 9. *Композитой производящей функции $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$ порядка k будем называть последовательность из коэффициентов производящей функции $F(x)^k$ и обозначать $F^{\Delta}(n,k)$.*

Композиту $F^{\Delta}(n,k)$ производящей функции $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$ можно представить на основе композиций натурального числа n:

$$F^{\Delta}(n,k) = \sum_{\pi_k \in C_n} f(\lambda_1)\, f(\lambda_2) \cdots f(\lambda_k), \tag{2.2}$$

где C_n — множество всех композиций π_k натурального числа n; т.е. представлений $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$ из k слагаемых.

Известно [33] также представление $F^{\Delta}(n,k)$ на основе разбиений

$$F^{\Delta}(n,k) = \sum \binom{k}{j_1\, j_2 \ldots j_{n-k+1}} f(1)^{j_1}\, f(2)^{j_2}\, \ldots\, f(n-k+1)^{j_{n-k+1}}, \qquad (2.3)$$

где суммирование ведется по всем последовательностям неотрицательных целых чисел $j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_{n-k+1}$ $(k = \overline{1,n})$, для которых

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_{n-k+1} = k \text{ и } j_1 + 2j_2 + \ldots + (n-k+1)j_{n-k+1} = n.$$

Используя(2.2) можно построить рекуррентную формулу для вычисления композиты $F^{\Delta}(n,k)$ производящей функции $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$.

Теорема 2. *Для композиты производящей функции $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$ выполняется следующее рекуррентное соотношение:*

$$F^{\Delta}(n,k) = \begin{cases} f(n), & k = 1; \\ \sum\limits_{i=1}^{n-k+1} f(i)F^{\Delta}(n-i,k-1), & k \leqslant n. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Доказательство. *Композиция π_k при $k = 1$ единственна и равна n, откуда $F^{\Delta}(n,1) = f(n)$. Теперь для $k > 1$ сгруппируем в формуле (2.2) все произведения $f(\lambda_1)f(\lambda_2)\ldots f(\lambda_k)$ композиции π_k, у которых λ_1 равны. Вынесем за скобки $f(\lambda_1)$ и заметим, что сумма произведений в скобках будет равна $F^{\Delta}(n-\lambda_1,k-1)$. Тогда для всех значений λ_1 получим*

$$F^{\Delta}(n,k) = f(1)F^{\Delta}(n-1,k-1) + f(2)F^{\Delta}(n-2,k-1) + \ldots + f(i)F^{\Delta}(n-i,k-1) + \ldots +$$

$$+ f(n-(n-k+1))F^{\Delta}(k-1,k-1).$$

Таким образом, теорема доказана.

Заметим, что

$$F^{\Delta}(n,n) = f(1)F^{\Delta}(n-1,n-1) = f(1)^n.$$

Рассматривая формулу (2.4), можно сделать вывод, что композита является характеристикой производящей функции $F(x)$. В табличном виде композита представляется треугольником:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & F^{\Delta}_{1,1} & & & & & \\
 & & & & F^{\Delta}_{2,1} & & F^{\Delta}_{2,2} & & & & \\
 & & & F^{\Delta}_{3,1} & & F^{\Delta}_{3,2} & & F^{\Delta}_{3,3} & & & \\
 & & F^{\Delta}_{4,1} & & F^{\Delta}_{4,2} & & F^{\Delta}_{4,3} & & F^{\Delta}_{4,4} & & \\
 & \iddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\
F^{\Delta}_{n,1} & & F^{\Delta}_{n,2} & & \ldots & & \ldots & & F^{\Delta}_{n,n-1} & & F^{\Delta}_{n,n}
\end{array}$$

Или, зная, что $F^{\Delta}_{n,1} = f(n)$, $F^{\Delta}_{n,n} = [f(1)]^n$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & f(1) & & & & & \\
 & & & & f(2) & & f(1)^2 & & & & \\
 & & & f(3) & & F^{\Delta}_{3,2} & & f(1)^3 & & & \\
 & & f(4) & & F^{\Delta}_{4,2} & & F^{\Delta}_{4,3} & & f(1)^4 & & \\
 & \iddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\
f(n) & & F^{\Delta}_{n,2} & & \ldots & & \ldots & & F^{\Delta}_{n,n-1} & & f(1)^n
\end{array}$$

Пример 1. *Пусть* $F(x) = \dfrac{x}{1-x} = \sum_{n>0} x^n$, *где* $f(0) = 0$, *а* $f(n) = 1$ *для* $n > 0$. *Из формулы (2.2) следует, что композита будет*

$$F^{\Delta}(n,k) = \sum_{\pi_k \in C_n} 1.$$

Здесь суммирование ведется по всем композициям натурального числа n, *имеющим ровно* k *частей, равным* $\binom{n-1}{k-1}$. *Таким образом:*

$$F^{\Delta}(n,k) = \binom{n-1}{k-1}.$$

Тогда

$$(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots)^k = \sum_{n \geq k} \binom{n-1}{k-1} x^n.$$

Ниже представлены первые члены композиты производящей функции $F(x) = \dfrac{x}{1-x}$*, что является треугольником Паскаля:*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Для заданной производящей функции $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$ композита $F^{\Delta}(n,k)$ всегда существует и единственна.

2.2. Свойства и операции над коэффициентами степеней производящих функций

Рассмотрим связь между коэффициентами $A(n,k)$ и композитой $F^{\Delta}(n,k)$.

Теорема 3. *Пусть задана производящая функция* $A(x) = \sum_{n\geq 0} a(n)x^n$ *и известно выражение для коэффициентов* $A(n,k)$ *производящей функции* $\big[A(x)\big]^k$*. Тогда композита функции* $xF(x)$ *будет иметь вид*

$$F^{\Delta}(n,k) = A(n-k,k).$$

Доказательство. *Пусть* $[x\,A(x)]^k = \sum\limits_{n\geq k} F^{\Delta}(n,k)x^n = x^k \sum\limits_{n\geq 0} A(n,k)x^n$*. Тогда после замены получим искомое соотношение.*

Теорема 4. *Пусть задана производящая функция* $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$ *и известно выражение для композиты* $F^{\Delta}(n,k)$*. Тогда коэффициенты функции* $\left[\dfrac{F(x)}{x}\right]^k$ *будут определяться следующим выражением*

$$A(n,k) = F^{\Delta}(n+k,k).$$

Доказательство. *Аналогично рассмотренному выше доказательству, получим* $\left[\dfrac{F(x)}{x}\right]^k = \dfrac{1}{x^k}\sum_{n\geq k} F^{\Delta}(n,k)x^n = \sum_{n\geq 0} F^{\Delta}(n+k,k)x^n$.

Пример 2. *Найдем композиту производящей функции* $F(x) = xe^x$. *Для этого запишем*

$$[e^x]^k = e^{kx} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{k^n}{n!}x^n.$$

Отсюда на основании Теоремы 3 имеем

$$F^{\Delta}(n,k) = \frac{k^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Пример 3. *Найдем композиту производящей функции* $F(x) = ax + bx^2$. *Для этого рассмотрим производящую функцию* $(a+bx)^k$ *и на основании бинома Ньютона запишем*

$$(a+bx)^k = \sum_{n\geqslant 0} \binom{k}{n} a^{k-n} b^n x^n.$$

Отсюда на основании Теоремы 3 получается

$$F^{\Delta}(n,k) = \binom{k}{n-k} a^{2k-n} b^{n-k}. \tag{2.5}$$

Пример 4. *Найдем коэффициенты производящей функции* $\left[\dfrac{1}{1-x}\right]^k$. *Для этого рассмотрим производящую функцию* $\dfrac{x}{1-x}$ *для которой композита равна* $\dbinom{n-1}{k-1}$. *Откуда на основании Теоремы 4 получается*

$$A(n,k) = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда для производящей функции $A(x) = \sum_{n\geq 0} a(n)x^n$ известно выражение для коэффициентов $A(n,k)$ производящей функции $\big[A(x)\big]^k$ и необходимо найти композиту функции $A(x) - a(0)$.

Теорема 5. *Пусть задана производящая функция* $A(x) = \sum_{n\geq 0} a(n)x^n$ *и известно выражение для коэффициентов* $A(n,k)$ *производящей функции* $\left[A(x)\right]^k$. *Тогда композита функции* $F(x) = \left[A(x) - a(0)\right]$ *будет иметь вид*

$$F^{\Delta}(n,k) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} A(n,j)(-1)^{k-j}\, a(0)^{k-j}.$$

Доказательство. *По определению имеем*

$$F(x)^k = \left[A(x) - a(0)\right]^k.$$

Отсюда, используя бином Ньютона, получим

$$F(x)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A(x)^j (-1)^{k-j} a(0)^{k-j}.$$

С учетом того, что $A(x)^0 = 1$, *т.е.* $A(0,0) = 1$, *а все* $A(n,0) = 0$ *для* $n > 0$, *получим искомую формулу.*

Пример 5. *Найдем композиту производящей функции* $F(x) = e^x - 1$. *Для этого запишем*

$$[e^x]^k = \sum_{n\geqslant 0} \frac{k^n}{n!} x^n.$$

На основании Теоремы 5 имеем

$$F^{\Delta}(n,k) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \frac{j^n}{n!}(-1)^{k-j}, \quad F^{\Delta}(0,0) = 1.$$

Зная, что

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} j^n (-1)^{k-j},$$

получим искомую композиту

$$F^{\Delta}(n,k) = \frac{k!}{n!} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда для производящей функции $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$ известна композита $F^{\Delta}(n,k)$ и необходимо найти выражение коэффициентов функции $\big[\, f(0) + F(x)\big]^k$.

Теорема 6. *Пусть задана производящая функция* $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$ *и известна ее композита* $F^{\Delta}(n,k)$. *Тогда для функции* $A(x) = \big[a + F(x)\big]^k$, *где* a *– некоторая константа, выражение коэффициентов будет иметь следующий вид*

$$A(n,k) = \begin{cases} a^k, & n = 0; \\ \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} F^{\Delta}(n,j)a^{k-j}, & n > 0. \end{cases}$$

Доказательство. *На основании бинома Ньютона запишем*

$$\big[a + F(x)\big]^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} F^j(x)a^{k-j}.$$

Далее получим следующее выражение:

$$\big[a + F(x)\big]^k = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} F^{\Delta}(n,j)a^{k-j} + F^0(x)a^k.$$

С учетом того, что $F(x)^0 = 1$, *т.е.* $F(0,0) = 1$, *а все* $F(n,0) = 0$ *для* $n > 0$, *получим искомую формулу.*

Пример 6. *Рассмотрим производящую функцию* $F(x) = \dfrac{x}{1-x}$. *Композита данной производящей функции равна* $F^{\Delta}(n,k) = \dbinom{n-1}{k-1}$, *а выражение коэффициентов производящей функции* $A(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *имеет вид* $\dbinom{n+k-1}{k-1}$. *Отсюда на основании Теоремы 6 для* $n > 0$ *получим тождества*

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}\binom{n-1}{j-1}$$

или, поскольку $F(n,0) = 0$, *мы имеем*

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{n-1}{j-1}.$$

В том случае, если $n = 0$, то $a(0) = 1$.

Теорема 7. *Пусть задана производящая функция $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$ и известна ее композита $F^{\Delta}(n,k)$. Тогда для функции $A(x) = \big[F(x)\big]^m$ композита будет иметь следующий вид*

$$A^{\Delta}(n,k) = \begin{cases} F^{\Delta}(n,mk), & mk \leqslant n; \\ 0, & mk > n. \end{cases}$$

Доказательство. $[(F(x))^k]^m = (F(x))^{km} = \sum\limits_{n \geq mk} F^{\Delta}(n,mk)$. *Поскольку при $mk > n$ композита равна нулю, получим искомую формулу.*

Теорема 8. *Пусть имеется производящая функция $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$, ее композита $F^{\Delta}(n,k)$ и константа α. Тогда композита производящей функции $A(x) = \alpha F(x)$ будет*

$$A^{\Delta}(n,k) = \alpha^k F^{\Delta}(n,k).$$

Доказательство. *Поскольку выполняется следующее*

$$\big[A(x)\big]^k = \big[\alpha F(x)\big]^k = \alpha^k \big[F(x)\big]^k,$$

то искомая формула верна.

Теорема 9. *Пусть имеется производящая функция $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$, ее композита $F^{\Delta}(n,k)$ и константа α. Производящая функция $A(x) = F(\alpha x)$ будет иметь композиту*

$$A^{\Delta}(n,k) = \alpha^n F^{\Delta}(n,k).$$

Доказательство. *Согласно определению композиты на основе композиций натурального числа n, имеем*

$$A^{\Delta}(n,k) = \sum_{\pi_k \in C_n} \alpha^{\lambda_1} f(\lambda_1) \alpha^{\lambda_2} f(\lambda_2) \cdots \alpha^{\lambda_k} f(\lambda_k) =$$

$$= \alpha^n \sum_{\pi_k \in C_n} f(\lambda_1) f(\lambda_2) \cdots f(\lambda_k) = \alpha^n F^{\Delta}(n,k).$$

Пример 7. *Пусть имеется производящая функция* $F(x) = \dfrac{x}{1-2x}$. *Найдем ее композиту. Для этого* $F(x)$ *представим как* $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x}{1-2x}\right)$. *Используя Теоремы 8, 9 и композиту из Примера 1, получим искомую композиту*

$$F^{\Delta} = 2^{n-k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Теорема 10. *Пусть имеются производящая функция* $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$, *ее композита* $F^{\Delta}(n,k)$, *производящие функции* $B(x) = \sum_{n\geq 0} b(n)x^n$ *и* $\left[B(x)\right]^k = \sum_{n\geq 0} B(n,k)x^n$. *Тогда производящая функция* $A(x) = F(x)B(x)$ *будет иметь композиту*

$$A^{\Delta}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} F^{\Delta}(i,k)B(n-i,k).$$

Доказательство. *Поскольку* $a(0) = f(0)b(0) = 0$, *то* $A(x)$ *будет иметь композиту* $A^{\Delta}(n,k)$. *С другой стороны,*

$$\left[A(x)\right]^k = \left[F(x)\right]^k\left[B(x)\right]^k.$$

Откуда на основании правила произведения производящих функций имеем

$$A^{\Delta}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} F^{\Delta}(i,k)B(n-i,k).$$

Если для $B(x)$ выполняется условие $b(0) = 0$, то формула примет вид

$$A^{\Delta}(n,k) = \sum_{i=k}^{n-k} F^{\Delta}(i,k)B^{\Delta}(n-i,k).$$

Теорема 11. *Пусть имеются производящие функции* $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$, $G(x) = \sum_{n>0} g(n)x^n$ *и их композиты* $F^{\Delta}(n,k)$, $G^{\Delta}(n,k)$ *соответственно. Тогда производящая функция* $A(x) = F(x) + G(x)$ *будет иметь композиту*

$$A^{\Delta}(n,k) = F^{\Delta}(n,k) + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{i=j}^{n-k+j} F^{\Delta}(i,j)G^{\Delta}(n-i,k-j) + G^{\Delta}(n,k).$$

Доказательство. *По правилу бинома Ньютона имеем*

$$\big[A(x)\big]^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \big[F(x)\big]^j \big[G(x)\big]^{k-j}.$$

$$\big[F(x)\big]^j = \sum_{n\geqslant j} F^{\Delta}(n,j)$$

и

$$\big[G(x)\big]^{k-j} = \sum_{n\geqslant k-j} G^{\Delta}(n,k-j).$$

По правилу умножения рядов и учитывая, что $F(x)^0 = 1$ *и* $G(x)^0 = 1$*, получим*

$$A^{\Delta}(n,k) = F^{\Delta}(n,k) + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} \sum_{i=j}^{n-k+j} F^{\Delta}(i,j) G^{\Delta}(n-i,k-j) + G^{\Delta}(n,k).$$

Пример 8. *Пусть дана производящая функция* $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$ *и ее композита* $F^{\Delta}(n,k)$*. Получим выражение композиты для производящей функции* $A(x) = F(x) + x$*. Для начала необходимо записать композиту для функции* $G(x) = x$*. Для этого дадим следующее определение.*

Определение 10. *Тождественной композитой* $Id^{\Delta}(n,k)$ *будем называть композиту производящей функции* $G(x) = x$*.*

По определению $[G(x)]^k = x^k$*. Отсюда*

$$G^{\Delta}(n,k) = \begin{cases} 1, & n = k; \\ 0, & n \neq k. \end{cases} \tag{2.6}$$

Таким образом, $G^{\Delta}(n,k) = \delta_{n,k}$*, где* $\delta_{n,k}$ *– символ Кронекера. Для любой производящей функции* $A(x)$ *выполняется тождество*

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n} G^{\Delta}(n,k) a(k).$$

Теперь, используя Теорему 11 и с учетом того, что $\delta(0,0) = 1$*, получим следующее выражение для искомой композиты:*

$$A^{\Delta}(n,k) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \sum_{i=j}^{n-k+j} F^{\Delta}(i,j) \delta(n-i,k-j) + \delta(n,k).$$

Отсюда, подставляя $i = n - k + j$, получим

$$A^{\Delta}(n,k) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} F^{\Delta}(n-k+j, j) + \delta(n,k).$$

Далее рассмотрим применение композит для вычисления композиции производящих функций. Для этого докажем следующую теорему.

Теорема 12. *Пусть даны функции $f(n)$ и $r(n)$ и их производящие функции $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$, $R(x) = \sum_{n\geq 0} r(n)x^n$, соответственно. Тогда для вычисления композиции производящих функций $A(x) = R(F(x))$ будет верно выражение*

$$a(0) = r(0),$$

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n} F^{\Delta}(n,k) r(k). \tag{2.7}$$

Доказательство. *Для вычисления $A(x) = R(F(x))$ необходимо получить*

$$A(x) = R(F(x)) = \sum_{k\geq 0} r(k) F(x)^k.$$

Вместо $F(x)^k$ подставим $\sum_{n\geqslant k} F^{\Delta}(n,k)x^n$ и с учетом того, что $F(x)^0 = 1$, получим

$$\begin{array}{lllllll}
A(x) = r(0)+ & & & & & & \\
 & +r(1)F(1,1)x & +r(1)F(2,1)x^2 & +\ldots+ & r(1)F(n,1)x^n & +\ldots \\
 & & +r(2)F(2,2)x^2 & +\ldots+ & r(2)F(n,2)x^n & +\ldots \\
 & & & \ldots & & \\
 & & & + & r(n)F(n,n)x^n & +\ldots \\
 & & & & & +\ldots
\end{array}$$

Суммируя коэффициенты при равных степенях x^n, получим искомую формулу

$$a(0) = r(0),$$

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n} F^{\Delta}(n,k) r(k).$$

Далее при записи композиции $A(x) = R(F(x))$ подразумевается $a(0) = r(0)$.

Полученная формула (2.7) определяет преобразование последовательности с заданной производящей функцией $R(x)$. При этом производящая функция результирующей последовательности будет записана в форме композиции $R(F(x))$.

Пример 9. *Рассмотрим композиции производящих функций вида*

$$A(x) = R\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

1. Пусть $R(x) = e^x$, тогда для композиции $A(x) = e^{\frac{x}{1-x}}$ можно записать

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{k!}.$$

Данная формула генерирует последовательность A000262 в [68].

2. Пусть $R(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$, тогда для композиции $A(x) = R\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ справедливо

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} Fib(k),$$

где $Fib(k)$ — числа Фибоначчи (см. последовательность A001519 в [68]).

3. Пусть $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$, тогда для композиции $A(x) = C\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ можно записать

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} C_k,$$

где C_k – числа Каталана (см. последовательность A002212 в [68]).

Пример 10. *Рассмотрим композицию функций вида $A(x) = R(\exp(x) - 1)$.*

1. Числа Белла имеют экспоненциальную производящую функцию

$$\exp(\exp(x) - 1).$$

Используя композиту производящей функции $(\exp(x)-1)$ *(см. пример 5), равную* $\frac{k!}{n!}\left\{{n \atop k}\right\}$, *и формулу (2.7), получим*

$$a(n)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}.$$

(см. последовательность A000100 в [68]).

2. Рассмотрим композицию производящих функций $A(x)=\sinh(e^x-1)$. *Коэффициенты* $A(x)$ *будут иметь следующее выражение:*

$$a(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{n!}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{((-1)^{k+1}+1)}{2k!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{((-1)^{k+1}+1)}{2}.$$

(см. последовательность A024429 в [68]).

Определение 11. *Пусть дана композиция производящих функций* $A(x)=G(F(x))$. *Тогда произведением двух композит будем называть композиту композиции* $A(x)$ *и обозначать* $A^{\Delta}(n,k)=F^{\Delta}(n,k)\circ R^{\Delta}(n,k)$.

Теорема 13. *Пусть даны две производящие функции* $F(x)=\sum_{n>0}f(n)x^n$ *и* $G(x)=\sum_{n>0}r(n)x^n$ *и их композиты* $F^{\Delta}(n,k)$ *и* $G^{\Delta}(n,k)$, *соответственно. Тогда для произведения композит* $A^{\Delta}(n,k)=F^{\Delta}(n,k)\circ G^{\Delta}(n,k)$ *будет справедливо выражение*

$$A^{\Delta}(n,m)=\sum_{k=m}^{n}F^{\Delta}(n,k)G^{\Delta}(k,m). \tag{2.8}$$

Доказательство. *Поскольку*

$$[A(x)]^m=[G(F(x)]^m=G^m(F(x)),$$

то по правилу композиции и с учетом того, что ненулевые члены $G^{\Delta}(n,m)$ *начинаются с условия* $n\geq m$, *имеем*

$$A^{\Delta}(n,m)=\sum_{k=m}^{n}F^{\Delta}(n,k)G^{\Delta}(k,m).$$

Теорема 14. *Пусть даны производящая функция* $R(x) = \sum_{n\geq 0} r(n)x^n$*, выражение коэффициентов для производящей функции* $R(x)^k$*, обозначенное* $R(n,k)$*; производящая функция* $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$ *и ее композита* $F^{\Delta}(n,k)$*. Тогда для производящей функции* $A(x) = xR(F(x))$ *композита будет иметь следующий вид*

$$A^{\Delta}(n,m) = \begin{cases} r(0)^n, & n = m; \\ \sum\limits_{k=1}^{n-m} F^{\Delta}(n-m,k)R(k,m), & n > m. \end{cases}$$

Доказательство. *Рассмотрим выражение* $B^m(x) = [R(F(x))]^m$*. По теореме о композиции производящих функций (2.7) имеем*

$$B(n,m) = \begin{cases} r(0)^m, & n = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} F^{\Delta}(n,k)R(k,m), & n > 0. \end{cases}$$

Отсюда, применяя Теорему 3, получим искомую формулу.

Далее рассмотрим задачу нахождения композиты взаимной производящей функции.

Определение 12. *Взаимными производящими функциями называются функции, удовлетворяющие условию [28]*

$$A(x)B(x) = 1. \tag{2.9}$$

Задача ставится так: зная композиту $x\,B(x)$, необходимо найти композиту $x\,A(x) = \dfrac{x}{B(x)}$.

Для получения композит взаимных производящих функций докажем следующую теорему о вычислении композиты взаимной производящей функции.

Теорема 15. *Пусть дана производящая функция* $B(x)$*,* $b(0) \neq 0$*, и композита производящей функции* $xB(x)$ *–* $B^{\Delta}(n,m)$*. Тогда композита функции* $xA(x)$ *равна*

$$A^{\Delta}(n,m)=\begin{cases}\dfrac{1}{B^{\Delta}(1,1)^m}, & n=m;\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-m}\binom{m+k-1}{m-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^j\binom{k}{j}}{B^{\Delta}(1,1)^{m+j}}B^{\Delta}(n-m+j,j), & n>m.\end{cases}\tag{2.10}$$

Доказательство. *На основании формулы (2.9) запишем*

$$xA(x)=\frac{x}{b_0+B(x)-b_0}.$$

Тогда для нахождения композиты необходимо найти выражение коэффициентов производящей функции

$$[xA(x)]^k=\left[\frac{x}{b_0+B(x)-b_0}\right]^k.$$

Зная композиту функции $xB(x)$, найдем композиту функции $\frac{1}{b_0}(B(x)-b_0)$. Для этого, используя Теоремы 4 и 5, получим искомую композиту

$$\sum_{j=1}^{k}B^{\Delta}(1,1)^{-j}\,(-1)^{k-j}\binom{k}{j}B^{\Delta}(n+j,j).$$

Тогда коэффициенты функции $F(x)=\left[\frac{1}{B^{\Delta}(1,1)}\frac{1}{1+x}\right]^k$ определяются следующим образом

$$\frac{1}{B^{\Delta}(1,1)^k}\binom{n+k-1}{k-1}(-1)^n.$$

Откуда, на основании теоремы о композиции 14, получим

$$A(n,m)=\begin{cases}1, & m=0;\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}B^{\Delta}(n+j,j)\frac{(-1)^{-j}}{B^{\Delta}(1,1)^{m+j}}\binom{k+m-1}{m-1}, & m>1.\end{cases}$$

Отсюда, применив Теорему 3, получим искомую формулу.

Пример 11. *Найдем композиту для производящей функции* $B(x) = x\,A(x)$, *где* $A(x)$ — *производящая функция для чисел Бернулли*

$$A(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Ее можно представить как композицию функций $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ *и* $e^x - 1$

$$A(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\ln(1 + e^x - 1)}{e^x - 1}.$$

Тогда, зная композиты функций $\ln(1+x)$ — $\dfrac{k!}{n!}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ *и* $e^x - 1$ — $\dfrac{k!}{n!}\left\{ n \atop k \right\}$, *соответственно, и используя Теорему 14, получим искомую композиту*

$$\left(\frac{\ln(1 + e^x - 1)}{e^x - 1}\right)^m = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}\left\{ n \atop k \right\} \frac{m!}{(k+m)!}\begin{bmatrix} k+m \\ m \end{bmatrix} x^n.$$

Откуда

$$B^{\Delta}(n,m) = \frac{m!}{(n-m)!}\sum_{k=0}^{n-m} \frac{k!}{(k+m)!}\left\{ n-m \atop k \right\}\begin{bmatrix} k+m \\ m \end{bmatrix}. \qquad (2.11)$$

2.3. Коэффициенты обратных производящих функций

Далее рассматривается задача нахождения композиты обратной производящей функции и как следствие задача нахождения коэффициентов обратных производящих функций.

Определение 13. *Обратной производящей функцией от производящей функции* $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$, *где* $f(1) \neq 0$, *называется производящая функция* $\overline{F(x)}$, *удовлетворяющая условию [28]*

$$F(\overline{F(x)}) = x. \qquad (2.12)$$

Также обратную производящую функцию обозначают $F^{[-1]}(x)$ или $\overline{F(x)} = RevF$.

В современной литературе задача нахождения коэффициентов обратных производящих функций рассматривается в форме решения функционального уравнения

$$B(x) = xH(B(x)), \tag{2.13}$$

где $B(x)$ и $H(x)$ – производящие функции и $H(0) \neq 0$. Для решения такого уравнения известна формула обращения Лагранжа [30, 31], в которой связаны коэффициенты степеней прямой и обратной производящих функций.

Лемма 1 (Формула обращения Лагранжа)**.** *Пусть дано уравнение*

$$B(x) = xH(B(x)), \tag{2.14}$$

где $H(x)$ *и* $B(x)$ *производящие функции, такие, что* $H(x) = \sum_{n\geq 0} h(n)x^n$ *с* $h(0) \neq 0$ *и* $B(x) = \sum_{n>0} a(n)x^n$*. Тогда*

$$n[x^n]B(x)^k = k[x^{n-k}]H(x)^n, \tag{2.15}$$

где $[x^n]B(x)^k$ *коэффициент при* x^n *в* $B(x)^k$ *и* $[x^{n-k}]H(x)^n$ *коэффициент при* x^{n-k} *в* $H(x)^n$*.*

Ранее предложенные на основе формулы Лагранжа методы [69] применяются лишь для простых производящих функций $H(x)$. Но прямого и простого решения нахождения выражений для коэффициентов обратных производящих функций не было разработано.

В следующей теореме приводится формула о нахождении явной формулы для композиты обратной производящей функции.

Теорема 16. *Пусть задана производящая функция* $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$*, где* $f(1) \neq 0$*, и известна ее композита* $F^{\Delta}(n,k)$*. Тогда композита обратной про-*

изводящей функции $B(x)$ будет иметь вид

$$B^{\Delta}(n,m)=\begin{cases}\dfrac{1}{F^{\Delta}(1,1)^{n}}, & n=m;\\ \dfrac{m}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-m}\binom{n+k-1}{n-1}\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{(-1)^{j}}{F^{\Delta}(1,1)^{n+j}}\binom{k}{j}F^{\Delta}(n-m+j,j), & n>m.\end{cases} \tag{2.16}$$

Доказательство. *Согласно Лемме 1, для решения функционального уравнения $A(x)=xH(A(x))$ справедливо*

$$n[x^{n}]B(x)^{k}=k[x^{n-k}]H(x)^{n}.$$

В левой части уравнения записана композита производящей функции $B(x)$ умноженная на n

$$n[x^{n}]B(x)^{k}=n\,B^{\Delta}(n,k).$$

Пусть

$$(xH(x))^{k}=\sum_{n\geq k}G^{\Delta}(n,k)x^{n},$$

где $G^{\Delta}(n,k)$ композита производящей функции $xH(x)$.

Тогда

$$(H(x))^{k}=\sum_{n\geq k}G^{\Delta}(n,k)x^{n-k}.$$

Если заменить $n-k$ на m, то будет

$$(H(x))^{k}=\sum_{m\geq 0}G^{\Delta}(m+k,k)x^{m}.$$

После подстановки n вместо k и $n-k$ вместо m получим

$$[x^{n-k}]H(x)^{n}=G^{\Delta}(2n-k,n).$$

Откуда справедливо выражение

$$B^{\Delta}(n,k)=\frac{k}{n}G^{\Delta}(2n-k,n). \tag{2.17}$$

Тогда для решения функционального уравнения $B(x) = xH(B(x))$ запишем

$$[B(x)]^k = \sum_{n\geq k} B^{\Delta}(n,k)x^n = \sum_{n\geq k} \frac{k}{n} G^{\Delta}(2n-k,n)x^n.$$

Уравнение для обратных производящих функций (2.12) *можно записать в следующем виде: $B(x)H(B(x)) = x$, где $H(x) = \frac{F(x)}{x}$. Тогда данное уравнение будет соответствовать уравнению* (2.13)

$$B(x) = \frac{x}{H(B(x))} = xR(B(x)),$$

где производящая функция $B(x)$ является взаимной производящей функцией к $H(x)$.

Согласно формуле (2.17) *получим*

$$B^{\Delta}(n,m) = \frac{m}{n} R^{\Delta}(2n-m,n),$$

где $R^{\Delta}(n,m)$ композита взаимной производящей функции к $H(x)$. После применения формулы для композиты взаимной производящей функции (2.10), *получим искомую формулу.*

Следствие 1. *Для производящей функции $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$ с $f(1) = 1$ коэффициенты обратной производящей функции определяются следующей формулой*

$$b(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \binom{n+k-1}{n-1} \sum\limits_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} F^{\Delta}(n+j-1,j), & n > 1. \end{cases} \tag{2.18}$$

Пример 12. *Пусть задана производящая функция $F(x) = x - x^2 - x^3$ и требуется найти композиту обратной производящей функции. Для этого сначала надо найти композиту взаимной производящей функции $R(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.*

Производящую функцию $R(x)$ можно представить в виде композиции двух производящих функций $\frac{1}{1-x}$ и $x + x^2$.

Поскольку композита производящей функции $\frac{1}{1-x}$ *равна*

$$\binom{k}{n-k},$$

то композита производящей функции $xR(x)$ *равна*

$$R^{\Delta}(n,m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ \sum_{k=1}^{n-m} \binom{k}{n-m-k}\binom{k+m-1}{m-1}, & n > m. \end{cases}$$

Тогда композита обратной производящей функции будет

$$B^{\Delta}(n,m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{n-m} \binom{k}{n-m-k}\binom{k+n-1}{n-1}, & n > m. \end{cases}$$

Пример 13. *В данном примере найдено выражение для коэффициентов производящей функции* $B(x) = (2\ln(1+x) - x)^{[-1]}$. *Чтобы найти данное выражение, сначала необходимо вычислить композиту производящей функции* $F(x) = 2\ln(1+x) - x$.

Композита производящей функции $2\ln(1+x)$ *равна*

$$2^k \frac{k!}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Композита производящей функции $(-x)$ *равна*

$$(-1)^k \delta(n,k),$$

где $\delta(n,k)$ *– символ Кронекера.*

Согласно формуле для композиты суммирования двух производящих функций, композита производящей функции $F(x) = 2\ln(1+x) - x$ *равна*

$$F^{\Delta}(n,k) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (k-l)! 2^{k-l} (-1)^l \sum_{i=l}^{n+l-k} \frac{\delta(i,l) \begin{bmatrix} n-i \\ k-l \end{bmatrix}}{(n-i)!}.$$

Поскольку

$$\delta(i,l) = \begin{cases} 1, & l = i; \\ 0, & l \neq i, \end{cases}$$

то

$$F^{\Delta}(n,k)=\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(k-l)!2^{k-l}(-1)^{l}\frac{\left[{n-i \atop k-l}\right]}{(n-i)!}.$$

Тогда применяя (2.16), получим композиту обратной производящей функции

$$\frac{m}{n}\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n+k-1}{n-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sum_{l=0}^{j}\frac{\binom{j}{l}(j-l)!2^{j-l}(-1)^{l+j}\left[{n-m-l+j \atop j-1}\right]}{(n-m-l+j)!}.$$

Откуда коэффициенты для производящей функции $B(x)$ равны

$$b(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{n-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sum_{l=0}^{j}\frac{\binom{j}{l}(j-l)!2^{j-l}(-1)^{l+j}\left[{n-l+j-1 \atop j-1}\right]}{(n-l+j-1)!}.$$

Пример 14. *В данном примере найдена формула для коэффициентов обратной производящей функции к производящей функции $F(x)=2x-\exp(x)+1$. Для этого необходимо найти композиту $F(x)$.*

Композита функции $(1-\exp(x))$ равна

$$(-1)^{k}\,\frac{k!}{n!}\left\{{n \atop k}\right\}.$$

Композита $2x$ равна $2^{n}\delta_{n,k}$. Отсюда, на основании теоремы о композите суммы производящих функций и с учетом, что $\left\{{0 \atop 0}\right\}=1$, композита функции $F(x)$ равна

$$F^{\Delta}(n,k)=\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\,(k-l)!\,(-1)^{k-l}\,2^{l}\sum_{i=l}^{n+l-k}\frac{\delta_{i,l}\,\left\{{n-i \atop k-l}\right\}}{(n-i)!}$$

или

$$F^{\Delta}(n,k)=\sum_{l=0}^{k}\frac{\binom{k}{l}\,(k-l)!\,(-1)^{k-l}\,2^{l}\left\{{n-l \atop k-l}\right\}}{(n-l)!}.$$

Отсюда на основании (2.16)

$$B^{\Delta}(n,m)=\frac{m}{n}\sum_{k=1}^{n-m}\binom{n+k-1}{n-1}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\sum_{l=0}^{j}\frac{\binom{j}{l}\,(j-l)!\,2^{l}\,(-1)^{l}\,\left\{{n-m-l+j \atop j-l}\right\}}{(n-m-l+j)!}.$$

Тогда коэффициенты обратной производящей функции $b(n) = B^{\Delta}(n,1)$ равны

$$b(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+k-1}{n-1} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \sum_{l=0}^{j} \frac{\binom{j}{l}\,(j-l)!\,2^l\,(-1)^l \left\{ {n-l+j-1 \atop j-l} \right\}}{(n-l+j-1)!}.$$

Коэффициенты экспоненциальной производящей функции $n!\,b(n)$ рассмотрены в последовательности A000311 в [68].

2.4. Выводы по второй главе

Многие известные монографии, посвященные производящим функциям, используют коэффициенты степеней производящих функций [27, 30–32, 34]. Однако, коэффициенты степеней производящих функций как самостоятельный объект исследования в известных работах не рассматриваются. Поэтому актуальной является задача исследования коэффициентов степеней производящих функций и их свойств.

1. Предлагаемый подход к определению коэффициентов степеней производящих функций является новым. Он имеет принципиальное отличие и состоит в том, что рассматриваются коэффициенты степеней производящих функций, у которых нулевой член равен 0, что позволяет определить для них операции сложения, умножения, композиции, формулы для взаимных, обратных производящих функций и обеспечивает решение поставленных задач.

2. Отличительной чертой предлагаемого подхода от аналогов, в том числе и от массивов Риордана, является то, что используется только одна функция, а не пара. Еще одно принципиальное отличие заключается в том, что нумерация элементов массива Риордана начинается с элемента $F(0,0)$, в то время как в данном подходе этот начальный элемент будет $F(1,1)$. Это позволяет получить совершенно новые результаты и решить многие задачи, которые невозможно решить, используя массивы Риордана, например, задача нахождения решения итерационного уравнения $A(A(x)) = \exp(x) - 1$ [30].

3. Разработанные методы будут применены не только к классическим ортогональным полиномам, например, полиномы Эрмита, Чебышева, Лаггера, но и к многочисленным обобщениям этих полиномов.

Результаты главы опубликованы в монографии [1] и в работах [2–7, 12].

Глава 3

Нахождение явных формул для полиномов на основе композиции производящих функций

3.1. Определение выражений полиномов на основе композиции производящих функций

Введенный в главе 2 математический аппарат над коэффициентами целых степеней производящих функций является удобным инструментом для решения разнообразных математических задач. Данный аппарат может быть применим для производящих функций полиномов. Как правило, эти производящие функции имеют две переменные и некоторое множество параметров.

Пусть дана производящая функция от двух переменных

$$F(x,t) = 2xt - t^2.$$

Эту функцию можно представить как производящую функцию $\sum_{n>0} a_n t^n$, где $a_1 = 2x$, $a_2 = -1$, а все остальные равны нулю. Тогда, зная композиту производящей функции $at + bt^2$ (см. пример 2.5), получим

$$F(x,t)^k = \sum_{n \geqslant k} F^{\Delta}(n,k,x) t^n,$$

где $F^{\Delta}(n,k,x) = \binom{k}{n-k} 2^{2\,k-n} \, (-1)^{n-k} \, x^{2\,k-n}$. Ниже записаны первые члены этого треугольника

$$
\begin{array}{llllllll}
2\,x \\
-1 & 4\,x^2 \\
0 & -4\,x & 8\,x^3 \\
0 & 1 & -12\,x^2 & 16\,x^4 \\
0 & 0 & 6\,x & -32\,x^3 & 32\,x^5 \\
0 & 0 & -1 & 24\,x^2 & -80\,x^4 & 64\,x^6 \\
0 & 0 & 0 & -8\,x & 80\,x^3 & -192\,x^5 & 128\,x^7
\end{array}
$$

Тогда композиция производящих функций $R(2xt-t^2)$, где $R(t)=\sum_{n\geqslant 0} r(n)t^n$, на основании формулы (2.7), задает семейство полиномов, выражение которых имеет следующий вид:

$$
P_n(x)=\sum_{k=1}^{n} F^{\Delta}(n,k,x)r(k)=\sum_{k=\lceil \frac{n}{2}\rceil}^{n} \binom{k}{n-k} 2^{2\,k-n}\,(-1)^{n-k}\,x^{2\,k-n} r(k). \qquad (3.1)
$$

В этой главе рассмотрено применение данного подхода к получению явных выражений полиномов Чебышева, полиномов Лежандра, полиномов Гегенбауэра, полиномов Абеля, полиномов Бернулли второго рода, обобщенных полиномов Бернулли, полиномов Эйлера, обобщенных полиномов Лагерра, обобщенных полиномов Эрмита, обобщенных полиномов Хумберта, полиномов Стирлинга, полиномов Петерса, полиномов Наруми, полиномов Лерча и полиномов Махлера. Также получено обобщение полиномов Мотта.

3.2. Полиномы Чебышева

Полиномы Чебышева [70] представляют собой последовательность ортогональных многочленов, которые связаны с формулой Муавра, и которая может быть определена рекурсивно. Обычно различают полиномы Чебышева первого рода, которые обозначаются T_n и полиномы Чебышева второго рода, которые обозначаются U_n.

Полиномы Чебышева играют фундаментальную роль в использовании численных методов. Широкое применение они получили во многих областях численного анализа: равномерное приближение, приближение наименьшими квадратами, численное решение обыкновенных и в частичных дифференциальных уравнений (так называемые спектральные или псевдо-спектральные методы) и т.д. [71].

Полиномы Чебышева определяются следующими рекуррентными соотношениями:

- для полиномов Чебышева первого рода

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x$$

$$T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Несколько первых полиномов Чебышева первого рода

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

- для полиномов Чебышева второго рода

$$U_0(x) = 1, \qquad U_1(x) = 2x$$

$$U_{n+1} = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

Несколько первых полиномов Чебышева второго рода

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$

Также полиномы Чебышева определяются следующими тригонометрическим тождествами

$$T_n\left(\cos(\theta)\right) = \cos\left(n\theta\right),$$
$$U_n\left(\cos(\theta)\right) = \frac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin\theta}.$$

Известны следующие явные представления полиномов Чебышева первого и второго родов, соответственно

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^k}{n-k}\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}, \tag{3.2}$$

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}. \tag{3.3}$$

Производящая функция для полиномов Чебышева первого рода имеет вид:

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n\geqslant 0} T_n(x)t^n.$$

Известно, что ее можно представить в таком виде:

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-F(x,t)}\right)\right]'.$$

Откуда, согласно формуле (3.1), выражение для полиномов $T_n(x)$ будет иметь следующий вид:

$$T_n(x) = n\sum_{k=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}^{n}\binom{k}{n-k}\frac{2^{2k-n-1}}{k}(-1)^{n-k}\,x^{2\,k-n}.$$

Производящая функция для полиномов Чебышева второго рода имеет следующий вид:

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{n\geqslant 0} U_n(x) t^n.$$

Выражение для композиции производящих функций $\frac{1}{1-F(x,t)}$, где $F(x,t) = 2xt - t^2$ определяет U_n

$$U_n(x) = \sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \binom{k}{n-k} 2^{2\,k-n} \, (-1)^{n-k} \, x^{2\,k-n}.$$

После преобразования пределов суммирования получаются формулы (3.2) и (3.3) для полиномов Чебышева первого и второго родов, соответственно.

3.3. Полиномы Лежандра

Полиномы Лежандра $P_n(x)$ являются решениями дифференциального уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)\right) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Полиномы Лежандра важны в задачах со сферическими координатами. Из-за свойства ортогональности они также полезны в области численного анализа.

Полиномы Лежандра определяются следующим рекуррентным соотношением:

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x,$$

$$(n+1)P_n(x) = (2n+1)xP_{n-1}(x) - nP_{n-2}(x).$$

Несколько первых полиномов Лежандра

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$
$$P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$$

Полиномы Лежандра являются частным случаем полиномов Гегенбауэра с параметром $\alpha = \frac{1}{2}$ и определяются таким гипергеометрическим рядом как [72]

$$P_n(x) =_2 F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1}{2}(1-x)\right).$$

Также полиномы Лежандра определяются формулой Родрига

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Известно явное представление полиномов Лежандра вида

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}x^{n-2k}. \tag{3.4}$$

Производящая функция для полиномов Лежандра имеет следующее выражение

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n\geqslant 0} P_n(x)t^n.$$

Для получения выражения $P_n(x)$ представим производящую функцию в виде композиции производящих функций

$$\frac{1}{\sqrt{1-F(x,t)}}.$$

Для производящей функции $R(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ коэффициенты имеют выражение

$$r(n) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

Тогда, на основании формулы (3.1), получим

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=\lceil \frac{n}{2}\rceil}^{n}\binom{k}{n-k}\binom{2\,k}{k}(-1)^{n-k}\,x^{2\,k-n}.$$

После преобразования пределов суммирования получается формула (3.4).

3.4. Полиномы Гегенбауэра

Полиномы Гегенбауэра $C_n^{(\alpha)}$, также известные как ультрасферические полиномы, являются решениями дифференциального уравнения Гегенбауэра для целых n

$$(1-x^2)y'' - (2\alpha+1)xy' + n(n+2\alpha)y = 0.$$

Они являются обобщением полиномов Лежандра и Чебышева.

Полиномы Гегенбауэра определяются следующим рекуррентным соотношением для $n \geq 2$:

$$C_0^{(\alpha)}(x) = 1, \qquad C_1^{(\alpha)}(x) = 2\alpha x,$$

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n}\left(2x(n+\alpha-1)C_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n+2\alpha-2)C_{n-2}^{(\alpha)}(x)\right).$$

Несколько первых полиномов Гегенбауэра

$$C_0^{(\alpha)}(x) = 1$$

$$C_1^{(\alpha)}(x) = 2\alpha x$$

$$C_2^{(\alpha)}(x) = -\alpha + 2\alpha(1+\alpha)x^2$$

$$C_3^{(\alpha)}(x) = -2\alpha(1+\alpha)x + \frac{4}{3}\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)x^3$$

Полиномы Гегенбауэра являются частным случаем многочленов Якоби и определяются следующим гипергеометрическим рядом [72]

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(2\alpha)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(-n, 2\alpha+n; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1-x)\right).$$

Известно следующее явное представление полиномов Гегенбауэра

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k(\alpha)_{n-k}}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}. \tag{3.5}$$

Производящая функция для полиномов Гегенбауэра имеет следующее выражение [73]

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-\alpha} = \sum C_n^{(\alpha)} t^n.$$

Для получения выражения $C_n^{(\alpha)}(x)$ представим производящую функцию в виде композиции производящих функций

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-\alpha}=e^{\alpha\ln\left(\frac{1}{1-f(x,t)}\right)}.$$

Композита функции $h(x)=\ln\left(\frac{1}{1-f(x,t)}\right)$, по правилу произведения композит (2.8), равна

$$H^{\Delta}(n,m)=m!\;(-1)^{n-m}\sum_{k=m}^{n}\frac{\left[{k \atop m}\right]\binom{k}{n-k}2^{2\,k-n}x^{2\,k-n}}{k!}.$$

Откуда, согласно (2.7), получим искомое выражение

$$C_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{m=0}^{n}\alpha^m\;(-1)^{n-m}\sum_{k=max\left(m,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)}^{n}\frac{2^{2k-n}}{k!}\left[{k \atop m}\right]\binom{k}{n-k}\;x^{2\,k-n}.$$

Далее рассмотрим другой вариант композиции производящих функций

$$\left[\frac{1}{1-f(t,x)}\right]^{\alpha}.$$

Известно, что для $\left[\frac{1}{1-t}\right]^{\alpha}$ коэффициенты имеют выражение

$$\binom{n+\alpha-1}{n}.$$

Откуда по формуле композиции обыкновенных производящих функций (3.1) получается следующая формула

$$C_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}^{n}\binom{k}{n-k}\binom{k+\alpha-1}{k}\;(-1)^{n-k}\;(2x)^{2\,k-n}.$$

После небольшого преобразования получается формула (3.5).

3.5. Полиномы Абеля

Полиномы Абеля определяются следующей производящей функцией [53]

$$e^{\frac{x}{a}W(at)}=\sum_{n\geqslant 0}A_n(x,a)\frac{t^n}{n!},$$

где $W(t)$ функция Ламберта.

Полиномы Абеля образуют последовательность полиномов биномиального типа.

Композита для производящей функции $W(t)$ имеет выражение

$$W^{\Delta}(n,k) = \frac{k\, n^{n-k-1}(-1)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Тогда, на основании формулы композиции производящих функций, получается известное выражение для полиномов Абеля [53]

$$A_n(x,a) = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k}\, k\, n^{n-k-1}\, (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k =$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (-na)^{n-k-1} = x(x-na)^{n-1}.$$

3.6. Полиномы Бернулли второго рода

Полиномы Бернулли второго рода играют важную роль в различных методах обобщения и приближения формул, которые полезны как в аналитической теории чисел, так и в классическом численном анализе.

S. Roman [53] определяет полиномы Бернулли второго рода с помощью чисел Стирлинга первого рода

$$b_n(x) = b_n(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k. \tag{3.6}$$

Несколько первых полиномов Бернулли второго рода

$$b_0(x) = 1$$

$$b_1(x) = \frac{1}{2}\,(2x+1)$$

$$b_2(x) = \frac{1}{6}\left(6x^2-1\right)$$

$$b_3(x) = \frac{1}{4}\left(4x^3-6x^2+1\right)$$

$$b_4(x) = \frac{1}{30}\left(30x^4 - 120x^3 + 120x^2 - 19\right)$$

Производящая функция для полиномов Бернулли второго рода имеет вид [53]

$$\frac{t(t+1)^x}{\ln(t+1)} = \sum_{n\geqslant 0} b_n(x)t^n.$$

Рассматривая производящую функцию $\frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{e^{\ln(t+1)}-1}{\ln(1+t)}$ как композицию $g(\ln(1+t))$, где $g(t) = \frac{e^t-1}{t}$, получим выражение для ее коэффициентов

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\left[{n \atop k}\right].$$

Тогда выражение для полиномов Бернулли будет иметь вид

$$b_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k+1}\left[{n-i \atop k}\right] \sum_{k=0}^{i} \left[{i \atop k}\right] x^k$$

или

$$b_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k+1}\left[{n-i \atop k}\right] \binom{x}{i}.$$

Также производящую функцию можно преобразовать следующим образом $\frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{1}{1+\frac{\ln(1+t)}{t}-1}$. Композита функции $\frac{\ln(1+t)}{t} - 1$ имеет выражение

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{j!}{(n+j)!}\left[{n+j \atop j}\right]\binom{k}{j}(-1)^{k-j}.$$

Откуда, выражение коэффициентов искомой функции будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j\, j!\,\binom{k}{j}\,\left[{n+j \atop j}\right]}{(n+j)!}.$$

Тогда выражение для полиномов Бернулли второго рода запишется так

$$b_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!}\left(\sum_{k=0}^{i}\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j\, j!\,\left[{j+i \atop j}\right]\,\binom{k}{j}}{(j+i)!}\right) \sum_{k=0}^{n-i} \left[{n-i \atop k}\right] x^k.$$

Полученные формулы являются новыми, но они сложнее, чем известное явное представление (3.6) полиномов Бернулли второго рода.

3.7. Обобщенные полиномы Бернулли

Существует достаточно много обобщений полиномов Бернулли, в данном разделе исследуются обобщенные полиномы Бернулли, описанные в книге L. Gatteschi [74].

Производящая функция для данного обобщения полиномов Бернулли имеет вид

$$e^{xt}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha}=\sum_{n\geqslant 0}B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!},\, |t|<2\pi, \tag{3.7}$$

где α любое действительное или комплексное число.

H.M. Srivastava и P.G. Todorov [57] нашли явную формулу для обобщенных полиномов Бернулли, в основе которой лежит гипергеометрическая функция

$$B_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{\alpha+k-1}{k}\frac{k!}{(2k)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}j^{2k}(x+j)^{n-k}\times$$
$$\times F[k-n,k-\alpha;2k+1;j/(x+j)].$$

Также известна связь обобщенных полиномов Бернулли с обобщенными числами Бернулли

$$B_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_n^{(\alpha)}x^{n-k}.$$

При подстановке $x=0$ в (3.7), получается производящая функция для обобщенных чисел Бернулли

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha}=\sum_{n\geqslant 0}B_n^{(\alpha)}\frac{t^n}{n!}. \tag{3.8}$$

Чтобы найти явное выражение для обобщенных полиномов Бернулли, представим производящую функцию (3.8) в следующем виде

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha}=e^{-\alpha\ln\left(1+\frac{e^t-1}{t}-1\right)}.$$

Композита производящей функции $\left(\frac{e^t-1}{t}-1\right)$ равна

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{j!\ (-1)^{k+j}\ \binom{k}{j}\ \left\{ {n+j \atop j} \right\}}{(n+j)!}.$$

Тогда композита производящей функции $-\alpha \ln\left(1+\frac{e^t-1}{t}-1\right)$ равна

$$\alpha^m\ (-1)^m \sum_{k=m}^{n} \frac{m!}{k!} \left[{k \atop m} \right] \sum_{j=0}^{k} \frac{j!\,(-1)^{k+j}}{(n+j)!} \binom{k}{j} \left\{ {n+j \atop j} \right\}.$$

Откуда коэффициенты производящей функции $\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^\alpha$ будут иметь следующее выражение:

$$T_n(\alpha) = \sum_{m=0}^{n} \alpha^m\ (-1)^m \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k!} \left[{k \atop m} \right] \sum_{j=0}^{k} \frac{j!\,(-1)^{k+j}}{(n+j)!} \binom{k}{j} \left\{ {n+j \atop j} \right\}.$$

С другой стороны можно записать

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^\alpha = \left[\frac{1}{1+\frac{e^t-1}{t}-1}\right]^\alpha = g(h(t)),$$

где $g(t) = \left[\frac{1}{1+t}\right]^\alpha$ и $h(x) = \frac{e^t-1}{t} - 1$.

Далее на основании формулы композиции можно записать коэффициенты композиции функций $g(h(t))$

$$T_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{k+\alpha-1}{\alpha-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{j!\ (-1)^{k+j}\ \binom{k}{j}\ \left\{ {n+j \atop j} \right\}}{(n+j)!}.$$

Откуда новая явная формула для обобщенных полиномов Бернулли будет следующей

$$B_n^{(\alpha)}(x) = n! \sum_{i=0}^{n} T_i(\alpha) \frac{x^{n-i}}{(n-i)!}.$$

Например, при $\alpha = 2$ треугольник коэффициентов при x^n записан в последовательности 197419 в [68].

3.7.1. Тождества на основе производящей функции полиномов Бернулли

В данном подразделе получены новые тождества для полиномов Бернулли и доказано еще одним способом тождество Теппера [75].

Производящая функция полиномов Бернулли (случай, когда $\alpha = 1$) имеет вид

$$A(t,x) = \frac{t\,e^{x\,t}}{e^t - 1} = \sum_{n\geqslant 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Рассмотрим взаимную производящую функцию

$$V(t,x) = \frac{t}{A(x)} = (e^t - 1)e^{-x\,t}.$$

Откуда выражение коэффициентов для k-ой степени производящей функции $V(t,x)^k = \sum\limits_{n\geqslant k} v(n,k)t^n$ равно

$$(e^{-xt+t} - e^{-xt})^k = \sum_{n\geqslant k}\left[\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(j - k\,x)^n\right]t^n.$$

С другой стороны оно равно

$$\left[(e^t - 1)e^{-x\,t}\right]^k = \sum_{n\geqslant k}\left[\sum_{i=k}^{n}\left\{ {i \atop k} \right\}\frac{k!}{i!}\frac{(-kx)^{n-i}}{(n-i)!}\right]t^n.$$

Приравнивая коэффициенты получим тождество:

$$\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(j - k\,x)^n = \sum_{i=k}^{n}\left\{ {i \atop k} \right\}\binom{n}{i}(-kx)^{n-i}.$$

С учетом того, что $F^{\Delta}(n,n) = 1$, получится тождество Теппера [75]

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}(j + x)^n = n!.$$

Продифференцировав данное выражение по x, получим тождество

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}(j + x)^{n-1} = 0.$$

Проинтегрировав исходное выражение по x, получим тождество

$$\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}(j+x)^{n+k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{n+k}{j}\left\{{n+k-j \atop n}\right\}x^j.$$

Используя теорему обращения Лагранжа и теорему о композите обратной функции получим следующее тождество

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2\binom{2\,n}{k+1}B_k(x)\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}(j-n\,x)^{2\,n-k-1}=0,$$

где $n>1$.

3.8. Полиномы Эйлера

S. Roman [53] определяет обобщенные полиномы Эйлера через следующую производящую функцию

$$e^{xt}\left(\frac{2}{1+e^t}\right)^{\alpha}=\sum_{n\geqslant 0}E_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}.$$

В данном разделе показывается применение композиты для классических полиномов Эйлера $E_n(x)=E_n^{(1)}(x)$. Свойства полиномов Эйлера очень схожи и связаны с полиномами Бернулли

$$E_{n-1}(x)=\frac{2^n}{n}\left(B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)-B_n\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Несколько первых полиномов Эйлера

$$E_0(x)=1$$

$$E_1(x)=x-\frac{1}{2}$$

$$E_2(x)=x^2-x$$

$$E_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$$

$$E_4(x)=x^4-2x^3+x$$

$$E_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Также известна [53] формула Ньютона для полиномов Эйлера

$$E_n(x) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{-1}{j}\frac{1}{2^j}(k)_j \left\{ n \atop k \right\} (x)_{k-j}, \tag{3.9}$$

где $(k)_j$ убывающий факториал.

Далее получим явную формулу для полиномов Эйлера с использованием понятия композиты.

Производящая функция для полиномов Эйлера имеет следующий вид

$$\frac{2e^{xt}}{1+e^t} = \sum_{n\geqslant 0} E_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Представим данную производящую функцию как произведение двух производящих функций

$$\frac{2e^{xt}}{1+e^t} = e^{xt}\frac{1}{1+\frac{1}{2}(e^t-1)}.$$

Производящую функцию $\frac{1}{1+\frac{1}{2}(e^t-1)}$ можно представить как композицию функций $f(g(t))$, где $f(t) = \frac{1}{1+t}$, а $g(t) = \frac{1}{2}(e^t-1)$. Тогда выражение коэффициентов для производящей функции

$$f(g(t)) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}(e^t-1)}$$

будет иметь следующий вид

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k k!}{2^k}\left\{ n \atop k \right\}.$$

Следуя правилу произведения экспоненциальных производящих функций, получим выражение коэффициентов для искомой производящей функции

$$E_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\sum_{k=0}^{n-i}\frac{(-1)^k\, k!}{2^k}\left\{ n-i \atop k \right\}.$$

Полученная формула имеет очень схожий вид с известной формулой (3.9), так как она тоже включает в себя числа Стирлинга второго рода.

3.9. Обобщенные полиномы Лагерра

Обобщенные полиномы Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ являются решениями следующего дифференциального уравнения

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0.$$

Эквивалентные полиномы были исследованы N.J. Sonine [76], поэтому наряду с обобщенными полиномами Лагерра их называют полиномы Сонина или полиномы Сонина–Лагерра. При $\alpha = 0$ получаются классические полиномы, введенные Лагерром

$$L_n^{(\alpha)}(x) = L_n(x).$$

Полиномы Лагерра имеют важное значение в квантовой механике, в радиальной части решения уравнения Шредингера для одноэлектронного атома.

Обобщенные полиномы Лаггера определяются следующим рекуррентным соотношением:

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \qquad L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1$$

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (2n + \alpha + 1 - x)L_n^{(\alpha)}(x) + (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0.$$

Несколько первых обобщенных полиномов Лагерра

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$$

$$L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1$$

$$L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{x^2}{2} - (\alpha + 2)x + \frac{(\alpha + 2)(\alpha + 1)}{2}$$

$$L_3^{(\alpha)}(x) = \frac{-x^3}{6} + \frac{(\alpha + 3)x^2}{2} - \frac{(\alpha + 2)(\alpha + 3)x}{2} + \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}{6}$$

Также обобщенные полиномы Лаггера определяются формулой Родрига

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha}).$$

Для обобщенных полиномов Лагерра справедливо выражение, которое не содержит n в дифференцируемом выражении [77]

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} x^{-(n+\alpha+1)} e^x \left(x^2 \frac{d}{dx} \right)^n (x^{\alpha+1} e^{-x}).$$

Известно [16] следующее явное представление обобщенных полиномов Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!}. \tag{3.10}$$

Производящая функция для обобщенных полиномов Лагерра имеет следующее выражение [16]

$$(1-t)^{-\alpha-1} e^{\frac{xt}{t-1}} = \sum_{n \geqslant 0} L_n^{(\alpha)}(x).$$

Далее получим явную формулу для полиномов Лагерра.

Выражение коэффициентов для производящей функции $(1-t)^{-\alpha-1}$ имеет вид

$$L_1(n, \alpha) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (\alpha+1)^k \ (-1)^{n-k} \ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

С другой стороны для $(1-t)^{-\alpha-1}$ можно записать

$$L_1(n, \alpha) = \binom{n+\alpha}{n}.$$

Тогда выражение коэффициентов для производящей функции $e^{\frac{xt}{t-1}}$ определяется

$$L_2(n, x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n-1}{k-1} x^k, & n > 0; \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Откуда получим явную формулу для обобщенных полиномов Лагерра будет равна

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^{n} L_1(i, \alpha) L_2(n-i, x). \tag{3.11}$$

Полученная формула сложнее, чем известное явное представление (3.10) обобщенных полиномов Лагерра.

3.10. Обобщенные полиномы Эрмита

В этом разделе рассматриваются некоторые обобщения полиномов Эрмита.

Обобщенные полиномы Эрмита играют важную роль в таких областях, как квантовая механика, оптические системы, кинетическая теория газов, теория колебаний и другие области [78–80].

Существует огромное количество исследований, связанных с полиномами Эрмита, например, G. Dattoli [81], S. Khan [82, 83] исследовали формулы суммирования полиномов Эрмита; F. Brafman [84], H.W. Gould и A.T. Hopper [85], M. Lahiri [86], G. Dattoli [87] исследовали различные обобщения полиномов Эрмита.

Обобщенные Голдом (H.W. Gould) и Хоппером (A.T. Hopper) полиномы Эрмита определяются следующей производящей функцией

$$\sum_{n\geq 0} g_n^m(x,h)\frac{t^n}{n!} = \exp(xt + ht^m), \tag{3.12}$$

где m целое число.

Далее найдем явное представление для обобщенных полиномов Эрмита. Композита производящей функции

$$F(x,m,h,t) = (x\,t + h\,t^m)$$

находится как коэффициенты при t^n в $F^k(x,m,h,t)$, где $m \geq 1$ целое число, а остальные параметры не ограничены условиями.

С учетом формулы бинома Ньютона, получим

$$F^k(x,m,h,t) = t^k(x + h\,t^{m-1})^k = t^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j}\, h^j t^{j\,(m-1)}.$$

После подстановки $n = j\,(m-1) + k$, выражение композиты для $F(x,m,h,t)$

принимает вид

$$F^{\Delta}(n,k,x,m,h) = \begin{cases} \binom{k}{\frac{n-k}{m-1}} x^{k-\frac{n-k}{m-1}} h^{\frac{n-k}{m-1}}, & \frac{n-k}{m-1} \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{3.13}$$

где $n \geq k$.

Ниже в треугольной форме представлены несколько первых элементов композиты для случая, когда $m = 3$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & x & & & & \\ & & & 0 & & x^2 & & & \\ & & h & & 0 & & x^3 & & \\ & 0 & & 2\,h\,x & & 0 & & x^4 & \\ 0 & & 0 & & 3\,h\,x^2 & & 0 & & x^5 \end{array}$$

Для случая $m = 1$, композита будет

$$F^{\Delta}(n,k,x,1,h) = \binom{k}{j} \delta_{n,k} x^{k-j} h^j,$$

где $\delta_{n,k}$ символ Кронекера,

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & n = k; \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Тогда, согласно (12), получим явное выражение для обобщенных Голдом и Хоппером полиномов Эрмита

$$g_n^m(x,h) = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} F^{\Delta}(n,k,x,m,h).$$

После простых манипуляций данная формула примет известное явное представление [85]

$$g_n^m(x,h) = n! \sum_{r=0}^{[\frac{n}{m}]} \frac{x^{n-mr} h^r}{r!(n-mr)!}. \tag{3.14}$$

Также Голд и Хоппер ввели еще одно обобщение полиномов Эрмита с помощью следующей производящей функции

$$\sum_{n\geq 0} H_n^r(x,a,p)\frac{t^n}{n!} = \left(1-\frac{t}{x}\right)^a \exp\left(p\ \left(x^r-(x-t)^r\right)\right). \tag{3.15}$$

Для получения явного выражения $H_n^r(x,a,p)$, представим производящую функцию в виде произведения двух производящих функций

$$\left(1-\frac{t}{x}\right)^a$$

и

$$\exp\left(p\ \left(x^r-(x-t)^r\right)\right).$$

Коэффициенты функции $(x-t)^r$ имеют следующий вид

$$(-1)^n\ \binom{r}{n}\, x^{r-n}.$$

Тогда композита производящей функции $p\ (x^r-(x-t)^r)$ будет равна

$$p^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\ (-1)^{n+j}\ \binom{j\,r}{n}\, x^{kr-n}.$$

С использованием Теоремы 12, выражение для коэффициентов производящей функции

$$\exp\left(p\ \left(x^r-(x-t)^r\right)\right)$$

примет вид

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{p^k\ \left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\ (-1)^{n+j}\ \binom{j\,r}{n}\right)\ x^{k\,r-n}}{k!}.$$

Коэффициенты производящей функции

$$\left(1-\frac{t}{x}\right)^a$$

определяются следующим выражением

$$\binom{a}{n}\ (-1)^n\, x^{-n}.$$

Откуда, после перемножения обоих приведенных выше выражений, получим формулу для обобщенных полиномов Эрмита

$$H_n^r(x,a,p) = n!\sum_{i=0}^{n}\binom{a}{n-i}\sum_{k=0}^{i}p^k\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{n+j}\binom{jr}{i}}{(k-j)!j!}x^{kr-n} \tag{3.16}$$

или после простых манипуляций данная формула примет известное явное представление [85]

$$H_n^r(x,a,p) = (-1)^n n!\sum_{k=0}^{n}p^k\frac{x^{r\,k-n}}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{a+rj}{n}. \tag{3.17}$$

Далее рассматривается обобщение полиномов Эрмита для многомерного случая, которое было введено G. Dattoli в [87].

Многомерные обобщенные полиномы Эрмита задаются следующей производящей функцией

$$\exp(2xt - t^2 + 2yt^m - t^{2m}) = \sum_{n\geq 0} {}^{(m)}H_n(x,y)\frac{t^n}{n!}, \tag{3.18}$$

или через классические полиномы Эрмита

$${}^{(m)}H_n(x,y) = n!\sum_{n=0}^{[n/m]}\frac{H_{n-mr}(x)H_r(y)}{(n-mr)!r!}. \tag{3.19}$$

С использованием понятия композиты ниже будет получена оригинальная явная формула для многомерных обобщенных полиномов Эрмита.

Теорема 17. *Для многомерных обобщенных полиномов Эрмита явная формула принимает следующий вид*

$$\begin{gathered}{}^{(m)}H_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}\Big(F^{\Delta}(n,k,2x,2,-1)G^{\Delta}(n,k,y,m)+ \\ +\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{i=j}^{n-k+j}F^{\Delta}(i,j,2x,2,-1)G^{\Delta}(n-i,k-j,y,m)\Bigg),\end{gathered} \tag{3.20}$$

где

$$G^{\Delta}(n,k,y,m) = \begin{cases}\binom{k}{\frac{n-km}{m}}(-1)^{\frac{n-km}{m}}(2y)^{2k-\frac{n}{m}}, & \frac{n-mk}{m}\in\mathbb{N}, \\ 0, & \textit{иначе}.\end{cases}$$

$$F^{\Delta}(n,k,2x,2,-1) = \binom{k}{n-k}(2x)^{2k-n}(-1)^{n-k}.$$

Доказательство. *Рассмотрим производящую функцию* (3.18). *Используя формулу бинома Ньютона для степеней производящей функции*

$$G(y,m,t) = 2yt^m - t^{2m}$$

получим

$$G^k(y,m,t) = t^{mk}(2y - t^m)^k = t^{mk}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(2y)^{k-j}(-1)^j t^{jm}.$$

После подстановки $n = (k+j)m$, *композита производящей функции* $G(y,m,t)$ *примет вид*

$$G^{\Delta}(n,k,y,m) = \begin{cases} \binom{k}{\frac{n-km}{m}}(-1)^{\frac{n-km}{m}}(2y)^{2k-\frac{n}{m}}, & \frac{n-mk}{m} \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Согласно (3.13), *композита производящей функции* $F(x,t) = 2xt - t^2$ *равна*

$$F^{\Delta}(n,k,2x,2,-1) = \binom{k}{n-k}(2x)^{2k-n}(-1)^{n-k}.$$

Тогда, согласно Теореме 11 и (2.7), *явная формула для многомерных обобщенных полиномов Эрмита примет следующий вид*

$$ {}^{(m)}H_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}\left(F^{\Delta}(n,k,2x,2,-1)G^{\Delta}(n,k,y,m) + \right. $$
$$ \left. + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{i=j}^{n-k+j}F^{\Delta}(i,j,2x,2,-1)G^{\Delta}(n-i,k-j,y,m)\right), \quad (3.21)$$

где $n > 0$. *Что и требовалось доказать.*

3.11. Обобщенные полиномы Хумберта

В данном разделе применяется понятие композиты для получения явных формул для обобщенных полиномов Хумберта. В 1965 году H.W. Gould [88] определил обобщенные полиномы Хумберта $P_n(m,x,y,p,C)$ с помощью следующей производящей функции

$$(C-mxt+yt^m)^p=\sum_{n\geq 0}P_n(m,x,y,p,C)t^n, \qquad (3.22)$$

где $m\geq 1$ целое число, а остальные параметры не ограничены.

Изменяя параметры в формуле (3.22), соответствующим путем, можно получить производящие функции для многих полиномов: полиномов Гегенбауэра, полиномов Лежандра, полиномов Хумберта и других.

Для получения явной формулы, представим производящую функцию (3.22) в следующем виде

$$(C-mxt+yt^m)^p=C^p\left(1-\frac{1}{C}(mxt-yt^m)\right)^p.$$

Композита для производящей функции $\dfrac{1}{C}(mxt-yt^m)$ равна

$$F^{\Delta}(n,k,x,m,h,C)=\frac{1}{C^k}\binom{k}{\frac{n-k}{m-1}}(mx)^{k-\frac{n-k}{m-1}}(-y)^{\frac{n-k}{m-1}},$$

где $\frac{n-k}{m-1}\in\mathbb{N}$ и $n\geq k$.

Коэффициенты производящей функции

$$(1-x)^p$$

определяются следующим выражением

$$\binom{p}{n}(-1)^n.$$

Отсюда,согласно формуле композиции производящих функций и при подстановке $j=\dfrac{n-k}{m-1}$, получим

$$P_n(m,x,y,p,C)=\sum_{j=0}^{[\frac{n}{m}]}\binom{p}{n-(m-1)j}\frac{(-mx)^{n-mj}y^j}{C^{n-(m-1)j-p}}\binom{n-(m-1)j}{j}$$

или, если сделать несколько преобразований, получим явное представление, найденное H.W. Gould [88]

$$P_n(m,x,y,p,C)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{m}]}\binom{p}{k}\binom{p-k}{n-mk}C^{p-n+(m-1)k}y^k(-mx)^{n-mk}. \qquad (3.23)$$

Если рассматривать производящую функцию (3.22) как следующую композицию производящих функций

$$(1-mxt+yt^m)^p=C^p\exp\left(p\ln\left(1+\frac{1}{C}h(x,m,y,t)\right)\right),$$

где $h(x,m,t)=-mxt+yt^m$, то получим еще одну явную формулу для обобщенных полиномов Хумберта.

Композита для $\dfrac{1}{C}h(x,m,y,t)$ равна

$$\begin{cases}\frac{1}{C^k}\binom{k}{\frac{n-k}{m-1}}(-mx)^{k-\frac{n-k}{m-1}}y^{\frac{n-k}{m-1}}, & \frac{n-k}{m-1}\in\mathbb{N};\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Согласно [27], следующее тождество имеет место

$$\sum_{n\geq k}\left[{n \atop k}\right]\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{k!}\ln^k(1+t).$$

Тогда композита $\ln(1+t)$ равна

$$\frac{k!}{n!}\left[{n \atop k}\right]. \qquad (3.24)$$

Используя формулу для композиты композиции производящих функций и подстановки $i=\frac{n-j}{m-1}$, получим композиту для производящей функции $p\ln\left(1+\frac{1}{C}h(x,m,,yt)\right)$

$$p^k\sum_{i=0}^{[\frac{n-k}{m-1}]}\frac{y^i(-mx)^{n-im}k!}{C^{n-i(m-1)}(n-i(m-1))!}\binom{n-i(m-1)}{i}\left[{n-i(m-1) \atop k}\right].$$

Откуда следует, что новая явная формула для обобщенных полиномов Хумберта будет равна

$$P_n(m,x,y,p,C) = \sum_{k=0}^{n} (p)^k \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{m-1}\right]} \frac{y^i(-mx)^{n-im}}{C^{n-i(m-1)-p}(n-i(m-1))!} \times \\ \times \binom{n-i(m-1)}{i} \begin{bmatrix} n-i(m-1) \\ k \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

3.12. Полиномы Стирлинга

Полиномы Стирлинга определяются следующей производящей функцией [53]

$$\sum_{n\geqslant 0} S_n(x)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{1-e^{-t}}\right)^{x+1}.$$

Несколько первых полиномов Стирлинга

$$S_0(x) = 1$$

$$S_1(x) = \frac{1}{2}(x+1)$$

$$S_2(x) = \frac{1}{12}(3x+2)(x+1)$$

$$S_3(x) = \frac{1}{8}x(x+1)^2$$

Также известна [53] связь полиномов Стирлинга с числами Стирлинга

- если $m \geq n$, то
$$S_n(m) = \frac{(-1)^n}{\binom{m}{n}} \begin{bmatrix} m+1 \\ m-n+1 \end{bmatrix},$$
где $\left[{m+1 \atop m-n+1}\right]$ числа Стирлинга первого рода;

- если m отрицательное, то
$$S_n(m) = \frac{(-1)^n n!}{(n-m-1)!} \left\{ {n-m-1 \atop -m-1} \right\},$$
где $\left\{{n-m-1 \atop -m-1}\right\}$ числа Стирлинга второго рода.

Однако, явных представлений полиномов Стирлинга не известно. Далее получим оригинальные явные формулы для полиномов Стирлинга.

Теорема 18. *Пусть дана производящая функция для полиномов Стирлинга*

$$\sum_{n\geqslant 0} S_n(x)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{1-e^{-t}}\right)^{x+1}, \tag{3.26}$$

где $S_n(x)$ полиномы Стирлинга. Тогда для $S_n(x)$ справедливы следующие формулы

$$S_n(x) = \sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{k=m}^{n}\frac{n!}{k!}\left[{k \atop m}\right]\sum_{j=0}^{k}\frac{j!(-1)^{k+j+n+m}}{(n+j)!}\binom{k}{j}\left\{{n+j \atop j}\right\}\right)(x+1)^m \tag{3.27}$$

и

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{k+x}{k}\sum_{j=0}^{k}\frac{j!(-1)^{n+j}}{(n+j)!}\binom{k}{j}\left\{{n+j \atop j}\right\}, \tag{3.28}$$

где $\left[{k \atop m}\right]$ *и* $\left\{{n+j \atop j}\right\}$ *числа Стирлинга первого и второго родов, соответственно.*

Доказательство. *Чтобы найти явную формулу для полиномов Стирлинга, представим производящую функцию (3.26) в виде композиции производящих функций*

$$\left(\frac{t}{1-e^{-t}}\right)^{x+1} = e^{-(x+1)\ln\left(1+\frac{e^{-t}-1}{-t}-1\right)}.$$

Композита производящей функции $\frac{e^{-t}-1}{-t}-1$ *равна*

$$(-1)^n\sum_{j=0}^{k}\frac{j!\;(-1)^{k+j}\;\binom{k}{j}\;\left\{{n+j \atop j}\right\}}{(n+j)!}.$$

Композита функции $-(x+1)\ln\left(1+\frac{e^{-t}-1}{-t}-1\right)$ *по правилу произведения композит будет равна*

$$(-1)^{n+m}\left(\sum_{k=m}^{n}\frac{m!}{k!}\left[{k \atop m}\right]\sum_{j=0}^{k}\frac{j!(-1)^{k+j}}{((n+j)!}\binom{k}{j}\left\{{n+j \atop j}\right\}\right)(x+1)^m.$$

Тогда выражение для полиномов Стирлинга будет иметь вид (3.27)

$$S_n(x) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^{n+m}\left(\sum_{k=m}^{n}\frac{n!}{k!}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}\sum_{j=0}^{k}\frac{j!(-1)^{k+j}}{((n+j)!}\binom{k}{j}\left\{\begin{matrix}n+j\\j\end{matrix}\right\}\right)(x+1)^m.$$

С другой стороны, можно записать следующую композицию

$$\left[\frac{1}{1+\frac{e^{-t}-1}{-t}-1}\right]^{x+1}.$$

Зная, что коэффициенты $\left[\frac{1}{1+t}\right]^{x+1}$ *определяются выражением*

$$\binom{n+x}{n}(-1)^n,$$

и на основании формулы композиции получим формулу (3.28) *для полиномов Стирлинга*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{k+x}{k}\sum_{j=0}^{k}\frac{j!(-1)^{n+j}}{(n+j)!}\binom{k}{j}\left\{\begin{matrix}n+j\\j\end{matrix}\right\}.$$

3.13. Полиномы Петерса

Впервые полиномы Петерса были иследованы G.O. Peters в 1956 [89]. Полиномы Петерса являются обобщением полиномов Буля.

Несколько первых полиномов Петерса

$$s_0(x,\lambda,\mu) = 2^{-\mu}$$

$$s_1(x,\lambda,\mu) = 2^{-(\mu+1)}(2x-\lambda\mu)$$

$$s_0(x,\lambda,\mu) = 2^{-(\mu+2)}\left(4x(x-1)+(2-4x)\lambda\mu+\mu(\mu-1)\lambda^2\right)$$

Производящая функция полиномов Петерса имеет следующий вид [53]

$$\left[1+(1+t)^{\lambda}\right]^{-\mu}(1+t)^x = \sum_{n\geqslant 0}s_n(x,\lambda,\mu)\frac{t^n}{n!}.$$

Явных представлений полиномов Петерса не известно. Далее получим оригинальные явные формулы для полиномов Петерса.

Теорема 19. *Пусть дана производящая функция для полиномов Петерса*

$$\left[1+(1+t)^{\lambda}\right]^{-\mu}(1+t)^{x}=\sum_{n\geqslant 0}s_n(x,\lambda,\mu)\frac{t^n}{n!}, \tag{3.29}$$

где $s_n(x,\lambda,\mu)$ *полиномы Петерса. Тогда для* $s_n(x,\lambda,\mu)$ *справедливы следующие формулы*

$$s_n(x,\lambda,\mu)=2^{-\mu}\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(-\mu)^i\sum_{m=i}^{n}2^{-m}\sum_{k=m}^{j}\left\{{k \atop m}\right\}\left[{j \atop k}\right]\lambda^k\left[{m \atop i}\right]\right)\times$$
$$\times\binom{n}{j}\sum_{l=0}^{n-j}\left[{n-j \atop l}\right]x^l \tag{3.30}$$

и

$$s_n(x,\lambda,\mu)=n!\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\frac{1}{2^{k+\mu}}\binom{\mu+k-1}{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{j\,\lambda}{i}\binom{x}{n-i}, \tag{3.31}$$

где $\left[{j \atop k}\right]$ *и* $\left\{{k \atop m}\right\}$ *числа Стирлинга первого и второго родов, соответственно.*

Доказательство. *Для получения явной формулы для полиномов Петерса представим производящую функцию* $\left[1+(1+t)^{\lambda}\right]^{-\mu}$ *в виде композиции производящих функций* e^t-1 *и* $\ln(1+t)$*:*

$$\left[1+(1+t)^{\lambda}\right]^{-\mu}=2^{-\mu}e^{-\mu\ln\left(1+\frac{e^{\lambda\ln(1+t)}-1}{2}\right)}.$$

Композита производящей функции $\left(\frac{e^{\lambda\ln(1+t)}-1}{2}\right)$ *равна*

$$\frac{m!}{2^m\,n!}\sum_{k=m}^{n}\left\{{k \atop m}\right\}\left[{n \atop k}\right]\lambda^k.$$

Тогда композита производящей функции $-\mu\ln\left(1+\frac{e^{\lambda\ln(1+t)}-1}{2}\right)$ *будет иметь следующее выражение*

$$\frac{(-\mu)^i i!}{n!}\sum_{m=i}^{n}2^{-m}\sum_{k=m}^{n}\left\{{k \atop m}\right\}\left[{n \atop k}\right]\lambda^k\left[{m \atop i}\right].$$

Откуда, выражение коэффициентов производящей функции $\left[1+(1+t)^{\lambda}\right]^{-\mu}$ *будет иметь вид*

$$2^{-\mu}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-\mu)^i}{n!}\sum_{m=i}^{n}2^{-m}\sum_{k=m}^{n}\left\{ {k \atop m} \right\}\left[{n \atop k} \right]\lambda^k\left[{m \atop i} \right].$$

По правилу произведения экспоненциальных производящих функций получим формулу (3.30) *для полиномов Петерса*

$$s_n(x,\lambda,\mu)=2^{-\mu}\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(-\mu)^i\sum_{m=i}^{n}2^{-m}\sum_{k=m}^{j}\left\{ {k \atop m} \right\}\left[{j \atop k} \right]\lambda^k\left[{m \atop i} \right]\right)\times$$

$$\times\binom{n}{j}\sum_{l=0}^{n-j}\left[{n-j \atop l} \right]x^l.$$

С другой стороны производящую функцию можно представить в виде композиции

$$[1+(1+t)^{\lambda}]^{-\mu}=\frac{1}{2^{\mu}}\left[\frac{1}{1+\frac{(1+t)^{\lambda}-1}{2}}\right]^{\mu}.$$

Композита функции $\frac{(1+t)^{\lambda}-1}{2}$ *равна*

$$\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{j\lambda}{n}(-1)^{k-j}.$$

Откуда композиция будет иметь следующее выражение для ее коэффициентов

$$T_n(\lambda,\mu)=\frac{1}{2^{\mu}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\binom{\mu+k-1}{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{j\,\lambda}{n}.$$

Тогда полиномы Петерса будут определяться следующей явной формулой

$$s_n(x,\lambda,\mu)=n!\sum_{i=0}^{n}T_i(\lambda,\mu)\binom{x}{n-i}.$$

После выполнения подстановки $T_n(\lambda,\mu)$ *получаем формулу* (3.31).

Случай, когда $\lambda=2$, $\mu=-2$, рассмотрен как треугольник коэффициентов степеней x в последовательности A137393 в [68].

3.14. Полиномы Наруми

Полиномы Наруми определяются производящей функцией [53]

$$\left[\frac{t}{\ln(1+t)}\right]^{\alpha}(1+t)^{x}=\sum_{n\geq 0}s_n(x,\alpha)\frac{t^n}{n!}.$$

Несколько первых полиномов Наруми

$$s_0(x,\alpha)=1$$

$$s_1(x,\alpha)=\frac{1}{2}(2x+\alpha)$$

$$s_2(x,\alpha)=\frac{1}{12}\left(12x^2+12(a-1)x+\alpha(3\alpha-5)\right)$$

Явных представлений полиномов Наруми не известно. Далее получим оригинальные явные формулы для полиномов Наруми.

Теорема 20. *Пусть дана производящая функция для полиномов Наруми*

$$\left[\frac{t}{\ln(1+t)}\right]^{\alpha}(1+t)^{x}=\sum_{n\geq 0}s_n(x,\alpha)\frac{t^n}{n!}, \tag{3.32}$$

где $s_n(x,\alpha)$ полиномы Наруми. Тогда для $s_n(x,\alpha)$ справедливы следующие формулы

$$S_n(x,\alpha)=\sum_{i=0}^{n}i!\sum_{m=0}^{i}(-\alpha)^m\sum_{k=m}^{i}\left[{k \atop m}\right]\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{k}\frac{\left[{i+j \atop i}\right](-1)^{j-k}}{(j+i)!\,(k-j)!}\binom{n}{i}\sum_{l=0}^{n-i}\left[{n-i \atop l}\right]x^l \tag{3.33}$$

и

$$S_n(x,\alpha)=n!\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{k+\alpha-1}{k}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j\ j!\ \left[{i+j \atop j}\right]\ \binom{k}{j}}{(j+i)!}\right)\binom{x}{n-i}, \tag{3.34}$$

где $\left[{k \atop m}\right]$ числа Стирлинга первого рода.

Доказательство. *Чтобы найти явную формулу, левый сомножитель в (3.32) представим в виде композиции производящих функций* e^x *и* $\ln(1+x)$

$$\left[\frac{t}{\ln(1+t)}\right]^{\alpha} = e^{-\alpha\ln\left(1+\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right)}.$$

Композита производящей функции $\left(\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right)$ *задается степенью производящей функции*

$$\left(\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right)^{k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)^{j}(-1)^{k-j}.$$

С учетом того, что для производящей функции $\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)^{j}$ *коэффициенты имеют вид*

$$\left[{n+j \atop j}\right]\frac{j!}{(n+j)!},$$

выражение для композиты будет

$$\left(\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right)^{k} = \sum_{n>0}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[{n+j \atop j}\right]\frac{j!}{(n+j)!}(-1)^{k-j}t^{n}.$$

Теперь по правилу произведения композит, композита производящей функции $-\alpha\ln\left(1+\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right)$ *будет равна*

$$(-\alpha)^{m}\sum_{k=m}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[{n+j \atop j}\right]\frac{j!}{(n+j)!}(-1)^{k-j}\left[{k \atop m}\right]\frac{m!}{k!}.$$

Из этого следует, что коэффициенты искомой производящей функции

$$e^{-\alpha\ln\left(1+\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right)}$$

будут иметь выражение

$$\sum_{m=0}^{n}(-\alpha)^{m}\sum_{k=m}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[{n+j \atop j}\right]\frac{j!}{(n+j)!}(-1)^{k-j}\left[{k \atop m}\right]\frac{m!}{k!}\frac{1}{m!}.$$

После сокращения подобных членов получим

$$\sum_{m=0}^{n}(-\alpha)^{m}\sum_{k=m}^{n}\sum_{j=0}^{k}\left[{n+j \atop j}\right]\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!(n+j)!}\left[{k \atop m}\right].$$

Отсюда, согласно правилу умножения экспоненциальных производящих функций, получим формулу (3.33) для полиномов Наруми

$$S_n(x,\alpha) = \sum_{i=0}^{n} i! \sum_{m=0}^{i} (-\alpha)^m \sum_{k=m}^{i} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{k} \frac{\begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix} (-1)^{j-k}}{(j+i)!\,(k-j)!} \binom{n}{i} \sum_{l=0}^{n-i} \begin{bmatrix} n-i \\ l \end{bmatrix} x^l.$$

С другой стороны, можно записать выражение коэффициентов производящей функции $\left[\frac{t}{\ln(1+t)}\right]^{\alpha}$ *на основе следующей композиции*

$$\left[\frac{1}{1+\frac{\ln(1+t)}{t}-1}\right]^{\alpha}.$$

Коэффициенты данной композиции будут следующими

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+\alpha-1}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \begin{bmatrix} n+j \\ j \end{bmatrix} \frac{j!}{(n+j)!} (-1)^{k-j}.$$

Откуда получим формулу (3.34) для полиномов Наруми

$$S_n(x,\alpha) = n! \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i} \binom{k+\alpha-1}{k} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j\, j! \begin{bmatrix} i+j \\ j \end{bmatrix} \binom{k}{j}}{(j+i)!} \right) \binom{x}{n-i}.$$

Случай, когда $\alpha = 2$, рассмотрен как треугольник коэффициентов степеней x в последовательности A137381 в [68].

3.15. Полиномы Лерча

Полиномы Лерча задаются следующей производящей функцией [18, 90]

$$(1 - x\ln(1+t))^{-\lambda} = \sum_{n\geqslant 0} \Phi_n(x,\lambda) t^n.$$

Явных представлений полиномов Лерча не известно. Далее получим оригинальную явную формулу для полиномов Лерча.

Теорема 21. *Пусть дана производящая функция для полиномов Лерча*

$$(1 - x\ln(1+t))^{-\lambda} = \sum_{n\geqslant 0} \Phi_n(x,\lambda)t^n, \tag{3.35}$$

где $\Phi_n(x,\lambda)$ *полиномы Лерча. Тогда для* $\Phi_n(x,\lambda)$ *справедлива следующая формула*

$$\Phi_n(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+\lambda-1}{k} \frac{k!}{n!} \left[{n \atop k}\right] x^k, \tag{3.36}$$

где $\left[{n \atop k}\right]$ *числа Стирлинга первого рода.*

Доказательство. *Рассмотрим производящую функцию* (3.35) *как композицию следующих двух производящих функций* $x\ln(1+t)$ *и* $\left(\frac{1}{1-t}\right)^{\lambda}$

$$(1 - x\ln(1+t))^{-\lambda} = \left(\frac{1}{1 - x\ln(1+t)}\right)^{\lambda}.$$

Композита производящей функции $x\ln(1+t)$ *равна*

$$\frac{k!}{n!} \left[{n \atop k}\right] x^k.$$

Для производящей функции $\left(\frac{1}{1-t}\right)^{\lambda}$ *коэффициенты задаются следующим выражением*

$$\binom{n+\lambda-1}{n}.$$

Тогда, на основе формулы композиции двух производящих функций, получим явную формулу (3.36) *для полиномов Лерча*

$$\Phi_n(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+\lambda-1}{k} \frac{k!}{n!} \left[{n \atop k}\right] x^k.$$

3.16. Полиномы Махлера

Полиномы Махлера определяются следующей производящей функцией [53]

$$e^{x(1+t-e^t)} = \sum_{n\geqslant 0} s_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Явных представлений полиномов Махлера не известно. Далее получим оригинальную явную формулу для полиномов Махлера.

Теорема 22. *Пусть дана производящая функция для полиномов Махлера*

$$e^{x(1+t-e^t)} = \sum_{n\geqslant 0} s_n(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{3.37}$$

где $s_n(x)$ полиномы Махлера. Тогда для $s_n(x)$ справедлива следующая формула

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{k-j}\left\{{n-k+j \atop j}\right\}\right), \tag{3.38}$$

где $\left\{{n-k+j \atop j}\right\}$ числа Стирлинга второго рода.

Доказательство. *Рассмотрим производящую функцию (3.37) как композицию следующих двух производящих функций e^{xt} и $t-(e^t-1)$.*

Согласно [27], верно следующее тождество

$$\sum_{n\geq k}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^t-1)^k.$$

Тогда композита производящей функции e^t-1 равна

$$\frac{k!}{n!}\left\{{n \atop k}\right\}.$$

Композита производящей функции $G(t)=t$ равна

$$G^{\Delta}(n,k) = \delta_{n,k},$$

где $\delta_{n,k}$ символ Кронекера.

Согласно правилу нахождения композиты от суммы двух производящих функций, композита суммы $G(t)=t$ и $F(t)=-(e^t-1)$ равна

$$\delta_{n,k} + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{i=j}^{n-k+j}\frac{j!}{i!}(-1)^j\left\{{i \atop j}\right\}\delta_{n-i,k-j} + \frac{k!}{n!}\left\{{n \atop k}\right\}.$$

Поскольку

$$\delta_{n-i,k-j} = \begin{cases} 1, & n-i=k-j; \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

композита суммы будет равна

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{j!(-1)^j}{(n-k+j)!} \left\{ {n-k+j \atop j} \right\}.$$

Тогда, на основе формулы композиции двух производящих функций, получим явную формулу (3.38) *для полиномов Махлера*

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{k-j} \left\{ {n-k+j \atop j} \right\} \right).$$

Коэффициенты полиномов Махлера рассмотрены как треугольник коэффициентов степеней x в последовательности A137375 в [68].

3.17. Полиномы Мотта

В данном разделе введено обобщение полиномов Мотта и получены для них явные формулы и несколько тождеств.

Полиномы Мотта были введены N.F. Mott в 1932 году в [91]. Он использовал данные полиномы в теории электронов.

Первое явное представление в терминах обобщенных гипергеометрических функций дано в [17]

$$s_n(x) = (-\frac{1}{2}x)^n (n-1)! \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}} \frac{x^{-2l}}{l!(n-l)!(n-2l-1)!} =$$

$$= (n!)^{-1} (-\frac{1}{2}x)^n_3 F_0(-n, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n, 1 - \frac{1}{2}n; -4x^{-2}).$$

Полиномы Мотта определяются следующей производящей функцией [53]

$$e^{x(\sqrt{1-t^2}-1)/t} = \sum_{n \geq 0} s_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{3.39}$$

Несколько первых полиномов Мотта

$$s_0(x) = 1$$

$$s_1(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$s_2(x) = \frac{1}{4}x^2$$

$$s_3(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}x^3$$

$$s_4(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^4$$

$$s_5(x) = -\frac{15}{2}x - \frac{15}{8}x^3 - \frac{1}{32}x^5$$

Также E.W. Weisstein определяет полиномы Мотта следующим образом [92]

$$e^{x(1-\sqrt{1+t^2})/t} = \sum_{n\geq 0} s_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

где отличие заключается лишь в знаке.

Коэффициенты полиномов Мотта, представленные в треугольной форме, исследованы в последовательности A137378 в [68].

Введем следующее обобщение производящей функции для полиномов Мотта, заключающееся во введении иррационального параметра α:

$$e^{x((1-t^2)^\alpha-1)/t} = \sum_{n\geq 0} s_n(\alpha,x)\frac{t^n}{n!},$$

где $s_n(\alpha,x)$ обобщенные полиномы Мотта. При $\alpha = 1/2$ получится формула для полиномов Мотта.

Теорема 23. *Для обобщенных полиномов Мотта $s_n(\alpha,x)$, заданных производящей функцией*

$$e^{x((1-t^2)^\alpha-1)/t} = \sum_{n\geq 0} s_n(\alpha,x)\frac{t^n}{n!}, \tag{3.40}$$

справедливы следующие явные формулы:

$$s_n(\alpha,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!}\frac{1+(-1)^{n+k}}{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{j\alpha}{(n+k)/2}(-1)^{k-j+(n+k)/2}x^k \tag{3.41}$$

и

$$s_n(\alpha,x)=n!\sum_{m=1}^{n}m!\sum_{k=m}^{n}\frac{1+(-1)^n}{2\,k!}\left\{{k \atop m}\right\}\sum_{j=0}^{k}\binom{\alpha j}{\frac{n+k}{2}}\binom{k}{j}(-1)^{k-j+\frac{n+k}{2}}\binom{x}{m}, \tag{3.42}$$

где $n>0$ *и* $\left\{{k \atop m}\right\}$ *числа Стирлинга второго рода.*

Доказательство. *Рассмотрим производящую функцию* (3.40) *как композицию следующих двух производящих функций* e^{xt} *и* $\frac{(1-t^2)^\alpha-1}{t}$.

Коэффициенты для $(1-t^2)^\alpha$ *заданы выражением*

$$\binom{\alpha}{n/2}(-1)^{n/2}\frac{1+(-1)^n}{2}.$$

После возведения функции

$$F(t,\alpha)=\frac{(1-t^2)^\alpha-1}{t} \tag{3.43}$$

в k *степень и применения формулы бинома Ньютона, получим композиту для производящей функции* $F(t,\alpha)$

$$F^{\Delta}(n,k,\alpha)=\frac{1+(-1)^{n+k}}{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{j\alpha}{(n+k)/2}(-1)^{k-j+(n+k)/2}.$$

Откуда на основании формулы композиции, получим формулу (3.41) *для обобщенных полиномов Мотта*

$$s_0=1,$$

$$s_n(\alpha,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}\frac{1+(-1)^{n+k}}{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{j\alpha}{(n+k)/2}(-1)^{k-j+(n+k)/2}x^k, \tag{3.44}$$

для $n>0$.

С другой стороны, производящую функцию (3.40) *можно записать в виде следующей композиции производящих функций*

$$[1+e^{F(t,\alpha)}-1]^x.$$

Композита производящей функции e^t-1 *равна*

$$\frac{k!}{n!}\left\{{n \atop k}\right\}.$$

Тогда композита $e^{F(t,\alpha)}-1$ *равна*

$$\sum_{m=k}^{n} F^{\Delta}(n,m,\alpha)\frac{k!}{m!}\left\{{m \atop k}\right\}.$$

Коэффициенты производящей функции $(1+t)^x$ *определяются следующим выражением*

$$\binom{x}{n}.$$

Откуда на основании формулы композиции, получим еще одну явную формулу (3.42) *для обобщенных полиномов Мотта*

$$s_n(\alpha,x)=n!\sum_{m=1}^{n} m!\sum_{k=m}^{n}\frac{1+(-1)^n}{2\,k!}\left\{{k \atop m}\right\}\sum_{j=0}^{k}\binom{\alpha j}{\frac{n+k}{2}}\binom{k}{j}(-1)^{k-j+(n+k)/2}\binom{x}{m}, \tag{3.45}$$

для $n>0$.

Производящую функцию (3.40) можно применить к тригонометрическим функциям

$$e^{x(f(t)^{\alpha}-1)/t},$$

где $f(x)$ тригонометрическая функция.

Пусть $\alpha=-\frac{1}{2}$. Тогда, поскольку

$$\tan(\arcsin(t))=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

формула (3.40) примет вид

$$e^{x(\frac{\tan(\arcsin(t))}{t}-1)/t}. \tag{3.46}$$

Тогда коэффициенты для производящей функции (3.46) определяются следующим выражением

$$e^{x(\frac{\tan(\arcsin(t))}{t}-1)/t}=\sum_{n\geq 0}s_n(-\frac{1}{2},x)\frac{t^n}{n!}.$$

Также формула (3.40) может применяться к следующим тригонометрическим функциям: $\cos(\arcsin(t))$; $\tan(\arccos(t)$; $\sin(\arccos(t))$ и так далее.

Далее найдем обратную производящую функцию $R(t)$ для производящей функции (3.40).

Поскольку $s_0 = 1$, то получается

$$R(t)e^{x((1-R(t)^2)^{\alpha}-1)/R(t)} = t.$$

Согласно теореме о композите обратной производящей функции, композита для производящей функции $R(x)$ равна

$$R^{\Delta}(n,m) = \frac{m}{n}\sum_{k=0}^{n-m} F^{\Delta}(n-m,k,\alpha)(-1)^k \frac{n^k}{k!}x^k,$$

где

$$F^{\Delta}(n,k,\alpha) = \frac{1+(-1)^{n+k}}{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{j\alpha}{(n+k)/2}(-1)^{k-j+(n+k)/2}.$$

Тогда, на основе формулы композиции двух производящих функций, получим следующее тождество для обобщенных полиномов Мотта для $n>1$

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}\sum_{k=0}^{n-m} F^{\Delta}(n-m,k,\alpha)(-1)^k \frac{n^k}{k!}x^k\,\frac{s(m-1,\alpha)}{k!} = 0.$$

3.18. Выводы по третьей главе

1. Для доказательства достоверности результатов в данной главе показано применение введенного математического аппарата для получения известных явных формул для полиномов Чебышева первого и второго родов, полиномов Лежандра, полиномов Гегенбауэра, полиномов Абеля, полиномов Эйлера. Также получены новые явные формулы для полиномов Бернулли второго рода, обобщенных полиномов Бернулли, обобщенных полиномов Лагерра, обобщенных Голдом и Хоппером полиномов Эрмита и обобщенных полиномов Хумберта.

2. Получены новые явные формулы и оригинальные явные представления для многомерных обобщенных полиномов Эрмита, полиномов Стирлинга, полиномов Петерса, полиномов Наруми, полиномов Лерча и полиномов Махлера.

3. Получено обобщение полиномов Мотта, позволяющее применять найденную формулу для тригонометрических функций, также для полученного

обобщения найдена оригинальная явная формула. На основе формулы для композиты обратной производящей функции получены новые тождества для полиномов Мотта и для полиномов Бернулли. Также еще одним способом доказано тождество Теппера.

4. Результаты третьей главы опубликованы в монографии [1] и в статьях [8–11, 13].

Заключение

1. Разработан новый подход для вычисления коэффициентов степеней производящих функций, который позволяет определить для них операции сложения, умножения, композиции и найти формулы для обратных и взаимных производящих функций.

2. Предлагаемый аппарат оперирования с коэффициентами степеней производящих функций позволил получить новые явные формулы для ряда классических специальных полиномов (Чебышева, Лежандра, Абеля и др.) и некоторых их обобщений.

3. Найдены обобщения полиномов Мотта и явная формула для их представления. Кроме того, доказаны новые тождества для полиномов Мотта и Бернулли и дано новое доказательство тождества Теппера.

4. Создана библиотека для системы компьютерной алгебры «Maxima», реализующая основные операции над коэффициентами степеней производящих функций. Результаты диссертации внедрены в учебный процесс ТУСУРа: в практические занятия по дисциплинам «Дискретная математика» и «Математический анализ».

Список литературы

1. Кручинин В. В., Кручинин Д. В. Степени производящих функций и их применение. Томск: Изд-во ТУСУР, 2013. 236 с.
2. Kruchinin V. V., Kruchinin D. V. Composita and its properties // Journal of Analysis and Number Theory. 2014. Vol. 2(2). P. 1–8.
3. Kruchinin D. V., Kruchinin V. V. A method for obtaining generating function for central coefficients of triangles // Journal of Integer Sequences. 2012. Vol. 15. P. 1–10.
4. Kruchinin D. V. On solving some functional equations // Advances in Difference Equations. 2015. Vol. 17. P. 1–7.
5. Кручинин Д. В. О свойствах коэффициентов суперпозиции некоторых производящих функций // Прикладная дискретная математика. 2012. Т. 1(15). С. 55–59.
6. Кручинин Д. В., Кручинин В. В. Метод построения алгоритмов проверки простоты натуральных чисел для задач защиты информации // Доклады ТУСУРа. 2011. Т. 2(24). С. 247–251.
7. Кручинин Д. В. Метод построения рекуррентных вероятностных генераторов простых чисел // Доклады ТУСУРа. 2012. Т. 1(25). С. 131–135.
8. Kruchinin D. V., Kruchinin V. V. A method for obtaining expressions for polynomials based on a composition of generating functions // Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2012. AIP Conf. Proc. 2012. Vol. 1479. P. 383–386.
9. Kruchinin D. V., Kruchinin V. V. Application of a composition of generating functions for obtaining explicit formulas of polynomials // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 404. P. 161–171.
10. Kruchinin D. V., Kruchinin V. V. Explicit formulas for some generalized polynomials // Appl. Math. Inf. Sci. 2013. Vol. 7(5). P. 2083–2088.

11. Kruchinin D. V. Explicit formula for generalized Mott polynomials // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. 2014. Vol. 24 (3). P. 327–332.
12. Кручинин Д. В., Кручинин В. В., Шелупанов А. А. Коэффициенты степеней производящих функций и их приложение к решению задач дискретной математики // Дискретная математика, теория графов и их приложения: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 11 – 14 ноября 2013 г. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2013. С. 57.
13. Кручинин Д. В., Кручинин В. В. Тождества на основе производящей функции для полиномов Бернулли // Всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 135-летию Томского государственного универ- ситета и 65-летию механико-математического факультета: Сборник тезисов. Томск: Изд-во «Иван Федоров», 2013. 244 с.
14. Сеге Г. Ортогональные многочлены. Перевод с английского В. С. Виденского, Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.
15. Bateman Project Staff. Higher transcendental fucntions. Vol. 1 / Ed. by A. Erdélyi. New York: McGraw-Hill Book Co., 1953. 302 p.
16. Bateman Project Staff. Higher transcendental fucntions. Vol. 2 / Ed. by A. Erdélyi. New York: McGraw-Hill Book Co., 1953. 396 p.
17. Bateman Project Staff. Higher transcendental fucntions. Vol. 3 / Ed. by A. Erdélyi. New York: McGraw-Hill Book Co., 1955. 292 p.
18. Boas Jr. R. P., Buck R. C. Polynomial expansions of analytic functions. Springer Berlin Heidelberg, 1964. 77 p.
19. Геронимус Я. Л. Теория ортогональных многочленов. Обзор достижений отечественной математики. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 164 с.
20. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: ГИТТЛ, 1953. С. 358 с.
21. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, Физматлит, 1979. 416 с.

22. Прасолов В. В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2003. 336 с.

23. Ландо С. К. Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2004. 144 с.

24. Knuth D. E. The art of computer programming, Volume 1. Fundamental algorithms. Addison-Wesley, 1998. 784 p.

25. Эндрюс Д. Теория разбиений. Перевод с английского Б. С. Стечкина, М.: Наука, 1982. 256 с.

26. Riordan J. An introduction to combinatorial analysis. Princeton University Press, 1958. 256 p.

27. Comtet L. Advanced combinatorics; the art of finite and infinite expansions. D. Reidel Publ. Co., 1974. 343 p.

28. Wilf H. S. Generatingfunctionology. Boston, MA: Academic Press, 1994. 226 p.

29. Stanley R. P. Enumerative combinatorics. Vol. 1. Cambridge University Press, 2012. 640 p.

30. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции / Под ред. А. Вершика. М.: Мир, 2005. 767 с.

31. Flajolet P., Sedgewick R. Analytic combinatorics. Cambridge University Press, 2009. 810 p.

32. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 328 с.

33. Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск: Наука, 1977. 285 с.

34. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982. 384 с.

35. Srivastava H. M., Manocha H. L. A treatise on generating functions. Ellis Horwood Limited, 1984. 569 p.

36. Rassias T. M., Srivastava H. M., Yanushauskas A. Topics in polynomials of one and several variables and their applications: a legacy of P.L. Chebyshev. World Scientific Publishing Company, 1993. 638 p.

37. Srivastava H. M. Some generalizations and basic (or q-) extensions of the

Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials // Applied Mathematics and Information Sciences. 2011. Vol. 5. P. 390–444.

38. Srivastava H. M., Choi J. Zeta and *q*-zeta functions and associated series and integrals. Elsevier Science Publishers, 2012.
39. Ozden H., Simsek Y., Srivastava H. M. A unified presentation of the generating functions of the generalized Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials // Computers and Mathematics with Applications. 2010. Vol. 60. P. 2779–2787.
40. Simsek Y., Acikgoz M. A new generating function of (q-) Bernstein-type polynomials and their interpolation function // Abstract and Applied Analysis. 2010.
41. Simsek Y. Complete sum of products of (h,q)-extension of Euler polynomials and numbers // Journal of Difference Equations and Applications. 2010. Vol. 16(11). P. 1331–1348.
42. Dere R., Simsek Y. Applications of umbral algebra to some special polynomials // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. 2012. Vol. 22. P. 433–438.
43. Simsek Y. Generating functions for generalized Stirling type numbers, array type polynomials, Eulerian type polynomials and their applications // Fixed Point Theory and Applications. 2013. Vol. 2013.
44. Kim T. q-Generalized Euler numbers and polynomials // Russian Journal of Mathematical Physics. 2006. Vol. 13. P. 293–298.
45. Bayad A., Kim T. Identities for the Bernoulli, the Euler and the Genocchi numbers and polynomials // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. 2010. Vol. 20(2). P. 247–253.
46. Srivastava H. M., Kurt B., Simsek Y. Some families of Genocchi type polynomials and their interpolation functions // Integral Transforms and Special Functions. 2012. Vol. 23. P. 919–938.
47. El-Mikkawy M., Atlan F. Derivation of identities involving some special polynomials and numbers via generating functions with applications // Applied Mathematics and Computation. 2013. Vol. 220. P. 518–535.

48. Rainville E. D. Special functions. Chelsea Publ. Co. New York, 1971.

49. McBride E. B. Obtaining generating functions. Springer-Verlag, New York, 1971.

50. Manocha H. L. Generating functions for Jacobi and Laguerre polynomials // Mat. Vestnik. 1974. Vol. 11(26). P. 43–47.

51. Bell E. T. The history of Blissard's symbolic method, with a sketch of its inventor's Life // The American Mathematical Monthly. 1938. Vol. 45. P. 414–421.

52. Guinand A. The umbral method: a survey of elementary mnemonic and manipulative uses // The American Mathematical Monthly. 1979. Vol. 86. P. 187–195.

53. Roman S. The umbral calculus. Academic press, 1984.

54. Rota G.-C., Kahaner D., Odlyzko A. On the foundations of combinatorial theory VII. Finite Operator Calculus // Journal of Mathematical Analysis and its Applications. 1973. Vol. 42. P. 684–760.

55. Roman S., Rota G.-C. The umbral valculus // Advances in Mathematics. 1978. Vol. 27. P. 95–188.

56. Di Bucchianico A., Loeb D. A selected survey of umbral calculus // The Electronic Journal of Combinatorics. 2000. P. 1–34.

57. Srivastava H. M., Todorov P. G. An explicit formula for the generalized Bernoulli polynomials // Journal of Mathematical Analysis and its Applications. 1988. Vol. 130. P. 509–513.

58. Srivastava H. M., Guo-Dong Liu. Explicit formulas for the Norlund polynomials $B_n^{(x)}$ and $b_n^{(x)}$ // Computers and Mathematics with Applications. 2006. Vol. 51. P. 1377–1384.

59. Boyadzhiev K. N. Derivative polynomials for Tanh, Tan, Sech and Sec in explicit form // Fibonacci Quarterly. 2007. Vol. 45. P. 291–303.

60. Cenkci M. An explicit formula for generalized potential polynomials and its applications // Discrete Mathematics. 2009. Vol. 309. P. 1498–1510.

61. Эйлер Л. On the expansion of the power of any polynomial 1 + x + x2 + x3 + x4 + etc.) // Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae.

1801. Т. 12. С. 47–57.

62. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. т. 1: начала теории. М.: Наука, 1967. 486 с.
63. Shapiro L. W., Getu S., Woan W.-J., Woodson L. The Riordan group // Discrete Applied Math. 1991. Vol. 229.
64. Shapiro L. W. Bijections and the Riordan group // Theoretical Computer Science. 2003. Vol. 307. P. 403–413.
65. Sprugnoli R. Riordan arrays and combinatorial sums // Discrete Mathematics. 1994. Vol. 132. P. 267–290.
66. He T.-X., Sprugnoli R. Sequence characterization of Riordan arrays // Discrete Mathematics. 2009. Vol. 309. P. 3962–3974.
67. Кузьмин О. В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск: Наука, Сиб. изд. фирма РАН, 2000. 294 с.
68. Sloane J. A. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Published electronically at http://oeis.org/. 2014. URL: www.oeis.org.
69. Merlini D., Sprugnoli R., Verri M. C. Lagrange inversion: when and how // Acta Appl Math. 2006. Vol. 94. P. 233–249.
70. Chebyshev P. L. Theorie des mecanismes connus sous le nom de parallelogrammes // Memoires des Savants etrangers presentes a l'Academie de Saint-Petersbourg. 1854. Vol. 7. P. 539–586.
71. Gil A., Segura J., Temme N. M. Numerical methods for special functions. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
72. Bailey W. N. Generalised hypergeometric series. Cambridge University Press, 1935.
73. Stein E., Weiss G. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton University Press, 1971.
74. Gatteschi L. Funzioni speciali. Unione Tipografico—Editrice Torinese (UTET), 1973.
75. Papp F. J. Another proof of Tepper's inequality // Math. Magazine. 1972.

Vol. 45. P. 119–121.

76. Sonine N. J. Sur les fonctions cylindriques et le developpement des fonctions continues en series // Math. Ann. 1880. Vol. 16. P. 1–80.
77. Погорелов В. И., Татарский В. И. Еще одна формула, определяющая полиномы Лагерра // Математические заметки. 1969. Т. 6(3). С. 278–288.
78. Dodonov V. V. Asymptotic formulae for two-variable Hermite polynomials // Phys. A Math. Gen. 1994. Vol. 27. P. 6191–6203.
79. Dattoli G., Lorenzutta S., Maino G., Torre A. Phase-space dynamics and Hermite polynomials of two variables and two indices // J. Math. Phys. 1994. Vol. 35(9). P. 4451–4462.
80. Dattoli G., Lorenzutta S., Maino G. et al. Generalized Hermite polynomials and super-Gaussian forms // J. Math. Anal. Appl. 1996. Vol. 203. P. 597–609.
81. Dattoli G. Summation formulae of special functions and multivariable Hermite polynomials // Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. B. 2004. Vol. 119(5). P. 479–488.
82. Subuhi Khan, Pathan M. A., Nader Ali Makboul Hassan, Yasmin G. Implicit summation formulae for Hermite and related polynomials // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 344. P. 408–416.
83. Subuhi Khan, Mustafa Walid Al-Saad. Summation formulae for Gould–Hopper generalized Hermite polynomials // Computers Math. Applic. 2011. Vol. 61. P. 1536–1541.
84. Brafman F. Some generating functions for Laguerre and Hermite polynomials // Canad. J . Math. 1957. Vol. 9. P. 180–187.
85. Gould H. W., Hopper A. T. Operational formulas connected with two generalizations of Hermite polynomials // Duke Math. J. 1962. Vol. 29(1). P. 51–63.
86. Lahiri M. On a generalisation of Hermite polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 27. P. 117–121.
87. Dattoli G., Chiccoli C., Lorenzutta S. et al. Theory of generalized Hermite polynomials // Computers Math. Applic. 1994. Vol. 28(4). P. 71–83.
88. Gould H. W. Inverse series relations and other expansions involving Humbert

polynomials // Duke Math. J. 1965. Vol. 32(4). P. 697–711.

89. Peters G. O. Boole polynomials of higher and negative orders // Bulletin of the A. M. S. 1956. Vol. 62(1). P. 7.
90. Bateman H. Polynomials associated with those of Lerch // Monatshefte fur Mathematik und Physik. 1936. Vol. 41(1). P. 75–80.
91. Mott N. F. The polarisation of electrons by double scattering // Proc. R. Soc. Lond. A. 1932. Vol. 135. P. 429–458.
92. Weisstein E. W. Mathworld. Публикуется онлайн на http://mathworld.wolfram.com/. 2014. URL: www.mathworld.wolfram.com.

Приложение А

Акты использования

«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по учебной работе Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники
Боков Лев Алексеевич
« » 2015 г.
(Гербовая печать)

Акт

о внедрении результатов диссертационной работы Кручинина Дмитрия Владимировича в учебный процесс

Мы, нижеподписавшиеся, декан факультета безопасности Давыдова Е.М., заведующий кафедрой комплексной информационной безопасности электронно-вычислительных систем (КИБЭВС) Шелупанов А.А., заведующий кафедрой безопасности информационных систем (БИС) Мещеряков Р.В. составили настоящий АКТ ВНЕДРЕНИЯ (ИСПОЛЬЗОВАНИЯ) результатов диссертационной работы Кручинина Дмитрия Владимировича.

Основные теоретические результаты работы: разработан новый метод получения явных выражений для коэффициентов степеней производящих функций, отличающийся от известных методов наличием операций сложения, умножения, композиции и обращения. На основе разработанного метода впервые получены явные формулы для полиномов Стирлинга, Петерса, Наруми, Лерча, Махлера и для многомерных обобщенных полиномов Эрмита. Впервые получено обобщение полиномов Мотта, и для него найдена оригинальная явная формула, учитывающая использование тригонометрических функций.

Результаты, имеющие практическую значимость:

Предлагаемый математический аппарат над коэффициентами степеней производящих функций позволяет автоматизировать получение явных выражений для коэффициентов производящих функций, что может послужить основой для дальнейшего развития математических пакетов и систем компьютерной алгебры. Так автором создана библиотека для системы компьютерной алгебры <<Maxima>>, реализующая основные операции над коэффициентами степеней производящих функций и содержащая более 100 базовых выражений для степеней производящих функций, основанных на радикалах, логарифмах, тригонометрических функциях и полиномах.

Указанная работа внедрена в учебный процесс в 2013-2014 учебном годах и используется на факультете безопасности в дисциплинах: дискретная математика и математический анализ.

Объект и предмет внедрения. Объектом внедрения является теория полиномов. Предметом внедрения – методы получения явных формул полиномов на основе степеней производящих функций, изложенные в 1 монографиях и в 10 статьях в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных журналов и изданий:

1. Кручинин Д.В. Степени производящих функций и их применение / Кручинин В.В., Кручинин Д.В. // Томск: Изд-во ТУСУР. – 2013. – С. 236.
2. Kruchinin D.V. Application of a composition of generating functions for obtaining explicit formulas of polynomials / Kruchinin D.V., Kruchinin V.V. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2013. – vol. 404. – P. 161-171.

3. Kruchinin D.V. Explicit formulas for some generalized polynomials / Kruchinin D.V., Kruchinin V.V. // Applied Mathematics and Information Sciences. – 2013. – vol. 7, №5. – P. 2085-2090.

4. Kruchinin D.V. A method for obtaining generating function for central coefficients of triangles / Kruchinin D.V., Kruchinin V.V. // Journal of Integer Sequences. – 2012. – vol. 15. – P. 1-10.

5. Kruchinin D.V. A method for obtaining expressions for polynomials based on a composition of generating function / Kruchinin D.V., Kruchinin V.V. // Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2012. AIP Conf. Proc. – 2012. – vol. 1479. – P. 383-386.

6. Kruchinin D.V. Explicit formula for generalized Mott polynomials //Advanced Studies in Contemporary Mathematics – 2014 – vol. 24, №3 – P. 327-332.

7. Kruchinin D.V. Composita and its properties / Kruchinin D.V., Kruchinin V.V. // Journal of Analysis and Number Theory. – 2014. – vol. 2, №2. – P. 1-8.

8. Кручинин Д.В. О свойствах коэффициентов суперпозиции некоторых производящих функций // Прикладная дискретная математика. – 2012. – Т. 1, №15. – С. 55-59.

9. Кручинин Д.В. Метод построения алгоритмов проверки простоты натуральных чисел для задач защиты информации / Кручинин Д.В., Кручинин В.В. // Доклады ТУСУРа. – 2011. – Т. 2, №24. – С. 247-251.

10. Кручинин Д.В. Метод построения рекуррентных вероятностных генераторов простых чисел // Доклады ТУСУРа. – 2012. – Т. 1, №25. – С. 131-135.

11. Kruchinin D.V. On solving some functional equations // Advances in Difference Equations. – 2015. Vol. 17. P. 1–7.

Эффект от внедрения (использования) результатов: научные результаты по проблеме исследования методов получения явных формул для полиномов на основе степеней производящих функций имеют важное значение при построении алгоритмов проверки простоты натуральных чисел для задач защиты информации, позволяют значительно улучшить качество подготовки специалистов по специальностям факультета безопасности.

Декан факультета безопасности — Е.М Давыдова

Заведующий кафедрой КИБЭВС — А.А. Шелупанов

Заведующий кафедрой БИС — Р.В. Мещеряков