ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Франчук Светлана Константиновна

Неприводимые ковры аддитивных подгрупп над полями

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук, профессор

Нужин Я.Н.

Красноярск, 2021

Содержание

Введение

Актуальность темы. Данная работа посвящена изучению подгрупп групп Шевалле, определяемых коврами — наборами аддитивных подгрупп основного кольца определения.

Наборы идеалов и в общем случае аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\} \tag{0.1}$$

определенного ассоциативного, необязательно коммутативного, кольца с условиями

$$\mathfrak{S}_{ir}\mathfrak{S}_{rj} \subseteq \mathfrak{S}_{ij}, \quad 1 \leq i, r, j \leq n, \tag{0.2}$$

возникали при решении различных задач. Такие наборы назывались коврами или сетями, а связанные с ними кольца и группы — ковровыми, сетевыми, обобщенными конгруэнц-подгруппами и др. Аддитивные подгруппы возникают в силу определения сложения матриц, а включения (0.2) происходят из матричного умножения и согласуются с коммутированием трансвекций, что и определяет различные приложения наборов (0.1) с включениями (0.2). Первыми, кто систематически применял в своих исследованиях такие наборы, были Ю.И. Мерзляков [18], Н.С. Романовский [23], З.И. Боревич [1], [2].

Понятия ковра и ковровой подгруппы были перенесены на группы Шевалле нормальных и скрученных типов различными способами (К. Сузуки [28], Н.А. Вавилов [5], В. М. Левчук [14, вопрос 7.28], [15]). Убрав из набора (0.1) все диагональные подмножества $\mathfrak{S}_{ii}$, мы получим элементарный ковер. Тогда элементарная ковровая подгруппа по определению совпадает с группой, порожденной всеми трансвекциями $t_{ij}(u)$,

$u \in \mathfrak{S}_{ij}$. Элементарная группа Шевалле типа A_{n-1} над коммутативным кольцом K изоморфна подгруппе специальной линейной группы $SL_n(K)$, порожденной всеми трансвекциями $t_{ij}(u)$, u. При этом изоморфизме корневым элементам $x_r(u)$ определенным образом соответствуют трансвекции $t_{ij}(u)$. Учитывая данный изоморфизм, К. Сузуки для каждой системы корней Φ называет ковром (в оригинале "carpet") типа Φ над кольцом K всякий набор его идеалов $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ с условием

$$\mathfrak{A}_r \mathfrak{A}_s \subseteq \mathfrak{A}_{r+s}, \text{ при } r, s, r+s \in \Phi, \tag{0.3}$$

и описывает в терминах ковровых подгрупп параболические подгруппы групп Шевалле над локальными кольцами с некоторыми ограничениями на их мультипликативные группы [28]. Перенося эти результаты на полулокальные кольца, Н.А. Вавилов называет наборы идеалов с условиями (0.3) сетями, а затем, описывая параболические подгруппы скрученных групп Шевалле, вводит аналог понятия сети для данных групп [5], [6]. В.М. Левчук заменил условия (0.3) в определении ковра на следующие включения

$$C_{ij,rs} \mathfrak{A}_r^i \mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \text{ при } r, s, ir+js \in \Phi, \ i > 0, \ j > 0, \tag{0.4}$$

где $C_{ij,rs}$ — структурные константы из коммутаторной формулы Шевалле, которые могут принимать значения $\pm 1, \pm 2, \pm 3$, а $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i | a \in \mathfrak{A}_r\}$ [15]. При этом набор $\{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ не обязан состоять только из идеалов, в общем случае его элементами являются аддитивные подгруппы. Данное определение оказалось более естественным и позволило снять возникающие ранее ограничения на мультипликативную группу основного кольца в различных задачах, в частности, при описании параболических подгрупп. Отметим также, что в случае когда в системе корней, ассоциированной с группой Шевалле, все корни имеют одинаковую длину, то условия (0.3) и (0.4) совпадают.

С одной стороны, определения ковра и ковровой подгруппы возникали как инструмент при вычислении центральных и коммутаторных рядов определенных матричных групп над кольцами, а также при описании различных промежуточных подгрупп в группах Шевалле, в первую очередь, при описании параболических подгрупп, надгрупп диагональной подгруппы и групп, лежащих между группами лиева типа над кольцом и его подкольцом. С другой стороны, ковровые подгруппы можно рассматривать как обобщение исходных групп Шевалле и изучать их структуру, что и делается в настоящей диссертации. Ключевыми понятиями для ковров являются неприводимость и замкнутость. По определению ковер называется замкнутым, если его ковровая подгруппа не содержит новых корневых элементов, и он неприводим, если все его аддитивные подгруппы ненулевые.

Целью диссертационной работы является описание неприводимых ковров лиева типа при определенных ограничениях на аддитивные подгруппы ковра и основное поле коэффициентов.

Основные задачи работы:

1. Построить примеры незамкнутых ковров любого лиева типа над коммутативными кольцами.

2. Описать ковры над локально конечными полями ранга больше единицы.

3. Описать ковры типа G_2 над полем K характеристики $p > 0$, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R-модулем, в

случае, когда K — алгебраическое расширение поля R.

Методы исследования. В работе используются методы линейной алгебры, теории полей и теории групп.

Научная новизна. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми и снабжены подробными доказательствами. В работе впервые указаны примеры неприводимых незамкнутых ковров любого лиева типа, в которых все подковры ранга 1, за исключением одного, замкнутые. С другой стороны, установлено, что любой неприводимый ковер лиева ранга больше единицы над локально конечным полем, с точностью до сопряжения диагональным элементом совпадает с ковром, все аддитивные подгруппы которого равны некоторому фиксированному подполю основного поля, в частности, он является замкнутым. Оказалось, что для любых ковров типа G_2 над полем характеристики $p > 0$ исключением является только $p = 3$.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты диссертации представляют теоретический интерес и вносят заметный вклад в теорию линейных групп и групп лиева типа. Кроме того, результаты можно ввести в учебный процесс в виде материала для проведения специальных курсов для студентов, магистрантов и аспирантов кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на Красноярском алгебраическом семинаре (Сибирский федеральный университет, 2016–2021 гг.) и следующих конференциях:

1. Международная конференция "Мальцевские чтения"(Новосибирск, 2016 г., 2020 г.);
2. Российская научная конференция "Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования"(Владикавказ, 2017г.);
3. Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша (Москва, 2018г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [29] — [39]. Основные результаты диссертации опубликованы в [29] — [32] в изданиях, входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата наук.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, трех глав основного содержания, заключения, глоссария и списка литературы. Список цитированной литературы состоит из 28 наименований, а список работ автора из 11 наименований. Вся работа изложена на 62 страницах и включает в себя 11 рисунков. Главы подразделяются на параграфы. Основные результаты сформулированы в виде теорем.

В **первой главе** рассматриваются ковры и ковровые подгруппы над произвольным коммутативным кольцом. В **параграфах 1.1 - 1.3** приводятся определения ковра и ковровой подгруппы, а также приведены два примера, которые дают отрицательный ответ на следующий вопрос: *будет ли подгруппа* M*, порожденная своими пересечениями* $M \cap X_r, \quad r \in \Phi$ *ковровой?* [20]. В **параграфе 1.4** доказана следующая теорема, которая является основным результатом данной главы

Теорема 1.1. *Пусть* K *— коммутативное кольцо с единицей* 1,

$\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел и пусть в K существуют ненулевой идеал I и аддитивная подгруппа J такие, что

$$\mathbb{Z} + I \neq \mathbb{Z} + I + J.$$

Тогда для любой системы корней Φ существует неприводимый незамкнутый ковер типа Φ над K.

Теорема 1.1 обобщает методы построения примеров незамкнутых неприводимых матричных ковров, предложенных в 2011 году В.А. Койбаевым [11] и переносит их на ковры лиева типа. Она дает примеры незамкнутых неприводимых ковров любого типа Φ над различными коммутативными кольцами. В этих примерах все подковры $\{\mathfrak{A}_r,\ \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1 замкнутые, за исключением лишь одного. Поэтому данные примеры являются предельными в связи со следующим известным вопросом В. М. Левчука [14, вопрос 15.46].

Верно ли, что для замкнутости ковра $\mathfrak{A}$ типа Φ над полем K необходима и достаточна замкнутость его подковров $\{\mathfrak{A}_r,\ \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1?

Глава два посвящена описанию неприводимых ковров над локально конечным полем. В **параграфе 2.1** приведены две следующие леммы, которые существенно используются при доказательствах основных результатов, как главы 2, так и главы 3.

Лемма 2.1. *Сопрягая диагональным элементом $h(\chi)$ ковровую подгруппу $E(\Phi, \mathfrak{A})$ получим ковровую подгруппу*

$$h(\chi)E(\Phi, \mathfrak{A})h(\chi)^{-1} = E(\Phi, \mathfrak{A}'),$$

определяемую ковром $\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A}'_r \mid r \in \Phi\}$, где $\mathfrak{A}'_r = \chi(r)\mathfrak{A}_r$.

Лемма 2.3. *Пусть* $\{a, b\}$ *— фундаментальная система корней для системы корней* Φ *типа* A_2, B_2 *или* G_2, $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ *— неприводимый ковер типа* Φ *над локально конечным полем* K, *причем* $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. *Тогда* $\mathfrak{A}_r = P$, $r \in \Phi$, *для некоторого подполя* P *поля* K.

В [16] лемма 2.3 доказана В. М. Левчуком, исключая случай $\Phi = B_2$ при $char K = 2$ и случай $\Phi = G_2$ при $char K = 2$, 3.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ *— неприводимый ковер типа* Φ *ранга* $l \geq 2$ *над локально конечным полем* K. *Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из расширенной группы Шевалле* $\Phi(K)$ *все аддитивные подгруппы* $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, *совпадают с некоторым подполем* P *поля* K, *в частности, ковер* $\mathfrak{A}$ *замкнут.*

Теорема 2.1 доказана в **параграфе 2.2**, а в **параграфе 2.3** получен аналогичный результат (теорема 2.2) для полного матричного ковра любого ранга (степени). Этот результат был получен В. М. Левчуком в 1983 году, исключая случаи, когда система корней типа B_l, C_l и F_4 и характеристика поля равна 2 и система корней типа G_2, характеристика поля равна 2 и 3 [16]. С другой стороны, в этой же статье [16] установлен критерий замкнутости любого ковра лиева типа над локально конечным полем. Теорема 2.1 усиливает этот результат для неприводимых ковров, так как в предположениях теоремы не накладывается условие замкнутости ковра $\mathfrak{A}$. Отметим также, что аналогичный результат доказали Р. Ю. Дряева, В. А. Койбаев и Я. Н. Нужин [8], где говорится, что любой неприводимый матричный ковер степени $n \geq 3$ над полем рациональных чисел замкнут. Для всех групп лиева типа подобный результат анонсировался С. А. Зюбиным в 2016 году в трудах Международной конференции "Алгебра и логика: теория и приложения"[9].

Основным результатом **главы три** является

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ *— неприводимый ковер типа* G_2 *над полем* K *характеристики* $p > 0$. *Предположим, что хотя бы одна из аддитивных подгрупп* $\mathfrak{A}_r$ *является* R*-модулем, где* K *— алгебраическое расширение поля* R. *Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из группы Шевалле* $G_2(K)$ *при* $p \neq 3$ *все* $\mathfrak{A}_r$ *совпадают с некоторым подполем* P *поля* K, *а при* $p = 3$

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \textit{если } r \ \textit{— короткий корень}, \\ Q, & \textit{если } r \ \textit{— длинный корень}. \end{cases}$$

для некоторых полей P *и* Q, *удовлетворяющих следующим включениям*

$$R \subseteq P, Q \subseteq K, \tag{0.5}$$

$$P^3 \subseteq Q \subseteq P. \tag{0.6}$$

Ранее при $p > 3$ утверждение теоремы установил В. М. Левчук [16, следствие 3.2] и в этом случае ковер $\mathfrak{A}$ параметризуется только одним полем. Теорема 3.1 снимает ограничение $p > 3$ для типа G_2. В **параграфе 3.1** приводятся примеры замкнутых ковров типа G_2, параметризуемых двумя различными несовершенными полями, большее из которых является алгебраическим расширением меньшего, в частности,

Пример 3.2. Пусть F — поле характеристики p и пусть t, u алгебраически независимы над F. Положим $P = F(t, u)$, $Q = F(t^3, u^3)$ и определим ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ типа G_2 следующим образом

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \ \text{ — короткий корень,} \\ Q, & \text{если } r \ \text{ — длинный корень.} \end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{A}$ является неприводимым замкнутым ковром. Более того, в [22] доказано, что все такие ковровые подгруппы допускают разложение Брюа и являются простыми группами. Доказательство теоремы 3.1 приведено в **параграфе 3.2.**

Основные результаты:

1. Для коммутативных колец с единицей, ненулевым идеалом I и аддитивной подгруппой J такими, что $\mathbb{Z} + I \neq \mathbb{Z} + I + J$, доказано существование незамкнутых неприводимых ковров лиева типа, ассоциированных с любой системой корней [29].

2. Доказано, что любой ковер ненулевых аддитивных подгрупп, ассоциированный с группой Шевалле лиева ранга больше единицы над локально конечным полем, с точностью до сопряжения диагональным элементом совпадает с ковром, все аддитивные подгруппы которого равны некоторому фиксированному подполю основного поля [30].

3. Описаны неприводимые ковры типа G_2 над полем K характеристики $p > 0$, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R-модулем, в случае когда K — алгебраическое расширение поля R. Доказано, что такие ковры являются замкнутыми и могут параметризоваться двумя различными полями только при $p = 3$, а для других p они определяются одним полем и в этом случае соответствующие им ковровые подгруппы с точностью до сопряжения

диагональным элементом совпадают с группами Шевалле типа G_2 над промежуточными подполями P, $R \subseteq P \subseteq K$ [32].

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Нужину Якову Нифантьевичу за неоценимую помощь и поддержку на всех этапах выполнения работы. Автор благодарен всему коллективу Кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики СФУ за внимание и бесценные советы по написанию диссертации.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов: 16-01-00707 и 19-01-00566) и Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388).

1 Ковры и ковровые подгруппы над коммутативными кольцами

В первых трех параграфах данной главы приводятся определения ковра и ковровой подгруппы и другие основные определения диссертации. В четвертом параграфе для коммутативных колец с единицей, ненулевым идеалом I и аддитивной подгруппой J такими, что $\mathbb{Z} + I \neq \mathbb{Z} + I + J$, доказано существование незамкнутых неприводимых ковров, ассоциированных с любой системой корней.

1.1 Матричные ковры

Пусть K — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей 1, а n — натуральное число. Под аддитивной подгруппой кольца K мы понимаем любую подгруппу всей его аддитивной группы. Назовем *полным (матричным) ковром* степени n над кольцом K набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

кольца K, если выполняется следующее условие

$$\mathfrak{A}_{ik}\mathfrak{A}_{kj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Множество матриц

$$M_n(\mathfrak{A}) = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$$

является кольцом, относительно обычных матричных операций сложения, умножения и называется *ковровым кольцом.*

Элементарным ковром называется набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \tag{1.1}$$

кольца K, если выполняется следующее условие

$$\mathfrak{A}_{ik}\mathfrak{A}_{kj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij},\ 1 \leq i \neq j \neq k \leq n. \tag{1.2}$$

Отличие элементарного ковра от полного в том, что в первом диагональные элементы $\mathfrak{A}_{ii}$ не определены.

Далее e — единичная матрица, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местами нули. Матрицы

$$t_{ij}(u) = e + ue_{ij}, \quad u \in \mathfrak{A}_{ij},\ 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j$$

называются (элементарными) трансвекциями. Справедлива коммутаторная формула для трансвекций

$$[t_{ij}(u), t_{km}(v)] = \begin{cases} e, & j \neq k, i \neq m, \\ t_{im}(uv), & j = k, i \neq m, \\ t_{kj}(-vu), & j \neq k, i = m \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь и далее

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy.$$

Формула (1.3) согласуется с условиями элементарной ковровости (1.2).

Группа $E_n(\mathfrak{A})$, порожденная трансвекциями

$$t_{ij}(u_{ij}), \quad u_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n,$$

называется *элементарной ковровой подгруппой.* Для элементарного ковра $\mathfrak{A}$ рассмотрим набор аддитивных подгрупп $\overline{\mathfrak{A}} = (\overline{\mathfrak{A}}_{ij})$, индуцированный трансвекциями из элементарной подгруппы $E_n(\mathfrak{A})$. А именно для любых $i \neq j$ положим

$$\overline{\mathfrak{A}}_{ij} = \{k \in K \ \mid \ t_{ij}(k) \in E_n(\mathfrak{A})\}.$$

В силу коммутаторной формулы (1.3) набор $\overline{\mathfrak{A}} = (\overline{\mathfrak{A}}_{ij})$ является элементарным ковром. Элементарный ковер $\overline{\mathfrak{A}}$ назовем *замыканием* ковра $\mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}$, то ковер $\mathfrak{A}$ называется *замкнутым* (или *допустимым*). В действительности справедливо более общее утверждение, а именно, для любой подгруппы G общей линейной группы $GL_n(K)$ набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_{ij})$ является элементарным ковром, если

$$\mathfrak{G}_{ij} = \{k \in K \mid t_{ij}(k) \in G\}.$$

Будем говорить, что элементарный ковер (1.1) степени $n \geq 2$ *дополняется до полного ковра*

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}, \tag{1.4}$$

если можно доопределить диагональные множества $\mathfrak{A}_{ii}$, $1 \leq i \leq n$, так, чтобы

$$\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad \text{для всех} \quad i, r, j. \tag{1.5}$$

Хорошо известно, что элементарный матричный ковер (1.2) дополняется до полного ковра (1.4) тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{A}_{ij} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \ i \neq j \tag{1.6}$$

(см., например, [3, с. 25] или [15, лемма 6]). Это дополнение можно получить, положив

$$\mathfrak{A}_{ii} = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n} \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

и в этом случае множество матриц вида $e + \sum_{i,j=1}^{n} u e_{ij}$, где $u \in \mathfrak{A}_{ij}$, является полугруппой относительно матричного умножения. Как было уже сказано, элементарная ковровая подгруппа $E(\mathfrak{A})$ по определению порождается трансвекциями

$$t_{ij}(u) = e + u e_{ij}, \quad u \in \mathfrak{A}_{ij}, \ 1 \leq i, j \leq n, \ i \neq j.$$

Поэтому, если элементарный ковер дополняется до полного ковра, то он является замкнутым ковром. В частности, элементарный ковер, полученный из полного ковра отбрасыванием диагональных элементов, замкнут.

В 2011 году В.А. Койбаев построил пример незамкнутого элементарного ковра, все аддитивные подгруппы которого ненулевые [11]. Приведем его с подробными выкладками.

Пример 1.1. Пусть F — произвольное поле, $F[x]$ — кольцо многочленов, $F(x)$ — поле рациональных функций с коэффициентами из F. Для многочлена $f \in F[x]$ через $degf$ обозначим его степень. В поле $F(x)$ рассмотрим подкольцо

$$R = \{f/g \in F(x) \mid degg - degf \geq 4\}$$

и аддитивные подгруппы

$$A = F/x + F + R,$$

$$B = F/x^2 + F + R.$$

Определим элементарный ковер $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_{ij})$ порядка n следующим образом:

$$\mathfrak{A}_{12} = A,$$

$$\mathfrak{A}_{21} = B,$$

для остальных $i, j \neq 1, 2$

$$\mathfrak{A}_{ij} = R.$$

В силу определения элементарного и задания конкретного ковра $\mathfrak{A}$ при $j, k \neq\ 1, 2,$ должны выполнятся следующие импликации:

$$\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{2j} \subseteq \mathfrak{A}_{1j} \Rightarrow AR \subseteq R, \tag{1.7}$$

$$\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{1j} \subseteq \mathfrak{A}_{2j} \Rightarrow BR \subseteq R, \tag{1.8}$$

$$\mathfrak{A}_{ik}\mathfrak{A}_{kj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij} \Rightarrow RR \subseteq R, \tag{1.9}$$

$$\mathfrak{A}_{1k}\mathfrak{A}_{k2} \subseteq \mathfrak{A}_{12} \Rightarrow RR \subseteq A, \tag{1.10}$$

$$\mathfrak{A}_{2k}\mathfrak{A}_{k1} \subseteq \mathfrak{A}_{21} \Rightarrow RR \subseteq B. \tag{1.11}$$

В силу задания аддитивных подгрупп A, B и кольца R включения

$$AR \subseteq R, \quad BR \subseteq R, \quad RR \subseteq R, \quad RR \subseteq A, \quad RR \subseteq B$$

из импликаций (1.7) — (1.11) легко проверяются. Таким образом, набор $\mathfrak{A}$ является элементарным ковром. Однако, он не является замкнутым. Действительно, положим

$$b = t_{12}(-1)t_{21}(1)t_{12}(-1).$$

В силу построения ковра $\mathfrak{A}$ элемент b лежит в ковровой подгруппе $E(\mathfrak{A})$

$$b^{-1}t_{12}(1/x)b = t_{21}(-1/x) \in E(\mathfrak{A}),$$

поэтому $1/x \in (\overline{\mathfrak{A}_{21}})$, но $1/x$ не содержится в группе $\mathfrak{A}_{21} = B$. Следовательно, исходный ковер не является замкнутым.

В параграфе 1.4 пример 1.1 переносится на все группы лиева типа и для более широких классов колец.

1.2 Группы Шевалле и их подгруппы

Группы Шевалле возникают как группы автоморфизмов простых алгебр Ли, которые в свою очередь определяются системой корней. Далее Φ — приведенная неразложимая система корней ранга l, $\Pi = \{r_1, ..., r_l\}$ — множество ее фундаментальных корней, W — группа Вейля типа Φ, которая порождается фундаментальными отражениями w_{r_i}, $i = 1, ...l$. Всегда считаем, что r_1 — короткий корень и сумма $r_i + r_j, i \leq j$, является корнем тогда и только тогда, когда: $(i, j) = (l-3, l)$ или $(i,\ i+\ 1)$, $1\ \leq\ i\ \leq\ l-2$, если $\Phi = E_l; (i, j) = (1, 3)$ или $(i, i+1), 2 \leq i \leq l-1$, если $\Phi = D_l; (i, j) = (i, i+1)$ — в остальных случаях. Тогда на схеме Дынкина фундаментальные корни расположатся следующим образом (рисунки 1-7):

Рисунок 1. Схема Дынкина типа A_l

Рисунок 2. Схема Дынкина типа B_l

Рисунок 3. Схема Дынкина типа C_l

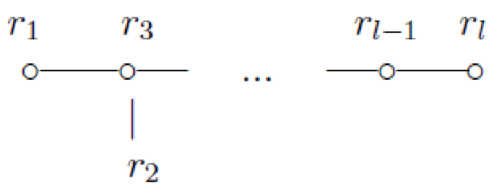

Рисунок 4. Схема Дынкина типа D_l

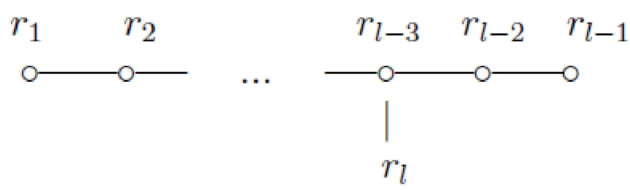

Рисунок 5. Схема Дынкина типа E_l

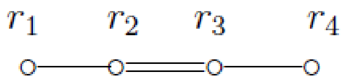

Рисунок 6. Схема Дынкина типа F_4

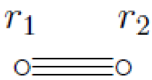

Рисунок 7. Схема Дынкина типа G_2

Системы корней ранга 2 исчерпываются следующими четырмя системами, изображенных на рисунках 8-11, причем система корней на рисунке 8 разложима.

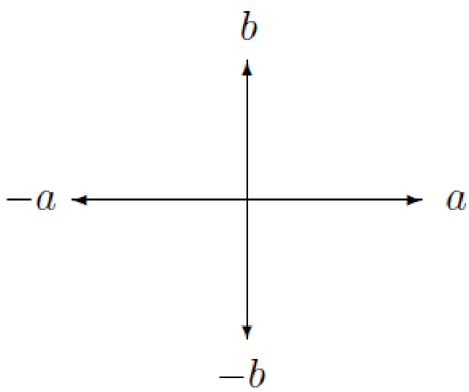

Рисунок 8. Система корней типа $A_1 \times A_1$

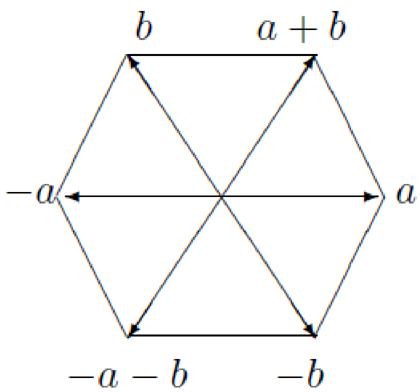

Рисунок 9. Система корней типа A_2

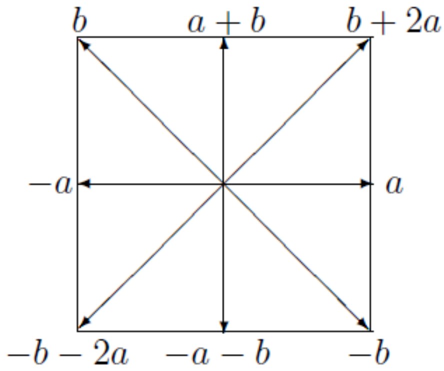

Рисунок 10. Система корней типа B_2

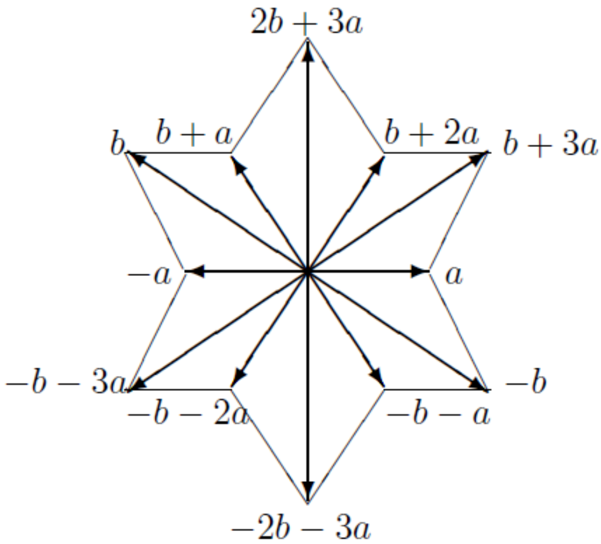

Рисунок 11. Система корней типа G_2

Через $\Phi(K)$ обозначим группу Шевалле типа Φ над полем K. Группа $\Phi(K)$ порождается своими корневыми подгруппами $X_s, s \in \Phi$. При $s \in \Phi$ имеем $X_s = x_s(K)$, где x_s — изоморфизм аддитивной группы K^+ поля K на X_s.

В группе Шевалле нормального типа для любых линейно независимых корней r, s и любых t, u из поля K справедлива коммутаторная формула Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^i), \tag{1.12}$$

где произведение берется в порядке возрастания $i + j$ по всем парам положительных целых чисел i и j, для которых $ir+js$ является корнем. Константа $C_{ij,rs}$ совпадает с одним из чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 3$.

В применении результатов по линейным группам степени 2 к группам Шевалле мы будем использовать гомоморфизм группы $SL_2(K)$ на подгруппу $\langle X_r, X_{-r} \rangle$, продолжающий отображение

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to x_r(t), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \to x_{-r}(t).$$

Пусть $t \in K^*$, где K^* — мультипликативная группа K, тогда образы матриц

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

обозначаются соответственно через $h_r(t)$ и $n_r(t)$. При этом для любых $r, s \in \Phi, t, u \in K^*$ имеем

$$n_r x_s(u) n_r^{-1} = x_{w_r(s)}(\pm u),$$

$$h_r(t) x_s(u) h_r(t^{-1}) = x_s(u t^{2(r,s)/(r,r)}),$$

где

$$n_r = n_r(1),$$

w_r — отражение относительно корня r.

Выделим некоторые подгруппы в группе $\Phi(K)$. По определению

$$U = \left\langle X_r | r \in \Phi^+ \right\rangle,$$

$$V = \left\langle X_r | r \in \Phi^- \right\rangle,$$

$$H = \langle h_r(t) | r \in \Phi, t \in K^* \rangle,$$

$$N = \langle n_r(t) | r \in \Phi, t \in K^* \rangle.$$

Эти подгруппы будем называть соответственно верхней унипотентной, нижней унипотентной, диагональной и мономиальной.

Пусть $P = Z\Phi$ — линейная оболочка системы корней Φ над кольцом целых чисел. P является свободной абелевой группой ранга l с базой, состоящей из фундаментальных корней Π. Гомоморфизм аддитивной группы P в мультипликативную группу K^* называется K-характером группы P. Таким образом, K-характер группы P есть отображение из P в K^*, удовлетворяющее условиям:

$$\chi(a+b) = \chi(a)\chi(b),\ a, b \in P;$$

$$\chi(-a) = \chi(a)^{-1}, a \in P.$$

Ясно, что K-характеры однозначно определяются своими значениями на фундаментальных корнях. С каждым K-характером χ можно связать автоморфизм $h(\chi)$ простой алгебры Ли типа Φ над полем K и все такие автоморфизмы порождают коммутативную группу $\hat{H}$, которая нормализует группу Шевалле $\Phi(K)$. Более того, для любого K-характера χ

$$h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t), \qquad r \in \Phi. \tag{1.13}$$

Диагональная подгруппа H является подгруппой группы $\hat{H}$, причем

$$h_r(t) = h(\chi), \quad \chi = \chi_{r,t}, \quad r \in \Phi, t \in K^*,$$

а

$$\chi_{r,t}(s) = t^{2(r,s)/(r,r)} \quad r \in \Phi, t \in K^*.$$

Отметим также, что через n_w будем обозначать один из прообразов элемента w из группы Вейля в мономиальной подгруппе N группы

$\Phi(K)$, коэффициенты которого лежат в простом подполе поля K.

1.3 Ковры лиева типа

Пусть Φ — приведенная, неразложимая система корней ранга l, $E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом K с единицей. Группа $E(\Phi, K)$ порождается своими корневыми подгруппами

$$X_r = x_r(K) = \{x_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in K\}.$$

Подгруппы X_r абелевы для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u). \tag{1.14}$$

Следуя В.М. Левчуку [15], назовем *ковром* типа Φ ранга l над K всякий набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\},$$

кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad \text{при } r,\ s,\ ir+js \in \Phi, \quad i,j > 0, \tag{1.15}$$

где

$$\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\},$$

а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^i), \quad r,\ s,\ r+s \in \Phi. \tag{1.16}$$

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над K определяет *ковровую подгруппу*

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \rangle,$$

группы Шевалле $E(\Phi, K)$, где $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная множеством M.

Замечание 1.1. *Условие ковровости обеспечивает следующий факт: в правой части коммутаторной формулы Шевалле каждый из сомножителей лежит в ковровой подгруппе.*

В работе Я.Н. Нужина [20] рассматривается следующий вопрос: *будет ли подгруппа M, порожденная своими пересечениями $M \cap X_r, r \in \Phi$ ковровой?*

Если $\Phi = A_l, D_l$ или E_l, то для любой пары линейно независимых корней r, s и любых $t, u \in K$

$$[x_r(t)\, x_s(u)] = \begin{cases} x_{r+s}(\pm tu), & \text{если } r+s \in \Phi, \\ \quad 1, & \text{если } r+s \notin \Phi, \end{cases}$$

и, следовательно, подгруппа M, порожденная пересечениями

$$M \cap X_r = x_r(\mathfrak{A}_r), \quad r \in \Phi,$$

является ковровой и определяется ковром аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}.$$

Однако, в общем случае, как показывают примеры 1.2 и 1.3, ответ на указанный выше вопрос отрицательный.

Пример 1.2. [20] Пусть M — подгруппа группы Шевалле типа B_2 над полем характеристики 2, порожденная двумя корневыми элементами $x_a(1)$ и $x_b(1)$, где a и b — фундаментальные корни. Так как в этом случае корневые элементы $x_a(1)$ и $x_b(1)$ являются инволюциями и их произведение имеет порядок 4, то M является диэдральной группой порядка 8. Коммутатор этих корневых элементов совпадает с квадратом произведения и

$$[x_a(1), x_b(1)] = x_{a+b}(1)x_{2a+b}(1),$$

но по отдельности элементы $x_{a+b}(1)$ и $x_{2a+b}(1)$ не лежат в M и, следовательно, M не является ковровой подгруппой.

Пример 1.3. Пусть M — подгруппа группы Шевалле типа G_2 над полем из трех элементов $\mathbb{F}_3$, порожденная двумя корневыми элементами $x_a(1)$ и $x_b(1)$, где a и b — фундаментальные корни, $M = \langle x_a(1), x_b(1)\rangle$. Тогда

$$[x_a(1), x_b(1)] = x_{a+b}(\varepsilon_1)x_{2a+b}(\varepsilon_2)x_{3a+b}(\varepsilon_3)x_{3a+2b}(\varepsilon_4)$$

для некоторых $\varepsilon_i = \pm 1$. Покажем, что по отдельности элементы $x_{a+b}(\varepsilon_1)$ и $x_{3a+b}(\varepsilon_3)$ не лежат в M. Очевидно, любой диагональный элемент $h(\chi)$ (см. параграф 1.2) из группы Шевалле $G_2(\mathbb{F}_3)$ нормализует группу M. Отметим также, что для типа G_2 расширенная группа Шевалле совпадает с элементарной группой. Любой $\mathbb{F}_3$-характер χ однозначно задается значениями на фундаментальных корнях и для любых $r \in \Phi$ и $t \in \mathbb{F}_3$

$$h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t).$$

Пусть $\chi(a) = \chi(b) = -1$. Тогда

$$h(\chi)[x_a(1), x_b(1)]h(\chi)^{-1} = x_{a+b}(\varepsilon_1)x_{2a+b}(-\varepsilon_2)x_{3a+b}(\varepsilon_3)x_{3a+2b}(-\varepsilon_4).$$

Следовательно, в M лежат произведения

$$x_{a+b}(\varepsilon_1)x_{3a+b}(\varepsilon_3) \quad \text{и} \quad x_{2a+b}(\varepsilon_2)x_{3a+2b}(\varepsilon_4).$$

Полагая $\chi(a) = 1$, $\chi(b) = -1$, получаем

$$h(\chi)x_{2a+b}(\varepsilon_2)x_{3a+2b}(\varepsilon_4)h(\chi)^{-1} = x_{2a+b}(-\varepsilon_2)x_{3a+2b}(\varepsilon_4).$$

Следовательно, в M лежат оба корневые элементы $x_{2a+b}(\varepsilon_2)$ и $x_{3a+2b}(\varepsilon_4)$. Подгруппа M_1, порожденная этими двумя корневыми элементами вместе с произведением $x_{a+b}(\varepsilon_1)x_{3a+b}(\varepsilon_3)$, является нормальной элементарной абелевой подгруппой порядка 27. Это вытекает из следующих равенств:

$$[x_a(1), x_{2a+b}(1)] = x_{3a+b}(\pm 3) = 1,$$

$$[x_a(1), x_{3a+b}(1)] = 1,$$

$$[x_a(1), x_{a+b}(\varepsilon_1)x_{3a+b}(\varepsilon_3)] = x_{2a+b}(\pm 2)x_{3a+b}(\pm 3)x_{3a+2b}(\pm 3) = x_{2a+b}(\pm 1),$$

$$[x_b(1), x_{2a+b}(1)] = 1,$$

$$[x_b(1), x_{3a+2b}(1)] = 1,$$

$$[x_b(1), x_{a+b}(\varepsilon_1)x_{3a+b}(\varepsilon_3)] = x_{3a+2b}(\pm 1).$$

Таким образом, произведение $x_{a+b}(\varepsilon_1)x_{3a+b}(\varepsilon_3)$ в группе M не расщепляется, то есть по отдельности элементы $x_{a+b}(\varepsilon_1)$ и $x_{3a+b}(\varepsilon_3)$ не лежат в M. Следовательно, в силу замечания 1.1 условия ковровости нарушаются и поэтому группа M не является ковровой.

По произвольному ковру $\mathfrak{A}$ типа Φ вводим новый набор аддитивных подгрупп

$$\overline{\mathfrak{A}} = \{\overline{\mathfrak{A}}_r \mid r \in \Phi\},$$

где

$$\overline{\mathfrak{A}}_r = \{t \in K \mid x_r(t) \in E(\Phi, \mathfrak{A})\},$$

и называем его *замыканием* ковра $\mathfrak{A}$. Элементарный ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ ранга l называется *замкнутым* (в статье В. М. Левчука *допустимым*[15]), если его ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, то есть, если $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}$.

1.4 Примеры неприводимых незамкнутых ковров

Приняты следующие обозначения: $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $A+B$ — подгруппа, порожденная аддитивными подгруппами A, B некоторого кольца.

Назовем ковер типа Φ неприводимым (унипотентным), если все его аддитивные подгруппы ненулевые (соответственно нулевые все аддитивные подгруппы, индексированные отрицательными корнями). Любой ковер типа Φ над полем является объединением унипотентного ковра и определенного числа неприводимых ковров, соответствующих неразложимым подсистемам корней системы Φ [16, лемма 2]. Всякий унипотентный ковер замкнут, поэтому первостепенный интерес вызывают неприводимые ковры.

В.А. Койбаев указал пример незамкнутого неприводимого ковра типа A_l над полем рациональных функций [11]. В диссертации построены примеры незамкнутых неприводимых ковров любого типа Φ над различными коммутативными кольцами. В этих примерах все подковры $\{\mathfrak{A}_r,\ \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1 замкнутые, за исключением лишь одного. Поэтому данные примеры являются предельными в связи со следующим известным вопросом В.М.Левчука [14, вопрос 15.46].

Верно ли, что для замкнутости ковра $\mathfrak{A}$ типа Φ над полем K необходима и достаточна замкнутость его подковров $\{\mathfrak{A}_r,\ \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1?

Основным результатом является

Теорема 1.1. *Пусть K — коммутативное кольцо с единицей 1, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел и пусть в K существуют ненулевой идеал I и аддитивная подгруппа J такие, что $\mathbb{Z}+I \neq \mathbb{Z}+I+J$. Тогда для лю-*

бой системы корней Φ существует неприводимый незамкнутый ковер типа Φ над K.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть K — коммутативное кольцо с единицей 1, обладающее ненулевым идеалом I и аддитивной подгруппой J такими, что

$$\mathbb{Z} + I \neq \mathbb{Z} + I + J. \tag{1.17}$$

Для системы корней Φ ранга $l \geq 2$ определим набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\} \tag{1.18}$$

следующим образом. Фиксируем корень $p \in \Phi$ и полагаем

$$\mathfrak{A}_p = \mathbb{Z} + I,$$

$$\mathfrak{A}_{-p} = \mathbb{Z} + I + J,$$

$$\mathfrak{A}_r = I,\ r \neq \pm p.$$

Покажем, что набор $\mathfrak{A}$ является ковром. Для сокращения записи положим

$$A = \mathbb{Z} + I,$$

$$B = \mathbb{Z} + I + J.$$

Если сумма $r+s$ корней r, s является корнем, то все три корня $r, s, r+s$ лежат в некоторой подсистеме корней Φ_2 ранга 2 системы Φ. Поэтому достаточно проверить условия ковровости для систем корней типа A_2, B_2 и G_2. Пусть $\{a, b\}$ — фундаментальная система для Φ_2.

Для типа A_2 коммутаторная формула имеет вид

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu). \tag{1.19}$$

При $p = a$ формула (1.19) и условие ковровости дают следующие шесть импликаций:

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b} \Rightarrow AI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_a \Rightarrow II \subseteq A,$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b} \Rightarrow BI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_b \Rightarrow BI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-b} \Rightarrow AI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{-a} \Rightarrow II \subseteq B.$$

Так как идеал I лежит в пересечении $A \cap B$, то включения, указанные в правой части этих шести импликаций, выполняются. Для других $p \in \Phi_2$ ситуация подобная. Если $p \notin \Phi_2$, то формула (1.19) и условие ковровости дают импликацию

$$\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_s \subseteq \mathfrak{A}_{r+s} \Rightarrow II \subseteq I,$$

которая справедлива, так как I — идеал. Включение $II \subseteq I$, очевидно, выполняется.

Для типа B_2 имеется два вида коммутаторной формулы:

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u), \tag{1.20}$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu). \tag{1.21}$$

При $p = a$ формула (1.20) дает следующие восемь импликаций:

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b} \Rightarrow AI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \Rightarrow A^2I \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b} \Rightarrow BI \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{-a}^2\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \Rightarrow B^2I \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_a \Rightarrow II \subseteq A,$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}^2\mathfrak{A}_{-b} \subseteq_{2a+b} \Rightarrow I^2I \subseteq I,$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{-a} \Rightarrow I \subseteq B,$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \Rightarrow I^2I \subseteq I,$$

При $p = a$ формула (1.21) дает еще четыре импликаций:

$$2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \Rightarrow 2AI \subseteq I,$$

$$2\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_b \Rightarrow 2BI \subseteq I,$$

$$2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-b} \Rightarrow 2AI \subseteq I,$$

$$2\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b} \Rightarrow 2BI \subseteq I.$$

Так же, как и для типа A_2, включения, указанные в правых частях всех таких импликаций, выполняются в силу того, что идеал I лежит в пересечении $A \cap B$. Случай $p \neq a$ рассматривается аналогично.

Для типа G_2 имеется четыре вида коммутаторной формулы

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u)x_{3a+b}(\pm t^3u)x_{3a+2b}(\pm t^3u^2), \quad (1.22)$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu)x_{3a+2b}(\pm 3tu^2)x_{3a+b}(\pm 3t^2u), \quad (1.23)$$

$$[x_a(t), x_{2a+b}(u)] = x_{3a+b}(\pm 3tu), \quad (1.24)$$

$$[x_b(t), x_{3a+b}(u)] = x_{3a+2b}(\pm tu). \quad (1.25)$$

Мы не будем подробно выписывать условия ковровости для этого типа. В силу формул (1.22) — (1.25) для подходящих $n, m, c \in \{1, 2, 3\}$ все они имеют вид

$$cA^nI^m \subseteq X,$$

$$cB^nI^m \subseteq X,$$

$$cI^nI^m \subseteq X$$

(как, впрочем, и для типов A_2 и B_2), где X есть A, B или I. Они выполняются снова только в силу того, что идеал I лежит в пересечении $A \cap B$. Таким образом, набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}$ является ковром.

Покажем незамкнутость ковра $\mathfrak{A}$. В силу неравенства (1.17) в кольце K существует элемент t такой, что $t \in \mathfrak{A}_{-p}$, но $t \notin \mathfrak{A}_p$. Так как $1 \in \mathfrak{A}_p \cap \mathfrak{A}_{-p}$, то

$$n_p = x_p(1)x_{-p}(-1)x_p(1) \in E(\sigma).$$

Отсюда

$$n_p^{-1}x_{-p}(t)n_p = x_p(-t) \in E(\sigma)$$

и, следовательно, ковер $\mathfrak{A}$ не является замкнутым.

Теорема доказана.

В теореме 1.1 случай G_2 рассмотрен автором диссертации лично, а остальные типы получены в неразделимом соавторстве с А.О. Лихачевой и Я.Н. Нужиным, исключая тип F_4, который рассмотрен А.О. Лихачевой [29].

Следующий пример показывает, что множество колец, удовлетворяющих условию теоремы 1.1, не пусто.

Пример 1.4. Тройка $K = F[x]$, I, $J = \mathbb{Z}x$ удовлетворяет предположению теоремы 1.1, где $F[x]$ — кольцо многочленов над полем F, I — его идеал, порожденный некоторым многочленом степени не меньше 2.

2 Описание ковров над локально конечными полями

В этой главе доказано, что любой ковер $\mathfrak{A}$ ненулевых аддитивных подгрупп, ассоциированный с группой Шевалле лиева ранга больше единицы над локально конечным полем, с точностью до сопряжения диагональным элементом совпадает с ковром, все аддитивные подгруппы которого равны некоторому фиксированному подполю основного поля, в частности, ковер $\mathfrak{A}$ замкнут. Аналогичный результат получен также для полного матричного ковра любого ранга (степени).

2.1 Предварительные результаты

Здесь и далее мы используем обозначения для подгрупп и элементов групп Шевалле, введенные в параграфах 1.2 и 1.3.

Для доказательства основной теоремы данной главы нам потребуются следующие ключевые леммы.

Лемма 2.1. *Сопрягая диагональным элементом $h(\chi)$ ковровую подгруппу $E(\Phi,\mathfrak{A})$ получим ковровую подгруппу*

$$h(\chi)E(\Phi,\mathfrak{A})h(\chi)^{-1} = E(\Phi,\mathfrak{A}'),$$

определяемую ковром $\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A}'_r \mid r \in \Phi\}$, где $\mathfrak{A}'_r = \chi(r)\mathfrak{A}_r$.

Доказательство. В силу (1.13) группа $h(\chi)E(\Phi,\mathfrak{A})h(\chi)^{-1}$ порождается подгруппами $x_r(\chi(r)\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$. Очевидно, условие ковровости (1.15) дает включения

$$C_{ij,rs}\chi(r)^i\mathfrak{A}_r^i\chi(s)^j\mathfrak{A}_s^j \subseteq \chi(r)^i\chi(s)^j\mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r, s, ir+js \in \Phi,\ i,j>0.$$

Отсюда, в силу определения аддитивных подгрупп $\mathfrak{A'}_r$, $r \in \Phi$ и равенства $\chi(r)^i\chi(s)^j = \chi(ir+js)$ получаем условие ковровости

$$C_{ij,rs}(\mathfrak{A}'_r)^i(\mathfrak{A'}_s)^j \subseteq \mathfrak{A'}_{ir+js}, \quad r,s,ir+js \in \Phi,\ i,j>0,$$

для набора аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}'$.

Лемма доказана.

Из леммы 2.1 следует, что мы можем говорить о сопряжении исходного ковра $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$, при этом получаем новый ковер $\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A'}_r \mid r \in \Phi\}$, где $\mathfrak{A'}_r = \chi(r)\mathfrak{A}_r$. Причем можно не ассоциировать эти ковры с ковровыми подгруппами, а исследовать ковры, используя только условия ковровости. Так как, если ковер незамкнут, то в ковровой подгруппе появятся новые корневые элементы и пересечения $E(\Phi,\mathfrak{A}) \cap X_r = x_r(\mathfrak{B}_\mathfrak{r})$ определяют набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_r \mid r \in \Phi\}$, про который неизвестно, будет ли он в общем случае ковром или нет. В этом состоит следующий вопрос Я.Н. Нужина из Коуровской тетради [14, вопрос 19.61].

Всегда ли замыкание $\overline{\mathfrak{A}}$ ковра $\mathfrak{A}$ является ковром? Известно, что ответ положителен, если $\Phi = A_l, D_l, E_l$ или $\Phi = B_l, C_l, F_4$ и $charK >\ 2$ или $\Phi = G_2$ и $charK > 3$.

Лемма 2.2. *[25, стр. 50] Любой положительный корень $r \in\ \Phi^+$ может быть представлен в виде суммы фундаментальных корней $r = r_{i_1}+r_{i_2}+\cdots+r_{i_k}$ таким образом, что $r_{i_1}+r_{i_2}+\cdots+r_{i_s}$ является корнем для всех $s \leq k$.*

Лемма 2.3. *Пусть $\{a, b\}$ — фундаментальная система корней для системы корней Φ типа A_2, B_2 или G_2, $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ —*

неприводимый ковер типа Φ *над локально конечным полем* K, *причем* $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. *Тогда* $\mathfrak{A}_r = P$, $r \in \Phi$, *для некоторого подполя* P *поля* K.

Доказательство. В силу следствия 3.2 из [16] достаточно рассмотреть следующие три случая: 1) Φ типа B_2 и $char K = 2$; 2) Φ типа G_2 и $char K = 2$; 3) Φ типа G_2 и $char K = 3$.

Пусть Φ типа B_2 и $char K = 2$. Тогда

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(tu)x_{2a+b}(t^2u). \tag{2.1}$$

Условия ковровости, возникающие из формул типа (2.1), дают следующие пары включений

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}, \quad \mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}, \tag{2.2}$$

$$\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_a, \quad \mathfrak{A}_{-a-b}^2\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{-b}, \tag{2.3}$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}, \quad \mathfrak{A}_{-a}^2\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_b, \tag{2.4}$$

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b}, \quad \mathfrak{A}_{-a}^2\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b}. \tag{2.5}$$

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_a, \quad \mathfrak{A}_{a+b}^2\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}. \tag{2.6}$$

Из предположения $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$ и включений (2.5) следует, что $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех отрицательных корней r. Отсюда и из включений (2.3) и (2.4) получаем включение

$$\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_a \cap \mathfrak{A}_{-b} \cap \mathfrak{A}_{a+b} \cap \mathfrak{A}_b. \tag{2.7}$$

Сейчас из включений (2.2), (2.6) и (2.7) последовательно выводится, что всякая степень любого элемента $t \in \mathfrak{A}_{2a+b}$ лежит в $\mathfrak{A}_{2a+b}$. Таким образом, все многочлены от t с коэффициентами в простом подполе $\mathbb{F}_2$ содержатся в $\mathfrak{A}_{2a+b}$ для любого элемента $t \in \mathfrak{A}_{2a+b}$. Так как любое подкольцо локально конечного поля является полем, то $\mathfrak{A}_{2a+b}$ есть объединение конечных полей. Для любого конечного поля характеристики 2 возведение в квадрат является его автоморфизмом, поэтому заключаем, что $\mathfrak{A}_{2a+b}^2 = \mathfrak{A}_{2a+b}$. Отсюда и в силу включений (2.2) и (2.7) получаем

$$\mathfrak{A}_{2a+b}\mathfrak{A}_{2a+b} = \mathfrak{A}_{2a+b}^2\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}.$$

Следовательно, $\mathfrak{A}_{2a+b}$ — поле. Сейчас из включений (2.2)–(2.5) следует, что все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, индексированные длинными корнями, совпадают с некоторым подполем P поля K. В силу включения $1 \in \mathfrak{A}_b \cap \mathfrak{A}_{-b}$ из (2.2) и (2.6) получаем равенство $\mathfrak{A}_{a+b} = \mathfrak{A}_a$. Ситуация симметричная, поэтому совпадают все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, соответствующие коротким корням. Сейчас из (2.2) следуют включения $\mathfrak{A}_a^2 \subseteq P \subseteq \mathfrak{A}_a$. Далее так же как и для $\mathfrak{A}_{2a+b}$ получаем, что $\mathfrak{A}_a^2 = \mathfrak{A}_a$. Отсюда $\mathfrak{A}_r = P$ для всех $r \in \Phi$.

Пусть Φ типа G_2. Нам потребуются два типа коммутаторных формул

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u)x_{3a+b}(\pm t^3u)x_{3a+2b}(\pm t^3u^2), \quad (2.8)$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu)x_{3a+b}(\pm 3t^2u)x_{3a+2b}(\pm 3tu^2). \quad (2.9)$$

Условия ковровости, возникающие из формул (2.8) и (2.9), дают соответственно следующие серии включений

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}, \quad \mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}, \quad \mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}, \quad \mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b^2 \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}, \quad (2.10)$$

$$2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}, \quad 3\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}, \quad 3\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b}^2 \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}. \quad (2.11)$$

Длинные корни из Φ составляют систему корней типа A_2 с фундаментальной системой $\{b, 3a+b\}$. По условию леммы $1 \in \mathfrak{A}_{-b}$, а включение $1 \in \mathfrak{A}_{-3a-b}$ следует из $\mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}$, только для отрицательный корней. Поэтому независимо от характеристики поля K все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, индексированные длинными корнями, совпадают с некоторым подполем P поля K в силу справедливости леммы для типа A_2.

Из включений типа $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ следует совпадение всех аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}_r$, соответствующие коротким корням, а затем и включения $P \subseteq \mathfrak{A}_r$.

Если $charK = 2$, то из $3\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}$ получаем $\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq P$. Следовательно, $\mathfrak{A}_r = P$ для всех $r \in \Phi$.

Если $charK = 3$, то из $\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ следует, что $\mathfrak{A}_a^2 \subseteq \mathfrak{A}_a$. Отсюда несложно получить, что $\mathfrak{A}_a$ является полем, причем $\mathfrak{A}_a^3 = \mathfrak{A}_a$. Наконец, из $\mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b^2 \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}$ получаем $\mathfrak{A}_a^3 = \mathfrak{A}_a \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}$. Следовательно, $\mathfrak{A}_r = P$ для всех $r \in \Phi$.

Лемма доказана.

2.2 Основная теорема и ее доказательство

В [16, стр. 511] указаны необходимые и достаточные условия замкнутости ковра аддитивных подгрупп любого типа Φ над локально конечным полем (алгебраическим расширением конечного поля). Следующая теорема, в частности, устанавливает, что любой неприводимый ковер ранга больше 1 над локально конечным полем замкнут.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа Φ ранга $l \geq 2$ над локально конечным полем K. Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из расширенной группы Шевалле $\Phi(K)$ все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, совпадают с некоторым подполем P поля K, в частности, ковер $\mathfrak{A}$ замкнут.*

Утверждение теоремы 2.1 отмечается в [16, следствие 3.2] в качестве следствия, исключая следующие случаи:

1) Φ типа B_l $(l \geq 2)$, C_l $(l \geq 2)$, F_4 и $charK = 2$;

2) Φ типа G_2 и $charK$ равна 2 или 3.

Переход к произвольному лиеву рангу от ранга 2 в [16] отсутствует, поэтому мы воспроизводим его для всех случаев.

В силу [24, теорема 9, стр. 69] соотношений (1.14) и (1.16) достаточно для определения универсальной группы Шевалле ранга $l \geq 2$ над локально конечным полем. Заметим, что из соотношения (1.14) возникают аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, а условие ковровости (1.15) происходит из коммутаторной формулы (1.16). Следовательно, теорема 2.1 утверждает, в частности, что в указанных предположениях любая ковровая подгруппа изоморфна группе Шевалле того же типа над некоторым подполем основного локально конечного поля. В 1901 году Л. Диксон доказал, что для любого нечетного $q \neq 9$, являющегося степенью простого числа, группа $SL_2(q)$ порождается двумя матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

если t порождает основное поле [26]. Следовательно, ограничение $l \geq 2$ в предложении 1.2 является существенным, так как любая пара аддитивных подгрупп основного кольца является ковром лиева ранга 1 (матричным элементарным ковром степени 2).

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\mathfrak{A}$, Φ и K такие как в теореме 2.1, $\Pi = \{r_1, \ldots, r_l\}$ — фундаментальная система корней для Φ, Φ^+ — множество положительных корней из Φ. В силу (1.13) и леммы 2.1 с точностью до сопряжения диагональным элементом из $\widehat{G}(\Phi, K)$ можно считать, что $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Pi$. Для ранга $l = 2$ утверждение теоремы следует из леммы 2.3, поэтому далее считаем, что $l \geq 3$.

Если корни $r_i, r_j \in \Pi$ являются соседними в графе Кокстера, соответствующего системе корней Φ, то пересечение $\Phi \cap (\mathbb{Z}r_i + \mathbb{Z}r_j)$ является подсистемой корней типа A_2 или B_2. Обозначим ее через Φ_{ij}. По лемме 2.3 существует подполе P_{ij} поля K такое, что $\mathfrak{A}_r = P_{ij}$ для всех $r \in \Phi_{ij}$, в частности, $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Pi \cup (-\Pi)$. Более того, в силу связности графа Кокстера все подполя P_{ij} совпадают. Обозначим это единственное подполе через P.

Покажем, что все $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, совпадают с подполем P. Возьмем произвольный корень $r \in \Phi^+$. По лемме 2.2 $r = r_{i_1} + r_{i_2} + \cdots + r_{i_k}$, где $r_{i_1} + r_{i_2} + \cdots + r_{i_s}$ является корнем для всех $s \leq k$. Таким образом, существуют корни $s \in \Phi^+$ и $r_i \in \Pi$ такие, что $r = s + r_i$. Отсюда в силу условия ковровости (1.15) получаем включения

$$C_{11,r_i,s}\mathfrak{A}_{r_i}\mathfrak{A}_s = N_{r_i,s}\mathfrak{A}_{r_i}\mathfrak{A}_s \subseteq \mathfrak{A}_r, \tag{2.12}$$

$$C_{11,-r_i,r}\mathfrak{A}_{-r_i}\mathfrak{A}_r = N_{-r_i,r}\mathfrak{A}_{-r_i}\mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_s, \tag{2.13}$$

где $N_{r,s}$ — структурные константы соответствующей алгебры Ли и в данном случае (при $l \geq 3$) они равны ± 1 или ± 2.

Пусть $N_{r_i,s}$ и $N_{-r_i,r}$ отличны от нуля в поле K. Тогда, учитывая, что $1 \in \mathfrak{A}_{r_i} \cap \mathfrak{A}_{-r_i}$, из включений (2.12) и (2.13) получаем равенство $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_s$. Индукция по высоте корней приводит к равенству $\mathfrak{A}_r = P$ для всех положительных корней r. Аналогично получаем такое же равенство и для отрицательных корней.

При $l \geq 3$ константы $N_{r_i,s}$ и $N_{-r_i,r}$ из (2.12) и (2.13) могут равняться нулю только когда корни r_i, s, r лежат в подсистеме корней типа B_2 и $char K = 2$. Поэтому остается рассмотреть только типы B_l, C_l и F_4 в характеристике 2.

Пусть Φ типа B_l, $l \geq 3$, причем корень $r_1 \in \Pi$ короткий (остальные корни из Π длинные). Тогда для любого корня $r \in \Phi^+$ выполняется одно из следующих условий: 1) $r = 2r_1 + r_2$; 2) существуют корни $s \in \Phi^+$ и

$r_i \in \Pi$ такие, что $r = s + r_i$ и корни s и r_i порождают подсистему корней типа A_2 или B_2, причем в случае B_2 корень r_i длинный. Справедливость выполнения одного из условий 1) или 2) следует из вида положительных корней. Они исчерпываются тремя видами:

$r_1 + \cdots + r_i$ $(1 \leq i \leq l)$ — короткие корни;

$r_2 + \cdots + r_i$ $(2 \leq i \leq l)$ — длинные корни;

$2r_1 + \cdots + 2r_i + r_{i+1} + \cdots + r_j$ $(1 \leq i \leq l-1,\ i < j \leq l)$ — длинные корни.

В случае 1) сразу получаем равенство $\mathfrak{A}_r = P$ по лемме 2.3. В случае 2) константы $N_{r_i,s}$ и $N_{-r_i,r}$ из (2.12) и (2.13) равны ± 1, а следовательно, так же как и выше по индукции получаем равенство $\mathfrak{A}_r = P$. Аналогичное равенство получаем для любого отрицательного корня r.

Пусть Φ типа C_l, $l \geq 3$, причем корень $r_l \in \Pi$ длинный (остальные корни из Π короткие). Положительные корни исчерпываются следующими тремя видами:

$r_i + \cdots + r_j$ $(1 \leq i \leq l-1,\ 1 \leq j \leq l)$ — короткие корни;

$r_i + 2r_{i+1} + \cdots + 2r_j + r_{j+1}$ $(1 \leq i \leq l-2,\ 2 \leq j \leq l-1)$ — короткие корни;

r_l, $2r_i + \cdots + 2r_{l-1} + r_l$ $(1 \leq i \leq l-1)$ — длинные корни.

Поэтому для любого короткого корня $r \in \Phi^+$ выполняется одно из следующих условий: 1) $r = r_{l-1} + r_l$; 2) существуют короткие корни $s \in \Phi^+$ и $r_i \in \Pi$ такие, что $r = s + r_i$ и корни s и r_i порождают подсистему корней типа A_2. В случае 1) сразу получаем равенство $\mathfrak{A}_r = P$ по лемме 2.3. В случае 2) константы $N_{r_i,s}$ и $N_{-r_i,r}$ из (2.12) и (2.13) равны ± 1, а, следовательно, так же как и выше по индукции получаем равенство $\mathfrak{A}_r = P$. Аналогичное равенство получаем для любого отрицательного короткого корня r. Так как $\mathfrak{A}_{2r_{l-1}+r_l} = \mathfrak{A}_{r_l} = P_{l-1,l} = P$, то последовательно с применением леммы 2.3 получаем, что и все $\mathfrak{A}_r$, индексированные остальными длинными корнями $2r_{l-2} + 2r_{l-1} + r_l, \dots, 2r_1 + \dots + 2r_{l-1} + r_l$, также совпадают с P.

Наконец, пусть Φ типа F_4 с фундаментальной системой

$$\Pi = \{r_1, r_2, r_3, r_4\},$$

причем корни r_1, r_2 — короткие и $r_2 + r_3 \in \Phi$. Тогда для любого короткого корня $r \in \Phi^+$ выполняется одно из следующих условий:

1) r лежит в подсистеме корней типа C_3 с базисом $\{r_1, r_2, r_3\}$;

2) r лежит в подсистеме корней типа B_3 с базисом $\{r_2, r_3, r_4\}$;

3) r равен $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$, $r_1 + 2r_2 + r_3 + r_4$, $r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4$, $r_1 + 3r_2 + 2r_3 + r_4$ или $2r_1 + 3r_2 + 2r_3 + r_4$.

В случаях 1), 2) уже установлено, что $\mathfrak{A}_r = P$. В случае 3) существуют корни $s \in \Phi^+$ и $r_i \in \Pi$ такие, что $r = s + r_i$ и корни s и r_i порождают подсистему корней типа A_2 или B_2, причем в случае B_2 корень r_i длинный. Далее также как и для Φ типа C_l получаем равенство $\mathfrak{A}_r = P$ для всех корней $r \in \Phi$.

Теорема доказана.

Замечание 2.1. *В доказательстве теоремы 2.1 типы B_l и C_l рассматривались по отдельности, несмотря на то, что группы Шевалле $B_l(K)$ и $C_l(K)$ над совершенным полем K характеристики 2 изоморфны и любое локально конечное поле совершенно. Дело в том, что изначально ковер типа Φ над K определяется простой алгеброй Ли типа Φ над K, а алгебры типа B_l и C_l при $l \geq 3$ над любым полем не являются изоморфными.*

2.3 Полный матричный ковер над локально конечным полем

Здесь мы используем обозначения и определения из параграфа 1.1.

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ *— полный неприводимый матричный ковер степени* $n \geq 2$ *над локально конечным полем* K*. Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из* $GL_n(K)$ *все аддитивные подгруппы* $\mathfrak{A}_{ij}$*,* $1 \leq i, j \leq n$*, совпадают с некоторым подполем* P *поля* K*.*

Доказательство теоремы 2.2. При $n \geq 3$ теорема 2.2 является следствием теоремы 2.1. Действительно, если $n > 3$, то по теореме 2.1 с точностью до сопряжения диагональной матрицей из $GL_n(K)$ все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_{ij}$ при $1 \leq i \neq j \leq n$, совпадают с некоторым подполем P поля K.

Далее, при $i \neq j$ из условия ковровости

$$P\mathfrak{A}_{jj} = \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{jj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij} = P \text{и} PP \ = \ \mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{A}_{ij} \subseteq \mathfrak{A}_{jj}$$

следует равенство $\mathfrak{A}_{jj} = P$. Таким образом, все $\mathfrak{A}_{ij}$, $1 \ \leq \ i, \ j \leq \ n$, совпадают с подполем P.

Пусть $n = 2$. С точностью до сопряжения диагональной матрицей из $GL_2(K)$ можно считать, что $1 \in \mathfrak{A}_{21}$. Пусть $i \neq j$, $i, j = 1, 2$. Условие ковровости состоит их трех типов включений

$$\mathfrak{A}_{ii}\mathfrak{A}_{ii} \subseteq \mathfrak{A}_{ii}, \tag{2.14}$$

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{jj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \tag{2.15}$$

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji} \subseteq \mathfrak{A}_{ii}. \tag{2.16}$$

Из (2.14) следует, что $\mathfrak{A}_{11}$ и $\mathfrak{A}_{22}$ являются кольцами, а в силу локальной конечности поля K, — полями. Учитывая, что $1 \in \mathfrak{A}_{21}$, включения $\mathfrak{A}_{11}, \mathfrak{A}_{22} \subseteq \mathfrak{A}_{21}$ следуют из (2.15), а включение $\mathfrak{A}_{12} \subseteq \mathfrak{A}_{11} \cap \mathfrak{A}_{22}$ — из (2.16). Сейчас в силу (2.15) $\mathfrak{A}_{12}$ — поле. Отсюда и из (2.16) получаем включения $\mathfrak{A}_{21} \subseteq \mathfrak{A}_{11} \cap \mathfrak{A}_{22}$, а из (2.15) — включения $\mathfrak{A}_{11}, \mathfrak{A}_{22} \subseteq \mathfrak{A}_{12}$. Следовательно, $\mathfrak{A}_{12} = \mathfrak{A}_{21} = \mathfrak{A}_{11} = \mathfrak{A}_{22}$.

Теорема доказана.

Теоремы 2.1 и 2.2 получены в неразделимом соавторстве с В.А. Койбаевым, А.О. Лихачевой и Я.Н. Нужиным, случай G_2 рассмотрен автором диссертации лично, а тип F_4 получен А.О. Лихачевой [30].

3 Ковры типа G_2 над полями

В данной главе описаны неприводимые ковры типа G_2 над полем K характеристики $p > 0$, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R-модулем, в том случае, когда K — алгебраическое расширение поля R.

3.1 Примеры неприводимых ковров, параметризуемых двумя различными полями

Поле F характеристики $p > 0$ называется *совершенным*, если поле F^p совпадает с полем F, где $F^p = \{f^p \mid f \in F^p\}$. В противном случае поле называется *несовершенным*. Напомним также, что поле K называется *алгебраическим расширением* поля F, когда любой элемент из K является корнем некоторого многочлена с коэффициентами из поля F. Хорошо известно, что любое конечное расширение произвольного поля является его алгебраическим расширением.

Далее, как обычно, $F(t,u)$ — поле рациональных функций, $F[t,u]$ — кольцо многочленов от переменных t, u, то есть

$$F(t,u) = \left\{ \frac{f}{g} \;\mid\; f, g \in F[t,u] \right\}.$$

Если элементы t, u алгебраически независимы над F, то

$$(F(t,u))^p = F(t^p, u^p) \neq F(t,u)$$

и, стало быть, поле $F(t,u)$ несовершенно. Укажем вместе с некоторыми пояснениями следующее упражнение из книги С.Ленга [17, стр. 217], которое будет полезно при построении неприводимых ковров, параметризуемых двумя различными полями.

Пример 3.1. Пусть F — поле характеристики p и пусть t, u алгебраически независимы над F. Тогда:

(1) Степень расширения поля $F(t, u)$ над $F(t^p, u^p)$ равна p^2.

(2) Между $F(t, u)$ и $F(t^p, u^p)$ существует бесконечно много расширений.

Решение (1) Мономы $t^i u^j, \quad i, j = 0, 1, ..., p-1$ линейно независимы над $F(t^p, u^p)$ и составляют базис пространства $F(t, u)$ над $F(t^p, u^p)$.

(2) Проведем подробные выкладки только при $p = 2$. Итак, пусть $p = 2$. Тогда элементы $1, t, u, tu$ составляют базис пространства $F(t, u)$ над $F(t^2, u^2)$. Пусть $f(u)$ и $g(u)$ многочлены ненулевой степени от переменной u над полем $F(t^2, u^2)$. Очевидно, они имеют первую степень. (В общем случае степень этих многочленов заключена между единицей и $p-1$). Поэтому

$$f(u) = a + bu,$$

$$g(u) = c + du$$

для подходящих $a, b, c, d \in F(t^2, u^2)$. Присоединив независимо к полю $F(t^2, u^2)$ полиномы $tf(u)$ и $tg(u)$, получим поля $F(t^2, u^2)(tf(u))$ и $F(t^2, u^2)(tg(u))$ соответственно, которые имеют степень расширения 2 над полем $F(t^2, u^2)$. Предположим, что

$$F(t^2, u^2)tf(u) = F(t^2, u^2)tg(u) \tag{3.1}$$

Тогда существуют такие полиномы $f_i = f_i(t^2, u^2), i = 1, 2, 3$ из кольца $F[t^2, u^2]$, что

$$f_1 tg(u) = f_2 tf(u) + f_3,$$

поскольку $F(t^2, u^2)$ есть поле дробей кольца $F[t^2, u^2]$. Очевидно. что $f_3 = 0$, а полиномы f_1 и f_2 ненулевые. Таким образом,

$$f_1(c + du) = f_2(a + bu)$$

и, следовательно, мы имеем следующую систему относительно неизвестных f_1 и f_2

$$\begin{cases} cf_1 + af_2 = 0; \\ df_1 + bf_2 = 0. \end{cases}$$

Данная система не имеет ненулевых решений относительно неизвестных f_1 и f_2 при $ad \neq bc$. Так как поле $F(t^2, u^2)$ бесконечно, то различных пар (a, b) и (c, d) с условием $ad \neq bc$ существует бесконечное число. Это становится совсем очевидно, если положить, например, $b = d = 1$. Существование бесконечного числа таких пар влечет бесконечность промежуточных расширений между $F(t^2, u^2)$ и $F(t, u)$.

Пример 3.2. Пусть F, p, t, u такие же, как и в примере 3.1. Положим

$P = F(t, u)$, $Q = F(t^3, u^3)$ и определим ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ типа G_2 следующим образом

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ — короткий корень,} \\ Q, & \text{если } r \text{ — длинный корень.} \end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{A}$ является неприводимым замкнутым ковром. Это следует из описания групп, лежащих между группами Шевалле над различными несовершенными полями, большее из которых является расширением меньшего поля [19], поскольку $F(t, u)$ есть алгебраическое расширение поля $F(t^3, u^3)$.

В силу примера 3.1 между группами Шевалле $G_2(F(t,u))$ и $G_2(F(t^3,u^3))$ существует бесконечно много ковровых подгрупп, определяемых замкнутыми неприводимыми коврами, параметризуемыми двумя различными полями. Более того, в [22] доказано, что все такие ковровые подгруппы допускают разложение Брюа и являются простыми группами.

3.2 Неприводимые ковры типа G_2

В этом параграфе доказывается следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ *— неприводимый ковер типа* G_2 *над полем* K *характеристики* $p > 0$. *Предположим, что хотя бы одна из аддитивных подгрупп* $\mathfrak{A}_r$ *является* R*-модулем, где* K *— алгебраическое расширение поля* R. *Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из группы Шевалле* $G_2(K)$ *при* $p \neq 3$ *все* $\mathfrak{A}_r$ *совпадают с некоторым подполем* P *поля* K, *а при* $p = 3$

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \textit{если } r \text{ — } \textit{короткий корень}, \\ Q, & \textit{если } r \text{ — } \textit{длинный корень}. \end{cases}$$

для некоторых полей P *и* Q, *удовлетворяющих следующим включениям*

$$R \subseteq P, Q \subseteq K, \tag{3.2}$$

$$P^3 \subseteq Q \subseteq P. \tag{3.3}$$

При $p > 3$ утверждение теоремы установил В. М. Левчук [16, следствие 3.2] и в этом случае ковер $\mathfrak{A}$ параметризуется только одним полем. Заметим, что случай $P \neq Q$ при $p = 3$ возможен, это показывает общий пример 3.2 из предыдущего параграфа. Приведем простой конкретный пример, когда поля P и Q из основной теоремы различные.

Пример 3.3. Пусть $K = P = F_3(x)$ — поле рациональных функций от переменной x над полем из трех элементов, $R = Q = F_3(x^3)$ — поле рациональных функций от переменной x^3 над таким же полем. Очевидно, поля P и Q различные и условия (3.2) и (3.3) выполняются.

Для ковра $\mathfrak{A}$ из вышеизложенной теоремы его ковровая подгруппа $G_2(\mathfrak{A})$ является промежуточной между $G_2(Q)$ и $G_2(P)$ и в силу [19] (смотрите также [22, теорема 8.1]) ковер $\mathfrak{A}$ является замкнутым. Различные факторизации ковровых подгрупп, сомножители которых замкнутые ковровые подгруппы и подгруппы ранга 1, приведены в [12] и [20].

Известно, что вопрос о замкнутости ковров редуцируется к *неприводимым* коврам, то есть к коврам, все аддитивные подгруппы которых ненулевые [16], [21]. Следующая лемма является частным случаем следствия 3.2 из [16].

Лемма 3.1. *Пусть $\{a, b\}$ — фундаментальная система системы корней Φ типа A_2, $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер над полем K, причем хотя бы одна аддитивная подгруппа $\mathfrak{A}_s$ является R-модулем, где K — алгебраическое расширение поля R и $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. Тогда $\mathfrak{A}_r = P$, $r \in \Phi$, для некоторого подполя P поля K.*

Заметим, что в лемме 3.1 ограничение на характеристику поля отсутствует. Отметим, что в нашем случае, при $\Phi = G_2$, элементарная группа Шевалле $E(\Phi, K)$ совпадает с расширенной группой Шевалле $\Phi(K)$. Следующая лемма хорошо известна (смотрите, например, [13]).

Лемма 3.2. *Пусть K — алгебраическое расширение поля R и подкольцо A поля K является R—модулем. Тогда A — поле, причем*

$R \subseteq A \subseteq K$.

Доказательство теоремы 3.1. В [16, следствие 3.2] при $char K > 3$ доказано, что аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$ совпадают с некоторым подполем P поля K. Поэтому теорему нужно доказывать только в следующих двух случаях, которые в [16] не рассматривались:
1) $char K = 2$; 2) $char K = 3$.

Напомним, что система корней типа G_2 представлена на рисунке 11. Нам потребуются четыре типа коммутаторных формул

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u)x_{3a+b}(\pm t^3u)x_{3a+2b}(\pm t^3u^2), \quad (3.4)$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu)x_{3a+b}(\pm 3t^2u)x_{3a+2b}(\pm 3tu^2), \quad (3.5)$$

$$[x_a(t), x_{2a+b}(u)] = x_{(3a+b)}(\pm 3tu), \quad (3.6)$$

$$[x_b(t), x_{3a+b}(u)] = x_{(3a+2b)}(\pm tu). \quad (3.7)$$

Условия ковровости, возникающие из формул (3.4) и (3.5), дают соответственно следующие серии включений

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}, \quad (3.8)$$

$$\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}, \quad (3.9)$$

$$\mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}, \quad (3.10)$$

$$\mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b^2 \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}, \quad (3.11)$$

$$2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}, \quad (3.12)$$

$$3\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}, \quad (3.13)$$

$$3\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b}^2 \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}. \quad (3.14)$$

Аналогично формулы (3.6) и (3.7) дают соответсвенно включения

$$3\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}, \tag{3.15}$$

$$\mathfrak{A}_b\mathfrak{A}_{3a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}. \tag{3.16}$$

В силу леммы 3.2 с точностью до сопряжения диагональным элементом из $G_2(K)$ можно считать, что $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. По условию теоремы существует такой корень s, что аддитивная подгруппа $\mathfrak{A}_s$ является R-модулем. Зафиксируем этот корень.

Далее доказательство теоремы разбивается на два случая

1) s — длинный корень,

2) s — короткий корень.

1) Пусть s — длинный корень. Длинные корни из Φ составляют подсистему корней типа A_2 с фундаментальной системой $\{b, 3a + b\}$, $1 \in \mathfrak{A}_{-b}$, а включение $1 \in \mathfrak{A}_{-3a-b}$ следует из $\mathfrak{A}_a^3\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}$, только для отрицательный корней. По лемме 3.1 независимо от характеристики поля K все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, индексированные длинными корнями, совпадают с некоторым подполем Q поля K. В частности, отсюда и из условия ковровости следует, что $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi$. Поэтому из включений типа $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ следует совпадение всех аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}_r$, соответствующих коротким корням, а затем и включения $Q \subseteq \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi$. Пусть $\mathfrak{A}_a = P$. Из включений (3.10), (3.12) и (3.13) получаем соответственно включения

$$P^3 \subseteq Q,$$

$$2PP \subseteq P,$$

$$3P \subseteq Q.$$

Поэтому, если $p = 2$, то все $\mathfrak{A}_r$ совпадают с полем Q. Если $p = 3$, то $P^3 \subseteq Q \subseteq P$ и P — кольцо, являющееся R-модулем, а в силу леммы 3.3 аддитивная подгруппа P становится полем.

2) Пусть s — короткий корень. Так как $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$, то из условия ковровости следует, что $1 \in \mathfrak{A}_r$, $r \in -\Phi^+$.

Пусть $char K = 3$. В этом случае в силу формулы (3.5) подгруппа, порожденная короткими корневыми подгруппами, изоморфна группе Шевалле типа A_2. Поэтому по лемме 3.1 все $\mathfrak{A}_r$ для коротких корней r совпадают с некоторым полем P. Сейчас из условия ковровости следует, что $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi$. В силу включений типа (3.16) получаем, что все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, индексированные длинными корнями, совпадают с некоторой аддитивной подгруппой Q поля K. Снова в силу (3.16) справедливо включение $QQ \subseteq Q$. Отсюда следует, что Q — кольцо с единицей. Из (3.8) и (3.10) получаются включения $P^3 \subseteq Q \subseteq P$. Далее, множество P^3 является полем и P его алгебраическое расширение, а в силу (3.10) кольцо Q будет P^3-модулем. Поэтому по лемме 3.3 кольцо Q — поле.

Пусть $char K = 2$. Не теряя общности, можно считать, что именно $\mathfrak{A}_{a+b}$ является R-модулем. Тогда в силу условия ковровости типа (3.8) и (3.15) соответственно справедливы следующие включения

$$\mathfrak{A}_{-b}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_a,$$

$$3\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_b.$$

Сейчас, используя включение $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$, получаем

$$\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_a \cap \mathfrak{A}_b$$

. Теперь в силу условия ковровости (3.8) получаем

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$$

. Таким образом, $\mathfrak{A}_{a+b}$ — кольцо, а в силу леммы 3.3 — поле. Положим $\mathfrak{A}_{a+b} = P$. Так как $1 \in \mathfrak{A}_{a+b}$ и $1 \in \mathfrak{A}_r$, $r \in -\Phi^+$, то из коммутаторных формул типа (3.4) и условий ковровости получаем, что $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi$. Покажем сейчас, что $\mathfrak{A}_r = P$ для всех $r \in \Phi$. Включение $1 \in \mathfrak{A}_r$ для длинных корней влечет совпадение всех $\mathfrak{A}_r$. Далее, используя включение (3.8), получаем $\mathfrak{A}_a, \mathfrak{A}_b \subseteq P$, а в силу (3.13) $P \subseteq \mathfrak{A}_{3a+b}$. Таким образом, $\mathfrak{A}_r = P$, если r — длинный корень. Так как $\mathfrak{A}_a \subseteq P$ и $\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_a$, то $P \subseteq \mathfrak{A}_a$. Итак, получаем совпадение $\mathfrak{A}_a$ с полем P. Аналогично показывается равенство $\mathfrak{A}_r = P$ для всех других коротких корней.

Теорема доказана.

Теорема 3.1 получена автором лично и опубликована в [32].

Заключение

Получены следующие результаты:

1. Для коммутативных колец с единицей, ненулевым идеалом I и аддитивной подгруппой J такими, что $\mathbb{Z} + I \neq \mathbb{Z} + I + J$, доказано существование незамкнутых неприводимых ковров лиева типа, ассоциированных с любой системой корней.

2. Доказано, что любой ковер ненулевых аддитивных подгрупп, ассоциированный с группой Шевалле лиева ранга больше единицы над локально конечным полем, с точностью до сопряжения диагональным элементом совпадает с ковром, все аддитивные подгруппы которого равны некоторому фиксированному подполю основного поля.

3. Описаны неприводимые ковры типа G_2 над полем K характеристики $p > 0$, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R-модулем, в случае когда K — алгебраическое расширение поля R. Доказано, что такие ковры являются замкнутыми и могут параметризоваться двумя различными полями только при $p = 3$, а для других p они определяются одним полем и в этом случае соответствующие им ковровые подгруппы с точностью до сопряжения диагональным элементом совпадают с группами Шевалле типа G_2 над промежуточными подполями P, $R \subseteq P \subseteq K$.

Глоссарий

Обозначения:

K — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей 1;

$\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел;

$GL(K)$ — общая линейная группа (множество матриц с определителем, не равным нулю);

$SL(K)$ — специальная линейная группа (множество матриц с определителем единица);

$t_{ij}(u)$ — трансвекция;

e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули;

Φ — приведенная неразложимая система корней ранга l;

$\Pi = \{r_1, ..., r_l\}$ — множество фундаментальных корней;

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор;

$E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом K с единицей;

$\Phi(K)$ — группа Шевалле типа Φ над полем K;

$x_r(t)$ — корневой элемент;

$n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$ — мономиальный элемент;

$h_r(t) = n_r(t)n_r(-1)$ — диагональный элемент;

X_r — корневая подгруппа;

$U = \langle X_r \mid r \in \Phi^+\rangle$ — верхняя унипотентная подгруппа;

$V = \langle X_r \mid r \in \Phi^-\rangle$ — нижняя унипотентная подгруппа;

$H = \langle h_r(t) \mid r \in \Phi, t \in K^*\rangle$ — диагональная подгруппа;

$N = \langle n_r(t) \mid r \in \Phi, t \in K^*\rangle$ — мономиальная подгруппа;

$Z\Phi$ — линейная оболочка системы корней Φ над кольцом целых чисел;

$N_{r,s}$ — структурные константы соответствующей алгебры Ли;

K-характер группы P — это гомоморфизм аддитивной группы P в мультипликативную группу K^*;

$F[t,u]$ — кольцо многочленов от переменных t, u;

$F(t,u)$ — поле рациональных функций от переменных t, u.

Определения:

Под **аддитивной подгруппой** кольца K мы понимаем любую подгруппу всей его аддитивной группы.

Полный (матричный) ковер степени n над кольцом K — это набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

основного кольца K, если выполняется следующее условие

$$\mathfrak{A}_{ik}\mathfrak{A}_{kj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Ковровое кольцо — это множество матриц

$$M_n(\mathfrak{A}) = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$$

которое является кольцом, относительно обычных матричных операций сложения, умножения.

Элементарный ковер — это набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

основного кольца K, если выполняется следующее условие

$$\mathfrak{A}_{ik}\mathfrak{A}_{kj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \ 1 \leq i \neq j \neq k \leq n.$$

Элементарная ковровая подгруппа — это группа $E_n(\mathfrak{A})$, порожденная трансвекциями

$$t_{ij}(u_{ij}), \quad u_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Ковер типа Φ ранга l над K — это набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\},$$

кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad \text{при } r,\ s,\ ir+js \in \Phi, \quad i,j > 0,$$

где

$$\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\},$$

а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^i), \quad r,\ s,\ r+s \in \Phi.$$

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над K определяет **ковровую подгруппу**

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \rangle,$$

группы Шевалле $E(\Phi, K)$, где $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная множеством M.

Поле F характеристики $p > 0$ называется **совершенным**, если поле F^p совпадает с полем F, где $F^p = \{f^p | f \in F^p\}$. В противном случае поле называется **несовершенным**.

Параболическая группа — это надгруппа подгруппы UH и сопряженная с ней.

Список литературы

1 Боревич З. И. О параболических подгруппах в линейных группах над полулокальным кольцом // Вестник ЛГУ.— 1976.—Т. 13.—№ 3.—С. 16-24.

2 Боревич З. И. О параболических подгруппах в специальной линейной группе над полулокальным кольцом // Вестник ЛГУ.— 1976.—Т. 19.—№ 4.—С. 29-34.

3 Боревич З. И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.

4 Боревич З. И., Вавилов Н.А. О подгруппах полной линейной группы над коммутативным кольцом // Доклады АН СССР.—1982.—Т. 267—С. 777–778.

5 Вавилов Н.А. О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. — Т. 75.—1978. — С. 43–58.

6 Вавилов Н.А. О параболических подгруппах групп Шевалле скрещенного типа над полулокальным кольцом // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. — Т. 94.—1979. — С. 21–36.

7 Вавилов Н.А. Весовые элементы групп Шевалле // Алгебра и анализ. — 2008. —Т. 20:1.—С. 22–85.

8 Дряева Р.Ю., Койбаев В.А., Нужин Я.Н. Полные и элементарные сети над полем частных кольца главных идеалов // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2017. — Т. 455. — С. 42-51.

9 Зюбин С. А. Ковры аддитивных подгрупп над полем рациональных чисел // Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию А.Ю. Ольшанского (г. Красноярск, 27 июля - 2 августа 2016 года). — С. 24-25.

10 Койбаев В. А. Сети, ассоциированные с элементарными сетями // Владикавказский математический журнал. — 2010.— Т. 12. № 4.— С. 39-43.

11 Койбаев В. А. Элементарные сети в линейных группах // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2011.— Т. 17. № 4.— С. 134–141.

12 Койбаев В. А., Нужин Я. Н. Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18. — № 1. — С. 75-84.

13 Койбаев В. А., Нужин Я.Н. k-Инвариантные сети над алгебраическим расширением поля k. // Сибирский математический журнал. — 2017. — Т. 58. № 1. — С. 143–147.

14 *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп.* 18-е изд. Новосибирск, ИМ СО РАН, 2014, 253 с.

15 Левчук В. М. Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Математические заметки. — 1982. — Т. 31. — № 4. — С. 509-525.

16 Левчук В. М. О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22. № 5. — С. 504-517.

17 Ленг С. *Алгебра* // Москва, Наука, 1965, 431 с.

18 Мерзляков Ю. И. Центральные ряды и ряды коммутантов матричных групп // Алгебра и логика. Семинар — Т. 3. — № 4 — 1964. — С. 49–59

19 Нужин Я. Н. О подгруппах групп Шевалле типа B_l, C_l, F_4 и G_2, параметризуемых двумя несовершенными полями характеристики 2 и 3. // Математика в современном мире. — 2017. — С. 90.

20 Нужин Я. Н. Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами // Журн. Сибирского федерального ун-та.—2011.—Т. 4, № 4.— С. 527-535.

21 Нужин Я. Н. Разложение Леви для ковровых подгрупп групп Шевалле над полем // Алгебра и логика. — 2016. — Т. 55. — № 5. — С. 558-570.

22 Нужин Я. Н., Степанов А.В. Подгруппы групп Шевалле типов B_l и C_l, содержащие группу над подкольцом, и связанные с ними ковры // Алгебра и анализ. — 2019. — Т. 31. — № 4. — С. 198-224.

23 Романовский Н.С. О подгруппах общей и специальной линейных групп над кольцом. // Математические заметки. — Т. 9. — № 6. — 1971. — С. 699–708.

24 Стейнберг Р. *Лекции о группах Шевалле* // Москва, Мир, 1975.

25 Carter R. W. *Simple Groups of Lie Type.* — John Wiley and Sons, 1972.

26 Dickson L. E. Linear Groups with an Exposition of the Galois FieldTheory. — Leipzig: Teuber, 1901.

27 Steinberg R. Generators for simple groups // Canad. J.Math., 1962, Vol. 14, p. 277-283.

28 Suzuki K. On parabolic subgroups of Chevalley groups over local rings, Tohoku Math. J., 29(1976), №1, p. 57–66.

Работы автора по теме диссертации:

29 Куклина С.К., Лихачева А.О., Нужин Я.Н. О замкнутости ковров лиева типа над коммутативными кольцами // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2015. — Т. 21. — № 3.—С. 192–196.

30 Койбаев В.А., Куклина С.К., Лихачева А.О., Нужин Я.Н. Подгруппы групп Шевалле над локально конечным полем, определяемые набором аддитивных подгрупп // Математические заметки. — 2017. — Т. 102. — С. 857-865.

31 Франчук С. К. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа G_2 // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». — 2019. — Т. 27. — С. 80-86.

32 Франчук С. К. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа G_2 над полями характеристики $p > 0$ // Владикавказский математический журнал — 2020. — Т. 22. № 1.— С. 77-83.

33 Куклина С.К., Лихачева А.О. Примеры незамкнутых ковров аддитивных подгрупп // Молодежь и наука: сборник материалов X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края. Красноярск, 15-25 апреля 2014. [Электронный ресурс] — Красноярск: Сибирский федеральный университет. — 2014. — С. 76-78.

34 Куклина С.К., Лихачева А.О., Нужин Я.Н. Примеры незамкнутых ковров // Алгебра и приложения: труды международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина. — Нальчик: издательство КБГУ. — 2014. — С. 54-57.

35 Куклина С.К. О замкнутости ковров типа G_2 над коммутативными кольцами // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: проспект Свободный- 2015», посвященной 70-летию Великой Победы. Красноярск, 15–25 апреля 2015. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2015.— С.11-12.

36 Куклина С.К. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа G_2 // Сборник материалов международной кон-ференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Проспект Свободный - 2016», посвященной Году образования в Содружестве Независимых Государств. «Математика, информатика: алгебра, математическая логика и дискретная математика». Красноярск, 15–25 апреля 2016. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2016. — С. 32–33.

37 Куклина С.К., Лихачева А.О., Нужин Я.Н. О замкнутости ковров аддитивных подгрупп над локально конечным полем // Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию А.Ю. Ольшанского (г. Красноярск, 27 июля - 2 августа 2016 года). — С. 36-37.

38 Куклина С.К., Лихачева А.О., Нужин Я.Н. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп над локально конечными полями // Мальцевские чтения: Международная конференция: Тезисы докладов (Новосибирск, 21–25 ноября 2016 года). — Новосибирск: Издательство Института математики. — 2016. — С. 93. — Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/16/malmeet16.pdf

39 Kuklina S.K. On irreducible carpets of additive subgroups of type G_2 // Тезисы докладов, представленных на международную алгебраическую конференцию, посвященную 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша — Москва: издательство МГУ — 2018. — С. 247-248.