УДК 517+518.392 *На правах рукописи*

Булгатова Елена Николаевна

Построение и исследование кубатурных формул с пограничным слоем для интегрирования функций из пространств $W_p^m(E_n)$

01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2009

Работа выполнена в Восточно-Сибирском государственном технологическом университете (г. Улан-Удэ).

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук, профессор
Шойнжуров Цырендаши Базарович

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук, профессор
Носков Михаил Валерианович

Кандидат физико-математических наук
Шатохина Лариса Владимировна

Ведущая организация: Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН

Защита состоится 30 июня 2009 года в 15 часов на заседании диссертационного совета ДМ 212.099.18 в Сибирском федеральном университете по адресу: 660074 Красноярск, ул. Киренского, 26 корпус Ж, ауд. 1-15.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале библиотеки Сибирского федерального университета, ул. Киренского, 26.

Автореферат разослан «__» мая 2009г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н. Кириллов К.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. Задача о построении формул для приближенного вычисления интегралов является одной из классических задач вычислительной математики. В настоящее время можно выделить несколько научных направлений в теории приближенного интегрирования: построение формул высокой степени точности, применение вероятностно-статистических методов к вычислению интегралов, теоретико-числовые методы построения формул и функциональный подход, связанный с исследованием оценок норм функционала погрешности для различных линейных нормированных пространств.

Широкое применение методов функционального анализа и теории дифференциальных уравнений в исследованиях по теории приближенного интегрирования началось работами С.М. Никольского [6] и С.Л. Соболева [14]. В дальнейшем эти методы были развиты в работах В. И. Половинкина, М.Д. Рамазанова, Ц.Б. Шойнжурова, В.Л. Васкевича и других авторов. В настоящей работе, в отличие от работ В.И. Половинкина и Ц.Б. Шойнжурова, рассматриваются весовые формулы в пространствах $W_\infty^m(E_n)$, как предельного случая ранее исследованных пространств. Кроме того, М.Д. Рамазановым проводились исследования кубатурных формул для областей с гладкими границами. В данной диссертации, опираясь на методику Рамазанова, получены формулы с пограничным слоем, в которых коэффициенты вычисляются значительно проще, что облегчает программную реализацию построения и использования формул.

При построении формулы для приближенного вычисления интеграла, погрешность этой формулы рассматривают, как некоторый функционал, действующий на подынтегральную функцию, и называют функционалом погрешности. При этом, если построена формула и требуется найти её погрешность, то достаточно найти или оценить норму функционала погрешности рассматриваемой формулы.

Цель работы. Построение и исследование асимптотической оптимальности кубатурных формул для областей с кусочно-гладкими границами в пространстве Соболева $W_p^m(E_n)$ и исследование весовых кубатурных формул в пространстве Соболева $W_\infty^m(E_n)$.

Основные задачи исследования:

– построение и исследование кубатурных формул для областей с гладкими и кусочно-гладкими границами;

– построение и исследование эрмитовых кубатурных формул для области с кусочно-гладкой границей;

– получение асимптотически оптимального функционала погрешности исследованных кубатурных формул и явного вида коэффициентов этого функционала погрешности;

– исследование весовых кубатурных формул с пограничным слоем.

Объект исследования. Весовые кубатурные формулы приближенного вычисления многомерных интегралов и кубатурные формулы, в которых участвуют как значения самой функции, так и значения ее производных. Область интегрирования при этом ограничена кусочно-гладкой границей [14].

Методика исследований. В работе применяются методы теории функций одного и многих действительных переменных, математического и функционального анализа, алгебры, а также численные методы.

Достоверность результатов. Достоверность результатов диссертации обеспечена полными доказательствами всех утверждений, полученных в данной работе и численными расчетами.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту. Все основные результаты диссертации являются новыми. На защиту выносятся:

1. Построение и исследование кубатурных формул для областей с кусочно-гладкими границами на плоскости, с коэффициентами, зависящими от уравнения границы только в пограничном слое;
2. Доказательство асимптотической оптимальности эрмитовых кубатурных формул, содержащих значения функции и значения первой производной, в пространстве Соболева $W_p^m(E_n)$;
3. Оценка нормы в пространстве $W_p^{m*}(E_n)$ функционала погрешности весовой кубатурной формулы с пограничным слоем.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы диссертационной работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в дальнейших исследованиях кубатурных формул. Полученные формулы могут использоваться при вычислении интегралов.

Личный вклад автора. Все результаты, включенные в диссертацию принадлежат лично диссертанту. В совместных работах вклад соавторов равнозначен.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на следующих конференциях: VIII международном семинаре-совещании «Кубатурные формулы и их приложения» (г. Улан-Удэ, 2005); II Всероссийской конференции с международным участием «Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы» (г. Улан-Удэ, 2006); IX международном семинаре-совещании «Кубатурные формулы и их приложения» (г.Уфа, 2007); III всероссийской конференции с международным участием «Математика, её приложения и математическое образование» (г. Улан-Удэ, 2008); XIII Байкальской Всероссийской конференции с международным участием «Информационные и математические технологии в науке и управлении» (г. Иркутск, 2008); Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений.» (г. Новосибирск, 2008); III Всероссийской конференции «Винеровские чтения 2009» (г. Иркутск, 2009); на ежегодных научно-практических конференциях Восточно-Сибирского государственного технологического университета (2004-2008 гг.).

Публикации. Основные результаты опубликованы в 11 работах, список которых помещен в конце автореферата. В частности, работа [5] опубликована в журнале Вычислительные технологии, 2006, т.11, №4.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы. В тексте диссертации имеется 13 рисунков и 2 таблицы. Список литературы включает 80 наименований. Объём работы – 109 машинописных страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводятся основные определения и постановка задачи, дается общее описание основных результатов по теории кубатурных формул в функционально-аналитическом направлении, а также краткое изложение результатов диссертационной работы.

В первой главе диссертации построены кубатурные формулы для эллипса и области с кусочно-гладкой границей, исследованы эрмитовы кубатурные формулы и доказана асимптотическая оптимальность этих формул, содержащих первую производную. Рассматриваются кубатурные формулы для интегрирования функций из пространств $W_p^m\left(E_n\right)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{W_p^m}=\left[\int\limits_{E_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^{\alpha}\varphi\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}<\infty, 1\le p<\infty . \qquad (1)$$

В параграфе 1.1 исследованы кубатурные формулы с пограничным слоем на решетке с коэффициентами, зависящими от уравнения гладкой границы области только в пограничном слое. Построение и исследование подобных формул проводились М.Д. Рамазановым [12]. Также, Н.И. Блиновым [2], [3], Л.В. Войтишек [3], И. Умархановым

[15], Д.Я. Рахматуллиным [13] созданы программы для вычисления многомерных интегралов. В данной работе упрощены вычисления коэффициентов.

Пусть $\int\limits_{\Omega} f(x)dx$ - кратный интеграл, $x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$.

Ограниченная область Ω с кусочно-гладкой границей $\Gamma=\Gamma(\Omega)$ на плоскости разбивается на k частей ω_j с помощью разложения единицы $\sum\limits_{j=1}^{k}\Phi_j(x)\equiv 1$, где $\Phi_j(x)\in\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$, $\Omega_j=\operatorname{supp}\Phi_j(x)$, $\omega_j\subset\Omega_j$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Пусть часть границы $\Gamma(\omega_j)=\Gamma\cap\omega_j$ может быть записана уравнением $x_{j_s}=\lambda_{j_s}\left(x_{\hat{j}_s}\right)$, $x_{\hat{j}_s}\equiv(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$. В области ω_j производится замена переменных $y_i=x_i$, $y_{j_s}=x_{j_s}-\lambda_{j_s}\left(x_{\hat{j}_s}\right)$. Для определения срезывающих функций $\Phi_j(x)$ используется функция

$$\psi(x)=\begin{cases} 0, \quad \text{для}\ x\le 0; \\ \dfrac{(2m+1)!}{(m!)^2}\displaystyle\int_0^x t^m(1-t)^m\,dt, \quad \text{для} \quad 0\le x\le 1; \\ 1, \quad \text{для} \quad x\ge 1. \end{cases}$$

Рассмотрим одну из областей $\omega_1,\omega_2,\ldots\omega_k$, например ω_1, в переменных *x*, для простоты, в двумерном случае.

После замены переменных $y_1=x_1$, $y_2=x_2-\lambda_2(x_1)$ область ω_1 перейдет в область ω_1'. Замена преобразует границу области $\Gamma(\omega_1)$ в кусок оси Oy_1, криволинейный параллелограмм $\Delta'_{h\beta}=\left\{(x_1,x_2)\in E_2\,\middle|\, h\beta_1\le x_1<h\beta_1+h,\ \lambda_2(x_1)-(\beta_2+1)h\le x_2<\lambda_2(x_1)-h\beta_2\right\}$ соответствует кубу $\Delta_{h\beta}=\Delta_{h\beta_1}\times\Delta_{h\beta_2}$, где $\Delta_{h\beta_1}=\{h\beta_1\le y_1<h\beta_1+h\}$, $\Delta_{h\beta_2}=\{h\beta_2\le y_2<h\beta_2+h\}$, функция $\Phi_1(x)$ перейдет в $\hat{\Phi}_1(y)$.

В переменных *y* рассмотрим следующий функционал

$$\left\langle l_{\Delta_{h\beta}},y^{\alpha}\right\rangle=\left\langle 1-\sum_{\gamma_1\in\Delta_{h\beta_1}}h^2C_{\gamma_1}\sum_{\gamma_2=0}^{m}C_{\gamma_2}\delta\left(y_1-h(\beta_1+\gamma_1)\right)\delta\left(y_2-h(\beta_2+\gamma_2)\right),y^{\alpha}\right\rangle. \quad (2)$$

Сначала построим функционал с узлами на криволинейной решетке. Для этого функцию $\delta\left(y_2-h(\beta_2+\gamma_2)\right)$ в формуле (2) аппроксимируем линейной комбинацией функций $\delta\left(y_2-h\left(\beta_2+\gamma_2+s\right)+\eta\left(\beta_1\right)h\right)$, где $\eta\left(\beta_1\right)=\left\{\frac{\lambda_2\left(h\beta_1\right)}{h}\right\}$ - дробная часть числа $\frac{\lambda_2\left(h\beta_1\right)}{h}$:

$$\delta\left(y_2-h\left(\beta_2+\gamma_2\right)\right)=\sum_{s=0}^{m}A_s\delta\left(y_2-h\left(\beta_2+\gamma_2+s\right)+\eta\left(\beta_1\right)h\right). \qquad (3)$$

Коэффициенты функционала (3) определяются из системы уравнений

$$\sum_{s=0}^{m}A_s s^{\alpha}=\left(\eta\left(\beta_1\right)\right)^{\alpha},\ \alpha=0,1,...,m.$$

Элементарный функционал для куба $\Delta_{h\beta}$ принимает вид

$$\left\langle l_{\Delta_{h\beta}},y^{\alpha}\right\rangle=\left\langle 1-\sum_{\gamma_1\in\Delta_{h\beta_1}}h^2C_{\gamma_1}\sum_{\gamma_2=0}^{m}C_{\gamma_2}\sum_{s=0}^{m}A_s\delta\left(y_2-h\left(\beta_2+\gamma_2+s\right)+\eta\left(\beta_1\right)h\right)\delta\left(y_1-h\left(\beta_1+\gamma_1\right)\right),y^{\alpha}\right\rangle. \qquad (4)$$

Узлы кубатурной формулы, соответствующей функционалу (4), лежат в узлах криволинейной решетки.

С помощью функционала (4) построим кубатурную формулу на решетке с коэффициентами, зависящими от уравнения гладкой границы в пограничном слое.

Выполнив обратную замену переменных $x_2=y_2+\lambda_2\left(y_1\right)$ и $x_1=y_1$ в (4), получим

$$l_{\Delta'_{h\beta}}\left(x\right)=\varepsilon_{\Delta'_{h\beta}}\left(x\right)-\sum_{\gamma_2=0}^{m}C_{\gamma_2}\sum_{s=0}^{m}A_s\left(\beta_1\right)\delta\left(x_1-h\left(\gamma_1+\beta_1\right)\right)\delta\left(x_2-\tau\left(\beta_1\right)h-h\left(\gamma_2+\beta_2+s\right)\right), \qquad (5)$$

где $\tau\left(\beta_1\right)$- целая часть числа $\frac{\lambda_2\left(h\beta_1\right)}{h}$, $\varepsilon_{\Delta'_{h\beta}}\left(x\right)$ - характеристическая функция области $\Delta'_{h\beta}$.

Далее характеристическую функцию некоторой области будем обозначать таким же символом, например, $\varepsilon_{\omega}\left(x\right)$ - характеристическая функция области ω.

Учитывая срезывающую функцию $\hat{\Phi}_1\left(y\right)$,элементарные функционалы $l_{\Delta_{h\beta}}$ суммируем по всем β_1 и при этом по свойству функционала $l_{\Delta_{h\beta}}$ коэффициенты при суммировании равны единице

$$\sum_{\beta_1=-\infty}^{\infty}\sum_{\gamma_1\in\Delta_{h\beta_1}}h^2C_{\gamma_1}\delta\left(y_1-h\left(\gamma_1+\beta_1\right)\right)\sum_{\gamma_2=0}^{m}C_{\gamma_2}\sum_{s=0}^{m}A_s\left(\beta_1\right)\delta\left(y_2-h\left(\gamma_2+\beta_2+s\right)+\eta\left(\beta_1\right)h\right)=$$
$$=\sum_{\beta_1=-\infty}^{\infty}h^2\sum_{\gamma_2=0}^{m}C_{\gamma_2}\sum_{s=0}^{m}A_s\left(\beta_1\right)\delta\left(y_2-h\left(\gamma_2+\beta_2+s\right)+\eta\left(\beta_1\right)h\right)\delta\left(y_1-h\beta_1\right).$$

Аналогично суммируем по β_2 последние две суммы в (5)

$$\sum_{\beta_2=0}^{\infty} h^2 \sum_{\gamma_2=0}^{m} C_{\gamma_2} \sum_{s=0}^{m} A_s(\beta_1) \delta\left(y_2 - h(\gamma_2+\beta_2+s)+\eta(\beta_1)h\right) = h^2 \sum_{\beta_2=0}^{\infty} V_{\beta_2}(\beta_1)\delta\left(y_2 - h\beta_2 + \eta(\beta_1)h\right).$$

После преобразования коэффициенты определяются следующей формулой

$$V_{\beta_2}(\beta_1)=\begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{\min(m,\beta_2)} A_s(\beta_1) \sum\limits_{\gamma=0}^{\min(m,\beta_2-s)} C_\gamma, \; \textit{если } 0 \le \beta_2 \le m, \\ \sum\limits_{s=0}^{\mathrm{m}} A_s(\beta_1) \sum\limits_{\gamma=0}^{\min(m,\beta_2-s)} C_\gamma, \; \textit{если } m \le \beta_2 \le 2m, \\ 1, \qquad \textit{если } \beta_2 \ge 2m. \end{cases}$$

где коэффициенты $A_s(\beta_1)$ и C_γ определяются из систем

$$\sum_{\gamma=0}^{m} C_\gamma \gamma^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}, \; \alpha = 0,1,\dots m \; \text{ и } \; \sum_{s=0}^{m} A_s(\beta_1) s^\alpha = \eta^\alpha(\beta_1), \; \alpha = 0,1,\dots m .$$

Вспомогательный функционал погрешности для области ω_1' в переменных y имеет вид

$$\hat{\Phi}_1(y)\hat{\rho}_1(y) = \hat{\Phi}_1(y)\left[\varepsilon_{\omega_1'}(y) - \sum_{\beta_1=-\infty}^{\infty} \delta(y_1 - h\beta_1) \sum_{\beta_2=0}^{\infty} V_{\beta_2}(\beta_1)\delta\left(y_2 - h\beta_2 + \eta(\beta_1)h\right)\right],$$

где $\hat{\rho}_1(y) = \sum\limits_{h\beta\in\omega_1'} l_{\Delta_{h\beta}}(y)$.

Учитывая $\sum \varepsilon_{\Delta'_{h\beta}}(x) = 1$, в переменных x, получаем функционал погрешности формулы с пограничным слоем для области ω_1 с узлами на решетке

$$\Phi_1(x)\rho_1(x) = \Phi_1(x)\left[\varepsilon_{\omega_1}(x) - \sum_{h\beta\in\omega_1} h^2 V_{\beta_2}(\beta_1)\delta(x - h\beta)\right]$$

Аналогично получаются функционалы для остальных областей ω_j

$$\Phi_j(x)\rho_j(x) = \Phi_j(x)\left[\varepsilon_{\omega_j}(x) - \sum_{h\beta\in\omega_j} h^2 V_\beta^j(h\beta)\delta(x - h\beta)\right],$$

где $V_\beta^j(h\beta) = V_\beta(h\beta), \; j = 1,2,\dots,k$.

Окончательно получена формула с коэффициентами пограничного слоя, зависящими от уравнения границы:

$$\int_\Omega \varphi(x)dx \approx \sum_{h\beta\in\Omega} \sum_{j=1}^{k} \Phi_j(h\beta) V_\beta^j \varphi(h\beta).$$

По схеме, предложенной в параграфе 1.1, построена кубатурная формула для эллипса $\frac{x_1^2}{4}+x_2^2=1$.

Кубатурные формулы для областей с кусочно-гладкой границей рассматриваются в параграфе 1.3. Пусть граница Γ области Ω состоит из одной или нескольких непересекающихся кусочно-гладких кривых.

Если точка x_0 границы Γ, не является угловой, то можно в окрестности этой точки провести замену переменных $y_1=\lambda(x_1)$, где $\lambda(x_1)$ уравнение границы так, что $y_1=\lambda(x_1)$ и $x_1=\lambda'(y_1)$ обратные взаимно однозначные функции.

Пусть $M_0(x_1^0,x_2^0)$ угловая точка. Не нарушая общности, можно принять $x_1^0=x_2^0=0$ и предположить, что смыкающиеся в этой точке касательные, расположены так, что одна из них совпадает с положительной частью оси Ox_1, а другая идет к ней под углом. В этом случае эти дуги выражаются соответственно уравнениями $x_2=z_2(x_1)$ и $x_1=z_1(x_2)$, причем $z_2'(0)=0$. Применяем замену переменных

$$x_1=y_1+z_1(y_2) \text{ и } x_2=y_2+z_2(y_1). \tag{6}$$

В окрестности точки $y_1=y_2=0$ якобиан преобразования отличен от нуля. Следовательно, система (6) однозначно допускает обращение $y_1=r_1(x_1,x_2)$ и $y_2=r_2(x_1,x_2)$. Далее применяем обычную замену для гладкой области.

Для формул, построенных в параграфах 1.2 и 1.3, составлена программа вычисления двойного интеграла по соответствующим областям.

В параграфе 1.4 получена кубатурная формула для области Ω с кусочно-гладкой границей, содержащая как значения функции, так и значения её производных в узлах решетки.

Пусть выпуклая область Ω имеет гладкую границу $\Gamma=\Gamma(\Omega)\in C^{(m+1)}$ в n-мерном пространстве. Разделим пространство E_n на k частей ω_j, $j=1,2,\ldots,k$, гиперплоскостями параллельными координатным плоскостям и $\omega_{j,h}=\left\{x\in\omega_j,\rho\left(x,\Gamma\left(\omega_j\right)\right)\le Lh\right\}$, $\Gamma(\omega_j)=\Gamma(\Omega)\cap\omega_j$, $j=1,2,\ldots,k,$

$\sum_{j=1}^{k}\Phi_j(x)\equiv 1$ – разложение единицы в n-мерном пространстве, где $\Phi_j(x)$ - финитные функции, $x=(x',\ x_n)$, $x'=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n-1})$, $y'=(y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_{n-1})$, $\beta'=(\beta_1,\dots,\beta_{n-1})$, $\gamma'=(\gamma_1,\ \dots,\gamma_{n-1})$ и граница $\Gamma(\omega_1)$ области ω_1 выражается уравнением $x_n=\lambda_1(x')$.

Замена $y'=x'$ и $y_n=x_n-\lambda_1(x')$ преобразует область ω_1 в область ω_1', $\Phi_1(x)$ в $\hat{\Phi}_1(y)$, границу $\Gamma(\omega_1)$ области ω_1 в кусок гиперплоскости $y_n=0$ и криволинейный параллелограмм $\Delta'_{h\beta}$ в куб $\Delta_{h\beta}$.

Построим элементарный функционал погрешности в переменных $y=(y',y_n)$

$$\left\langle l_{\Delta_{h\beta}}(y),y^{\alpha}\right\rangle=\left\langle 1-h^n\sum_{\gamma'=0}^{m}C_{\gamma'}\delta(y'-h\beta'-h\gamma')\sum_{\gamma_n=0}^{m}C_{\gamma_n}\delta(y_n-h\beta_n-h\gamma_n),y^{\alpha}\right\rangle, \quad (7)$$

где коэффициенты функционала (7) определяются из систем $\sum_{\gamma_j=0}^{m}C_{\gamma_j}\gamma_j^{\alpha}=\frac{1}{\alpha+1}$,

$\alpha=0,1,\ \dots,m,\quad j=1,\ 2,\ \dots,\ k.$

В формуле (7) функцию $\delta(y_n-h\beta_n-h\gamma_n)$ аппроксимируем $\delta(y)$ функциями и их производными в узлах сдвинутых на $\eta(\beta')$ - дробную часть числа $\left\{\frac{\lambda_1(h\beta')}{h}\right\}$, где $\lambda_1(y)$ уравнение границы $\Gamma(\omega_1)$:

$$\delta(y_n-h\beta_n-h\gamma_n)=\sum_{s=0}^{m}\sum_{\sigma=0}^{m}A_s^{\sigma}(\beta')(-1)^{\sigma}\delta^{\sigma}(y_n-h\beta_n-h\gamma_n-hs+\eta(\beta')h), \quad (8)$$

где коэффициенты вычисляются из систем $\sum_{s=0}^{m}\sum_{\sigma=0}^{m}A_s^{\sigma}(\beta')\left[Y^{\alpha}\right]^{(\sigma)}=\eta^{\alpha}(\beta'),\ \alpha=0,1,2,\dots,(m+1)^2-1,$ где $\left[Y^{\alpha}\right]^{(\sigma)}$ – производная порядка σ от степени y^{α} и вычислена при $y=Y$.

Функционал $\hat{\rho}_1(y)$ для области ω_1' определим путем суммирования элементарных функционалов

$$\hat{\rho}_1(y)=\sum_{h\beta\in\omega_1'}l_{\Delta_{h\beta}}(y). \quad (9)$$

Умножим функционал $\hat{\rho}_1(y)$ на финитную функцию $\hat{\Phi}_1(y)$ области ω_1':

$$\hat{\rho}_1(y)\hat{\Phi}_1(y)=\hat{\Phi}_1(y)\Bigg[\varepsilon_{\omega_1'}(y)-\sum_{\beta'=-\infty}^{\infty}\sum_{\gamma'=0}^{m}C_{\gamma'}\delta(y'-h\gamma'-h\beta')h^n\cdot$$

$$\cdot \sum_{\beta_n=0}^{\infty} \sum_{\gamma_n=0}^{m} C_{\gamma_n} \delta\left(y_n - h\gamma_n - h\beta_n\right)\Bigg]. \tag{10}$$

Подставим (8) в (10)

$$\hat{\rho}_1(y)\hat{\Phi}_1(y) = \hat{\Phi}_1(y)\Bigg[1 - \sum_{\beta'=-\infty}^{\infty} h^n \sum_{\gamma'=0}^{m} C_{\gamma'} \delta\left(y' - h\gamma' - h\beta'\right) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\beta_n=0}^{\infty} \sum_{\gamma_{n=0}}^{m} C_{\gamma_n} \sum_{s=0}^{m} \sum_{\sigma=0}^{m} A_s^{\sigma}(\beta')(-1)^{\sigma} \delta^{(\sigma)}\left(y_n - h\gamma_n - h\beta_n - hs + h\eta(\beta')\right)\Bigg], \tag{11}$$

где $\beta' = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, $\gamma' = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$.

В формуле (11) узлы сдвинуты на дробную часть числа $\eta(\beta') = \left\{\dfrac{\lambda_1(h\beta')}{h}\right\}$.

Выполнив ряд преобразований над второй суммой формулы (11), получим

$$\begin{aligned} &\sum_{\beta_n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} A_s^{\sigma} \sum_{\gamma_n=0}^{m} C_{\gamma_n} (-1)^{\sigma} \delta^{(\sigma)}\left(y_n - h\beta_n - h\gamma_n - hs + h\eta(\beta')\right) = \\ &= \sum_{\beta_n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{m} V_{\beta_n}^{\sigma}(\beta') \delta^{(\sigma)}\left(y_n - h\beta_n + h\eta(\beta')\right), \end{aligned} \tag{12}$$

где $V_{\beta_n}^{\sigma}(\beta') = (-1)^{\sigma} \sum\limits_{s=0}^{\min(m,\beta_n)} A_s^{\sigma} \sum\limits_{\gamma_n=0}^{\min(m,\beta_n-s)} C_{\gamma_n}$. (13)

Используя произведение функции на финитную функцию $\hat{\Phi}_1(y)$, преобразуем формулу (11)

$$\hat{\rho}_1(y)\hat{\Phi}_1(y) = \hat{\Phi}_1(y)\Bigg[1 - \sum_{\beta'=-\infty}^{\infty} h^n \delta\left(y' - h\beta'\right) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\beta_n=0}^{\infty} \sum_{\gamma_{n=0}}^{m} C_{\gamma_n} \sum_{s=0}^{m} \sum_{\sigma=0}^{m} (-1)^{\sigma} A_s^{\sigma}(\beta') \delta^{(\sigma)}\left(y_n - h\gamma_n - h\beta_n - hs + h\eta(\beta')\right)\Bigg],$$

где $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ и $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1})$.

На основании формулы (12) имеем

$$\hat{\rho}_1(y)\hat{\Phi}_1(y) = \hat{\Phi}_1(y)\Bigg[1 - \sum_{\beta'=-\infty}^{\infty} h^n \delta\left(y' - h\beta'\right) \sum_{\beta_n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{m} V_{\beta_n}^{\sigma}(\beta') \delta^{(\sigma)}\left(y_n - h\beta_n + h\eta(\beta')\right)\Bigg], \tag{14}$$

где $V_{\beta_n}^{\sigma}(\beta')$ определяются формулой (13).

В формуле (14) перейдем к старым переменным x

$$\rho_1(x)\Phi_1(x)=\Phi(x)\left[1-\sum_{\beta'=-\infty}^{\infty} h^n\delta(x'-h\beta')\sum_{\beta_n=0}^{\infty}\sum_{\sigma=0}^{m} V_{\beta_n}^{\sigma}(\beta')\delta^{(\sigma)}\left(x_n-h\beta_n-\tau(\beta')h\right)\right],$$

где $\tau(\beta')=\left[\frac{\lambda_1(\beta')}{h}\right]$ - целая часть числа $\frac{\lambda_1(\beta')}{h}$.

Таким образом, построен функционал погрешности $l_{\omega_1}(x)$ для области ω_1 в общем виде.

Аналогичные функционалы погрешностей строим для остальных областей $\omega_j,\ j=1,2,...,k$. Следовательно, функционал погрешности $l_\Omega(x)$ для области Ω построен

$$l_\Omega(x)=\sum_{j=1}^{k}\Phi_j(x)\rho_j(x).$$

В работе найдена в явном виде норма функционала погрешности, построенной формулы, и доказана асимптотическая оптимальность этого функционала.

Теорема 1.1. *Пусть* $\varphi\in W_p^m(E_n)$, $p(m-1)>n$, $l_\Omega(x)=\varepsilon_\Omega(x)-\sum_{j=1}^{k}\Phi_j(x)\rho_j(x)$ - *функционал погрешности, где*

$$\rho_j(x)=\sum_{\beta'} h^n\delta(x'-h\beta')\left[\sum_{\beta_n=0}^{\infty}V_{\beta_n}^{0}(\beta')\delta(x_n-h\beta_n)-\sum_{\beta_n=0}^{\infty}V_{\beta_n}^{1}(\beta')\delta'(x_n-h\beta_n)\right],$$

то при $h\to 0$ *норма функционала равна*

$$\|l_\Omega\|_{W_p^{m*}}=|\Omega|^{\frac{p-1}{p}}h^m\left[\sum_{|\alpha|\le m}\int_{\Delta}\left|\sum_{\beta\neq 0}\frac{D^\alpha e^{2\pi i\beta x}}{\left(h^2+|2\pi\beta|^2\right)^m}+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\beta\neq 0}\frac{D^\alpha V_{\beta_n,j}^{1}(\beta')e^{2\pi i\beta x}}{\left(h^2+|2\pi\beta|^2\right)^m}\right|^{p'}dx\right]^{\frac{1}{p'}}+O\left(h^{m+1}\right),$$

$j=1,\ 2,\ \dots,\ k$

Вторая глава посвящена исследованию весовых кубатурных формул. Весовые формулы в пространствах $L_p^m(a,b)$ изучались в работе В.И. Половинкина [10]. В данной работе рассматривается пространство $W_\infty^m(E_n)$. Это пространство есть множество всех измеримых и существенно ограниченных функций $\varphi(x)$, вместе со всевозможными обобщенными производными $D^\alpha\varphi(x), |\alpha|\le m$ до m-го порядка включительно и удовлетворяющих условию

$$\lim_{p\to\infty}\|\varphi(x)\|_{W_p^m(E_n)} = \overline{\lim_{p\to\infty}}\left[\int_{E_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{15}$$

Норма функции в $W_\infty^m(E_n)$ определяется в [16] предельным равенством

$$\|\varphi\|_{W_\infty^m(E_n)} = \lim_{p\to\infty}\left[\int_{E_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty\,. \tag{16}$$

В параграфе 2.2 для построения кубатурной формулы с весом вводится интерполяционный оператор $J_{m,0}^h$ с ньютоновской системой узлов, обладающий следующими свойствами:

a) $J_{m,0}^h\varphi(x) = \sum_{\gamma\in B_0}\psi_{0,\gamma}(x-\gamma)\varphi(\gamma)$,

где $\psi_{0,\gamma}(x)$ известные функции, $\psi_{0,\gamma}(x)=0$ вне куба $\Delta=\left\{0\le x_i^k<1, i=1,\dots,n\right\}$, B_0 – некоторое конечное множество целочисленных векторов;

b) $\left|\psi_{0,\gamma}(x)\right| < M, M>0$ и M не зависит от γ;

c) $J_{m,0}^h x^\alpha = \varepsilon_\Delta(x)x^\alpha$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$, при $|\alpha|\le m$, $\varepsilon_\Delta(x)$ - характеристическая функция куба Δ.

Пусть $\Delta_h = \left\{0\le x_i^k<h, i=1,\dots,n\right\}$, куб $\Delta_{h\beta}$ получен из куба Δ_h переносом на вектор $h\beta$ и $J_{m,h\beta}^h\varphi(x) = \sum_{\gamma\in B_0}\psi_{\beta,\gamma}\left(\frac{x}{h}-\gamma\right)\varphi\left(h(\gamma+\beta)\right)$. Тогда интерполяционный оператор J_m^h для области Ω имеет вид $J_m^h\varphi(x) = \sum_{\beta\in B_N}J_{m,h\beta}^h\varphi(x) = \sum_{\beta\in B_N}\sum_{\gamma\in B_0}\psi_{\beta,\gamma}\left(\frac{x}{h}-\gamma\right)\varphi\left(h(\gamma+\beta)\right)$, где $J_m^h P_m(x) = P_m(x)\ \forall P_m(x)\in\bar{P}_m$ – множество многочленов степени не выше m, $B_N = \left\{x_k = \left(x_1^k, x_2^k,\dots,x_n^k\right), k=1,2,\dots,N\right\}$ – система узлов.

В работе В.И. Половинкина [9] определялись интерполяционные операторы с регулярным пограничным слоем для пространства $L_2^m(E_n)$. В работе Ц.Б. Шойнжурова

[16] построены интерполяционные операторы с пограничным слоем и ньютоновской системой узлов над пространством $W_p^m\left(E_n\right)$.

Кубатурная формула строится следующим образом

$$\int_{\Omega} g(x)\varphi(x)dx \approx \int_{\Omega} g(x) J_m^h \varphi(x)dx. \tag{17}$$

Лемма 2.2. *Если $l_{g,\Omega} \in W_\infty^{m*}\left(E_n\right), W_\infty^{m*}\left(E_n\right)$-сопряженное пространство к $W_\infty^m\left(E_n\right)$, функционал погрешности кубатурной формулы (17) с ньютоновской системой узлов и $\varphi \in W_\infty^m\left(E_n\right)$ с нормой (16), то при $h \to 0$ имеет место неравенство*

$$\left|\left\langle l_{g,\Omega}, \varphi\right\rangle\right| \le B_m \|g\|_{L_1(\Omega)} h^m \|\varphi\|_{W_\infty^m(E_n)} \left(1+o(1)\right),$$

где $B_m = \left(\int_\Delta \sum_{|\alpha|\le m} \left| \sum_{\beta\ne 0} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \frac{(2\pi i\beta)^\alpha e^{2\pi i\beta x}}{\left(h^2+|2\pi\beta|^2\right)^m} \right|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$

Далее исследуются весовые кубатурные формулы с пограничным слоем. Будем рассматривать весовые кубатурные формулы

$$\int_{\Omega} g(x)\varphi(x)dx \approx \sum_{h\gamma\in\Omega} h^n C_\gamma \varphi(h\gamma), \tag{18}$$

где Ω – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \Gamma(\Omega)$ в E_n, $\frac{1}{N} = h^n$, $g(x) \in L_1(\Omega)$, $h\gamma = (h\gamma_1, h\gamma_2, \dots, h\gamma_n)$ и $C_\gamma = C_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n}$.

Пусть $\rho\left(x, \Gamma(\Omega)\right)$ – расстояние между точкой $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и границей $\Gamma(\Omega)$ области Ω, $\Omega^* = E_n \setminus \Omega$. Определим следующие множества: $T_\Omega = \left\{h\gamma \in \Omega, \rho\left(h\gamma, \Gamma(\Omega)\right) > Lh\right\}$, $T_{\Gamma(\Omega)} = \left\{h\gamma \in E_n, \rho\left(h\gamma, \Gamma(\Omega)\right) < Lh\right\}$, $T_{\Gamma_1(\Omega)} = \left\{h\gamma \in \Omega, \rho\left(h\gamma, \Gamma(\Omega)\right) < Lh\right\}$, $T_{\Gamma_2(\Omega)} = T_{\Gamma(\Omega)} \setminus T_{\Gamma_1(\Omega)}$, $G_\Omega = \left\{x \in \Omega, \rho\left(x, \Gamma(\Omega)\right) > Lh\right\}$, $G_{\Gamma_1(\Omega)} = \left\{x \in \Omega, \rho\left(x, \Gamma(\Omega)\right) < Lh\right\}$, $G_{\Gamma_2(\Omega)} = \left\{x \in \Omega^*, \rho\left(x, \Gamma(\Omega)\right) < Lh\right\}$, где L – положительная постоянная,

$$B_M^s = \left\{\gamma \in E_n, \gamma^k = \left(\gamma_1^k, \gamma_2^k, \dots, \gamma_n^k\right), 0 \le \gamma_i^k \le s, \sum_{i=1}^n \gamma_i^k \le s, k = 1, 2, \dots, M, M = \frac{(s+n)!}{s!n!}\right\}.$$

Интерполяционный оператор J^h называется интерполяционным оператором с пограничным слоем, если он определен на $W_p^m\left(E_n\right)$ и представим в виде суммы интерполяционных операторов J_γ^h:

$$J^h = \sum_{h\gamma\in T_\Omega} J_\gamma^h + \sum_{h\gamma\in T_{\Gamma(\Omega)}} J_\gamma^h,$$

где $J_\gamma^h\varphi(x) = \sum_{\gamma_1\in B_M^m} p_{\gamma,\gamma_1}^h(x)\varphi(h\gamma_1 + h\gamma)$, $J_\gamma^h x^\alpha = \varepsilon_\Omega(x)x^\alpha, |\alpha| < m$, если $h\gamma\in T_{\Gamma(\Omega)}$, и

$$J_\gamma^h\varphi(x) = \sum_{\gamma_1\in B_M^m} p_{\gamma,\gamma_1}^h(x)\varphi(h\gamma_1 + h\gamma) = \sum_{\gamma_1\in B_M^{m+1}} q_{\gamma_1}^h\left(\frac{x}{h}-\gamma\right)\varphi(h\gamma_1 + h\gamma), \qquad J_\gamma x^\alpha = \varepsilon_\Omega(x)x^\alpha,$$

$|\alpha| < m+1$, если $h\gamma\in T_\Omega$.

Здесь $p_{\gamma,\gamma_1}^h(x)$ и $q_{\gamma_1}^h\left(\frac{x}{h}-\gamma\right)$ – известные функции, $\varepsilon_\Omega(x)$ - характеристическая функция области Ω.

Функционал погрешности кубатурной формулы (18) с пограничным слоем в Ω определим равенством:

$$\langle l_{g,\Omega}, \varphi(x)\rangle = \int_\Omega g(x)\left[\varphi(x) - \sum_{h\gamma\in T_\Omega} J_\gamma^h\varphi(x) - \sum_{h\gamma\in T_{\Gamma(\Omega)}} J_\gamma^h\varphi(x)\right]dx. \tag{19}$$

Перепишем (19) в обобщенных функциях

$$\langle l_{g,\Omega}, \varphi\rangle = \int\Bigg[\varepsilon_\Omega(x)g(x) - \sum_{h\gamma\in T_\Omega} h^n \sum_{\gamma_1\in B_M^{m+1}} C_{\gamma_1}^\gamma \delta(x-(h\gamma+h\gamma_1)) -$$

$$- \sum_{h\gamma\in T_{\Gamma_1(\Omega)}} h^n \sum_{\gamma_1\in B_M^{m+1}} C_{\gamma_1}^\gamma \delta(x-(h\gamma+h\gamma_1)) - \sum_{h\gamma\in T_{\Gamma_2(\Omega)}} h^n \sum_{\gamma_1\in B_M^{m}} D_{\gamma_1}^\gamma \delta(x-(h\gamma+h\gamma_1))\Bigg]\varphi(x)dx \tag{20}$$

Коэффициенты формулы (20) определяются интегралами

$$C_{\gamma_1}^\gamma = \int_{\Delta_{h\gamma}} g(x) q_{\gamma_1}\left(\frac{x}{h}-\gamma\right)dx, \text{ если } h\gamma\in T_\Omega \text{ или } h\gamma\in T_{\Gamma_1(\Omega)},$$

$$D_{\gamma_1}^\gamma = \int_{\Delta_{h\gamma}} g(x) p_{\gamma,\gamma_1}(x)dx, \text{ если } h\gamma\in T_{\Gamma_2(\Omega)}.$$

В следующих двух теоремах найдены общий вид функционала погрешности с пограничным слоем весовой кубатурной формулы, экстремальная функция и оценка нормы этого функционала в пространстве $W_\infty^m(E_n)$.

Обозначим через $\varepsilon_{2m}(x)$ фундаментальное решение m - метагармонического оператора $(1-\Delta)^m = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} \Delta^{|\alpha|}$.

Теорема 2.3. Если $g(x) \in L_1(\Omega)$, $pm > n$, функционал погрешности $l_g(x)$ имеет вид

$$\langle l_g, \varphi \rangle = \int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha| \le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \Big(D^\alpha \varepsilon_{2m}(x) * l_g(x) \Big) D^\alpha \varphi(x) dx,$$

то в пространстве $W_\infty^m(E_n)$ экстремальная функция $\varphi_l(x)$ выражается формулой

$$\varphi_l(x) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha \varepsilon_{2m}(x) * sign\Big(D^\alpha \varepsilon_{2m}(x) * l_g(x) \Big).$$

Теорема 2.4. *Если* Ω *– ограниченная область с кусочно-гладкой границей* $\Gamma(\Omega)$, $g(x) \in L_1(\Omega)$, $f \in W_\infty^m(E_n)$, J^h *интерполяционный оператор с пограничным слоем в области* Ω *и* $l_g^h(x)$ *функционал вида*

$$\langle l_g^h, f \rangle = \int\limits_{\Omega} g(x) \Big(f(x) - J^h f(x) \Big) dx$$

то при $h \to 0$ *имеет место неравенство*

$$\left\| l_g^h \right\|_{W_\infty^{m*}(E_n)} \le B_m \|g\|_{L_1(\Omega)} h^m \big(1 + o(1)\big).$$

Основные результаты работы:

1. Построена кубатурная формула для областей с гладкой и кусочно-гладкой границей и получен явный вид коэффициентов;
2. Построена и исследована эрмитова кубатурная формула для области с кусочно-гладкой границей и доказана асимптотическая оптимальность формулы, содержащей первую производную;
3. Получена оценка нормы функционала погрешности с пограничным слоем весовой кубатурной формулы в пространстве $W_\infty^m(E_n)$.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Цырендаши Базаровичу Шойнжурову за постоянное внимание и помощь в работе.

Список использованных источников

1. *Бахвалов, Н.С.* Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1973. – 631 с.
2. *Блинов, Н.И.* Приближенное вычисление двойных интегралов / Н.И. Блинов //Аннот. сб.: Алгоритмы и программы. ВНТИ центр. –1974. – №2, 3.
3. *Блинов, Н.И., Войтишек. Л.В.* О построении кубатурных формул с регулярным пограничным слоем для рациональных многогранников / Н.И Блинов, Л.В. Войтишек // Тр. Семинара акад. С.Л. Соболева. – 1979. – №1. – С. 5–15.
4. *Корнейчук, Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1981. – 431 с.
5. *Игнатьев, А.Н.* Универсальный алгоритм вычисления интегралов по ограниченным областям с гладкими границами / А.Н. Игнатьев // Кубатурные формулы и их приложения: Доклады, представленные на III семинар-совещание. – Уфа, ИМВЦ УНЦ РАН, 1996. – С. 21–31.
6. *Никольский, С.М.* Квадратурные формулы / С.М. Никольский. – 4-е изд., доп. с добавлением Н.П. Корнейчука. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
7. *Никольский, С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1977. – 456 с
8. *Половинкин, В.И.* Весовые кубатурные формулы / В.И. Половинкин // Докл. АНССР – 1968. – Т. 179, №4. – С. 542-544.
9. *Половинкин, В.И.* Некоторые вопросы теории весовых кубатурных формул / В.И. Половинкин // Сиб. мат. журн. – 1971. – Т.12, №1. – С. 177-196.
10. *Половинкин, В.И.* Об асимптотически наилучших весовых квадратурных формулах / В.И. Половинкин // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: Сб. науч. тр. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. – С. 165–167.
11. *Половинкин, В.И.* Асимптотически наилучшие последовательности кубатурных и квадратурных формул / В.И. Половинкин // Теория кубатурных формул и вычислительная математика: Тр. конф. по дифференц. уравнениям и вычисл. математике / Отв. ред. С.Л. Соболев. – Новосибирск, 1980. – С. 116-118.
12. *Рамазанов, М.Д.* Лекции по теории приближенного интегрирования / М.Д. Рамазанов. – Уфа: Изд-во Башкир. ун-та, 1973. – 174 с.
13. *Рахматуллин, Д.Я.* Интегрирование функций по выпуклым областям решетчатыми кубатурными формулами на многопроцессорных вычислительных системах: Дис….канд. физ.-мат. наук / Д.Я. Рахматуллин. – Уфа, 2006. – 114 с.

14. *Соболев, С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

15. *Умарханов, И.* Построение и обоснование решетчатых кубатурных формул для областей с кусочно-гладкими границами: Дис. … канд. физ.-мат. наук / И. Умарханов. – Ташкент: ТашГУ, 1986. – 173 с.

16. *Шойнжуров, Ц.Б.* Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных: Дис… докт. физ-мат. наук / Ц.Б. Шойнжуров – Улан-Удэ, 1977. – 235 с.

17. *Шойнжуров, Ц.Б.* Асимптотически оптимальные квадратурные и кубатурные формулы / Ц.Б. Шойнжуров. – Новосибирск, 1979. – С. 28.

18. *Шойнжуров, Ц.Б.* Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах / Ц.Б. Шойнжуров. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского научного центра СО РАН, 2005. – 247 с.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Инхеева, Л.И., Булгатова, Е.Н.* Построение квадратурных формул с помощью разложения единицы / Л.И. Инхеева, Е.Н. Булгатова // Сб. науч. тр: Физико-математические науки. — Улан-Удэ: ВСГТУ, 2005. – Вып. 8.–С.14-21.

2. *Булгатова, Е.Н.* Построение квадратурных формул с симметричным пограничным слоем / Е.Н. Булгатова // Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы (ИКВТС-06): Материалы II Всероссийской конф. –Т.1. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2006. – С. 74–78.

3. *Булгатова, Е.Н., Инхеева, Л.И.* Кубатурные формулы для гладких областей / Е.Н. Булгатова, Л.И. Инхеева // Кубатурные формулы и их приложения: Докл. VIII семинара-совещ. / Отв. ред. Ц.Б. Шойнжуров. – Улан-Удэ, 2005. – С. 39–46.

4. *Булгатова, Е.Н., Санеева, Л.И.* Кубатурные формулы для гладких и кусочно-гладких криволинейных областей / Е.Н. Булгатова, Л.И. Инхеева // Вестник ВСГТУ. – 2005. – N 4. – С. 5–10.

5. Булгатова Е.Н., Санеева Л.И. Экстремальная функция и норма оптимального периодического функционала //Вычислительные технологии. – 2006.- Т.11, №4. – С. 113–117.

6. *Шойнжуров, Ц.Б., Санеева, Л.И., Булгатова, Е.Н.* Вычисление определенного интеграла с помощью кубатурных формул, содержащих значения функции и ее производных, с коэффициентами, зависящими от уравнения границы / Ц.Б. Шойнжуров, Л.И. Санеева, Е.Н. Булгатова // Вестник ВСГТУ. Изд-во ВСГТУ, Улан-Удэ – 2006. – N 2. – С. 5–12.

7. *Булгатова, Е.Н., Павлова, Е.Б.* Весовые кубатурные формулы в пространстве $W_{\infty}^{m}\left(E_n\right)$ / Е.Н. Булгатова, Е.Б. Павлова // Тр. IX –го международного семинара-совещания «Кубатурные формулы и их приложения». Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2007. – С. 30–37.
8. *Шойнжуров, Ц.Б., Булгатова, Е.Н.* Построение кубатурной формулы для области с кусочно-гладкой границей / Ц.Б. Шойнжуров, Е.Н. Булгатова // Сб. науч. тр: Серия: Физико-математическая. — Улан-Удэ: изд-во ВСГТУ, 2008. – Вып. 9. – С. 60–70.
9. *Шойнжуров, Ц.Б., Булгатова, Е.Н.* Вычисление несобственных интегралов / Ц.Б. Шойнжуров, Е.Н. Булгатова // Математика, её приложения и математическое образование: Материалы III всероссийской конференции с международным участием. Ч. II. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2008. – С. 414–420.
10. *Шойнжуров, Ц.Б., Булгатова, Е.Н., Арсаланов, А.А.* Оптимизация узлов весовой квадратурной формулы / Ц.Б. Шойнжуров, Е.Н. Булгатова, А. А. Арсаланов // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева(Новосибирск, 5-12 октября 2008г.): Тез. докладов/ Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2008. – С. 597.
11. *Санеева, Л.И., Булгатова, Е.Н.* Вычисление интегралов по областям с гладкими и кусочно-гладкими границами / Л.И. Санеева, Е.Н. Булгатова // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева(Новосибирск, 5-12 октября 2008г.): Тез. докладов/ Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2008. – С. 560.