На правах рукописи

Ахмерова Ирина Геннадьевна

НАЧАЛЬНО - КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Красноярск

2011

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений ФГБОУ ВПО "Алтайский государственный университет "(г. Барнаул).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Папин Александр Алексеевич.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Родионов Александр Алексеевич;

кандидат физико-математических наук,
доцент Прокудин Дмитрий Алексеевич.

Ведущая организация:
Учреждение Российской академии наук Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита диссертации состоится “ 14 ” декабря 2011 г. в 16:30 на заседании диссертационного совета ДМ 212.099.18 при Сибирском федеральном университете по адресу: 660074, Красноярск, ул. Киренского, 26, ИКИТ СФУ, ауд. 115 (УЛК).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан “____” _______ 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент К.А. Кириллов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Актуальность теоретического исследования моделей механики многофазных сред основывается на их широком применении к решению важных практических задач. К числу многофазных моделей, интересных как с математической точки зрения, так и с точки зрения приложений, относится модель описывающая движение смеси, состоящей из двух вязких жидкостей. В основе этой математической модели лежат уравнения сохранения массы, импульса каждой фазы и уравнение сохранения энергии смеси в целом:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i v_i) = 0, \quad \rho_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x} + F_i,$$

$$\sum_{i=1}^{2} c_i \rho_i^0 s_i (\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\chi \frac{\partial \theta}{\partial x}).$$

Здесь v_i – скорость соответствующей фазы; ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией s_i соотношением $\rho_i = s_i \rho_i^0$; θ – абсолютная температура среды ($\theta_1 = \theta_2 = \theta$). Условие $s_1 + s_2 = 1$ является следствием определения ρ_i. Для тензора напряжений фазы σ_i принимается аналог гипотезы Стокса: $\sigma_i = -s_i p_i + s_i \mu_i \frac{\partial v_i}{\partial x}$, где p_i – давление i –ой фазы, μ_i – коэффициент динамической вязкости фазы, c_i – теплоемкость i–ой фазы при постоянном объеме. Постулируется, что силы F_i имеют вид: $F_i = p_i \frac{\partial s_i}{\partial x} + \varphi_i + \rho_i g$, где $\quad \varphi_1 = K(v_2 - v_1), \quad \varphi_2 = -\varphi_1$, K – коэффициент взаимодействия фаз, g – ускорение силы тяжести, χ – коэффициент теплопроводности смеси. Данная модель широко используется в приложениях (см., например, Р.И. Нигматулин Динамика многофазных сред. Ч. 1, 2. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987., В.Н. Николаевский, К.С. Басниев, А.Т. Горбунов, Г.А. Зотов Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра. 1970. 336 с.), она является обобщением модели фильтрации Маскета-Леверетта двух вязких несжимаемых несмешивающихся жидкостей. Вопросы разрешимости таких моделей исследованы в гораздо меньшей степени по сравнению с классическими моделями фильтрации или вязкого газа. Это связано с существенным усложнением моделей, в частности, введением концентраций фаз. Первые результаты о разрешимости многокомпонентной одномерной баротропной смеси (аналог многокомпонентного вязкого газа, понятие концентрации фазы не используется) получены в работах А.В. Кажихова, А.Н. Петрова, Г.Г. Доронина, Н.А. Ларькина, А.Н. Крайко. Для многомерных баротропных смесей (понятие концентрации не используется) вопросы разрешимости рассматривались в работах: Ж. Фрезе, С. Гой и Ж. Малека (для систем Стокса без конвективных членов); Ж. Фрезе и В. Вайганта (для квази-стационарной систем); Н.А. Кучера, Д.А. Прокудина (для уравнений баротропных течений смесей вязких сжимаемых жидкостей). В работах О.В. Воинова, В.В. Пухначева и А.Г. Петровой для уравнений движения эмульсии (используется понятие конценрации) в поле микроускорений и термокапиллярных сил получены результаты о локальной разрешимости.

Диссертация посвящена математическому исследованию проблемы разрешимости начально-краевых задач для систем уравнений движений двухфазных жидкостей (газов).

Цель работы. Математическое исследование разрешимости начально-краевых задач для систем уравнений двухфазных смесей жидкостей (газов) в различных функциональных пространствах.

Методы исследования. При выводе результатов работы используются идеи и методы теории функций, функционального анализа, дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций достигается: использованием общих методов решения эволюционных краевых задач, изложенных, например, в монографиях О. А. Ладыженской, Ж. - Л. Лионса, С. Н. Антонцева, А. В. Кажихова, В. Н. Монахова; при доказательстве теорем существования основные усилия сосредоточены на получении априорных оценок, на основе которых, с помощью известных теорем из анализа либо методом Бубнова-Галеркина, показывается разрешимость задач; формулировка результатов работы в виде математических теорем, которые сопровождаются строгими доказательствами.

Научная новизна. Основные результаты, изложенные в диссертации, являются новыми и подтверждены полными доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Теоретическая и практическая ценность работы заключается в том, что:

— установлена однозначная разрешимость в классе сильных и классических решений "в малом" по времени для задачи о нестационарном неизотермическом одномерном движении двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей с неоднородными граничными условиями;

— для фильтрационного приближения (ускорение и коэффициент вязкости второй фазы, пренебрежимо малы) доказана разрешимость “в целом” и установлен факт стабилизации решения нестационарной задачи к решению стационарной задачи;

— доказана локальная по времени теорема существования обобщенного решения нестационарной неизотермической одномерной начально-краевой задачи о движении смеси твердых частиц и сжимаемого газа (истинная плотность второй фазы – функция температуры и давления) с непостоянной вязкостью фаз;

— доказана разрешимость “в целом” по времени в классе сильных решений нестационарной неизотермической одномерной начально-краевой задачи о движении смеси твердых частиц и несжимаемого газа с непостоянной вязкостью фаз, а так же установлена сходимость при неограниченном росте времени решения нестационарной задачи с постоянной вязкостью к решению стационарной.

Апробация работы. Результаты по теме диссертации были доложены на:

– региональной конференции по математическому образованию на Алтае “МОНА 2006” (Барнаул, 2006);
– XLV международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс” (Новосибирск, 2007);
– XIII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2007);
– Всероссийской конференции “Математика в приложениях”, приуроченной к 80-летию академика С.К. Годунова (Новосибирск, 2009);
– Всероссийской конференции “Успехи механики сплошных сред”, приуроченной к 70-летию академика В.А. Левина (Владивосток, 2009);
– региональной конференции “Математика Алтайского края” (Барнаул, 2003, 2007, 2009, 2010);
– городском семинаре “Задачи индустриальной и прикладной математики” (Барнаул, 2009, 2010, 2011);
– семинарах кафедры дифференциальных уравнений Алтайского государственного университета (Барнаул);

– Всероссийской конференции “Задачи со свободными границами; теория, эксперимент, приложения” (Бийск, 2011);
– семинаре ИВМ СО РАН (Красноярск, 2011) под руководством профессора В.К. Андреева;
– семинаре Кемеровского госуниверситета (Кемерово, 2011) под руководством профессора Н.А. Кучера.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-7], список которых приведен в конце автореферата. Доля авторского участия в совместных публикациях составляет 50-70%, причем доказательство основных научных положений принадлежит диссертанту лично.

Структура и объём работы. Диссертация изложена на 96 страницах машинописного текста и состоит из введения, двух глав и списка литературы из 58 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение включает в себя обзор литературы по теме диссертации, краткое описание рассматриваемых в работе задач и полученных результатов.

В **главе 1** рассматривается задача о неизотермическом движении двухфазной смеси с неоднородными граничными условиями и постоянной истинной плотностью. В основе математической модели лежат уравнения сохранения массы, импульса каждой фазы и уравнение сохранения энергии смеси в целом:

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_i v_i) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

$$\rho_i^0 s_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_i \; s_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = -s_i \frac{\partial p_i}{\partial x} + \varphi_i + \rho_i^0 s_i g, \tag{2}$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad \varphi_1 = K(v_2 - v_1), \quad \varphi_2 = -\varphi_1, \quad p_1 - p_2 = p_c(s_1, \theta), \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{2} c_i \rho_i^0 s_i \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi(s_1) \frac{\partial \theta}{\partial x}\right). \tag{4}$$

Здесь ρ_i^0, μ_i, c_i – заданные положительные постоянные, $K(s_1)$, $\chi(s_1)$, $p_c(s_1, \theta)$– заданные функции. Условие $\rho_i^0 = const$ приводит к замкнутой системе уравнений для $s_i(x, t)$, $v_i(x, t)$, $\theta(x, t)$ и $p_i(x, t)$ в области $Q_T = \{x \mid 0 < x < 1\} \times (0, T)$.

Система (1) - (4) дополняется начально-краевыми условиями:

$$v_i\mid_{x=0}= a_i(t),\quad v_i\mid_{x=1}= b_i(t),\quad v_i\mid_{t=0}= v_i^0(x),\quad s_1\mid_{t=0}= s_1^0(x),$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\mid_{x=0}= \theta_1(t),\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}\mid_{x=1}= \theta_2(t),\qquad \theta\mid_{t=0}= \theta^0(x). \tag{5}$$

В диссертации для системы (1) – (4) рассматривается два варианта граничных условий: $a_i(t) = b_i(t) = a(t)$ и $v_1\mid_{x=0}= a_1(t)$, $v_1\mid_{x=1}= b_1(t)$, $v_2\mid_{x=0,x=1}= 0$. Заметим, что из уравнений (1) с учетом равенства $s_1 + s_2 = 1$ вытекает соотношение $s_1v_1 + s_2v_2 = h(t)$, справедливое для произвольной функции $h(t)$, $t \in [0, T]$. В первом варианте граничных условий функция $h(t) = a(t)$, т.е. предполагается известной, а во втором варианте – $h(t) = s(0, t)a_1(t)$ и является неизвестной функцией.

Дополнительное условие для однозначного определения $p_1(x, t)$ берется в виде

$$\int_0^1 p_1(x,t)dx = 0. \tag{6}$$

Относительно функций $s_1^0(x)$, $\theta^0(x)$ предполагается выполнение неравенств следующего вида:

$$\begin{aligned} &0 < m_0 \le s_1^0(x) \le M_0 < 1,\\ &0 < k_1^{-1} \le \theta^0(x) \le k_1 < \infty \end{aligned} \tag{7}$$

для всех $x \in [0, 1]$ и при фиксированных постоянных m_0, M_0, k_1.

Определение 1.1.1. Обобщенным решением задачи (1)–(6) называется совокупность функций $(s_i(x, t),\ v_i(x, t),\ p_i(x, t),\ \theta(x, t))$, $i = 1, 2$ из пространств

$$s_i \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)),\quad \frac{\partial s_i}{\partial t} \in L_2(Q_T),$$

$$(v_i, \theta) \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega)),\quad p_i \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)),$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}, \frac{\partial\theta}{\partial t}, \frac{\partial p_i}{\partial x}\right) \in L_2(Q_T),\quad \Omega = (0, 1),\quad Q_T = \Omega \times (0, T),$$

удовлетворяющих уравнениям (1)–(4) и неравенствам $0 < s(x, t) < 1$, $0 < \theta(x, t) < \infty$ почти всюду в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Определение 1.1.2. Классическим решением задачи (1) – (6) называется совокупность функций $(v_i(x,t), s_i(x,t), p_i(x,t), \theta(x,t))$, $i = 1,2$, если они обладают непрерывными производными, входящими в уравнения (1)–(4), и удовлетворяют уравнениям, начальным и граничным условиям и неравенствам $0 < s(x,t) < 1$, $0 < \theta(x,t) < \infty$ как непрерывные в $\overline{Q}_T$ функции.

Теорема 1.1.1. Пусть данные задачи (1)–(6) удовлетворяют условиям (7), а также условиям гладкости

$$(v_i^0,\, \theta^0) \in W_2^1(\Omega), \quad s^0 \in W_2^2(\Omega), \quad (\theta_i, a_i, b_i) \in W_2^1(0,T), \quad g \in L_2(0,T; W_2^1(\Omega))$$

и условиям согласования:

$$v_i^0(0) = a_i(0), \quad v_i^0(1) = b_i(1), \quad i = 1,2,$$

$$\frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\mid_{x=0} = \theta_1(0), \quad \frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\mid_{x=1} = \theta_2(1).$$

Пусть $K(s_1)$, $p_c(s_1,\theta)$, $\chi(s_1)$ – достаточно гладкие функции своих аргументов, удовлетворяющие следующим условиям:

$$K(s_1) = K_0(s_1)(s_1 s_2)^q, \quad 0 < k_0^{-1} \le K_0(s_1) \le k_0 = const,$$

$$k_1^{-1}(s_1 s_2)^{q_1} \le \chi(s_1) \le k_1(s_1 s_2)^{q_1}, \quad k_1^{-1}(s_1 s_2)^{q_1 - 1} \le \frac{d\chi(s_1)}{ds_1} \le k_1(s_1 s_2)^{q_1 - 1},$$

$$|\frac{\partial p_c(s_1,\theta)}{\partial s_1}| \le k_1(s_1 s_2)^{q_2}|\theta|^{q_3}, \quad |\frac{\partial p_c(s_1,\theta)}{\partial \theta}| \le k_1(s_1 s_2)^{q_4}|\theta|^{q_5},$$

$$|\frac{\partial^2 p_c(s_1,\theta)}{\partial s_1^2}| \le k_1(s_1 s_2)^{q_6}|\theta|^{q_7}, \quad |\frac{\partial^2 p_c(s_1,\theta)}{\partial \theta^2}| \le k_1(s_1 s_2)^{q_8}|\theta|^{q_9},$$

$$|\frac{\partial^2 p_c(s_1,\theta)}{\partial s_1 \partial \theta}| \le k_1(s_1 s_2)^{q_{10}}|\theta|^{q_{11}},$$

где $k_1 = const > 0$, $q, q_1, ..., q_{11}$ – фиксированные вещественные параметры, причем $q_3 \ge 0$, $q_5 \ge 0$, $q_7 \ge 0$, $q_9 \ge 0$, $q_{11} \ge 0$.

Если выполнены условия (7), то существует достаточно малое значение $t_0 > 0$, $t_0 \in (0,T)$ такое, что для всех $t \in (0,t_0)$ существует единственное обобщенное решение $(s_i,\, v_i,\, p_i,\, \theta)$ задачи (1)–(6).

Если дополнительно:

$$g \in C^{1+\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T), \quad (s^0, v_i^0, \theta^0) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}),$$

$$v_i^0(0) = a_i(0), \quad v_i^0(1) = b_i(1), \quad i = 1, 2,$$
$$\frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x} \mid_{x=0} = \theta_1(0), \quad \frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x} \mid_{x=1} = \theta_2(1),$$

коэффициенты $K(s_1)$ и $\chi(s_1)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, то в Q_{t_0} существует единственное классическое решение задачи, удовлетворяющее условиям

$$s_i \in C^{1+\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}), \quad (v_i, \theta) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}), \quad \frac{\partial p_i}{\partial x} \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}),$$

причем найдутся числа $0 < m^{(2)} < M^{(2)} < 1$, $0 < m^{(3)} < M^{(3)} < \infty$, такие, что

$$0 < m^{(2)} \le s_1(x,t) \le M^{(2)} < 1,$$
$$0 < m^{(3)} \le \theta(x,t) \le M^{(3)} < \infty, \quad (x,t) \in \overline{Q}_{t_0}.$$

Система уравнений (1) – (4) является обобщением модели фильтрации Маскета-Леверетта двух вязких несжимаемых несмешивающихся жидкостей (Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука. 1983. 316 с.). В предположении малости вязкости и ускорения второй фазы (в уравнении (2) для второй фазы соответствующие слагаемые отбрасываются) из системы (1) – (4) получаем фильтрационное приближение, описываемое следующей системой уравнений (Gard S.K. and Pritchett J.W. Dynamics of gas - fluidized beds // Journal of Applied Phisics. 1975. Vol. 46. N. 10. P. 4493-4500.):

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_i v_i) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{8}$$

$$\rho_1^0 s_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_1 \, s_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = -s_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + \varphi_1 + \rho_1^0 s_1 g, \tag{9}$$

$$-s_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} + \varphi_2 = 0, \tag{10}$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad \varphi_1 = K(v_2 - v_1), \quad \varphi_2 = -\varphi_1, \quad p_1 - p_2 = p_c(s_1), \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{2} c_i \rho_i^0 s_i \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi \frac{\partial \theta}{\partial x}\right). \tag{12}$$

Здесь $K = K_0(s_1) s_1^{-\beta} (s_2)^{-\beta-1}, \quad \beta \ge 1.$

Система (8)- (12) дополняется начальными и граничными условиям:

$$v_i \mid_{x=0}= 0, \quad v_i \mid_{x=1}= 0, \quad s_1 \mid_{t=0}= s_1^0(x), \quad v_i \mid_{t=0}= v_i^0(x),$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \mid_{x=0}= 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \mid_{x=1}= 0, \quad \theta \mid_{t=0}= \theta^0(x). \tag{13}$$

Под сильным и классическим решением задачи (8)–(13) понимается решение в смысле определения 1.1.1. и определения 1.1.2.

Теорема 1.1.2. Пусть данные задачи (8) – (13) удовлетворяют условиям

$$0 < m_0 \leq s^0(x) \leq M_0 < 1, \quad 0 < m_0' \leq \theta^0(x) \leq M_0' < \infty$$

и обладают следующими свойствами гладкости:

$$(s_1^0, v_1^0, \theta^0) \in W_2^1(\Omega), \quad v_1^0(0) = v_1^0(1) = 0$$

и дополнительно известно, что

$$\mid p_{cs_1}' \mid \leq \frac{k_1}{s_1(1-s_1)}, \quad (p_{c\theta}')^2 \leq \frac{k_1 \chi(s_1)}{s_1(1-s_1)}, \quad p_c^2 \leq \frac{k_1}{s_1^{\beta+1}(1-s_1)^{\beta}},$$
$$k_1^{-1}(s_1(1-s_1))^n \leq \chi \leq k_1(s_1(1-s_1))^n, \quad n = const,$$
$$K = K_0(s_1) s_1^{-\beta}(1-s_1)^{-\beta-1}, \quad \beta \geq 1.$$

Тогда для всех конечных $T > 0$ существует по крайней мере одно обобщенное решение задачи (8)–(13), причем $\theta(x,t)$ и $s_1(x,t)$ – строго положительные и ограниченные функции.

Если дополнительно $s_1^0 \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}), (v_1^0, \theta^0) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), 0 < \alpha \leq 1$ и начальные данные согласованы с граничными условиями, то решение является классическим.

Для модели изотермического движения в фильтрационном приближении помимо доказательства разрешимости "в целом" доказывается стабилизация решения.

Теорема 1.1.4. Решением задачи (8) – (11), (13) с $g = 0, p_c = 0, \theta = const$ стабилизируется к решению стационарной задачи, решением которой является набор постоянных $v_1 = 0, v_2 = 0, s = \lambda = const \in (0,1)$.

В **главе 2** рассматривается разрешимость начально-краевых задач для уравнений одномерного нестационарного движения теплопроводной двухфазной смеси в случае непостоянной истинной плотности одной из фаз. Система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial(\rho_1^0 s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1^0 s v_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho_2^0(1-s))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2^0(1-s)v_2)}{\partial x} = 0, \tag{14}$$

$$\rho_1^0 s\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)=-\frac{\partial(sp_1)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_1(s)\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)+F+\rho_1^0 sg, \tag{15}$$

$$\rho_2^0(1-s)\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)=-\frac{\partial((1-s)p_2)}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_2(s)\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)-F+\rho_2^0(1-s)g, \tag{16}$$

$$F=B(s)(v_2-v_1)+p_2\frac{\partial s}{\partial x},\quad p_1-p_2=p_c(s,\theta),\quad p_2=R\rho_2^0\theta, \tag{17}$$

$$c_1\rho_1^0 s\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}+v_1\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)+c_2\rho_2^0(1-s)\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}+v_2\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\chi(s)\frac{\partial \theta}{\partial x}), \tag{18}$$

и решается в области $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega=(0,1)$, при краевых и начальных условиях $(i=1,2)$

$$\begin{gathered} v_i\mid_{x=0,x=1}=0,\quad \tfrac{\partial\theta}{\partial x}\mid_{x=0,x=1}=0,\quad v_i\mid_{t=0}=v_i^0(x),\\ p_2\mid_{t=0}=p^0(x),\quad \theta\mid_{t=0}=\theta^0(x),\quad s\mid_{t=0}=s^0(x). \end{gathered} \tag{19}$$

Здесь (x,t) – эйлеровы координаты; ρ_i^0, v_i – соответственно истинная плотность и скорость i - ой фазы ($i=1$ – твердые частицы, $i=2$ – газ), s – объемная концентрация твердых частиц, θ – абсолютная температура смеси, p_1 – эффективное давление твердых частиц, p_2 – внутреннее давление газа, g – плотность массовых сил, $c_i=const>0$ – теплоемкость при постоянном объеме, $R=const>0$ – универсальная газовая постоянная; кроме того, $\mu_i(s)$ – вязкости фаз, $B(s)$ – коэффициент взаимодействия фаз, $\chi(s)$ – коэффициент теплопроводности смеси, $p_c(s,\theta)$ – разность давлений (заданные функции). Истинная плотность твердых частиц ρ_1^0 принимается постоянной. Искомыми являются величины s, θ, ρ_2^0, v_i, p_i, $i=1,2$.

Определение 2.1.1. Обобщенным решением задачи (14) – (19) называется совокупность функций $(s(x,t),\rho_2^0(x,t),v_i(x,t),p_i(x,t),\theta(x,t))$, $i=1,2$ из пространств

$$(s,\rho_2^0,p_2)\in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)),\quad (\frac{\partial s}{\partial t},\frac{\partial \rho_2^0}{\partial t})\in L_2(Q_T),$$

$$(v_i,\theta)\in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_2(0,T;W_2^2(\Omega)),\quad p_1\in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)),$$
$$(\frac{\partial v_i}{\partial t},\frac{\partial \theta}{\partial t},\frac{\partial p_i}{\partial x})\in L_2(Q_T),\quad \Omega=(0,1),\quad Q_T=\Omega\times(0,T),$$

удовлетворяющие уравнениям (14) - (18) и неравенствам $0 < s < 1, 0 < \theta, \rho_2^0 < \infty$ почти всюду в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Теорема 2.1.1. Пусть данные задачи (14) – (19) обладают следующими условиями гладкости:

$$(v_i^0, \theta^0, s^0, \rho_2^0) \in W_2^1(\Omega), \quad g \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$$

и подчиняются условиям согласования

$$v_i^0 \mid_{x=0,x=1} = \frac{d\theta^0}{dx} \mid_{x=0,x=1} = \frac{dp^0}{dx} \mid_{x=0,x=1} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Пусть функции $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$, $B(s)$, $p_c(s, \theta)$, $\chi(s)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $s \in (0, 1)$ и удовлетворяют условиям:

$$k_0^{-1} s^{q_1}(1-s)^{q_2} \le \mu_1(s) \le k_0 s^{q_3}(1-s)^{q_4}, \quad |(\mu_1(s))'_s| \le k_0 s^{q_5}(1-s)^{q_6},$$

$$k_0^{-1} s^{q_7}(1-s)^{q_8} \le \mu_2(s) \le k_0 s^{q_9}(1-s)^{q_{10}}, \quad |(\mu_2(s))'_s| \le k_0 s^{q_{11}}(1-s)^{q_{12}},$$

$$k_0^{-1} s^{q_{13}}(1-s)^{q_{14}}|\theta|^{q_{15}} \le p_c(s,\theta) \le k_0 s^{q_{16}}(1-s)^{q_{17}}|\theta|^{q_{18}}, |(p_c(s,\theta))'_s| \le k_0 s^{q_{19}}(1-s)^{q_{20}}|\theta|^{q_{21}},$$

$$k_0^{-1} s^{q_{22}}(1-s)^{q_{23}} \le \chi(s) \le k_0 s^{q_{24}}(1-s)^{q_{25}}, \quad |(\chi(s))'_s| \le k_0 s^{q_{26}}(1-s)^{q_{27}},$$

$$k_0^{-1} s^{q_{28}}(1-s)^{q_{29}} \le B(s) \le k_0 s^{q_{30}}(1-s)^{q_{31}},$$

где $k_0 = const > 0$, $q_1, ..., q_{31}$ – фиксированные вещественные параметры.

Если выполнены условия

$$0 < m_0 \le s^0(x) \le M_0 < 1,\ 0 < m_1 \le p^0(x), \theta^0(x) \le M_1 < \infty,\ x \in \overline{\Omega}, \quad (20)$$

где m_0, M_0, m_1, M_1 - известные положительные постоянные, то найдется достаточно малое значение $t_0 > 0, t_0 \in (0, T)$, такое что для всех $t \le t_0$ существует сильное решение $(s(x,t), \rho_2^0(x,t), v_i(x,t), p_i(x,t), \theta(x,t))$ задачи (14) - (19).

В случае несжимаемых сред уравнение состояния $p_2 = p_2(\rho_2^0, \theta)$ не используется и давление p_2 является искомой функцией.

Введем безразмерные переменные

$$x' = x/L, \quad t' = t/t_1, \quad p_c' = p_c/P, \quad \theta' = \theta/\theta_1$$

$$v_i' = v_i/U, \quad p_i' = p_i/P, \quad i = 1, 2,$$

и положим

$$\delta=\rho_2^0/\rho_1^0, \quad \mu_i=\mu_i^0\overline{\mu}_i(s), \quad \chi=\chi_0\overline{\chi}(s), \quad \mu_i^0=const>0, \quad \chi_0=const>0,$$

$\overline{\mu}_i(s)$, $\overline{\chi}(s)$ – заданные функции. Кроме того, положим

$$L=Ut_1, \quad \nu=\mu_2^0/\mu_1^0, \quad P=L\rho_1^0|g|,$$

$$\chi_0=UL\rho_1^0c_1, \quad B^{'}=BU/\rho_1^0|g|, \quad n=g/|g|,$$

Вместо системы (14) – (18) получим (штрихи опущены):

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial (sv_1)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial((1-s))}{\partial t}+\frac{\partial((1-s)v_2)}{\partial x}=0,$$

$$sFr\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)=-s\frac{\partial p_2}{\partial x}-\frac{\partial (sp_c)}{\partial x}+\frac{Fr}{Re}\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\mu}_1(s)\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)+B(s)(v_2-v_1)+sn,$$

$$(1-s)\delta Fr\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)=-(1-s)\frac{\partial p_2}{\partial x}+\frac{Fr}{Re}\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\mu}_2(s)\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)+$$
$$+B(s)(v_1-v_2)+(1-s)\delta n,$$

$$s\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}+v_1\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)+\frac{c_2}{c_1}\delta(1-s)\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}+v_2\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\chi}(s)\frac{\partial \theta}{\partial x}), \quad p_1=p_2+p_c.$$

При $\delta=\nu=0$ уравнение сохранения импульса второй фазы и уравнение сохранения энергии принимают вид

$$\frac{\partial p_2}{\partial x}=\frac{B(s)}{1-s}(v_1-v_2), \quad s\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}+v_1\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\chi}(s)\frac{\partial \theta}{\partial x}), \quad p_1=p_2+p_c. \quad (21)$$

Система уравнений (14), (15), (17), (21) дополняется начальными и граничными условиями:

$$\begin{gathered} v_i\mid_{x=0,x=1}=0, \quad \tfrac{\partial \theta}{\partial x}\mid_{x=0,x=1}=0, \quad v_i\mid_{t=0}=v_i^0(x), \\ p_2\mid_{t=0}=p^0(x), \quad \theta\mid_{t=0}=\theta^0(x), \quad s\mid_{t=0}=s^0(x). \end{gathered} \quad (22)$$

Здесь истинная плотность твердых частиц ρ_1^0 принимается постоянной, $p_c(s)$ – разность давлений (заданная функция насыщенности). Искомыми являются величины s,θ,v_i,p_i. Система уравнений (14), (15), (17), (21) замыкается предположением о несжимаемости газа ($\rho_2^0=const>0$).

Под обобщенным решением задачи (14), (15), (17), (21), (22) понимается решение в смысле определения 2.1.1.

Теорема 2.1.2.Пусть $\rho_2^0 = const > 0$ и данные подчиняются следующим условиям:
1. функции $\mu_1(s)$, $B(s)$, $p_c(s)$, $\chi(s)$ и их производные непрерывны для $s \in (0,1)$ и удовлетворяют условиям:

$$\mu(s) = \mu_1 s;$$

$$B(s) = B_0 \frac{s}{(1-s)^\beta}, \quad B_0 = const > 0, \quad \beta = const \geq 2;$$

$$p_c(s) = p_c^0 \frac{s}{(1-s)^\gamma}, \quad p_c^0 = const > 0, \quad 0 < \gamma = const < \beta;$$

$$\chi(s) = \chi^0(s) s^{q_{17}} (1-s)^{q_{18}}, \quad 0 < k_0^{-1} \leq \chi^0 \leq k_0 = const,$$

где q_{17}, q_{18} – фиксированные вещественные параметры;
2. функция g и начальные функции s^0, θ^0, v_i^0 удовлетворяют следующим условиям гладкости: $g \in L_2(0,T; W_2^1(\Omega))$, $(s^0, v_i^0, \theta^0) \in W_2^1(\Omega)$, условиям согласования: $v_i^0 \mid_{x=0,x=1} = \frac{d\theta^0}{dx} \mid_{x=0,x=1} = 0$ и дополнительно к (20) выполнено условие $\int\limits_0^1 p_2(x,t)\, dx = 0$. Тогда для всех $t \in [0,T]$, $T < \infty$ существует единственное обобщенное решение задачи (14), (15), (17), (21), (22).

Теорема 2.1.3. Решением задачи (14), (15), (17), (21), (22) с $g = 0, p_c = 0$ стабилизируется к решению стационарной задачи, решением которой является набор постоянных $u = 0, \theta = b = const > 0, s = c = const \in (0,1)$, то есть установлено, что

$$\int\limits_0^1 u^2 dx + \int\limits_0^1 u_x^2 dx + \int\limits_0^1 (\theta - b)^2 dx + \int\limits_0^1 \theta_x^2 dx +$$

$$+ \int\limits_0^1 (s-c)^2 dx + \int\limits_0^1 s_x^2 dx \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Заключение содержит краткий перечень основных результатов, полученных в диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основные результаты, полученные в настоящей работе, можно сформулировать следующим образом:

1. Для одномерных уравнений неизотермического движения двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей с неоднородными граничными условиями доказана локальная по времени разрешимость начально - краевой задачи в пространствах С.Л. Соболева и Гельдера.

2. Установлена глобальная разрешимость в пространствах С.Л. Соболева начально-краевой задачи о движении двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей в случае малости ускорения и коэффициента вязкости второй фазы; установлен факт стабилизации решения нестационарной задачи к решению стационарной задачи.

3. Обосновано существование "в малом" по времени обобщенного решения нестационарной неизотермической одномерной начально-краевой задачи о движении смеси твердых частиц и сжимаемого газа (истинная плотность второй фазы – функция температуры и давления) с непостоянной вязкостью фаз.

4. Установлена разрешимость "в целом" по времени в классе сильных решений нестационарной неизотермической одномерной начально-краевой задачи о движении смеси твердых частиц и несжимаемого газа с непостоянной вязкостью фаз, а так же доказана сходимость при неограниченном росте времени решения нестационарной задачи с постоянной вязкостью к решению стационарной.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Глобальная разрешимость модельной задачи о движении двух взаимопроникающих жидкостей. //Известия АлтГУ. - Барнаул, 2002.Спец.выпуск.- С.40-46.

2. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Задача протекания для уравнений движения двух взаимопроникающих вязких жидкостей. // Ред. Сиб.мат.журн. Сиб.отд.АН РФ. - Новосибирск, 2004. Деп. ВИНИТИ. - № 37. - 34 с.

3. Ахмерова И.Г. Глобальная разрешимость модельной задачи о неизотермическом движении двух взаимопроникающих жидкостей. // Известия АлтГУ. - Барнаул, 2005. - №1. - С. 7-12.

4. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Разрешимость "в целом"уравнений одномерного движения газожидкостного слоя. // Известия АлтГУ. - Барнаул, 2007. - №1 (53). - С. 34 - 38.

5. **Papin A.A., Akhmerova I.G. Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture // Mathematical Notes. – 2010. – Vol. 87. – № 2. – P. 230-243.**

6. Ахмерова И.Г. Об одной модельной системе уравнений одномерного движения двухфазной смеси // Сборник научных статей межрегиональной школы-семинара "Ломоносовские чтения на Алтае."Барнаул, 2010. - С.171-175.

7. **Ахмерова И.Г. Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной несжимаемой жидкости // Известия АлтГУ. - Барнаул, 2011. –№ 1/2. – С. 7-14.**

Подписано в печать 2011 г.
Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 2,0. Тираж 100 экз.
ФГБОУ ВПО “Алтайского государственный университет”
656049, Барнаул, проспект Ленина, 61
Типография Алтайского государственного университета
656049 Барнаул, ул. Димитрова, 66