На правах рукописи

Веревкин Игорь Викторович

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛИНЕЙНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЭЙЛЕРА-ДАРБУ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Красноярск - 2016

Работа выполнена в ФГБУН Институт вычислительного моделирования СО РАН

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, **Капцов Олег Викторович**
Официальные оппоненты:	**Шелухин Владимир Валентинович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева СО РАН, лаборатория фильтрации, заведующий лабораторией; **Ганжа Елена Ивановна**, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева», кафедра математического анализа и методики обучения математике в вузе, доцент
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Защита состоится 22 апреля 2016 года в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 999.040.02 на базе ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет», ФГБУН Институт вычислительного моделирования СО РАН по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Р 8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» и на сайте: http:// www.sfu-krasn.ru.

Автореферат разослан «_____» марта 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Шлапунов Александр Анатольевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Точные решения дифференциальных уравнений позволяют глубже понять качественные особенности описываемых процессов и явлений, свойства математических моделей, а также могут быть использованы в качестве тестовых примеров для асимптотических, приближенных и численных методов. В диссертации рассматриваются метод линейных определяющих уравнений и преобразования Эйлера-Дарбу для построения точных решений уравнений в частных производных.

Линейные определяющие уравнения (ЛОУ) предложены [1] как расширение классического группового анализа для определенных классов уравнений. В работе рассматриваются инвариантные многообразия второго и третьего порядков, как решения ЛОУ, при одновременном выборе коэффициента теплопроводности и функции источника, не являющиеся решениями классического определяющего уравнения. Это позволяет находить решения, которые не могут быть построены классическим групповым способом.

Исследованию и построению точных решений уравнения Фоккера-Планка, Клейна - Гордона - Фока и Шредингера посвящна обширная литература. [2] Применение преобразований Эйлера-Дарбу к указанным уравнениям дает новые примеры точных решений.

Целью работы является применение метода линейных определяющих уравнений и преобразований Эйлера-Дарбу для построения точных решений уравнений математической физики. Метод линейных определяющих уравнений используется для анализа уравнения нелинейной теплопроводности с источником. Преобразования Эйлера-Дарбу применены к уравнениям Фоккера-Планка, Клейна-Гордона-Фока и Шредингера.

Методы исследования. В диссертации применяются теория инвариантных многообразий, теория преобразований Эйлера-Дарбу, методы группового анализа, теория обобщенных функций.

Научная новизна. Представленные в диссертации результаты являются новыми и состоят в следующем:

для одномерного уравнения нелинейной теплопроводности с источником с помощью линейных определяющих уравнений найдены инвариантные многообразия второго и третьего порядков. Построено новое точное решение;

для одномерного уравнения Фоккера-Планка в представлении Ито построены прямое и противоположное преобразования Эйлера-Дарбу, преобразование Эйлера-Дарбу

[1] Капцов О.В. Линейные определяющие уравнения для дифференциальных связей // Математический сборник. 1998. Т. 189. №12. С. 103-118.

[2] Risken H. The Fokker-Planck equation. Methods of solution and applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989; Лагно В.И., Спичак С.В., Стогний В.И. Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

порядка k. Рассмотрено обобщение метода преобразования Эйлера-Дарбу на многомерные уравнения частного вида. С помощью преобразования Эйлера-Дарбу построены новые точные решения, удовлетворяющие заданным краевым условиям, являющиеся одновременно фундаментальными решениями задачи Коши;

введено преобразование Эйлера-Дарбу для неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью в виде обобщенных функций. В качестве примера построены фундаментальные решения уравнений Клейна-Гордона-Фока и Шредингера с переменными коэффициентами, описывающих частицу во внешнем скалярном поле.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Методы и результаты работы могут применяться в кинетической теории, при тестировании численных алгоритмов и асимптотических методов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:
Всероссийская конференция, посвященная памяти чл.-корр. РАН В.М. Тешукова "Нелинейные волны: теория и новые приложения"(Новосибирск, 2011);
XVI Международная научная конференция "Решетневские чтения"
(Красноярск, 2012);
Международная конференция "Алгебра и Логика: Теория и приложения"
(Красноярск, 2013);
Семинар Института вычислительного моделирования СО РАН "Математические модели и методы интегрирования" под руководством профессора О.В. Капцова (Красноярск, 2005, 2011, 2013, 2015);
Семинар Института вычислительного моделирования СО РАН "Математическое моделирование в механике" под руководством профессора В.К. Андреева (Красноярск, 2015);
Семинар Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета "Обратные задачи" под руководством профессора Ю.Я. Белова (Красноярск, 2015);
Семинар кафедры ПМиКБ Сибирского федерального университета под руководством профессора С.П. Царева (Красноярск, 2015).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 3 статьи в журналах из перечня ВАК. Совместная работа выполнена в нераздельном соавторстве.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех основных глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 77 страниц. Список литературы состоит из 49 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность работы, сформулирована цель, приведен обзор методов, связанных с темой диссертации, изложены основные результаты диссертации.

В **первой главе** рассмаривается уравнение нелинейной теплопроводности с источником (стоком)

$$u_t = (u^q u_x)_x + f(u), \qquad q \neq 0, \tag{1}$$

где $q \in R$, u - функция от пременных x и t, f - гладкая функция. При $q = -2$ и $f = ku$, где $k \in R$ уравнение (1) может быть линеаризовано и не рассматривается.

Линейное определяющее уравнение (ЛОУ) для уравнения (1) имеет вид

$$D_t h - u^q D_x^2 h - b_1 q u_x u^{q-1} D_x h - (b_3 q u^{q-1} u_{xx} + b_2 q(q-1) u^{q-2} u_x^2 + b_4 f_u) h = 0, \tag{2}$$

где $b_1, \ldots, b_4$ - неизвестные постоянные, которые нужно найти одновременно с h. Решения ЛОУ ищутся в форме, разрешенной относительно старшей производной

$$h = u_n + g(t, x, u, u_1, \ldots, u_{n-1}), \qquad n \geq 2, \qquad (\text{здесь и далее } u_k = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}).$$

Процедура поиска решения линейного определяющего уравнения аналогична используемой в групповом анализе [3].

Теорема 1.1. [4] *Линейное определяющее уравнение (2) имеет следующие решения второго порядка*

$$h = u_2 - \frac{u_1^2}{u},$$

если $q = -1,\ f = ku + nu \ln u,$ *а* $b_1 = 1, b_2 = 5/2, b_3 = 1, b_4 = 1;$

$$h = u_2 + \frac{qu_1^2}{u},$$

если $q \neq -1,\ f = su + ru^{-q},$ *а* $b_1 = 1, b_2 = \frac{3q-2}{q-1}, b_3 = 1, b_4 = 1;$

$$h = u_2 - \frac{3u_1^2}{2u},$$

если $q = -2,\ f = su + ru^3,$ *а* $b_1 = 4, b_2 = 2, b_3 = 0, b_4 = 1;$

$$h = u_2 + se^{rt} u^{-2} u_1 + \frac{r}{3},$$

[3]Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[4]Kaptsov O.V., Verevkin I.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations // J. Phys. A: Math. Gen. - 36. - 2003. P. 1401-1414.

если $q = 1$, $f = ru$, *а* $b_1 = 4, b_2 = 5, b_3 = 3, b_4 = 0$;

$$h = u_2 - \frac{(q-1)u_1^2}{u},$$

если q *произвольная константа,* $f = su + ru^{1-q}$, *а* $b_1 = 4,\ b_2 = \frac{3q+2}{q},\ b_3 = \frac{q+2}{q},\ b_4 = 1; r, s \in R$.

В список решений теоремы не включены функции h, удовлетворяющие классическим определяющим уравнениям.

Теорема 1.2. [5] *Линейное определяющее уравнение (2) имеет следующие решения третьего порядка*

$$h = u_3 + \frac{3(q-1)}{u}u_1u_2 + (q^2 - 3q + 2)\frac{u_1^3}{u^2} + nu_1,$$

если q *произвольная константа,* $f = su + ru^{1-q} + \frac{n(q+1)}{q^2}u^{q+1}$, *а* $b_1 = 5,\ b_2 = \frac{7q+6}{q},\ b_3 = 4 + \frac{6}{q},\ b_4 = 1$;

$$h = u_3 + \frac{3q-1}{u}u_1u_2 + q(q-2)\frac{u_1^3}{u^2} + ru_1,$$

если $q \neq 0, 1$, $f = nu + \frac{r}{q}u^{q+1}$, *а* $b_1 = 5,\ b_2 = \frac{7q^2-3q-2}{q(q-1)},\ b_3 = \frac{4q+2}{q},\ b_4 = 1$;

$$h = u_3 - \frac{5u_1u_2}{2u} + \frac{5u_1^3}{4u^2} + re^{-3mt/2}u^{5/2} + se^{mt/2}u^{1/2},$$

если $q = -\frac{1}{2}$, $f = mu$, *а* $b_1 = 5,\ b_2 = 5/3,\ b_3 = 0,\ b_4 = 1$;

$$h = u_3 - \frac{15u_1u_2}{2u} + \frac{35u_1^3}{4u^2} + re^{-3nt/2}u^{5/2},$$

если $q = -\frac{3}{2}$, $f = nu + mu^{5/2}$, *а* $b_1 = 5,\ b_2 = 3,\ b_3 = 0,\ b_4 = 1$;

$$h = u_3 - \frac{5u_1u_2}{2u} + \frac{5u_1^3}{4u^2} + ku_1 + se^{mt/2}u^{1/2},$$

если $q = -\frac{1}{2}$, $f = mu - 2ku^{1/2}$, *а* $b_1 = 5,\ b_2 = 5/3,\ b_3 = 0,\ b_4 = 1$;

$$h = u_3 - \frac{15u_1u_2}{2u} + \frac{35u_1^3}{4u^2} + se^{-7nt/2}u^{9/2} + re^{-3nt/2}u^{5/2},$$

если $q = -\frac{3}{2}$, $f = nu$, *а* $b_1 = 5,\ b_2 = 3,\ b_3 = 0,\ b_4 = 1$;

$$h = u_3 - \frac{4u_1u_2}{u} + \frac{3u_1^3}{u^2} + se^{-2mt}u^2u_1,$$

если $q = -1$, $f = mu$, *а* $b_1 = 5,\ b_2 = 4,\ b_3 = 2,\ b_4 = 1$;
$r, s, m, n \in R$.

[5] Там же

Отметим, что решения ЛОУ с $n = 1$ также существуют, но приводят только к инвариантным решениям.

Общая схема применения линейного определяющего уравнения аналогична применению классических определяющих уравнений. Приведем примеры построения решений.

Рассмотрим функцию $h = u_2 + qu_1^2/u$, где $q \in R$. Приравняем h к нулю и получим дифференциальную связь

$$u_2 + qu_1^2/u = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет при $q \neq -1$ решение

$$u = (c_1 x + c_2)^{\frac{1}{q+1}}. \tag{4}$$

Для уравнения

$$u_t = (u^q u_x)_x + su + ru^{-q}$$

и для представления (4) находим решение

$$u = e^{st}\left(ax + b - \frac{r}{s(q+1)}\exp\left(-s(q+1)t\right)\right)^{\frac{1}{q+1}}$$

где $a, b \in R$. Если q удовлетворяет условию $q > -1$, то решение является регулярным. Приведенное решение может быть найдено обобщенным методом инвариантных подпространств.

Рассмотрим дифференциальные связи третьего порядка. Уравнение

$$u_t = (u^{-1/2}u_x)_x + mu - 2k\sqrt{u}, \qquad m, k \in R \tag{5}$$

и соответствующая дифференциальная связь

$$h = u_3 - \frac{5u_1u_2}{2u} + \frac{5u_1^3}{4u^2} + ku_1 + se^{mt/2}u^{1/2}$$

для функции u дает

$$u = \frac{s(T+X)^2}{2T'X'}e^{mt/2},$$

где T и X произвольные функции от t и x соответственно. Последнее представление приводит к следующему виду решения уравнения (5)

$$u = (a_1 + a_2e^{mt/2})^2,$$

где a_1, a_2 есть функции x, которые должны удовлетворять системе уравнений

$$a_{1_{xx}} + a_1^2 m/2 - a_1 k = 0, \tag{6}$$

$$a_{2_{xx}} + a_1 a_2 m/2 - a_2 k = 0. \tag{7}$$

При произвольных m и k решения системы для a_1 и a_2 выражаются в терминах функций Вейерштрасса и Ламе соответственно [6]. Вместе с тем, если $m = 12$ и $k = 4$ функции

$$a_1 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,(x)},$$

$$a_2 = \frac{a}{\mathrm{ch}^2\,(x)} + \frac{b}{\mathrm{ch}^2\,(x)}\left(\frac{\mathrm{sh}\,(4x)}{32} + \frac{\mathrm{sh}\,(2x)}{2} + \frac{3x}{8}\right), \qquad a, b \in R$$

удовлетворяют уравнениям (6) и (7).

Рассмотрим теперь уравнение (5) при $k = 0$ и соответствующую дифференциальную связь

$$h = u_3 - \frac{5u_1u_2}{2u} + \frac{5u_1^3}{4u^2} + re^{-3mt/2}u^{5/2} + se^{mt/2}u^{1/2}.$$

При $s = 0$ функция u может быть записана в виде

$$u = -\frac{2T'X'}{(T+X)^2}e^{3mt/2},$$

где T и X произвольные функции t и x соответственно. Функция u будет решением исходного уравнения если функции T и X являются решениями дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^3 = (c_3X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0)^2, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)^3 = A(-c_3T^3 + c_2T^2 - c_1T + c_0)^2, \tag{9}$$

где c_3, c_2, c_1 и c_0 произвольные константы, $A = -2r$, а $\tau = -\frac{2}{m}e^{-mt/2}$. Уравнения (8) и (9) могут быть сведены к уравнению вида

$$(Z')^2 + \frac{4B}{9}Z^3 + \frac{B^2(b_1 - b_2)^2}{9} = 0,$$

решение которого выражается через функцию Вейерштрасса (здесь B, b_1, b_2 - постоянные, выражающиеся через исходные постоянные).

Во **второй** главе рассматриваются преобразования Эйлера-Дарбу для одномерного уравнения Фоккера-Планка:

$$u_t = (Fu)_{xx} + (Gu)_x \qquad (\text{здесь и далее } f_x = f' = \frac{\partial f}{\partial x}). \tag{10}$$

Коэффициенты G и F есть дифференцируемые необходимое число раз функции от x с физическим ограничением $F(x) > 0$.

Справедлива следующая теорема.

---

[6] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Часть 2-я. Трансцендентные функции (2-е изд.). М.: Физматлит, 1963.

Теорема 2.1. [7] *Преобразование Эйлера-Дарбу, заданное соотношением*

$$v(x,t) = \left(G + F' + F\frac{w_x}{w}\right)\left(u_x - \frac{w_x}{w}u\right), \tag{11}$$

переводит решения уравнения (10) в решения уравнения

$$v_t = (Fv)_{xx} + (G_1 v)_x, \tag{12}$$

где

$$G_1 = G + F' + 2F(\ln P)_x \tag{13}$$

и

$$P = \frac{w}{Fw_x + (F' + G)w}, \tag{14}$$

а функция $w(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(Fw)_{xx} + (Gw)_x + cw = 0, \qquad \text{где } c \in R. \tag{15}$$

Если известно k решений $w_1, \ldots, w_k$ уравнения (15) для различных $c_1, \ldots, c_k$, то можно построить преобразование Эйлера-Дарбу порядка k.

Теорема 2.2. [8] *Пусть $w_1, \ldots, w_k$ - решения уравнения (15), соответствующие различным постоянным $c_1, \ldots, c_k$. Тогда преобразование*

$$u_k = \frac{W(H_1, \ldots, H_k)}{W(w_1, \ldots, w_k)} \frac{W(u, w_1, \ldots, w_k)}{W(w_1, \ldots, w_k)} \tag{16}$$

переводит решения уравнения (10) в решения уравнения

$$(u_k)_t = (Fu_k)_{xx} + (G_k u_k)_x, \tag{17}$$

здесь $H_i = Fw_i' + (F' + G)w_i$, а $W(f_1, \ldots, f_k)$ - определитель Вронского для функций $f_1, \ldots, f_k$. При этом коэффициент задается формулой

$$G_k = G + kF' + 2F(\ln P)_x, \tag{18}$$

где $P = \dfrac{W(w_1, \ldots, w_k)}{W(H_1, \ldots, H_k)}$.

Замечание. Если некоторые параметры $c_j, \ldots, c_{j+m}$ стремятся к одной величине b, то в соответствии с методом Даламбера [9], необходимо в соответствующих формулах заменить $h_{j+1}, \ldots, h_{j+m}$ на $\partial_b h_j, \ldots, \partial_b^m h_j$.

[7] Веревкин И.В. Преобразование Эйлера-Дарбу для уравнения Фоккера-Планка // Теоретическая и математическая физика. 2011. Т. 166. №1. С. 68-76.

[8] Там же

[9] Гурса Э. Курс математического анализа. М.; Л.: ГТТИ, 1933. Т. 2 Ч. 2.

Преобразование Эйлера-Дарбу, переводящее уравнение (12) в уравнение (10) будем называть противоположным преобразованию (11).

Теорема 2.3. [10] *Пусть задано преобразование Эйлера-Дарбу, переводящее решения уравнения (10) в решения уравнения (12). Тогда преобразование Эйлера-Дарбу, задаваемое соотношением*

$$u(x,t) = \left(G_1 + F' + F\frac{w_1'}{w_1}\right)\left(v_x - \frac{w_1'}{w_1}v\right) \tag{19}$$

переводит решения уравнения (12) в решения уравнения (10) если

$$w_1 = \frac{1}{Fw}\left(\frac{w_x}{w} + \frac{F' + G}{F}\right)\exp\left(-\int\frac{G}{F}dx\right), \tag{20}$$

где G_1 и P задаются соотношениями (13) и (14) соответственно.

Отметим, что композиция прямого преобразования Эйлера-Дарбу и противоположного в общем случае не является тождественным преобразованием (что и объясняет применение нестандартной терминологии). Вместе с тем, наличие противоположного преобразования (19) позволяет разбить множество уравнений Фоккера-Планка на классы эквивалентности относительно преобразований Эйлера-Дарбу.

Преобразование Эйлера-Дарбу может быть использовано для построения решений многомерных уравнений Фоккера-Планка некоторого частного вида. Справедливо следующее обобщение теоремы 2.1.

Теорема 2.4. [11] *Преобразование Эйлера-Дарбу*

$$v(x,t) = \left(G + F' + F\frac{w_x}{w}\right)\left(u_x - \frac{w_x}{w}u\right)$$

переводит решения уравнения

$$(Fu)_{xx} + (Gu)_x = \hat{B}u$$

в решения уравнения

$$(Fv)_{xx} + (G_1 v)_x = \hat{B}v,$$

где $\hat{B}$ - дифференциальный оператор по переменным $y_1, \ldots, y_n$ вида $\hat{B} = \sum\limits_{|\alpha|>0}^{N} b_\alpha(y)\partial_y^\alpha$, $\partial_y^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{y_1}^{\alpha_1}\ldots\partial_{y_n}^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ - целочисленный мультииндекс, коэффициент G_1 имеет вид (13) с функцией P, задаваемой соотношением (14), а функция w удовлетворяет дифференциальному уравнению (15).

[10] Веревкин И.В. Преобразование Эйлера-Дарбу для уравнения Фоккера-Планка // Теоретическая и математическая физика. 2011. Т. 166. №1. С. 68-76.

[11] Там же

Условие теоремы 2.4 подсказывает, что группировкой соответствующих членов уравнения и последовательным применением преобразований Эйлера-Дарбу по различным переменным можно строить решения многомерных уравнений Фоккера-Планка, имеющих вид

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} (F_i(x)u)_{x_i x_i} + (G_i(x)u)_{x_i},$$

при этом функции F_i и G_i могут зависеть только от переменной x_i.

Используя теорему 2.1, построим решение одномерного уравнения Фоккера-Планка, удовлетворяющее заданным начально-краевым условиям.

В качестве исходного уравнения берется уравнение диффузии

$$u_t = a^2 u_{xx}.$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$v_t = a^2 v_{xx} + (G_1 v)_x. \tag{21}$$

Потребуем, чтобы искомое решение уравнения (21) удовлетворяло следующим краевым условиям:

$$v(x,0) = \delta(x - x_0), \tag{22}$$

$$v(x,t)|_{x\to\infty} = 0,$$

$$(a^2 v_x + G_1 v)|_{x=0} = 0,$$

$$(a^2 v_x + G_1 v)|_{x\to\infty} = 0,$$

где $\delta(x-x_0)$ - δ-функция Дирака. При этом считаем, что при $x < 0$ функция $v(x,t) = 0$. Для коэффициента

$$G_1 = \frac{2a^2 c_2}{c_1 + c_2 x}$$

выражение для функции $v(x,t)$ при $x > 0$ следующее

$$v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \frac{c_1 + c_2 x_0}{c_1 + c_2 x} \left(\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t} \right) + \exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{4a^2 t} \right) \right) -$$

$$-\frac{a c_2^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{t}}{(c_1 + c_2 x)^2} \left(\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t} \right) - \exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{4a^2 t} \right) \right) + \frac{2c_1 c_2}{\sqrt{\pi}(c_1 + c_2 x)^2} \int\limits_{\frac{x+x_0}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

Для коэффициента

$$G_1 = -\frac{8a^2 n c_1 c_2}{c_1^2 \exp(2nx) - c_2^2 \exp(-2nx)}$$

решение $v(x,t)$ имеет вид

$$v = \frac{2nc_1c_2e^{a^2n^2t}\sigma}{\sqrt{\pi}w_0w}\left(\int\limits_{y_1}^{\infty} e^{-y^2}dy + \int\limits_{y_2}^{\infty} e^{-y^2}dy - \int\limits_{y_3}^{\infty} e^{-y^2}dy - \int\limits_{y_4}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) +$$

$$+\frac{c_1+c_2}{\sqrt{\pi}w_0}\sigma(\beta+\sigma)(e^{nx_0}+e^{-nx_0})e^{(-\beta(x+x_0)+a^2\beta^2t)}\int\limits_{y_5}^{\infty} e^{-y^2}dy+$$

$$+\frac{\sigma}{2a\sqrt{\pi t}w_0}(c_1e^{nx_0}+c_2e^{-nx_0})\left(e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x_0+x)^2}{4a^2t}}\right),$$

где

$$\sigma = \frac{w_x}{w} = n\frac{c_1e^{nx}-c_2e^{-nx}}{c_1e^{nx}+c_2e^{-nx}},\ w_0 = n(c_1e^{nx_0}-c_2e^{-nx_0}), \beta = -n\frac{c1+c2}{c1-c2}, y_1 = \frac{x_0-x}{2a\sqrt{t}} - an\sqrt{t},$$

$$y_2 = \frac{x_0+x}{2a\sqrt{t}} + an\sqrt{t},\ y_3 = \frac{x_0-x}{2a\sqrt{t}} + an\sqrt{t},\ y_4 = \frac{x_0+x}{2a\sqrt{t}} - an\sqrt{t},\ y_5 = \frac{x_0+x}{2a\sqrt{t}} - a\beta\sqrt{t}.$$

Замечание. Построенные решения, вследствие выполнения условия (22) являются фундаментальными решениями задачи Коши [12].

В **третьей** главе рассматриваются преобразования Эйлера-Дарбу для неоднородных уравнений (их класс обозначается $E_{K,M}$) и их обобщенных решений следующего вида

$$Lu = Au + Bu = f, \qquad \text{где } A = \sum_{i=0}^{K} a_i(x)D_x^i \qquad \text{и } B = \sum_{|\alpha|\geq 0}^{M} b_\alpha(y)D_y^\alpha \tag{23}$$

дифференциальные операторы по переменной x и переменным $y_1,\dots,y_n$ соответственно, $f(x,y_1,\dots,y_n)$ - обобщенная функция, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ - целочисленный мультииндекс, а $D_x^i = \dfrac{\partial^i}{\partial x^i}$, $D_y^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {y_1}^{\alpha_1}\dots\partial {y_n}^{\alpha_n}}$ - операции обобщенного дифференцирования. Все функции считаются дифференцируемыми нужное количество раз. Если $h(x), g(y)$ - классические решения уравнений

$$Ah = ch, \qquad Bg + cg = 0, \qquad \text{где } c \in R, \tag{24}$$

то функция $u_1 = gh$ удовлетворяет однородному уравнению (23). Функция u_1 порождает преобразование уравнения (23).

Теорема 3.1. [13] *Класс уравнений $E_{K,M}$ обладает следующими свойствами.*
1. Если γ - гладкая функция вида $\gamma = p(x)q(y) \neq 0$, то преобразование

$$u \to v = u/\gamma$$

[12] Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.

[13] Веревкин И.В. Обобщенные решения и преобразования Эйлера-Дарбу // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6. №4. С. 63-70.

переводит обобщенные решения уравнения (23) в обобщенные решения уравнения

$$\hat{L}v = vL(\gamma)/\gamma + A_1 v + B_1 v = f/\gamma,$$

где

$$A_1 = \sum_{i=1}^{K} a_i^1(x) D_x^i, \qquad B_1 = \sum_{|\alpha|\geq 1}^{M} b_\alpha^1(y) D_y^\alpha.$$

При $\gamma = u_1 \neq 0$ уравнение $\hat{L}v = f/\gamma$ имеет вид

$$L_1 v = A_1 v + B_1 v = f/\gamma. \tag{25}$$

2. Преобразование $v \to w = v_x$ переводит обобщенные решения уравнения (25) в обобщенные решения уравнения

$$L_2 w = \sum_{i=1}^{K} (D_x(a_i^1) D_x^{i-1} w + a_i^1 D_x^i w) + \sum_{|\alpha|\geq 1}^{M} b_\alpha^1 D_y^\alpha w = D_x(f/\gamma).$$

Следствие. *Пусть h - нетривиальное решение уравнения (24), r - гладкая функция от x. Тогда преобразование*

$$v = \frac{1}{r}(D_x u - \frac{h'}{h} u) \tag{26}$$

переводит обобщенные решения уравнения (23) в обобщенные решения уравнения того же класса $E_{K,M}$.

Если $h_1, \ldots, h_k$ - решения уравнения (24) при различных $c_1, \ldots, c_k$, то справедлива

Лемма 1. [14] *Преобразование*

$$u_k = \mathcal{M}_k u = \frac{W(h_1, \ldots, h_k, u)}{W(h_1, \ldots, h_k)} \tag{27}$$

переводит обобщенное решение уравнения (23) в обобщенное решение уравнения того же класса $E_{K,M}$. Здесь W- определитель Вронского для функций $h_1, \ldots, h_k$.

Рассмотрим уравнение из класса $E_{2,M}$

$$F D_x^2 u + G D_x u + H u = Bu + f, \tag{28}$$

где F, G, H - гладкие функции от x, f - обобщенная функция, а B - линейный оператор вида (23).

[14] Там же

Теорема 3.2. [15] *Преобразование Эйлера-Дарбу, заданное соотношением (26) переводит обобщенные решения уравнения (28) в обобщенные решения уравнения*

$$FD_x^2 v + G_1 D_x v + H_1 v = Bv + f_1,$$

где

$$G_1 = G + F' + 2F\frac{r'}{r}, \tag{29}$$

$$H_1 = H + \frac{(Fr' + Gr)'}{r} + F'(\ln h)' + 2F(\ln h)'', \tag{30}$$

$$f_1 = \frac{1}{r}(D_x f - \frac{h'}{h} f), \tag{31}$$

а функция $h(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$Fh_{xx} + Gh_x + (H + c)h = 0, \qquad \text{где } c \in R. \tag{32}$$

Если известно k решений $h_1, \ldots, h_k$ уравнения (32) для различных $c_1, \ldots, c_k$, то можно построить преобразование Эйлера-Дарбу порядка k.

Теорема 3.3. [16] *Пусть $h_1, \ldots, h_k$ - решения уравнения (32), соответствующие различным постоянным $c_1, \ldots, c_k$. Тогда преобразование (27) переводит обобщенные решения уравнения (23) в обобщенные решения уравнения*

$$D_x^2(Fu_k) + D_x(G_k u_k) + H_k u_k = Bu_k + f_k.$$

При этом коэффициенты и функция f_k задаются формулами

$$G_k = G + kF', H_k = H + kG' + \frac{k(k-1)}{2}F'' + F'(\ln W)' + 2F(\ln W)'', \tag{33}$$

а

$$f_k = \mathcal{M}_k f = \frac{W(h_1, \ldots, h_k, f)}{W(h_1, \ldots, h_k)}, \tag{34}$$

здесь W - определитель Вронского для функций $h_1, \ldots, h_k$.

Используя теоремы 3.2 и 3.3, можно построить фундаментальные решения уравнений Клейна-Гордона-Фока (КГФ) и Шредингера с переменными коэффициентами. Для простоты ограничимся одной пространственной переменной.

Уравнение КГФ имеет вид [17]

$$D_t^2 u + m^2 u = a^2 D_x^2 u, \qquad \text{где } a, m \in R. \tag{35}$$

[15] Там же

[16] Там же

[17] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.

Для построения фундаментального решения рассмотрим обобщенную задачу Коши [18] для уравнения (35) с источником

$$D_t^2 u + m^2 u = a^2 D_x^2 u + f(x,t), \tag{36}$$

где функция $f(x,t)$ имеет вид (ниже точка обозначает прямое призведение функций)

$$f = u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t).$$

При преобразовании Эйлера-Дарбу уравнение (36), согласно теореме 3.2, переходит в уравнение

$$D_t^2 v + m^2 v = a^2 D_x^2 v + H_1(x) v + f_1 \tag{37}$$

с функцией $f_1(x,t)$

$$f_1 = D_x f - \frac{h'}{h} f.$$

Функция $H_1(x)$ находится по формуле (30). Для того, чтобы решение обобщенной задачи Коши уравнения (35) преобразовывалось в фундаментальное решение уравнения (37) потребуем выполнение следующего условия

$$D_x f - \frac{h'}{h} f = \delta(x-y) \cdot \delta(t).$$

Указанное условие можно переписать в виде обыкновенных дифференциальных уравнений на функции u_0 и u_1

$$u_0' - \frac{h'}{h} u_0 = 0, \tag{38}$$

$$u_1' - \frac{h'}{h} u_1 = \delta(x-y). \tag{39}$$

Решения уравнений (38) и (39) соответственно выберем следующими

$$u_0 = 0, \tag{40}$$

$$u_1(x,y) = \frac{\theta(x-y) h(x)}{h(y)}, \tag{41}$$

где $\theta(x-y)$ - функция Хевисайда. Решение обобщенной задачи Коши уравнения (35) при выборе функции $u_0 = 0$ есть свертка фундаментального решения уравнения (35) и функции u_1. Фундаментальное решение уравнения КГФ можно выбрать в виде [19]

$$E(x,y,t,\tau) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x-y|) J_0 \left(\frac{m}{a} \sqrt{a^2 (t-\tau)^2 - (x-y)^2} \right), \tag{42}$$

[18] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981. 512 с.

[19] Там же

где J_0 - функция Бесселя. Решение обобщенной задачи Коши есть

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi)E(x,\xi,t,0)d\xi.$$

Подставляя выражения (41) и (42) получим решение обобщенной задачи Коши уравнения КГФ в виде

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2ah(y)} \int\limits_{-at}^{at} \theta(x-y-z)h(x-z)J_0\left(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-z^2}\right)dz.$$

Фундаментальное решение уравнения (37) находим по формуле

$$E_1(x,y,t) = D_x u(x,y,t) - \frac{h'(x)}{h(x)}u(x,y,t). \tag{43}$$

После несложных вычислений получаем

$$E_1(x,y,t) = \begin{cases} 0,\ \text{если}\ x-y<-at, \\ \frac{1}{2a}J_0(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-y)^2})+ \\ +\frac{1}{2ah(y)}\int\limits_{-at}^{x-y}(h'(x-z)-\frac{h'(x)}{h(x)}h(x-z))J_0(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-z^2})dz, \\ \text{если}\ -at \le x-y \le at, \\ \frac{1}{2ah(y)}\int\limits_{-at}^{at}(h'(x-z)-\frac{h'(x)}{h(x)}h(x-z))J_0(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-z^2})dz, \\ \text{если}\ x-y>at. \end{cases}$$

В последних формулах штрих у функции означает дифференцирование по соответствующему сложному аргументу, выписанному в скобках.

Приведенные формулы легко обобщаются для высших преобразований Эйлера-Дарбу. Для этого необходимо взять функцию u_1 удовлетворяющую уравнению

$$\frac{W(h_1,\ldots,h_k,u_1)}{W(h_1,\ldots,h_k)} = \delta(x-y).$$

Решение последнего уравнения дается формулой

$$u_1(x,y) = \frac{\theta(x-y)}{W_y(h_1,\ldots,h_k)}\sum_{i=1}^{k} W_y(h_1,\ldots,h_{i-1},h_{i+1},\ldots,h_k)h_i(x).$$

Здесь введено обозначение $W_y(h_1,\ldots,h_k) = W(h_1(y),\ldots,h_k(y))$. Коэффициенты преобразованного уравнения определяются по теореме 3.3 формулой (33).

Построение фундаментального решения для уравнения Шредингера с переменными коэффициентами проводится так же, как и для уравнения КГФ. Стартуя с исходного уравнения

$$iD_t u = -D_x^2 u, \tag{44}$$

рассмотрим обобщенную задачу Коши

$$iD_t u = -D_x^2 u + u_0(x) \cdot \delta(t).$$

Потребуем, чтобы функция u_0, в соответствии с формулой (31) теоремы 3.2, преобразовывалась в δ-функцию Дирака. Это будет выполнено, если указанная функция удовлетворяет следующему уравнению

$$u_0' - \frac{h'}{h} u_0 = \delta(x-y),$$

решение которого задается формулой (41). Фундаментальное решение уравнения (44) есть [20]

$$E(x,\xi,t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{i(x-\xi)^2}{4t} - \frac{i\pi}{4}\right).$$

Тогда решение обобщенной задачи Коши можно записать в виде свертки

$$u(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \frac{e^{-i\pi/4}}{h(y)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi - y) h(\xi) \exp\left(\frac{i(x-\xi)^2}{4t}\right) d\xi.$$

Решение обобщенной задачи Коши уравнения (44) преобразуется в фундаментальное решение уравнения

$$iD_t v = -D_x^2 v + H_1(x) v \tag{45}$$

по формуле (26). Коэффициент $H_1(x)$, так же, как и в случае уравнения КГФ, вычисляется по формуле (30). Выпишем фундаментальное решение преобразованного уравнения (45)

$$E_1(x,y,t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \frac{e^{-i\pi/4}}{h(y)} \int\limits_{y}^{\infty} h(\xi) \left[i\frac{x-\xi}{2t} - \frac{h'(x)}{h(x)}\right] \exp\left(\frac{i(x-\xi)^2}{4t}\right) d\xi.$$

Очевидно, что последняя формула задает фундаментальное решение только в случае существования соответствующих интегралов.

Построение фундаментального решения для уравнения Шредингера так же обобщается для высших преобразований Эйлера-Дарбу.

[20] Там же

Основные результаты

1. Для одномерного уравнения нелинейной теплопроводности с источником с помощью линейных определяющих уравнений найдены инвариантные многообразия второго и третьего порядков. Построено новое точное решение.
2. Для одномерного уравнения Фоккера-Планка в представлении Ито построены прямое и противоположное преобразования Эйлера-Дарбу, преобразование Эйлера-Дарбу порядка k. Рассмотрено обобщение метода преобразования Эйлера-Дарбу на многомерные уравнения частного вида. С помощью преобразования Эйлера-Дарбу построены новые точные решения, удовлетворяющие заданным краевым условиям, являющиеся одновременно фундаментальными решениями задачи Коши.
3. Введено преобразование Эйлера-Дарбу для неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью в виде обобщенных функций. В качестве примера построены фундаментальные решения уравнений Клейна-Гордона-Фока и Шредингера с переменными коэффициентами, описывающих частицу во внешнем скалярном поле.

Автор выражает благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Капцову Олегу Викторовичу за предложенные темы исследований, постоянное внимание, неоценимую помощь и поддержку в процессе работы над диссертацией.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Kaptsov, O.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations / O.V. Kaptsov, I.V. Verevkin // J. Phys. A: Math. Gen. - 36. - 2003, P. 1401-1414.
2. Веревкин, И.В. Преобразование Эйлера-Дарбу для уравнения Фоккера-Планка / И.В. Веревкин // Теоретическая и математическая физика. - 2011. - Т. 166. - №1. - С. 68-76.
3. Веревкин, И.В. Обобщенные решения и преобразования Эйлера-Дарбу / И.В. Веревкин // Уфимский математический журнал. - 2014. - Т. 6. - №4. - С. 63-70.