На правах рукописи

Ульверт Роман Викторович

О РЕЗОЛЬВЕНТАХ ЧЕХА – ДЕ РАМА В ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ ВЫЧЕТОВ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Красноярск 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Цих Август Карлович**

Официальные оппоненты:

Белошапка Валерий Константинович, доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова», кафедра теории функций и функционального анализа, профессор;

Федоровский Константин Юрьевич, доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», НИЧ НУК «Фундаментальные науки», главный научный сотрудник.

Ведущая организация:

ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева» СО РАН, г. Новосибирск.

Защита состоится «01» февраля 2019 г. в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 212.099.25 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 34-11.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» и на сайте http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «___» декабря 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета	Шлапунов Александр Анатольевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

В рамках комплексного анализа теория многомерных вычетов предполагает исследование интегралов $\bar{\partial}$-замкнутых форм бистепени (p, q) на n-мерном комплексном многообразии X. В случае $p = n$ такие формы автоматически d-замкнуты (замкнуты по де Раму), поэтому их естественно интегрировать по $(n+q)$-мерным циклам с компактными носителями (или с замкнутыми, если формы остаются интегрируемыми на цепях в подходящей компактификации многообразия X). Особое внимание уделяется формам с особенностями на аналитических множествах[1,2], в частности, рациональным дифференциальным формам в $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{CP}^n$.

В одномерном случае $(n = 1)$ имеется два эквивалентных определения вычета в изолированной особой точке $a \in \mathbb{C}$ функции $g(z)$ (дифференциальной формы $\omega = g(z)\,dz$). *Вычет* — это коэффициента c_{-1} ряда Лорана функции $g(z)$, либо интеграл формы $(2\pi i)^{-1}\omega$ по окружности малого радиуса с центром в точке a. В многомерной ситуации диапазон определений вычета значительно расширяется. Так, в теории Лере вычет формы — это снова форма, но меньшей степени. Но даже в рамках концепции вычета как числа имеется несколько подходов к его определению.

Наиболее распространен взгляд, согласно которому вычет — это коэффициент ряда Лорана $c_{-I} = c_{-1,\ldots,-1}$ мероморфной функции $g(z)$ (дифференциальной формы $\omega = g(z)\,dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$). Этот коэффициент получается в результате интегрирования формы $(2\pi i)^{-1}\omega$ по «торическому» циклу вида

$$T = \{|z_1| = r_1, \ldots, |z_n| = r_n\}.$$

Как правило, при $n > 1$ этот цикл нельзя приписывать какой-либо особой точке формы ω, например, точке полярной гиперповерхности, если g — мероморфная функция. В современной терминологии такие циклы приписываются компонентам связности дополнения амёбы полярной гиперповерхности[3,4].

Другой подход к определению вычета основан на идее, согласно которой многомерным аналогом функции $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является не функция $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ от n комплексных переменных, а отображение $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Если такое отображение голоморфно и имеет изолированный нуль в точке a, то оно определяет в

---

[1] Griffiths, P. On the periods of certain rational integrals / P. Griffiths // Ann. Math. -1969. - V. 90. - №3. - P. 460–541.

[2] Айзенберг, Л.А. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе / Л.А. Айзенберг, А.П. Южаков. - Новосибирск: Наука, 1979.

[3] Gelfand, I.M. Discriminants, resultants and multidimensional determinants / I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky. - Boston: Birkhäuser, 1994.

[4] Forsberg, M. Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas / M. Forsberg, M Passare, A. Tsikh // Adv. Math. - 2000. - V. 151. - P. 45–70.

этой точке вычет мероморфной формы

$$\omega = \frac{h(z)\,dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f_1(z)\ldots f_n(z)} \tag{1}$$

в виде интеграла

$$\operatorname{res}_{f,a}\omega = \operatorname{res}_{f,a} h = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma^{(a)}} \omega. \tag{2}$$

Здесь предполагается, что $f = (f_1, \ldots, f_n)$, а $\gamma^{(a)}$ — *локальный цикл* в малой окрестности U_a точки a:

$$\gamma^{(a)} = \{z \in U_a \colon |f_1(z)| = \varepsilon_1, \ldots, |f_n(z)| = \varepsilon_n\}. \tag{3}$$

Ориентация цикла $\gamma^{(a)}$ определяется условием $d(\arg f_1) \wedge \cdots \wedge d(\arg f_n) \geqslant 0$.

Вычет (2) называют *локальным вычетом*, ассоциированным с отображением f, или *вычетом Гротендика*.

Понятие локального вычета можно свести к вычету ряда Лорана путем рассмотрения расширения поля мероморфных функций, ассоциированного с отображением f. Росток отображения $f\colon (\mathbb{C}^n_z, a) \to (\mathbb{C}^n_w, 0)$ определяет расширение поля ростков мероморфных функций $\mathcal{M}_w \hookrightarrow \mathcal{M}_z$ по формуле

$$\mathcal{M}_w \ni g(w) \to g(f(z)) \in \mathcal{M}_z.$$

Оказывается, что множество всех мероморфных ростков вида h/J, где $J = J(f)$ — якобиан отображения f, лежит в конечном расширении K поля $\mathcal{M}_w$. Более того, след $\operatorname{Tr}_{K/\mathcal{M}_w}(h/J)$ элемента h/J относительно такого расширения голоморфен, а локальный вычет равен[5]

$$\operatorname{res}_{f,a} h = \left[\operatorname{Tr}\frac{h}{J}\right](0) = c_{-I}\left[\operatorname{Tr}_{K/\mathcal{M}_w}\left(\frac{h}{J\cdot f_1\ldots f_n}\right)\right].$$

Связующий мост между понятиями вычета Гротендика и вычета ряда Лорана, реализуемый посредством расширения полей, не является единственным, о чем свидетельствует замечательная формула Гельфонд – Хованского[6]. Согласно этой формуле, глобальный (полная сумма локальных) вычет Гротендика в комплексном алгебраическом торе $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ выражается через вычеты рядов Лорана формы (1) с «большими» областями сходимости.

Важным свойством вычета (2) является тот факт, что он равен нулю, если h принадлежит идеалу $\langle f\rangle$ в кольце $\mathcal{O}_a$ ростков голоморфных функций, порожденном $f_1, \ldots, f_n$. Иными словами $\operatorname{res}_{f,a}$ — функционал на фактор-кольце $\mathcal{O}_a/\langle f\rangle$. Этот факт имеет топологическую природу. В самом деле, если

[5]Tsikh, A.K. Multidimensional Residues and their Applications / A.K. Tsikh. - Providence: AMS, 1992.

[6]Gelfond, O.A. Toric geometry and Grothendieck residues / O.A. Gelfond, A.G. Khovanskii // Mosc. Math. J. - 2002. - V. 2. - №1. - P. 99-112.

$h = h_j f_j$, то форма ω имеет полюсы лишь на $n-1$ гиперповерхностях

$$F_k = \{f_k = 0\}, \quad k = 1, \ldots [j] \ldots, n,$$

в дополнении которых n-цикл $\gamma^{(a)}$ становится гомологически тривиальным:

$$\gamma^{(a)} \sim 0 \text{ в } U_a \setminus (F_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup F_n). \tag{4}$$

Действительно, цикл $\gamma^{(a)}$ есть граница $(n+1)$-цепи

$$\sigma_j = \{|f_1| = \varepsilon_1, \ldots, |f_j| \leqslant \varepsilon_j, \ldots, |f_n| = \varepsilon_n\},$$

рассматриваемой с подходящей ориентацией. Следовательно, интеграл (2) для $h = h_j f_j$ по формуле Стокса равен нулю.

Пусть теперь мероморфная форма ω задана на комплексном аналитическом многообразии X и $F_1, \ldots, F_n$ — ее полярные гиперповерхности, $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$. Свойство (4) было взято А.П. Южаковым и А.К. Цихом за основу следующего определения.

Определение 1.6. Говорят, что n-мерный цикл $\Gamma \in Z_n(X \setminus F)$ *разделяет* гиперповерхности $F_1, \ldots, F_n$, если Γ удовлетворяет условию

$$\Gamma \sim 0 \text{ в } X \setminus (F_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup F_n) \text{ для всех } j = 1, \ldots, n.$$

Согласно сказанному выше, локальный цикл $\gamma^{(a)}$, участвующий в определении вычета Гротендика, разделяет набор полярных гиперповерхностей формы ω.

Важным аргументом при использовании локальных вычетов мероморфных форм является их рациональная вычислимость через конечное число коэффициентов Тейлора функций $h, f_1, \ldots, f_n$ в точке a. В связи с этим возникает актуальная задача о представлении интеграла от мероморфной формы ω через локальные вычеты. Топологическая формулировка этой задачи выглядит следующим образом. Пусть $\{F_1, \ldots, F_n\}$ — набор гиперповерхностей в n-мерном комплексном аналитическом многообразии X. Обозначим через F объединение этих гиперповерхностей, а через Z — дискретную часть их пересечения. Требуется выяснить, когда заданный n-цикл в $X \setminus F$ гомологически выражается через локальные циклы $\gamma^{(a)}$, $a \in Z$. При этом необходимым условием существования такого гомологического представления выступает условие разделения циклом данного набора гиперповерхностей.

Наиболее завершенные результаты о характеризации разделяющих циклов в комплексном анализе представлены в работах Циха[7](а также цит. выше)

[7]Цих, А.К. О циклах, разделяющих нули аналитических функций в $\mathbb{C}^n$ / А.К. Цих // Сиб. матем. журн. - 1975. - Т. 16. - №5. - С. 1118–1121.

и Южакова[8,9]. Этим исследованиям предшествовал ряд результатов, полученных в работах Пикара, Фантаппье, Мартинелли и Сорани.

Актуальность исследования локальных вычетов связана с их многочисленными приложениями. Так, в алгебраической геометрии локальные вычеты нашли применение при исследовании нулей векторных полей (Р. Ботт[10], П. Гриффитс (цит. выше)), в теории исключений (Л.А. Айзенберг, А.К. Цих, А.Г. Хованский (цит. выше), А.М. Кытманов[11,12]). Отметим также использование локальных вычетов в комбинаторике (Г.П. Егорычев[13], А.П. Южаков(цит. выше)), в задачах о неявных отображениях (А.П. Южаков[14]), в теории особенностей (В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде[15]). Ряд приложений локальных вычетов связан с вычислением интегралов Меллина – Барнса и современными физическими исследованиями в теории струн и физике частиц.

Цель диссертационной работы состоит в разработке комбинаторно-топологических методов кратного интегрирования в комплексных многообразиях. В частности предполагается исследовать проблему вычислимости интегралов мероморфных дифференциальных форм с помощью вычетов Гротендика и разработать методы вычисления указанных интегралов.

Методы исследования. В основе вычислений кратных интегралов в комплексном многообразии с помощью многомерных вычетов лежит так называемый метод разделяющих циклов. Для его реализации были использованы свойства двойного комплекса Чеха – де Рама, теоремы о гомологиях пространств Штейна, результаты о разделении особенностей аналитических функций, а также свойства амёб аналитических гиперповерхностей.

Достоверность результатов. Основные результаты строго доказаны, опубликованы в рецензируемых журналах и докладывались на научных семинарах и конференциях.

[8]Южаков, А.П. Одно условие кограницы по Лере и его применение к логарифмическому вычету / А.П. Южаков // Сиб. матем. журн. - 1970. - Т. 11. - №3. - С. 708–711.

[9]Южаков, А.П. Разделяющая подгруппа и локальные вычеты / А.П. Южаков // Сиб. матем. журн. - 1988. - Т. 29. - №6. - С. 197–203.

[10]Bott, R. A residue formula for holomorphic fields / R. Bott// J. Different. Geom. - 1967. - V. 1. - №4. - P. 311–330.

[11]Кытманов, А.М. Интеграл Бохнера – Мартинелли и его применения / А.М. Кытманов. - Новосибирск: Наука, 1992.

[12]Быков, В.И. Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов / В.И. Быков, А.М. Кытманов, М.З. Лазман. - Новосибирск: Наука, 1991.

[13]Егорычев, Г.П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм / Г.П. Егорычев. - Новосибирск: Наука, 1977.

[14]Южаков, А.П. О применении кратного логарифмического вычета для разложения неявных функций в степенные ряды / А.П. Южаков // Матем. сборник - 1975. - Т. 97(139). - №2(6). - С. 177–192.

[15]Арнольд, В.И. Особенности дифференцируемых отображений / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде. - 2-е изд. - М.: МЦНМО, 2004.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты, полученные автором, в основном имеют теоретическое значение. Они раскрывают новые связи между различными концепциями определения вычета. Кроме того, они вносят существенный вклад в развитие метода разделяющих циклов, который в последнее время активно применяется в ряде разделов теоретической физики.

Результаты предполагается внедрить в учебный процесс в виде материала для проведения специальных курсов по теории многомерных вычетов и алгебраической геометрии, читаемых на кафедре теории функций Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета.

Финансовая поддержка. Исследования по теме диссертации проводились при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (гос. задание для Сибирского федерального университета № 1.2604.2017/ПЧ)

Апробация результатов. Основные положения и результаты работы прошли апробацию на следующих семинарах и научных конференциях:

1. Международная конференция «IV Российско-Армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам» (Красноярск, 9–12 сентября 2012 г.)

2. XVIII Международная научно-практическая конференция «Решетневские чтения» (Красноярск, 11–14 ноября 2014)

3. V Школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России (Коряжма, 17–22 августа 2015)

4. Международная конференция «VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике» (Ростов-на-Дону, 11–16 сентября 2016 г.)

5. VI Школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России (Коряжма, 25–30 августа 2017)

6. Красноярский городской семинар по комплексному анализу и алгебраической геометрии (Сибирский федеральный университет, 2012–2018).

Публикации и личный вклад. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в трех статьях [1], [2], [3] в журналах из перечня изданий, рекомендуемых ВАК, двух сборниках материалов конференций [5], [6] и в тезисах докладов [4]. Статьи [2], [3] опубликованы в журналах, индексируемых в наукометрических базах данных SCOPUS и Web of Science. Все публикации подготовлены без соавторов.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Список литературы содержит 58 наименований, список работ автора по теме диссертации: 6. Общий объем диссертации: 93 страницы. Иллюстративный материал: 3 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе диссертации уточняются и дополняются известные сведения о когомологиях двойного комплекса $C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ Чеха – де Рама и гомологиях двойственного ему комплекса $C_*(\mathfrak{U}, S_*)$ групп сингулярных цепей. Данные комплексы сопоставляются счетному или конечному открытому покрытию $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ паракомпактного вещественного многообразия X (в случае комплекса Чеха – де Рама) или топологического пространства X (в случае двойственного комплекса).

Комплекс $C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ образован векторным пространством дифференциальных форм $\Omega^q = \Omega^q(X)$ и биградуированным векторным пространством

$$C^{p,q} = \prod_{i_0<i_1<\ldots<i_p} \Omega^q(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}), \quad p, q = 0, 1, \ldots,$$

элементы которого называются $\mathfrak{U}$-коцепями. Строки

$$0 \longrightarrow \Omega^q \xrightarrow{\rho} C^{0,q} \xrightarrow{\delta} C^{1,q} \xrightarrow{\delta} C^{2,q} \xrightarrow{\delta} \ldots,$$

этого комплекса образуют обобщенные точные последовательности Майера – Виеториса, а в столбцах Ω^* и $C^{p,*}$, $p = 0, 1, \ldots$, действует оператор дифференцирования $d\colon \Omega^q \to \Omega^{q+1}$, $d\colon C^{p,q} \to C^{p,q+1}$, $d^2 = 0$.

Двойственный комплекс $C_*(\mathfrak{U}, S_*)$, который также можно называть комплексом Чеха – де Рама (его гомологической версией), в свою очередь, образован группой $S_q^{\mathfrak{U}}$, порожденной всеми сингулярными симплексами, носители которых полностью содержатся в некотором элементе U_i покрытия $\mathfrak{U}$, и биградуированной группой

$$C_{p,q} = \bigoplus_{i_0<i_1<\ldots<i_p} S_q(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}), \quad p, q = 0, 1, \ldots,$$

элементы которой называются $\mathfrak{U}$-цепями. Данный комплекс также имеет точные строки

$$0 \longleftarrow S_q^{\mathfrak{U}} \xleftarrow{\varepsilon} C_{0,q} \xleftarrow{\delta} C_{1,q} \xleftarrow{\delta} C_{2,q} \xleftarrow{\delta} \ldots.$$

В столбцах $S^{\mathfrak{U}}_*$ и $C_{p,*}$, $p = 0, 1, \ldots$, действует оператор взятия границы цепей $\partial\colon S^{\mathfrak{U}}_q \to S^{\mathfrak{U}}_{q-1}$, $\partial\colon C_{p,q} \to C_{p,q-1}$, $\partial^2 = 0$.

Из рассмотрения спектральной последовательности «когомологического» комплекса Чеха – де Рама следует[16,17], что этот комплекс вычисляет когомологии $H^*(X)$. Двойственным образом, теорема 1.2 утверждает, что «гомологический» комплекс Чеха – де Рама вычисляет гомологии $H_*(S^{\mathfrak{U}})$. Этот результат не является новым, однако в нашем доказательстве в явном виде появляется конструкция $\mathfrak{U}$-резольвенты (см. далее), связанная с тотальным комплексом, используемым в связи с соответствующей спектральной последовательностью. Учитывая изоморфизм $H_*(X) \simeq H_*(S^{\mathfrak{U}})$ из теоремы 1.2 следует, что комплекс $C_*(\mathfrak{U}, S_*)$ вычисляет гомологии пространства X.

Отметим, что далее мы сознательно не прибегаем к использованию общих фактов о спектральных последовательностях и соответствующей терминологии. Это вызвано тем, что нам требуется как можно более явное и детальное изложение результатов о комплексах Чеха – де Рама, ориентированное на последующие приложения в главе 2.

В параграфе 1.2 вводится понятие $\mathfrak{U}$-резольвенты элементов комплекса Чеха – де Рама, которое является главным техническим средством для доказательства всех основных результатов первой и второй главы диссертации. Дается следующая версия определения резольвенты Э. Глисона[18].

Определение 1.3. Последовательность $\mathfrak{U}$-цепей $\{\xi_p\}_{p=0}^r$, $\xi_p \in C_{p,r-p}$, будем называть $\mathfrak{U}$-резольвентой цикла $\xi \in Z_r(S^{\mathfrak{U}}_*)$, если выполняются следующие два условия:

1) $\varepsilon\xi_0 = \xi$;

2) $\delta\xi_p = \partial\xi_{p-1}$, $p = 1, \ldots, r$.

Таким образом, элементы ξ_p резольвенты располагаются на диагонали двойного комплекса и связаны условием 2), в котором оператор δ — граничный оператор Чеха. Далее в данном параграфе обсуждаются простейшие свойства $\mathfrak{U}$-резольвент, а также вводятся обобщения этого понятия (см. определения 1.4, 1.5), в частности, дается определение резольвенты для $\mathfrak{U}$-коцепи. Основным результатом параграфа является предложение 1.4, описывающее на языке резольвент «диагональную» последовательность гомоморфизмов

$$H_r(S^{\mathfrak{U}}_*) \to H_0(C^{cl}_{*,r-1}) \to H_1(C^{cl}_{*,r-2}) \to \ldots \to H_{r-2}(C^{cl}_{*,1}) \to H_{r-1}(C^{cl}_{*,0}) \simeq 0,$$

[16] Griffiths, P. Principles of algebraic geometry / P. Griffiths, J. Harris. - New York: John Wiley and Sons, 1978.

[17] Differential Forms in Algebraic Topology / R. Bott, L.W. Tu. - New York: Springer–Verlag, 1982.

[18] Gleason, A.M. The Cauchy–Weil theorem / A.M. Gleason // J. Math. Mech. - 1963. - V. 12. - №3, P. 429–444.

где $H_p(C^{cl}_{*,q})$ — группа p-мерных δ-гомологий комплекса

$$0 \longleftarrow Z_q(S^{\mathfrak{U}}_*) \xleftarrow{\varepsilon} C^{cl}_{0,q} \xleftarrow{\delta} C^{cl}_{1,q} \xleftarrow{\delta} C^{cl}_{2,q} \xleftarrow{\delta} \ldots,$$

образованного подгруппами $C^{cl}_{p,q} = Z_q(C_{p,*}) = \ker(\partial\colon C_{p,q} \to C_{p,q-1})$. Заметим, что представитель класса $[\xi] \in H_p(C^{cl}_{*,q})$ — это $\mathfrak{U}$-цепь $\xi \in C_{p,q}$, для которой $\partial\xi = 0$ и $\delta\xi = 0$. Данная последовательность гомоморфизмов является двойственным вариантом последовательности гомоморфизмов для когомологий групп $\mathfrak{U}$-коцепей, описанной Глисоном.

Параграф 1.3 описывает спаривание между $\mathfrak{U}$-коцепями и $\mathfrak{U}$-цепями, соответствующими покрытию $\mathfrak{U}$ многообразия X. Это спаривание определяется по формуле

$$\langle \theta, \xi \rangle = \sum_{i_0 < i_1 < \ldots < i_p} \big\langle \theta(i_0, i_1, \ldots, i_p), \xi(i_0, i_1, \ldots, i_p) \big\rangle,$$

где $\theta \in C^{p,q}$, $\xi \in C_{p,q}$, и обладает свойствами, изложенными в предложении 1.9, теореме 1.4 и следствии 1.1.

В параграфе 1.4 рассматривается наиболее важный для дальнейших приложений случай конечного покрытия $\mathfrak{U}$. Двойственность результатов о комплексах Чеха – де Рама в данной ситуации проявляется в полной мере. Основные результаты параграфа формулируются в теоремах 1.5, 1.6 и 1.8. В частности, утверждение теоремы 1.5 состоит в том, что для покрытия $\mathfrak{U}$, состоящего из m элементов, последовательность гомоморфизмов из предложения 1.4 заменяется на последовательность гомоморфизмов

$$H_r(S^{\mathfrak{U}}_*) \to H_0(C^{cl}_{*,r-1}) \to \ldots \to H_{m-3}(C^{cl}_{*,r-m+2}) \to H_{r-m+1}(C_{m-1,*}), \qquad (5)$$

действие которых описывается цепочкой образов

$$[\xi] \longmapsto [\partial\xi_0] \longmapsto \ldots \longmapsto [\partial\xi_{m-3}] \longmapsto [\xi_{m-1}],$$

где $\xi_0, \ldots, \xi_{m-3}, \xi_{m-2}, \xi_{m-1}$ — резольвента для цикла $\xi \in Z_r(S^{\mathfrak{U}}_*)$.

Заключительный параграф первой главы содержит один из основных результатов диссертации. Рассмотрим n-мерное комплексное аналитическое многообразие X и набор $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ гиперповерхностей в X. В данном контексте всегда будем использовать обозначения $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$ и $\widetilde{X} = X \setminus (F_1 \cap \ldots \cap F_n)$. Напомним, что согласно определению 1.6, цикл $\Gamma \in Z_n(X \setminus F)$ называется разделяющим для набора $\mathcal{F}$, если $\Gamma \sim 0$ в $X \setminus (F_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup F_n)$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Обозначим через $H^{\mathrm{sep}}_n(X \setminus F)$ подгруппу группы гомологий $H_n(X \setminus F)$, образованную классами всех циклов, разделяющих данный набор гиперповерхностей (эта подгруппа далее называется *разделяющей*).

Множества $U_j = X \setminus F_j$, $j = 1, \ldots, n$, образуют открытое покрытие $\mathfrak{U}$ многообразия $\widetilde{X}$. Условие разделения циклом Γ набора $\mathcal{F}$, означает, что $\delta\Gamma$

является ∂-границей в группе $C_{n-2,n}$. Последнее замечание дает возможность использовать язык резольвент комплекса Чеха – де Рама в связи с разделяющими циклами. Следующая теорема является основным результатом первой главы.

Теорема 1.9. *Пусть* $\xi \in Z_{2n-1}(\widetilde{X})$, *и* $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$ — $\mathfrak{U}$*-резольвента произвольного цикла из* $Z_{2n-1}(S_*^{\mathfrak{U}})$, *представляющего класс* $[\xi] \in H_{2n-1}(\widetilde{X}) \simeq H_{2n-1}(S_*^{\mathfrak{U}})$. *Тогда соответствие гомологических классов* $[\xi] \mapsto [\xi_{n-1}]$ *определяет гомоморфизм*

$$\varphi\colon H_{2n-1}(\widetilde{X}) \to H_n^{sep}(X \setminus F).$$

Если X — *штейново, то* φ *является изоморфизмом.*

Эта теорема дает гомологическое описание тех n-циклов, разделяющих гиперповерхности $F_1, \dots, F_n$, которые связаны при помощи резольвент с $(2n-1)$-гомологиями многообразия $X \setminus (F_1 \cap \ldots \cap F_n)$. Такое описание оказывается полным в случае многообразий Штейна. Доказательство теоремы основано на использовании последовательности гомоморфизмов (5).

Вторая глава начинается с определения локального вычета (вычета Гротендика). Как уже было сказано, вычет $\mathrm{res}_{f,a}\,\omega$ можно сопоставить изолированной точке a пересечения набора особых гиперповерхностей $F_1, \dots, F_n$ мероморфной формы ω. При этом локальный цикл (3), участвующий в определении вычета через интеграл (2), разделяет данный набор гиперповерхностей. Поэтому группа $H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$, порожденная классами локальных циклов $\gamma^{(a)}$, соответствующих всем изолированным точкам a пересечения гиперповерхностей $F_1, \dots, F_n$, является подгруппой группы $H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$. Одной из топологических задач теории многомерных вычетов является описание условий, при которых разделяющий цикл Γ имеет гомологическое представление в виде линейной комбинации локальных циклов, то есть $[\Gamma] \in H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$.

В параграфе 2.2 рассматриваются гомологические и когомологические резольвенты, связанные с локальными вычетами (данный материал является развитием некоторых идей из монографии Гриффитса – Харриса, Глава 5, §1). В частности отмечается (см. лемма 2.1), что локальный цикл $\gamma^{(a)} = \{z \in U_a\colon |f_i(z)| = \varepsilon_i,\ i = 1, \dots, n\}$ является конечным элементом $\mathfrak{U}$-резольвенты для границы $\partial\Pi_a$ специального аналитического полиэдра

$$\Pi_a = \{z \in U_a\colon |f_i(z)| < \varepsilon_i,\ i = 1, \dots, n\}, \tag{6}$$

где $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие области $U_a \setminus a$ множествами

$$U_i = \{z \in U_a\colon f_i(z) \neq 0\},\ i = 1, \dots, n.$$

В свою очередь для мероморфной n-формы ω вида (1) с полярной гиперповерхностью $F = \{f_1 \cdot \ldots \cdot f_n = 0\}$ находится когомологическая резольвента, конечный элемент которой имеет вид

$$\theta_{-1} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}(n-1)!\,\frac{h}{\|f\|^{2n}}\sum_{i\in I}(-1)^{i-1}\bar{f}_i d\bar{f}_{I\setminus i}\wedge dz_I, \quad z\in U_a\setminus a.$$

В качестве иллюстрации применения описанных резольвент и свойств спаривания из параграфа 1.3 выводится известная формула представления локального вычета через интеграл по сфере:

$$\operatorname{res}_{f,a}\omega = \frac{1}{(2\pi i)^n}\langle\theta_{-1},\partial\Pi_a\rangle = \frac{1}{(2\pi i)^n}\langle\theta_{-1},S_a\rangle = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{S_a}\theta_{-1},$$

где S_a — это $(2n-1)$-мерная сфера малого радиуса с центром в точке a.

Параграфы 2.3, 2.4 посвящены получению новых доказательств для двух основных результатов А.К. Циха, связанных с задачей описания условий, при которых разделяющий цикл гомологически выражается через локальные циклы. Первый из этих результатов формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1.(Цих) *Пусть X — многообразие Штейна размерности n, и $\mathcal{F} = \{F_1,\ldots,F_n\}$ — набор гиперповерхностей в X. Тогда n-цикл Γ из $X\setminus F$ разделяет набор $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда Γ гомологичен линейной комбинации локальных циклов $\gamma^{(a)}$, $a\in Z_0$, где Z_0 — дискретная часть пересечения $F_1\cap\ldots\cap F_n$.*

Предлагаемое нами доказательство основано на применении теоремы 1.9 о существовании разделяющего гомоморфизма $\varphi\colon H_{2n-1}(\widetilde{X})\to H_n^{\mathrm{sep}}(X\setminus F)$. Согласно замечанию из параграфа 2.2 имеем $[\gamma^{(a)}] = \varphi[\partial\Pi_a]$, поэтому в общем случае

$$H_n^{\mathrm{loc}}(X\setminus F)\subset \operatorname{im}\varphi\subset H_n^{\mathrm{sep}}(X\setminus F).$$

Для многообразий Штейна все три группы гомологий совпадают:

$$H_n^{\mathrm{loc}}(X\setminus F) = \operatorname{im}\varphi = H_n^{\mathrm{sep}}(X\setminus F),$$

что и доказывает теорему. Отметим, что в условиях теоремы 2.1 при $Z_0 = \varnothing$ получим $H_n^{\mathrm{sep}}(X\setminus F) = H_n^{\mathrm{loc}}(X\setminus F)\simeq 0$, то есть в этом случае любой разделяющий цикл гомологически тривиален.

Второй из упомянутых результатов является одним из вариантов так называемого «принципа разделяющих циклов» А. К. Циха. Рассмотрим специальный аналитический полиэдр

$$\Pi = \{z\in G\colon \chi_i(z)\in G_i,\ i=1,\ldots,n\},\quad \chi_i\in\mathcal{O}(G),\ G_i\Subset\chi_i(G),$$

и набор гиперповерхностей $\mathcal{F} = \{F_1,\ldots,F_n\}$, где

$$F_i = \{z\in G\colon f_i(z)=0\},\ f_i\in\mathcal{O}(G),\quad i=1,\ldots,n,$$

где $\mathcal{O}(G)$ — кольцо функций, голоморфных в области G. Пусть как и прежде $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$ и Z_0 — дискретная часть пересечения $F_1 \cap \ldots \cap F_n$. Назовем набор гиперповерхностей $\mathcal{F}$ *согласованным* с аналитическим полиэдром Π, если

$$F_i \cap \sigma^{(i)} = \varnothing \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\sigma^{(i)} = \{z \in G\colon \chi_i(z) \in \partial G_i,\ \chi_j(z) \in G_i,\ j \neq i\}$, $i = 1, \ldots, n$, — грани полиэдра Π. Напомним, что пересечение всех граней полиэдра Π называется его остовом.

Предложение 2.1.(Цих) *Если набор гиперповерхностей $\mathcal{F}$ согласован с полиэдром Π, то его остов σ_n допускает в $\overline{\Pi} \setminus F$ гомологическое представление*

$$\sigma_n \sim \sum_{a \in Z_0 \cap \Pi} \gamma^{(a)},$$

где $\gamma^{(a)}$ — локальный цикл в точке a для набора $\mathcal{F}$.

При доказательстве мы также пользуемся теоремой 1.9 и возможностью связать с помощью резольвенты границу полиэдра с его остовом.

В параграфе 2.5 рассматривается одно из возможных обобщений понятия разделяющего цикла. Это обобщение, в частности, имеет отношение к теории узлов. Нетривиальное зацепление называется *брунновым*, если оно становится тривиальным при удалении любой своей компоненты. Наиболее известным примером такого зацепления являются кольца Борромео — нетривиальное зацепление трех колец (окружностей), которые попарно незацеплены. По аналогии с понятием цикла, разделяющего набор гиперповерхностей в комплексном многообразии, следует говорить, что в данном случае каждая из окружностей как одномерный цикл разделяет набор двух других окружностей в $\mathbb{R}^3$.

Пусть X — вещественное многообразие размерности d, и $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$ — набор замкнутых подмножеств из X, где $2 \leqslant m \leqslant d-1$. Обозначим $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$. Дается следующее определение.

Определение 2.1. Будем говорить, что $(d-m)$-мерный цикл Γ в $X \setminus Y$ разделяет набор $\mathcal{Y}$, если Γ гомологичен нулю в $X \setminus (Y_1 \cup \ldots [j] \ldots \cup Y_m)$ для всех $j \in I = \{1, \ldots, m\}$.

В соответствии с этим определением любая компонента $\Gamma \sim S^1$ (топологическая окружность S^1 как одномерный цикл) бруннового зацепления с тремя компонентами разделяет набор оставшихся компонент $\{Y_1, Y_2\}$, $Y_j \sim S^1$, в $X = \mathbb{R}^3$. С другой стороны, данному определению удовлетворяют и циклы, разделяющие набор гиперповерхностей в n-мерном комплексном многообразии (в этом случае $d = 2n$ и $m = n$).

Пример бруннового зацепления с тремя компонентами обобщается в следующем предложении.

Предложение 2.3. *Пусть X — сфера S^{2n+1} размерности $2n+1$, $n \geqslant 1$, и $\mathcal{Y}$ — набор из $n+2$ попарно непересекающихся поверхностей, гомеоморфных S^n, в котором каждая из поверхностей разделяет остальные. Тогда каждая сфера из набора $\mathcal{Y}$ гомологически тривиальна в дополнении остальных сфер.*

В частности, для брунновых зацеплений с тремя компонентами последнее предложение утверждает, что на каждую топологическую окружность данного зацепления можно натянуть «пленку», лежащую в дополнении к другим двум окружностям (для колец Борромео можно в этом убедиться непосредственно).

Доказательство данного предложения основано на существовании разделяющего гомоморфизма, аналогичного гомоморфизму φ из теоремы 1.9 (см. предложение 2.2). Заметим также, что предложение 2.3 является аналогом того факта, что любой цикл, разделяющий набор гиперповерхностей в штейновом многообразии, будет гомологически тривиален в случае $Z_0 = \varnothing$.

Параграф 2.6 содержит основной результат главы 2, имеющий отношение к известной теореме Гельфонд – Хованского о глобальном вычете Гротендика в комплексном алгебраическом торе $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C} \setminus 0)^n$. Эта теорема дает обобщение того факта, что в одномерном случае сумма вычетов мероморфной формы $\omega = g(z)\, dz/(z \cdot f(z))$ в конечных ненулевых корнях многочлена $z \cdot f(z)$ выражается двумя слагаемыми:

$$\sum_{a \in f^{-1}(0) \cap \mathbb{T}^1} \mathrm{res}_a\, \omega = -(\mathrm{res}_0\, \omega - \mathrm{res}_\infty\, \omega).$$

Эти слагаемые являются взятыми с коэффициентами ± 1 вычетами, приписываемыми точкам (0-мерным дивизорам) $z = 0$ и $z = \infty$ на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{CP}^1$, которые «подклеиваются» при компактификации тора $\mathbb{T}^1 \subset \mathbb{CP}^1$. В случае $n = 2$ и мероморфной формы

$$\omega = \frac{g(z,w)}{f_1(z,w) \cdot f_2(z,w)} \frac{dz \wedge dw}{z \cdot w}$$

рассматривается компактификация тора $\mathbb{T}^2$ в виде торического многообразия, построенного по многоугольнику $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, где Δ_j — многоугольник Ньютона полинома f_j, $j = 1, 2$, и берется сумма многоугольников по Минковскому. В соответствии с формулой Гельфонд – Хованского, при условии *развернутости* набора многоугольников Δ_1, Δ_2, глобальный вычет Гротендика формы ω выражается в виде суммы *торических вычетов*, связанных с вершинами многоугольника-суммы Δ, взятых с некоторыми коэффициентами. Эти коэффициенты зависят лишь от комбинаторных свойств набора многоугольников Δ_1, Δ_2 и называются *комбинаторными коэффициентами*.

Двойственным объектом по отношению к многоугольнику $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ является веер Бергмана[19] $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ с вершиной O в начале координат. При этом мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2.4. *Пусть* $[\gamma]$ *— образующая группы* $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$*, представленная замкнутой кривой* γ*, окружающей точку* O *и ориентированной против часовой стрелки. Тогда разложение образа* $\varphi[\gamma]$ *по базе* $\{[t_j]\}$ *группы* $H_0(\mathbb{R}^2 \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2))$ *имеет вид*

$$\varphi([\gamma]) = \sum_{j=1}^{N} k_j [t_j],$$

где k_j *— комбинаторные коэффициенты Гельфонд – Хованского.*

Отметим, что отображение φ в формулировке теоремы — это разделяющий гомоморфизм

$$\varphi\colon H_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}) \to H_0^{\mathrm{sep}}(\mathbb{R}^2 \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)),$$

определенный в параграфе 2.5.

Третья глава посвящена исследованию гипотезы Южакова – Циха о разделяющих циклах в многообразиях Штейна. Как было показано в главе 2, для штейновых многообразий размерности n любой цикл, разделяющий набор n гиперповерхностей, представляется в виде линейной комбинации локальных циклов. В ситуации, когда мероморфная форма (1) имеет особенности на более чем n гиперповерхностях, в связи с локальными вычетами этой формы естественно возникает обобщенный взгляд на понятие разделяющего цикла. Упомянутая гипотеза связана с распространением результата о разделяющих циклах в многообразиях Штейна на этот более общий случай.

В параграфе 3.1 формулируется гипотеза Южакова – Циха и обсуждаются полученные ранее результаты, подтверждающие эту гипотезу в частных случаях. В данной главе рассматриваются наборы гиперповерхностей $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_m\}$ в комплексном аналитическом многообразии X размерности n, где $m \geqslant n$. Разбиением множества индексов $\{1, \ldots, m\}$ будем называть упорядоченный набор непустых попарно непересекающихся подмножеств $\mathcal{J} = (J_1, \ldots, J_n)$ таких, что $J_1 \cup \ldots \cup J_n = \{1, \ldots, m\}$. Каждое такое разбиение $\mathcal{J}$ определяет упорядоченный набор гиперповерхностей

$$\mathcal{F}_{\mathcal{J}} = (F_1, \ldots, F_n), \text{ где } F_i = \bigcup_{j \in J_i} D_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Как и прежде, через F обозначается объединение $F_1 \cup \ldots \cup F_n$, которое, очевидно, совпадает с объединением гиперповерхностей исходного набора $\mathcal{D}$.

[19]Bergman, G.M. The logarithmic limit-set of an algebraic variety / G.M. Bergman // Trans. Amer. Math. Soc. - 1971. - V. 157. - P. 459-469.

Пусть $Z_{\mathcal{J}}$ — дискретная часть пересечения $F_1 \cap \ldots \cap F_n$. Каждой точке $a \in Z_{\mathcal{J}}$ сопоставляется локальный цикл

$$\Gamma_{\mathcal{J}}^{(a)} = \{z \in U_a \colon |f_i(z)| = \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

где $F_i\,|_{U_a} = \{f_i(z) = 0\}$. При этом каждый такой локальный цикл разделяет набор гиперповерхностей $\mathcal{D}$ в смысле следующего определения.

Определение 3.1. Говорят, что n-мерный цикл $\Gamma \in Z_n(X \setminus F)$ разделяет гиперповерхности $D_1, \ldots, D_m$ $(m \geqslant n)$, если Γ удовлетворяет условию

$$\Gamma \sim 0 \text{ в } X \setminus (D_{\alpha_1} \cup \ldots \cup D_{\alpha_{n-1}}) \text{ для всех } \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\} \subset \{1, \ldots, m\}.$$

Как и раньше, рассматривается подгруппа $H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F)$ группы гомологий $H_n(X \setminus F)$, порожденная всевозможными локальными циклами $\Gamma_{\mathcal{J}}^{(a)}$, и подгруппа $H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$, образованная всеми классами циклов, разделяющих набор $\mathcal{D}$, причем $H_n^{\mathrm{loc}}(X \setminus F) \subset H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus F)$. Гипотезу Южакова – Циха можно коротко сформулировать следующим образом.

Гипотеза. *Пусть X — штейново многообразие и $\{D_1, \ldots, D_m\}$ — произвольный набор гиперповерхностей в X, $m \geqslant n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Тогда $H_n^{sep}(X \setminus F) = H_n^{loc}(X \setminus F)$.*

Будем говорить, что набор $\mathcal{D}$ *имеет дискретные пересечения*, если для любого n-поднабора $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \{1, \ldots, m\}$ множество $D^\alpha = D_{\alpha_1} \cap \ldots \cap D_{\alpha_n}$ дискретно.

Сформулированная гипотеза была доказана Южаковым при некоторых дополнительных ограничениях:

Теорема 3.1(Южаков). *Утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо в каждом из следующих случаев:*

1) *Набор гиперповерхностей $\mathcal{D}$ имеет дискретные пересечения и $D^\alpha \cap D^\beta = \varnothing$ для любых n-поднаборов индексов $\alpha, \beta \subset \{1, \ldots, m\}$ при $\alpha \neq \beta$;*

2) *$X = U_a$ — достаточно малая штейнова окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n$ и $D^\alpha = \{a\}$ для любого n-поднабора индексов $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$.*

Отметим, что условие 1) теоремы 3.1 означает, что гиперповерхности из набора $\mathcal{D}$ находятся «в общем положении» (это условие сохраняется при малых «шевелениях» D_j). В рамках условия 2) рассматривается локальная ситуация и подразумевается, что речь идет о *центрированном* наборе $\mathcal{D}$ ростков гиперповерхностей в точке a. Условие $D^\alpha = \{a\}$ для любого n-поднабора индексов $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$ также выражает свойство «общего положения».

Еще одна важная ситуация, в которой выполняется утверждение гипотезы о разделяющих циклах в многообразиях Штейна, рассматривалась в кандидатской диссертации Г. А. Московченко. Показано, что для произвольного набора гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$ группы $H_n(\mathbb{C}^n \setminus F)$, $H_n^{\mathrm{sep}}(\mathbb{C}^n \setminus F)$ и $H_n^{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}^n \setminus F)$ совпадают.

Параграф 3.2 содержит вспомогательные утверждения, необходимые для доказательств основных теорем главы. В основном обсуждаются результаты о *разделении особенностей* (сингулярностей) голоморфной функции $n \geqslant 1$ переменных. Прототипом процедуры разделения особенностей является теорема о разложении рациональной функции одного переменного на простейшие дроби. В нашем случае роль простейших дробей играют функции, особые множества которых являются объединениями не более чем n гиперповерхностей. В частности, доказывается лемма 3.3, описывающая разделение особенностей в локальной ситуации.

В параграфах 3.3–3.5 доказываются новые результаты, подтверждающие гипотезу Южакова – Циха. Наиболее значимыми из них являются следующие две теоремы, относящиеся к основным результатам диссертации.

Первая из этих теорем является обобщением теоремы Южакова 3.1.

Теорема 3.3. *Утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо при выполнении следующего условия: набор гиперповерхностей имеет дискретные пересечения, и для любых n-поднаборов индексов $\alpha, \beta \subset \{1, \ldots, m\}$ множества D^α и D^β, имеющие хотя бы одну общую точку, полностью совпадают:*

$$D^\alpha \cap D^\beta \neq \varnothing \Rightarrow D^\alpha = D^\beta.$$

Действительно, при выполнении условия 1) теоремы 3.1 из $D^\alpha \cap D^\beta \neq \varnothing$ следует, что $\alpha = \beta$, откуда тривиальным образом $D^\alpha = D^\beta$. Если же выполняется условие 2), то множества D^α совпадают для всех n-поднаборов $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$.

В условиях второй теоремы в важном частном случае удается избавиться от предположения «общего положения» элементов набора гиперповерхностей. Доказана теорема.

Теорема 3.4. *Пусть X — достаточно малая штейнова окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n$. Тогда утверждение гипотезы о разделяющих циклах справедливо для любого набора, состоящего из $m = n + 1$ гиперповерхностей.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе представлены следующие основные результаты:

1. В терминах гомологических резольвент комплекса Чеха – де Рама на n-мерном комплексном многообразии X дана конструкция гомоморфизма

   $$H_{2n-1}(X \setminus \bigcap F_j) \to H_n^{\mathrm{sep}}(X \setminus \bigcup F_j)$$

   гомологий дополнения к пересечению набора гиперповерхностей $\{F_j\}$ в разделяющую подгруппу дополнения к объединению набора $\{F_j\}$.

2. Доказано, что в 2-мерном случае комбинаторные коэффициенты для системы развернутых многогранников вычисляются по резольвенте границы подходящего полиэдра.

3. Получено обобщение теоремы Южакова о разделяющих циклах на случай одного класса дивизоров в необщем положении.

4. В локальном случае доказана справедливость гипотезы Южакова – Циха о разделяющих циклах набора $n+1$ дивизоров в n-мерном комплексном многообразии.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Ульверт, Р.В. О циклах, разделяющих систему m гиперповерхностей в окрестности точки из $\mathbb{C}^n$ / Р.В. Ульверт // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и Физика. - 2012. - Т. 5. - №2. - С. 276–282.

2. Ульверт, Р.В. Гомологические резольвенты в задачах о разделяющих циклах / Р.В. Ульверт // Сиб. матем. журн. - 2018. - Т. 59. - №3. - С. 684–695.

3. Ульверт, Р.В. О вычислимости кратных интегралов суммой локальных вычетов / Р.В. Ульверт // Сиб. электрон. матем. изв. - 2018. - Т. 15. - С. 996–1010.

4. Ульверт, Р.В. О циклах, разделяющих ростки комплексных гиперповерхностей / Р.В. Ульверт // Четвертое российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам: тезисы докладов, Красноярск - 2012. - С. 72–74.

5. Ульверт, Р.В. Об одном условии представимости цикла, разделяющего набор гиперповерхностей, в виде суммы локальных циклов / Р.В. Ульверт // Решетневские чтения: материалы XVIII Междунар. науч. конф., Красноярск - 2014. – Ч. 2. - С. 158–159.

6. Ульверт, Р.В. О циклах, разделяющих набор поверхностей [электронный ресурс] / Р.В. Ульверт // Материалы VI Российско-Армянского совещания по математическому анализу, математической физике и аналитической механике, Ростов н/Д - 2016. - С. 21. - Режим доступа: http://rusarm.sfedu.ru/thethis.pdf.ISBN 978-5-7890-1160-7.