На правах рукописи

Тимофеенко Иван Алексеевич

ПОРОЖДАЮЩИЕ МУЛЬТИПЛЕТЫ ИНВОЛЮЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Красноярск — 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, профессор **Нужин Яков Нифантьевич**.

Официальные оппоненты:
Всемирнов Максим Александрович, д-р физ.-мат. наук, доцент, чл.-кор. РАН, ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова РАН», заместитель директора по научным вопросам;

Колесников Сергей Геннадьевич, д-р физ.-мат. наук, доцент, ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева», кафедра безопасности информационных технологий, заведующий кафедрой.

Ведущая организация:
ФГБУН «Институт математики и механики» УрО РАН, г. Екатеринбург.

Защита состоится 22 декабря 2017 г. в 15:30 на заседании диссертационного совета Д 212.099.25 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Р8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «_____» ноября 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Шлапунов
Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы исследования

Диссертация посвящена нахождению порождающих множеств инволюций с различными свойствами для матричных групп и групп Шевалле над кольцом целых чисел и кольцом целых гауссовых чисел.

Вопрос о минимальном количестве и порядках порождающих элементов группы постоянно вызывал большой интерес и изучался для разнообразных классов групп: конечных и бесконечных, абстрактных, групп подстановок, матричных групп и других. Порождающие тройки инволюций конечных групп используются при нахождении гамильтоновых циклов в графах Кэли [22], при описании групп автоморфизмов карт на плоскости [17], а также при решении обратной задачи теории Галуа [1].

Еще в 1890 году Ф. Клейн и Р. Фрике доказали [16], что гомоморфные образы модулярной группы $PSL_2(\mathbb{Z})$, за исключением трех циклических групп $\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, — это в точности $(2,3)$-порожденные группы (то есть группы, порожденные двумя элементами порядка 2 и 3). Этим в определенной степени объясняется важность изучения $(2,3)$-порожденных групп.

Хорошо известно, что классические группы порождаются своими простейшими элементами. Например, симметрические группы порождаются транспозициями, а простые классические линейные группы или более обобщенно — простые группы лиева типа — порождаются корневыми элементами (см. [3, 4, 14, 18]). В обоих случаях мощность порождающего множества растет вместе с ростом мощности самой группы. Особый интерес вызывают порождающие множества минимальной мощности относительно некоторых свойств.

Л. Диксон в 1901 г. доказал, что для любого нечетного $q \neq 9$, являющегося степенью простого числа, группа $SL_2(q)$ порождается двумя матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

если t порождает основное поле [15].

В XX веке вопрос о $(2,3)$-порождении удалось положительно решить для многих конечных простых групп и классических матричных групп над конечно порожденными коммутативными кольцами.

Еще в 1901 году Дж. Миллер доказал в работе [20], что знакопеременные группы A_n, за исключением A_1, A_2, A_3, A_6, A_7, A_8, могут быть порождены инволюцией α и элементом β порядка 3. Для простых знакопеременных групп, то есть групп A_n при $n \geq 5$, из $(2,3)$-порождаемости следует и порождаемость тремя инволюциями, так как $\langle \alpha, \alpha^\beta, \alpha^{\beta^2} \rangle \lhd \langle \alpha, \beta \rangle$. В действительности этот факт справедлив для любой конечной неабелевой простой группы.

Вопрос о $(2,3)$-порождаемости групп $GL_n(\mathbb{Z})$, $SL_n(\mathbb{Z})$ и их фактор-групп активно исследовался М. А. Всемирновым [28–30] и М. С. Тамбурини [23–25]. В результате удалось показать [27], что среди вышеупомянутых групп $(2,3)$-порожденными группами являются только группы

- $PSL_2(\mathbb{Z})$,
- $PSL_n(\mathbb{Z})$, $PGL_n(\mathbb{Z})$, $SL_n(\mathbb{Z})$, $GL_n(\mathbb{Z})$, если $n \geq 5$.

Отметим, что в общем случае из $(2,3)$-порождаемости конкретной группы не следует ее порождаемость тремя инволюциями.

В 1980 году В.Д. Мазуров поставил следующий вопрос [7, в. 7.30]:

Какие конечные простые группы порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?

Для знакопеременных групп и групп лиева типа над конечными полями ответ на вопрос 7.30 дал Я. Н. Нужин [9], [10], [11], [12], [21]. Спорадические группы рассматривались рядом авторов различными методами. В работе [6] В. Д. Мазуров единообразно методами теории характеров получил ответ на вопрос 7.30 для всех спорадических групп.

В 1999 году Я.Н. Нужин записал в Коуровскую тетрадь следующий вопрос [7, в. 14.69].

Для каждой простой неабелевой группы G найти минимум числа (сопряженных) порождающих инволюций $n(G)$ (соответственно $n_c(G)$) таких, что их произведение равно 1.

Из положительного решения вопроса 7.30 для конечной простой группы G следует равенство $n(G) = 5$. В 2001 году Т.В. Моисеенкова доказала [2], что, если $G = PSL_3(2^m)$, $PSU_3(2^{2^m})$, то $n(G) = n_c(G) = 6$. В диссертации Дж. М. Уорда 2009 года [31] (см. также [7, примечания к вопросу 14.69]) число $n_c(G)$ найдено для знакопеременных, спорадических групп и для групп $PSL_n(q)$ при нечетном q, а для $n \geq 4$ при дополнительном ограничении $q \neq 9$, кроме того, для $n = 6$ при $q \not\equiv 3 \ (mod\ 4)$.

Аналоги вопроса 7.30 и 14.69 представляют интерес и для линейных групп и групп Шевалле над кольцами целых и целых гауссовых чисел. В частности, в 2002 году Я.Н. Нужин поставил следующий вопрос.

Какие присоединённые группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны? [7, в. 15.67]

В работе [26] М. С. Тамбурини и П. Цукка установлено, что специальная линейная группа $SL_n(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ при $n \geq 14$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Следовательно, и проективная специальная линейная группа $PSL_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 14$ обладает такой тройкой порождающих инволюций. Более того, Я. Н. Нужин доказал, что $PSL_n(\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, тогда и только тогда, когда $n \geq 5$ [13]. На самом деле, в этой работе при $n \neq 4k+2$ порождающие тройки инволюций выбирались из $SL_n(\mathbb{Z})$, поэтому для группы $SL_n(\mathbb{Z})$ ответ на аналог вопроса 15.67 неизвестен только для $n = 6, 10$.

В работе [8] найдены порождающие тройки инволюций для групп $SL_n(\mathbb{Z})$, а, стало быть, и для $PSL_n(\mathbb{Z})$, при $n = 3, 4$, и на основе результатов из [13, 26] доказано, что, если $G = PSL_n(\mathbb{Z})$, то $n(G) = 6$ при $n = 3, 4$ и $n(G) = 5$ при $n \geq 5$, а, если $G = SL_n(\mathbb{Z})$, то $n(G) = 6$ при $n = 3, 4$ и $n(G) = 5$ при $n \geq 5$, $n \neq 6, 10$.

В силу гомоморфизма $PSp_n(\mathbb{Z}) \to PSp_n(\mathbb{Z}_p)$ из непорождаемости тремя инволюциями, две из которых перестановочны, проективной симплектической группы $PSp_4(\mathbb{Z}_3)$ [12] следует непорождаемость тремя инволюциями, две из которых перестановочны, группы $PSp_4(\mathbb{Z})$, которая изоморфна присоединенной группе Шевалле $B_2(\mathbb{Z})$.

Отметим также, что в работах Д. В. Левчука и Я. Н. Нужина [5, 19] установлена порождаемость тремя инволюциями, две из которых перестановочны, групп $PSL_n(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ при $n \geq 7$.

Целью диссертации является рассмотрение следующих вопросов для групп Шевалле $\Phi(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

А) *Порождается ли данная группа* $\Phi(\mathbb{Z})$ *тремя инволюциями?*

Б) *Порождается ли данная группа* $\Phi(\mathbb{Z})$ *тремя инволюциями, две из которых перестановочны?*

В) *Каково минимальное число* $n(\Phi(\mathbb{Z}))$ *порождающих инволюций группы* $\Phi(\mathbb{Z})$, *произведение которых равно 1.*

Для линейных групп размерности 2 аналоги вопросов А), Б) рассматриваются также и над кольцом целых гауссовых чисел.

Основные результаты диссертации.

1. Даны ответы на вопросы о порождаемости тремя инволюциями и тремя инволюциями, две из которых перестановочны, линейных групп степени два GL_2, SL_2, PGL_2, PSL_2 над кольцами целых чисел $\mathbb{Z}$ и целых гауссовых чисел $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$, исключая группу $PSL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$. Для групп $GL_2(\mathbb{Z})$, $PGL_2(\mathbb{Z})$ найдено минимальное число $n(G)$ порождающих группы G инволюций, произведение которых равно 1.

2. Доказана порождаемость тремя инволюциями, две из которых перестановочны, групп Шевалле типа G_2, E_6, E_7, E_8 над кольцом целых чисел. Все инволюции найдены в явном виде.

Научная новизна и значимость работы. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми и могут найти применение в теории групп и теории графов.

Методы исследования. В работе используются методы линейной алгебры, методы теории групп. Для проверки выкладок, вычисляемых в группах Шевалле, применялась программа, составленная автором в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались на семи конференциях.

- 43-я Международная молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2012) [36]

- Вторая ежегодная конференция для обмена математическими идеями (Iowa, USA, 2013)

- 45-я Международная молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2014) [38]

- Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 2016) [39]

- Международная конференция «Алгебра и логика: теория и приложения» (Красноярск, 2013, 2016) [37,40]

- Международная конференция серии «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2016) [41]

Публикации. Список публикаций по теме диссертации включает 10 работ [32–41] (9 без соавторов), из которых 4 статьи [32–35] опубликованы в рецензируемых изданиях. Основные результаты диссертации опубликованы в двух статьях [32, 33] из перечня ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, разбитых на 9 параграфов, заключения, списка литературы (47 наименований) и приложения — код программы в системе Wolfram Mathematica. Объем — 108 страниц. Вспомогательные утверждения (леммы, предложения) имеют тройную нумерацию, включающую номер главы, номер параграфа в главе и номер утверждения в текущем параграфе. Теоремы имеют сквозную нумерацию.

Основное содержание диссертации

В главе 1 получены ответы на вопросы А) – В) для линейных групп SL_2, PSL_2, GL_2, PGL_2 над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Кроме того, исследованы вопросы А), Б) для линейных групп размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$. В параграфе 1.1 приведены предварительные сведения, известные результаты и используемые обозначения. В параграфе 1.2 доказывается

Теорема 1. *Группа $GL_2(\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, но не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, $n(GL_2(\mathbb{Z})) = 6$. Группа $PGL_2(\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, $n(PGL_2(\mathbb{Z})) = 5$. Группы $SL_2(\mathbb{Z})$ и $PSL_2(\mathbb{Z})$ не порождаются никаким множеством инволюций.*

Теорема 1 получена в неразделимом соавторстве с научным руководителем Я. Н. Нужиным в статье [34]. Результаты этой теоремы наглядно представлены в таблице 1, где + (−) означает положительное (отрицательное) решение соответствующей задачи. В случае положительного ответа инволюции найдены явно.

Таблица 1 — Ответы А), Б), В)

	$SL_2(\mathbb{Z})$	$PSL_2(\mathbb{Z})$	$GL_2(\mathbb{Z})$	$PGL_2(\mathbb{Z})$
А) $(2, 2, 2)$	—	—	+	+
Б) $(2 \times 2, 2)$	—	—	—	+
В) $n(G)$	0	0	6	5

Доказательство теоремы 1 существенно опирается на следующую лемму, которая представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 1.2.7. *Любая подгруппа M, порожденная тремя нецентральными инволюциями из группы $GL_2(\mathbb{C})$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, две из которых перестановочны, имеет следующую структуру:*

$$M = \langle \gamma, \delta \rangle \cdot \langle \alpha, \beta \rangle,$$

где

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \delta^2 = (\alpha\beta)^2 = \alpha\gamma\alpha\delta = \beta\gamma\beta\delta = 1.$$

Более того, группа M либо конечна, либо $M = \langle \gamma, \delta \rangle \leftthreetimes \langle \alpha, \beta \rangle$.

В параграфе 1.3 решены задачи А) и Б) для линейных групп размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел. Решения задачи А) для групп $SL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$, $GL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$, $PGL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ представлены соответственно предложениями 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3. Задача Б) решена для групп $SL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$, $PSL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$, $GL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$, $PGL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ в предложениях 1.3.1, 1.3.7, 1.3.2, 1.3.6 соответственно. В предложении 1.3.8 показано, что группа $SL_2^{\pm}(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ порождается тремя инволюциями. Доказательство этих результатов опирается на аналог леммы 1.2.7 для группы $PGL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ — лемму 1.3.5. Результаты этого параграфа опубликованы в статье [35].

Глава 2 содержит решение следующего вопроса для групп Шевалле исключительных типов $G_2(\mathbb{Z})$, $E_6(\mathbb{Z})$, $E_7(\mathbb{Z})$, $E_8(\mathbb{Z})$.

Г) *Какие присоединённые группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?*

В параграфе 2.1 представлены необходимые обозначения элементов и подгрупп в группах Шевалле и некоторые вспомогательные результаты. В параграфах 2.2 и 2.3 доказываются главные результаты диссертации — теоремы 2 и 3, которые опубликованны в работах [32] и [33] соответственно.

Теорема 2. *Группа Шевалле $G_2(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ порождается инволюциями*

$$\begin{aligned} \alpha &= x_a(1)h_b(-1), \\ \beta &= x_{-b}(1)h_a(-1), \\ \gamma &= n_a n_{3a+2b} h_b(-1), \end{aligned}$$

первые две из которых перестановочны.

Теорема 3. *Присоединенные группы Шевалле типа E_l над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

Порождающие инволюции групп $E_l(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел представлены в таблице 3, α_1 и α_2 перестановочны.

Таблица 3 — Инволюции в $E_l(\mathbb{Z})$

Группа	α_1	α_2	α_3
$E_6(\mathbb{Z})$	$x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}h_{r_3}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}h_{r_2}h_{r_4}h_{r_6}$
$E_7(\mathbb{Z})$	$x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}h_{r_3}h_{r_5}h_{r_7}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6}$
$E_8(\mathbb{Z})$	$x_{r_1}(1)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}n_{r_8}h_{r_5}h_{r_1}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6}h_{r_2}$

Для выбора инволюций в теоремах 2 и 3 используется метод, разработанный Я. Н. Нужиным для нахождения порождающих троек инволюций в простых группах лиева типа над конечными полями [9].

В главе 3 исследован вопрос А) для групп $SL_6(\mathbb{Z})$ и $SL_{10}(p)$, где p — простое число. Предложения 3.2.1 и 3.3.1 указывают явно порождающие тройки инволюций групп $SL_6(\mathbb{Z})$ и соответственно $SL_{10}(p)$.

В приложении содержится код программы на языке Wolfram Mathematica с комментариями. Данная программа использовалась для проверки доказательства теоремы 3.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Я. Н. Нужину за поставленные задачи, неоценимую помощь в работе и всестороннюю поддержку. Автор благодарен всему коллективу кафедры алгебры и математической логики ИМиФИ СФУ за сотрудничество и атмосферу, в которой была выполнена данная работа.

Работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00707), а также Правительством Красноярского края, Красноярским краевым фондом поддержки научной и научно-технической деятельности совместно с РФФИ (грант 16-41-240670).

Список литературы

[1] Белый Г. В. О расширениях Галуа, максимального циклотомического поля // Известия АН СССР, Сер. матем. — 1979. — Т. 43. — С. 267–276.

[2] Дубинкина Т. В. Об одном свойстве групп $SL_3(2^n)$, $SU_3(2^{2^n})$ // Вестник КГТУ — 2001. — С. 19–34.

[3] Дьедонне Ж. Геометрия классических групп— М:Мир, 1974.

[4] Кокстер Г. С. М., Мозер, У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп // М., Наука — 1980.

[5] Левчук Д. В. О порождаемости группы $PSL_7(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Вестник НГУ — 2009. — Т. 1. — С. 35-38.

[6] Мазуров В. Д. О порождении спорадических простых групп тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Сиб. мат. журн. — 2003. — Т. 44, № 1. — С. 193–198.

[7] Мазуров В. Д., Хухро Е. И. Коуровская тетрадь. — Новосибирск: Институт математики Сибирского отделения РАН, 2014. Режим доступа: `http://math.nsc.ru/~alglog/18kt.pdf`

[8] Моисеенкова Т. В. Порождающие мультиплеты инволюций групп $SL_n(\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z})$ // Труды института математики и механики УрО РАН — 2010. — Т. 16. — С. 195–198.

[9] Нужин Я. Н. Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем характеристики 2 // Алгебра и логика — 1990. — Т. 29, № 2. — С. 192–206.

[10] Нужин Я. Н. Порождающие тройки инволюций знакопеременных групп // Математические заметки — 1990. — Т. 51, № 4. — С. 91–95.

[11] Нужин Я. Н. Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики, I // Алгебра и логика — 1997. — Т. 36, № 1. — С. 77–96.

[12] Нужин Я. Н. Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики, II // Алгебра и логика — 1997. — Т. 36, № 4. — С. 422–440.

[13] Нужин Я. Н. О порождаемости группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Владикавказский матем. журнал — 2008. — Т. 10, № 1. — С. 68–74.

[14] Chevalley C. Sur certain groupes simples // Tohoku Mathematical Journal — 1955. — Т. 7, № 1-2. — С. 14–66.

[15] Dickson L. E. Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory. — Leipzig: Teuber, 1901.

[16] Fricke R., Klein F. Vorlesungen uber die Theorie der Elliptischen Modulunktionen — Leipzig: Teubner, 1890.

[17] Jones G. A. Automorphism groups of edge-transitive maps // arXiv — 2016. — T. 1605.09461v1.

[18] Jordan C. Traite des substitutions et des equations algebriques. — Paris: Gauthier-Villars, 1870.

[19] Levchuk D. V., Nuzhin Ya. N. On the generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute // Journal of Siberian Federal University, Math and Physics — 2008. — T. 1, № 2. — C. 133–139.

[20] Miller G. A. On the groups generated by two operators // Bull. Amer. Math. Soc. — 1901. — T. 7. — C. 424–426.

[21] Nuzhin Ya. N. Generating elements of simple groups and their applications // Proceedings of III International Conference on algebra of memory M.I.Kargapolov. — Berlin: Walter de Gruyter, Apr. 1996. — P. 101–120.

[22] Pak I., Radoicic R. Hamiltonian paths in Cayley graphs // Discrete Mathematics — 2009. — T. 309, № 17. — C. 5501–5508.

[23] Tamburini M. C. Generation of certain simple groups by elements of small order // Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. — 1987. — T. 121. — C. 21–27.

[24] Tamburini M. C., Wilson J. S., Gavioli N. On the $(2, 3)$-generation of some classical groups, I // Journal of Algebra — 1994. — T. 168, № 1. — C. 353–370.

[25] Tamburini M. C., Zucca P. On a question of M. Conder // Journal of Algebra — 2000. — T. 11, № 1. — C. 5–7.

[26] Tamburini M. C., Zucca P. Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute // J. of Algebra — 1997. — T. 195, № 2. — C. 650–661.

[27] Tamburini M. C. The $(2,3)$-generation of matrix groups over the integers // ISCHIA GROUP THEORY 2008/ ed. by B. Margrazia. — World Scientific Publishing, Apr. 2008. — P. 276–282.

[28] Vsemirnov M. A. Is the group $SL_6(\mathbb{Z})$ $(2,3)$ generated? // J. Math. Sci. (N. Y.) — 2007. — T. 140, № 5. — C. 101–130.

[29] Vsemirnov M. A. The group $GL_6(\mathbb{Z})$ is $(2,3)$ generated // J. Group Theory — 2007. — T. 10, № 4. — C. 425–430.

[30] Vsemirnov M. A. On (2,3)-generation of matrix groups over the ring of integers // St. Petersburg Math. J. — 2008. — T. 19, № 6. — C. 883–910.

[31] Ward J. M. Generation of simple groups by conjugate involutions. — University of London: Queen Mary college, 2009. — Thesis P.D.

Работы автора по теме диссертации

[32] Тимофеенко И. А. Generation of the Chevalley group of type G2 over the ring of integers by three involutions two of which commute // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. — 2015. — Т. 8, № 1. — С. 104–108.

[33] Тимофеенко И. А. Порождаемость групп Шевалле типа E_l над кольцом целых чисел тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Сибирские электронные математические известия — Новосибирск, 2017. — Т. 14, — С. 807–820. Режим доступа: `http://semr.math.nsc.ru/v14/p807-820.pdf`

[34] Нужин Я. Н., Тимофеенко И. А. Порождающие тройки инволюций линейных групп размерности 2 над кольцом целых чисел // Владикавказский математический журнал — 2009. — Т. 11, № 4. — С. 59–62.

[35] Тимофеенко И. А. Порождающие тройки инволюций линейных групп размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева — 2012. — Т. 94, № 1. — С. 342–349.

[36] Тимофеенко И. А. Порождающие тройки инволюций групп линейных групп размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел // Тезисы 43-ей международной молодежной школы-конференции Современные проблемы математики и ее приложений, 29 января — 5 ферваля 2012 г. — Екатеринбург, 2012. — С. 98–100.

[37] Тимофеенко И. А. О порождаемости тремя инволюциями группы $SL_6(\mathbb{Z})$ // Молодежь и наука: сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска. — Красноярск, 2013, Режим доступа: http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2013/section061.html —

[38] Тимофеенко И. А. Порождающие тройки инволюций групп Шевалле типа G2 // Труды 45-ой Международной молодежной школы-конференции Современные проблемы математики и ее приложений, 2014 г. — Екатеринбург, 2014. — С. 53–54.

[39] Тимофеенко И. А. Порождающие тройки инволюций групп Шевалле типа E_6, E_7, E_8 над кольцом целых чисел // Материалы международной конференции по алгебре анализу и геометрии, 26 июня — 2 июля 2016 г. — Казань, 2016. — С. 332.

[40] Тимофеенко И. А. Порождаемость групп Шевалле типа E_l над кольцом целых чисел тремя инволюциями, две из из которых перестановочны // Тезисы докладов XI школы-конференции по теории групп, 27 июля — 2 августа 2016 г. — Красноярск, 2016. — С. 62–63.

[41] Тимофеенко И. А. Порождаемость групп Шевалле исключительных типов над кольцом целых чисел тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Международная конференция «Мальцевские чтения», тезисы докладов. Новосибирск, 21-25 ноября 2016 г. (электронное издание). — Новосибирск, 2016. Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/16/malmeet16.pdf. — С. 109–110.