На правах рукописи

Солдатенко Александр Александрович

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА ГРАФОВЫХ И ГИПЕРГРАФОВЫХ СЕТЕЙ

Специальность 05.13.17 — Теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск 2021

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет», г. Красноярск

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент **Семенова Дарья Владиславовна**.

Официальные оппоненты: **Цициашвили Гурами Шалвович**, доктор физико-математических наук, профессор по кафедре матетматического моделирования и информатики, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт прикладной математики» Дальневосточного отделения Российской академии наук, научно-исследовательская группа вероятностных методов и системного анализа, руководитель научно-исследовательской группой.

Задорожный Владимир Николаевич, доктор технических наук, доцент по направлению «Автоматизированные системы управления», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный технический университет», кафедра математические методы и информационные технологии в экономике, профессор.

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

Защита состоится «17» февраля 2022 года в 14 ч. на заседании диссертационного совета Д 212.099.22, созданного на базе Сибирского федерального университета по адресу: 660074, г. Красноярск, ул. Киренского, 26, ауд. УЛК 112.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Сибирского федерального университета по адресу http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «___» декабря 2021 г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Покидышева Людмила Ивановна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Для исследования, анализа и проектирования дорожных, телекоммуникационных, семантических и мультисервисных сетей активно используются методы и алгоритмы теории графов и гиперграфов. При этом значительная часть задач анализа графовых и гиперграфовых сетей сводится к проблемам поиска и определения различных конфигураций. Указанные проблемы могут быть сформулированы как структурные и оптимизационные задачи на комбинаторных объектах — графах и гиперграфах. Особо интересными конфигурациями являются кратчайшие пути и максимальные биклики, поскольку они позволяют определять узкие места сети, основные магистрали, выполнять предобработку для разбиения исходной сети на подсети.

Задача поиска кратчайшего пути в графе — хорошо известная задача теории графов, имеющая многие реальные приложения, такие как маршрутизация в коммуникационных сетях, логистическая оптимизация. На производительность используемых алгоритмов для решения данных задач существенное влияние оказывают увеличение размерности и дополнительные ограничения анализируемых графовых и гиперграфовых сетей. В работе K. L. Cooke, E. Halsey для задачи о кратчайшем пути в нестационарной сети была предложена модель поиска оптимального времени прибытия. Применение классического алгоритма Дейкстры для нахождения кратчайшего пути в нестационарной сети рассмотрено в работе S. E. Dreyfus. Дальнейшие исследования включают усовершенствование алгоритма Дейкстры, выполнение предобработки исходной сети, использование новых подходов к решению задачи о кратчайшем пути в нестационарной сети. Значительный вклад в это направление внесли H. D. Sherali, D. Wagner, M. M. Nejad, D. Delling, Э. Х. Гимади.

Задача о кратчайшем пути в ресурсоограниченной сети является расширением классической задачи о кратчайшем пути с дополнительными ресурсными функциями для каждой дуги. В работе H. Joksch задача о ресурсоограниченном кратчайшем пути рассматривалась в терминах целочисленного линейного программирования и теоретико-графовой постановке, для которой был предложен алгоритм, основанный на методе динамического программирования. Двойственный алгоритм решения задачи о ресурсоограниченном кратчайшем пути в терминах целочисленного линейного программирования предложен в работе G. Handler, I. Zang. Значительный вклад в развитие подходов к решению задачи о кратчайшем пути в ресурсоограниченной сети внесли M. Dror, I. Dumitrescu, K. Mehlhorn, M. Jepsen, M. Horvarth, R. Hassin, G. Xue, W. Zhang.

Особо интересными конфигурациями в графовых и гиперграфовых сетях являются максимальные биклики, поскольку они позволяют определять узкие места сети, основные магистрали, выполнять предобработку для разбиения исходной сети на подсети. Задача поиска максимальных биклик связана с задачей поиска максимально полных подматриц $(0, 1)$-матрицы. Максимально полные подматрицы активно исследовались в анализе формальных понятий в работах С. О. Кузнецова, B. Ganter, R. Wille, С. А. Объедкова, Д. И. Игнатова, В. В. Быковой. Применение максимальных индуцированных биклик в телекоммуникационных сетях, представленных графами, исследовано в работе R. L. Graham, H. O. Pollak. В других областях знаний, в частности для гиперграфовых сетей, максимальные биклики исследовались Е. В. Константиновой, Инной и Игорем Зверович, В. Б. Поповым.

Все рассматриваемые в работе задачи в большинстве случаев решаются применительно к сетям, представленным графами или гиперграфами, поэтому эти задачи носят комбинаторный характер. Увеличение сложности и размера дорожных и телекоммуникационных сетей сказывается на производительности существующих алгоритмов. Поэтому актуальна разработка новых и усовершенствование существующих алгоритмов комбинаторной оптимизации, способных находить решение данных задач за реальное время. Именно данное направление исследуется в настоящей диссертационной работе.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка алгоритмов комбинаторной оптимизации для анализа графовых и гиперграфовых сетей.

Для достижения цели были поставлены и решены следующие задачи.

1. Разработать и теоретически обосновать модификацию алгоритма ALT решения задачи поиска кратчайшего пути в нестационарной метрической сети, удовлетворяющей условию FIFO.

2. Разработать и теоретически обосновать приближенный алгоритм решения задачи поиска ресурсоограниченного кратчайшего пути в графе с одним ресурсом.

3. Разработать и теоретически обосновать алгоритм решения задачи поиска всех максимальных индуцированных биклик для графов и гиперграфов.

4. Создать комплекс программ, реализующий разработанные алгоритмы, для проверки результативности алгоритмов на случайных графах и гиперграфах и на реальных данных применительно к дорожным сетям.

Научная новизна результатов, представленных в диссертации.

1. Разработана модификация алгоритма ALT для задачи поиска кратчайшего пути в нестационарной метрической сети, удовлетворяющей условию FIFO. В отличие от классического алгоритма ALT, в модификации используется новая графовая модель, в которой всякая дуга сети определяется статическим и динамическим весами, интерпретируемыми как расстояние и скорость в сети. Предложенная модификация алгоритма ALT позволяет находить точ-

ное решение задачи поиска кратчайшего пути в нестационарной метрической сети, удовлетворяющей условию FIFO.

2. Разработан новый алгоритм RevTree приближенного решения задачи поиска ресурсоограниченного кратчайшего пути в сети с одним ресурсом. Алгоритм отличается от ранее существующих алгоритмов тем, что позволяет получить оценку точности решения на основе параметров исходной сети.

3. Разработан новый алгоритм HFindMIB решения задачи поиска всех максимальных индуцированных биклик. Алгоритм отличается от ранее существующих алгоритмов тем, что в процессе генерации биклик использует новый гиперграфовый подход. Алгоритм находит и перечисляет в лексикографическом порядке все максимальные индуцированные биклики в графовых и гиперграфовых сетях.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных в диссертационной работе задач был применен аппарат теории графов и гиперграфов, теории алгоритмов, комбинаторной оптимизации, а также методы объектно-ориентированного программирования. Комплекс программ для предложенных алгоритмов реализован на языке C++.

Теоретическая значимость работы. Результаты диссертации представляют теоретический интерес и вносят заметный вклад в изучение задач маршрутизации и задач перечислительного типа для графов и гиперграфов. Новые представления графовой модели и потенциальных функций для задачи о кратчайшем пути в нестационарной сети с условием FIFO могут быть использованы для моделирования других нестационарных сетей с различными ограничениями. Предложенный алгоритм для нахождения ресурсоограниченного пути может быть расширен на случай многих ресурсов. Метод оценки полученного решения может быть развит в общий подход для задач маршрутизации с несколькими весовыми функциями. Подход генерации максимальных индуцированных биклик может использоваться для развития методов генерации k-дольных клик гиперграфа.

Практическая значимость работы. Разработанные в диссертационной работе алгоритмы используются в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет» при подготовке бакалавров по специальностям 01.03.01 — Математика, 01.03.02 — Прикладная математика и информатика, 02.03.01 — Математика и компьютерные науки, при изучении дисциплин «Комбинаторные алгоритмы», «Технологии хранения и обработки больших данных», а также в научно-исследовательской работе магистрантов по направлению подготовки 01.04.02.06 — Прикладная математика и информатика в гуманитарных и социально-экономических науках.

Разработанные в работе алгоритмы и комплекс программ ориентированы на эффективное применение в различных прикладных областях. В работе это продемонстрировано на примере реальных дорожных сетей городов, в частности, при интеллектуальном анализе дорожного графа города Красноярска в условиях ограничений. Применение алгоритмов к модельной дорожной сети, в которой добавлены новые дороги или перекрыты существующие, позволяет анализировать последствия таких решений путем определения наиболее востребованных дорог. Это может повысить качество работы алгоритмов выбора стратегий управления и дальнейшей оптимизации планов координаций светофоров на отдельных участках дорожной сети.

Соответствие паспорту специальности. Диссертационная работа соответствует области исследования специальности 05.13.17 — Теоретические основы информатики по п. 10 «Разработка основ математической теории языков и грамматик, теории конечных автоматов и теории графов» (пункты 1–3 научной новизны), по п. 5 «Разработка и исследование моделей и алгоритмов анализа данных, обнаружения закономерностей в данных и их извлечениях, разработка и исследование методов и алгоритмов анализа текста, устной речи и изображений» (пункт 3 научной новизны).

Положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Модифицированный алгоритм ALT для решения задачи поиска кратчайшего пути в нестационарной метрической сети, удовлетворяющей условию FIFO, и оценки его сложности по времени.

2. Алгоритм RevTree для решения задачи поиска кратчайшего пути в ресурсоограниченной сети с одним ресурсом, доказательство корректности и оценка его сложности по времени и памяти.

3. Алгоритм HFindMCS поиска всех максимально полных подматриц $(0,1)$-матрицы инцидентности гиперграфа и оценка его сложности по времени.

4. Теорема об эквивалентности индуцированных двудольных подгиперграфов гиперграфа и двудольных подграфов соответствующего вершинного графа гиперграфа. Алгоритм HFindMIB для поиска всех максимальных индуцированных биклик гиперграфа, основанный на этой теореме, и оценка его сложности по времени.

5. Комплекс программ для проверки результативности предложенных алгоритмов на случайных графах и гиперграфах и на реальных данных применительно к дорожным сетям.

Степень достоверности и апробация результатов работы. Достоверность результатов работы подтверждается строгими математическими доказательствами основных положений, экспериментальной проверкой результатов, численных расчетов на реальных данных и практической эффективности программных реализаций.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на Международной конференции Discrete Optimization and Operations Research DOOR-2016 (Владивосток, 2016), VII Международной конференции «Проблемы оптимизации и их приложения» (Омск, 2018), XVII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» ИТММ'18 (Томск, 2018), International Scientific Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies FarEastCon'18 (Владивосток, 2018), 17 Всероссийской конференции с международным участием «Компьютерная безопасность и криптография» SIBECRYPT'18 (Абакан, 2018), 18 Всероссийской конференции с международным участием «Компьютерная безопасность и криптография» SIBECRYPT'19 (Томск, 2019), VII Международной конференции «Математика, её приложения и математическое образование» (Улан-Удэ, 2020), XIX Международной конференции имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» ИТММ'20 (Томск, 2020), Семнадцатой Международной Азиатской школе-семинаре «Проблемы оптимизации сложных систем» OPCS'21 (Online, 2021), 24th International Conference on Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications DCCN'21 (Moscow, Online, 2021), Международной конференции «Вопросы логистики, управления и эксплуатации в транспортном коридоре Восток-Запад» PLMO'21 (Баку, 2021), научных семинарах кафедры высшей и прикладной математики Сибирского федерального университета.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Личный вклад автора. Постановка задач, представленных в диссертации, была сделана автором совместно с научными руководителями д.ф.-м.н, профессором В.В. Быковой и к.ф.-м.н, доцентом Д.В. Семеновой. Основные результаты, составляющие новизну диссертационной работы, получены лично автором. Обсуждение подходов, алгоритмов, результатов вычислительных экспериментов и подготовка публикаций осуществлялись совместно с научными руководителями. Автор самостоятельно выполнил разработку программных продуктов для созданных в диссертационной работе алгоритмов и получил соответствующие свидетельства о их государственной регистрации.

Публикации. По тематике диссертации опубликовано **22** работы, из них **5** статей в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (в том числе **4** статьи в российских научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus) [1–5], **3** свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ [19–22], **14** публикаций в сборниках материалов международных и всероссийских научных и научно-практических конференций (в том числе **3** статьи в изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus) [6–18].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, списка таблиц, списка иллюстраций, двух приложений. Общий объем диссертации составляет 95 страниц; иллюстративный материал представлен 15 рисунками и 14 таблицами; список литературы содержит 92 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** к диссертации дается описание работы, раскрывается актуальность темы исследования, приводится обзор работ других авторов по изучаемой тематике, формулируются цели и задачи исследования, излагается методология исследования, обосновывается теоретическая и практическая значимость диссертации, а также научная новизна результатов исследования.

В **первой главе** рассматривается задача о кратчайшем пути в нестационарной метрической сети с условием FIFO. Основным результатом первой главы является модифицированный алгоритм ALT, для которого сформулирована и доказана теорема о сложности. Данные результаты опубликованы в работах [1, 2, 6, 9–11].

Пусть задан ориентированный граф $G = (V, E)$ без кратных дуг и петель. Для всякой дуги $(x, y) \in E$ графа G заданы $l_{xy} \geq 0$ — расстояние между x и y, $v_{xy}(t) > 0$ — скорость движения по дуге (x, y), и определены весовая функция $w_{xy}(t) = \dfrac{l_{xy}}{v_{xy}(t)} \geq 0$ и функция прибытия $F_{xy}(t) = t + w_{xy}(t)$. Говорят, что функция прибытия F_{xy} удовлетворяет условию FIFO, если она является монотонной, т. е. для любых моментов времени $0 < t_1 \leq t_2$ верно $F_{xy}(t_1) \leq F_{xy}(t_2)$. Тогда граф $G = (V, E)$ с весовыми функциями $w_{xy}(t)$ и монотонными функциями прибытия $F_{xy}(t)$ называется нестационарной метрической сетью, удовлетворяющей условию FIFO. Пусть задан путь P от вершины s до вершины d, при этом отправление из вершины s осуществлено в момент времени t_s. Величина $w(P, t_s)$ отражает время прибытия в вершину d и вычисляется как $w(P, t_s) = t_s + \sum\limits_{i=0}^{k-1} w_{x_i x_{i+1}}(t_i)$, где $t_0 = t_s$, $t_{i+1} = F_{x_i x_{i+1}}(t_i)$. Величина $dist(s, d, t_s)$ отражает самое раннее время прибытия в вершину d, при движении по кратчайшему пути,

$$dist(s, d, t_s) = \min_P \{w(P, t_s) \colon s \underset{P}{\rightsquigarrow} d\},$$

где $s \underset{P}{\rightsquigarrow} d$ множество всех возможных путей P из вершины s в вершину d.

Задача о кратчайшем пути в нестационарной метрической сети с условием FIFO (Time-Dependent Shortest Path, TDSP) ставится следующим образом.

Заданы: нестационарная метрическая сеть $G = (V, E)$ с условием FIFO, (s, d, t_s)-запрос.

Требуется: найти значение $dist(s, d, t_s)$ для кратчайшего (s, d, t_s)-пути и последовательность вершин, образующих этот путь.

В работе предлагается модифицированный алгоритм ALT, основанный на применении потенциальных функций для ориентиров. Пусть $L \subseteq V$ — непустое множество вершин сети, в которых установлены ориентиры. Для всякой вершины $l \in L$ вычисляются потенциальные функции, определяемые через веса дуг $v_{\max} = \max\limits_{(x,y)\in E} \left\{ \max\limits_{t\in T}[v_{xy}(t)] \right\} > 0$, где $w_{xy}^{\nabla} = \dfrac{l_{xy}}{v_{\max}}$. Для всякой дуги $(x, y) \in E$ и любого $t \in T$ верна оценка $w_{xy}^{\nabla} \leq w_{xy}(t)$. Для кратчайшего $(s,\ d,\ t_s)$-пути справедлива оценка $dist^{\nabla}(s, d) \leq dist(s, d, t_s)$, где $dist^{\nabla}(s, d) = \min\limits_{P}\{w^{\nabla}(P)\colon s \underset{P}{\rightsquigarrow} d\}$. В работе вводится определение потенциальных функции для нестационарной метрической сети с условием FIFO.

Определение 1.1. Величина $\pi_L = \max\limits_{l\in L} \pi_l(x)$ называется потенциальной функцией вершины x относительно множества ориентиров L. Для каждой вершины $x \in V$ и всякого ориентира $l \in L$ определены следующие функции: $\pi_{l+}(x) = dist^{\nabla}(l, d) - dist^{\nabla}(l, x)$, $\pi_{l-}(x) = dist^{\nabla}(x, l) - dist^{\nabla}(d, l)$, $\pi_l(x) = \max\{0, \pi_{l+}(x), \pi_{l-}(x)\}$.

Для корректной работы модифицированного алгоритма ALT требуется, чтобы потенциальные функции обладали свойствами допустимости и преемственности. В работе сформулировано и доказано достаточное условие допустимости и преемственности потенциальной функции в виде теоремы 1.1.

Теорема 1.1 (Достаточное условие допустимости и преемственности потенциальной функции)**.** *Если для нестационарной сети $G = (V, E)$ выполняется неравенство треугольника $dist^{\nabla}(x, y) + dist^{\nabla}(y, z) \geq dist^{\nabla}(x, z)$, то потенциальная функция $\pi_L(x)$ вершины x относительно множества ориентиров L удовлетворяет условиям*

– *допустимости $\pi_L(x) \leq dist^{\nabla}(x, d) \leq dist(x, d, t_s)$;*

– *преемственности $\pi_L(s) \leq dist(s, x, t_s) + \pi_L(x)$.*

На рис. 1 представлена схема модифицированного алгоритма ALT.

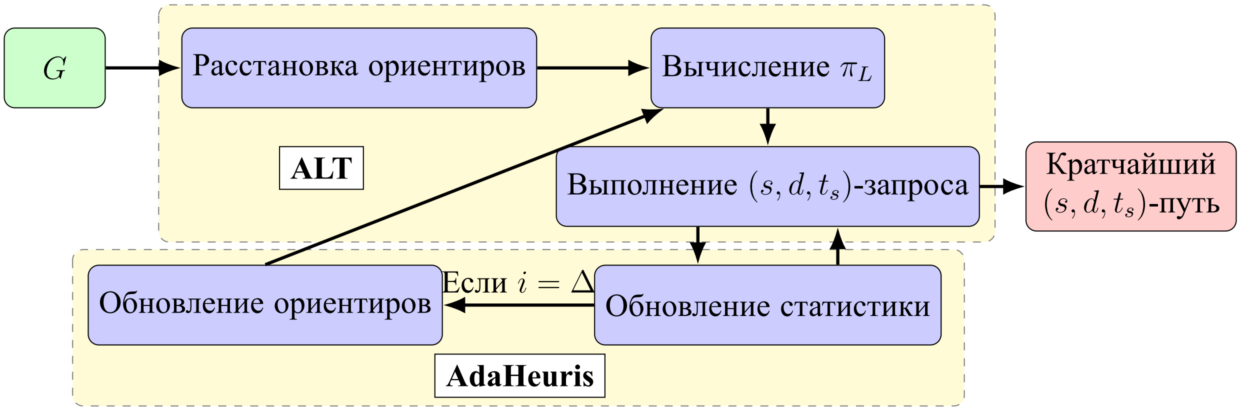


Рисунок 1 — Схема модифицированного алгоритма ALT

Модифицированный алгоритм ALT состоит в применении потенциальных функций $\pi_L = \max\limits_{l \in L} \pi_l(x)$, вычисленных для каждой вершины и каждого ориентира, и адаптивной эвристики расстановки ориентиров AdaHeuris. Суть эвристики AdaHeuris состоит в следующем. Перед выполнением первого (s, d, t_s)-запроса выполняется случайная расстановка заданного числа $K = |L|$ ориентиров в вершинах графа G Далее выбранное множество ориентиров L периодически обновляется через каждые $\Delta > 0$ запросов. Во время выполнения (s, d, t_s)-запроса ориентир считается эффективным, если он предложил наилучшее значение π_l. Наименее эффективный ориентир подлежит замене после выполнения Δ запросов. Вычислительная сложность модифицированного алгоритма ALT установлена в следующей теореме.

Теорема 1.2 (О сложности модифицированного алгоритма ALT)**.** *Модифицированный алгоритм* ALT *находит точное решение задачи* TDSP *для последовательности σ, состоящей из конечного числа $(s,\ d,\ t_s)$-запросов, в графе $G = (V, E)$ за время $\mathcal{O}\left(|\sigma| \cdot |V|^2\right)$.*

Во **второй главе** рассматривается задача поиска кратчайшего пути в ресурсоограниченной сети. Основным результатом второй главы является приближенный алгоритм RevTree нахождения кратчайшего пути в сети с одним ресурсом. Сформулированы и доказаны теоремы о точности и сложности данного алгоритма. Данные результаты опубликованы в работах [3, 7, 12–17, 22].

Задан ориентированный граф $G = (V,\ E)$ без кратных дуг и петель. Для всякой дуги $e \in E$ заданы весовая функция $w(e) > 0$ и ресурсные функции $r_i(e) > 0$, где $i = \overline{1,k}$. Если для вершин $s, d \in V$ существует путь P, тогда вес пути вычисляется как $w(P) = \sum\limits_{e \in P} w(e)$, а ресурсные потребности пути как $r_i(P) = \sum\limits_{e \in P} r_i(e)$, где $i = \overline{1,k}$. Ресурсные возможности рассматриваемой сети определяются заданными величинами $R_i \in \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1,k}$. Допустимым называется (s, d)-путь P, который удовлетворяет ресурсным ограничениям $\sum\limits_{e \in P} r_i(e) \leq R_i, \quad i = \overline{1,k}$. Оптимальным (s,d)-маршрутом называется допустимый (s,d)-путь P минимальной стоимости $w(P)$. Задача поиска кратчайшего пути в ресурсоограниченной сети (Resource Constrained Shortest Path, RCSP) ставится следующим образом.

Заданы:	граф $G = (V,E)$, на дугах которого определены положительные вещественнозначные функции $w(e)$, $r_i(e)$, величины R_i, $i = \overline{1,k}$, и (s,d)-запрос.
Требуется:	найти в $G = (V,E)$ оптимальный (s,d)-маршрут.

Во второй главе задача RCSP рассматривается в теоретико-графовой постановке. Также известна постановка задачи RCSP в терминах целочисленного линейного программирования для нахождения точного решения. Формулировка задачи RCSP в терминах целочисленного линейного программирования приведена в параграфе 4.3 диссертации.

Основным результатом второй главы является алгоритм RevTree, который является двухфазной модификацией алгоритма Дейкстры для задачи RCSP с одним ресурсным ограничением (рис. 2). В этом случае для сети $G = (V,E)$ задана одна ресурсная функция $r(e)$ для всех дуг $e \in E$, с ресурсным ограничением R. На первой фазе, исходя из функций $r(e)$, вычисляется дерево минимального веса с корнем в вершине d. Это дерево определяет для всякой вершины $u \in V$ такой (u,d)-путь, вес которого указывает минимальный ресурс для прохождения (u,d)-пути и обозначается как $\pi(u)$. На второй фазе выполняется алгоритм Дейкстры с усеченными окрестностями вершин $\Gamma(v)$. Усечение происходит согласно условию $r(P_1) + r(e) + \pi(u) \leq R$, $e = (v,u) \in E$, где P_1 — найденный пусть от стартовой вершины s до текущей вершины v.

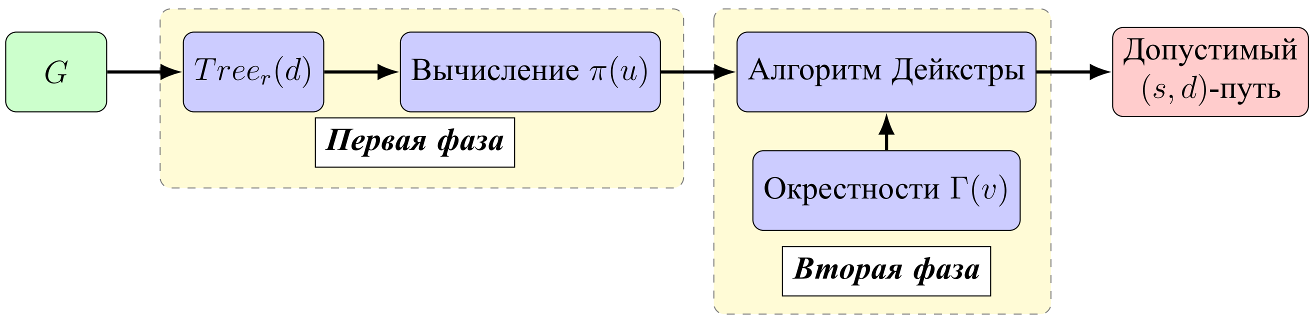


Рисунок 2 — Схема алгоритма RevTree

Для алгоритма RevTree сформулированы и доказаны теоремы о точности и о сложности.

Теорема 2.1 (О сложности алгоритма RevTree)**.** *Алгоритм RevTree требует $\mathcal{O}\left(|V|^2\right)$ времени и $\mathcal{O}\left(|V|\right)$ памяти для решения задачи RCSP с одним ресурсным ограничением.*

Теорема 2.2 (О точности решения алгоритма RevTree)**.** *Алгоритм* RevTree *находит ε-приближенное решение задачи RCSP с одним ресурсным ограничением, если оно существует для вершин s и d. Точность решения определяется как* $\varepsilon = \dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - 1$, *где* $\lambda_{\min} = \min\limits_{e \in E}\left(\dfrac{r(e)}{w(e)}\right) > 0$*,* $\lambda_{\max} = \max\limits_{e \in E}\left(\dfrac{r(e)}{w(e)}\right) > 0.$

В **третьей главе** рассматриваются задачи перечислительного типа для сетей, представленных гиперграфом. Предложены алгоритмы решения задач нахождения всех максимально полных подматриц $(0,1)$-матрицы и нахождения всех максимальных индуцированных биклик гиперграфа, а также их теоретические оценки сложности. Данные результаты опубликованы в работах [4, 5, 8, 18–21].

Задан (n,m)-гиперграф $H = (X,U)$ и $(0,1)$-матрица инцидентности I, где X — конечное множество вершин и $|X| = n$, U — конечное семейство гиперребер гиперграфа и $|U| = m$. Множество $X(u)$ содержит все вершины, инцидентные гиперребру $u \in U$. Множество $U(x)$ содержит все гиперребра, инцидентные вершине $x \in X$. Считается, что задан лексикографический порядок как для множества вершин X, так и для множества гиперребер U в гиперграфе $H = (X,U)$. Одним из способов задания гиперграфа является $(0,1)$-матрица инцидентности I, где 1 ставится в случае, когда гиперребро содержит вершину, и 0 в противном случае. Будем называть степенью гиперребра $u \in U$ мощность множества $|X(u)|$. Полной подматрицей $(0,1)$-матрицы называется подматрица, все без исключения элементы которой равны 1. Максимально полной подматрицей называется полная подматрица, не содержащая никакой другой максимально полной подматрицы.

Подгиперграфом, индуцированным множеством вершин X', называется $H' = (X',U')$, где $U' = \{u' \colon X(u') = X(u) \cap X' \neq \oslash, u \in U\}$. В работе используется ослабленное определение двудольности. Подгиперграф $H' = (X',U')$, индуцированный множеством вершин X', является двудольным, если существует разбиение $S_0 \cup S_1 = X'$ и $S_0 \cap S_1 = \oslash$, такое, что для любого гиперребра $u' \in U'$ выполнено $|S_0 \cap X(u')| \leq 1$ и $|S_1 \cap X(u')| \leq 1$.

Вершинным графом гиперграфа $H = (X,U)$ называется граф $L_2(H) = (X,E)$, множество вершин которого совпадает с множеством вершин X гиперграфа H, при этом две вершины графа $L_2(H)$ смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие им вершины гиперграфа H.

Сформулирована и доказана теорема об эквивалентности индуцированных двудольных подгиперграфов гиперграфа H и двудольных подграфов вершинного графа $L_2(H)$.

Теорема 3.1 (Об эквивалентности индуцированных двудольных подгиперграфов гиперграфа H и двудольных подграфов вершинного графа $L_2(H)$**).** *Подгиперграф $H' = (X', U')$ является двудольным тогда и только тогда, когда в вершинном графе $L_2(H)$ гиперграфа H существует двудольный подграф, индуцированный множеством вершин X'.*

Двудольный граф называется полным двудольным графом (бикликой), если всякая вершина одной доли соединена со всеми вершинами второй доли. Подгиперграф $H' = (X', U')$, индуцированный множеством вершин X', такой, что $S_0 \cup S_1 = X'$, $S_0 \cap S_1 = \oslash$ и $U' = \{u\colon s_0, s_1 \in X(u), s_0 \in S_0, s_1 \in S_1\}$ называется полным двудольным индуцированным подгиперграфом исходного гиперграфа H. Максимальная биклика — это биклика, которая не может быть расширена путем включения дополнительных смежных вершин, или, что эквивалентно, для максимальной биклики не существует другой биклики, которая полностью включает данную.

Задача поиска всех максимальных индуцированных биклик гиперграфа (Maximal Induced Bicliques Generation Problem for Hypergraphs, MIBGP for Hypergraphs) имеет следующий вид.

Задан: гиперграф $H = (X, U)$ без кратных гиперребер.
Требуется: найти множество всех максимальных индуцированных биклик.

Продемонстрируем связь между задачей нахождения максимальных индуцированных биклик в гиперграфе и задачей поиска максимально полных подматриц $(0, 1)$-матрицы.

Для двудольного подгиперграфа $H' = (X', U')$ запишем его эквивалентное представление в виде $(0, 1)$-матрицы смежности вершинного графа $L_2(H')$. Обозначим S_0, S_1 — доли подгиперграфа H', мощности которых равны c и d, соответственно. Поскольку вершинный граф $L_2(H')$ тоже является двудольным, его матрица смежности представима в виде:

$$A' = \begin{pmatrix} O_c & B' \\ B'^T & O_d \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где O_c, O_d — нулевые матрицы порядка c и d, соответственно, а B' матрица размера $c \times d$, которая отражает смежность вершин между долями S_0 и S_1.

Таким образом, для поиска индуцированных биклик в гиперграфе H требуется найти такие полные подматрицы B' матрицы смежности A вершинного графа $L_2(H)$, для которых будет существовать подматрица вида (1), что приводит к задаче поиска всех максимально полных подматриц (maximally complete submatrices) исходной $(0, 1)$-матрицы. Задача поиска всех максимально полных подматиц $(0, 1)$-матрицы инцидентности гиперграфа (Maximally Complete Submatrices Problem for Hypergraph, MCSP for Hypergraph) имеет следующую постановку.

Задан:	гиперграф $H = (X, U)$ без кратных гиперребер с $(0,1)$-матрицей инцидентности I.
Требуется:	найти множество всех максимально полных подматриц $(0,1)$-матрицы инцидентности I.

Для решения задачи MCSP for Hypergraph в работе предлагается алгоритм HFINDMCS поиска всех максимально полных подматриц $(0,1)$-матрицы инцидентности гиперграфа (рис. 3). Полным l-уровнем $(0,1)$-матрицы называется множество всех ее полных подматриц с числом строк равным l. Всякую полную подматрицу инцидентности гиперграфа $H = (X, U)$ с числом строк равным l можно описывать как подгиперграф $H' = (X', U(X'))$, где $X' \subseteq X$ — множество вершин, при этом $|X'| = l$, а $U(X') \subseteq U$ — множество гиперребер. Следовательно, l-уровень в терминах гиперграфов описывается следующей системой множеств $P_l = \{H' = (X', U(X')) : |X'| = l, X' \subseteq X\}$.

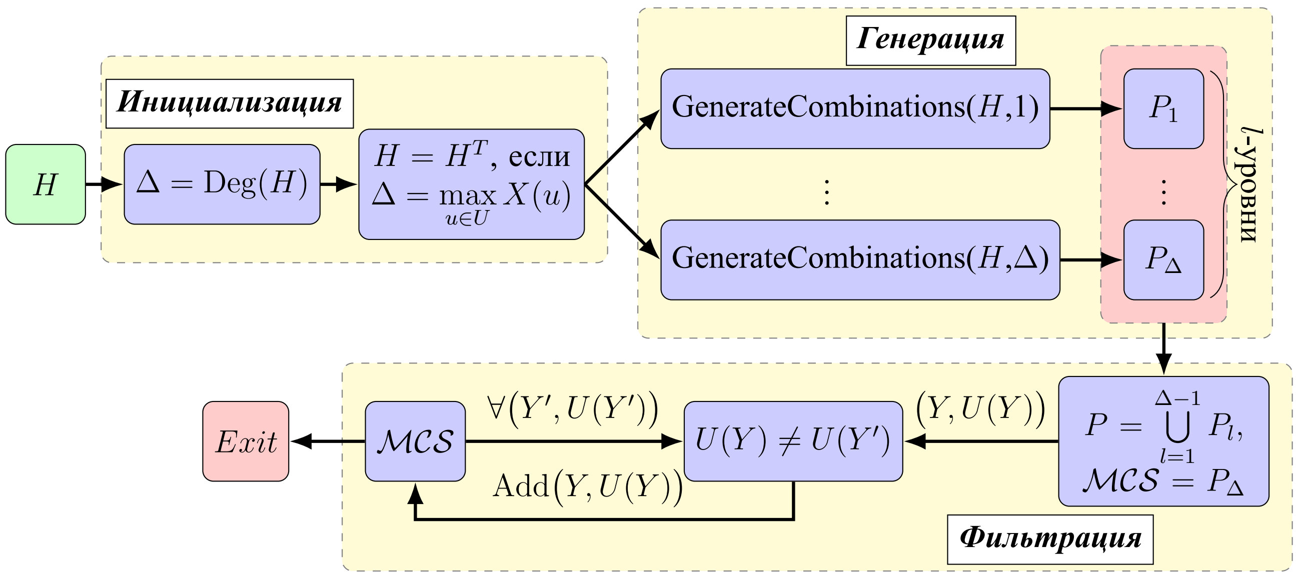


Рисунок 3 — Схема алгоритма HFINDMCS

Алгоритм HFINDMCS решает задачу в три этапа. На этапе инициализации происходит определение степени гиперграфа Δ и переход к двойственному гиперграфу при необходимости. На этапе генерации для гиперграфа H и соответствующей матрицы инцидентности выполняется генерация l-уровней. На этапе фильтрации происходит очистка всех сгенерированных l-уровней для получения максимально полных подматриц $(0,1)$-матрицы инцидентности гиперграфа H.

Для решения задачи MIBGP for Hypergraphs в работе предлагается алгоритм HFINDMIB поиска всех максимальных индуцированных биклик гиперграфа (рис. 4). Гиперграф Φ задается матрицей смежности вершинного графа $L_2(H)$. Подгиперграф Φ' индуцированный множеством вершин $S_0 \subseteq X_\Phi$ и множеством гиперребер $S_1 \subseteq U_\Phi$, удовлетворяющий виду (1) и $S_0 \cap S_1 = \oslash$, называется бикликой и обозначается (S_0, S_1). Множество всех биклик (S_0, S_1), где $|S_0| = l$, будем называть l-уровнем гиперграфа Φ.

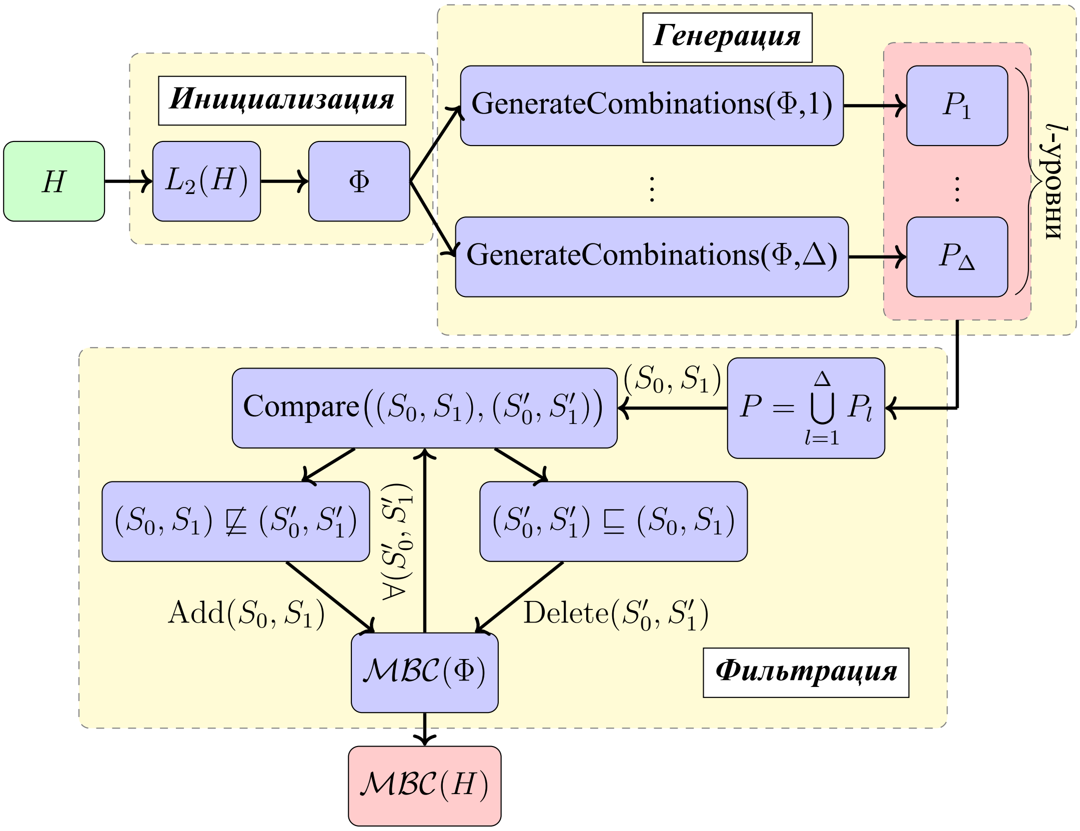


Рисунок 4 — Схема алгоритма HFINDMIB

Алгоритм HFINDMIB решает задачу в три этапа. На этапе инициализации происходит переход от исходного гиперграфа H к вершинному графу $L_2(H)$. На этапе генерации для матрицы смежности графа $L_2(H)$, представленной в виде гиперграфа Φ, выполняется генерация l-уровней. На этапе фильтрации происходит очистка всех сгенерированных l-уровней для получения максимальных индуцированных биклик гиперграфа H.

Теорема 3.2 (О сложности алгоритма HFINDMCS)**.** *Алгоритм* HFINDMCS *корректно решает задачу нахождения всех максимальных индуцированных биклик гиперграфа* $H = (X, U)$ *со степенью* Δ *за время не превышающее*

$$\mathcal{O}\Big(\log\big(|MCS|\big) \cdot |U|^2 \cdot \Delta \cdot 2^\Delta \cdot \log\big(2^\Delta \cdot |U|\big)\Big).$$

Теорема 3.3 (О сложности алгоритма HFINDMIB)**.** *Алгоритм* HFINDMIB *корректно решает задачу нахождения всех максимальных индуцированных биклик гиперграфа* $H = (X, U)$ *со степенью* Δ *за время не* *превышающее*

$$\mathcal{O}\Big(2^{2\Delta} \cdot \Delta \cdot \big(|\mathcal{MBC}| + \Delta^3 \cdot \log(2^{2\Delta})\big) + |X|^2\Big).$$

В **четвертой главе** разработан комплекс программ, реализующий предложенные алгоритмы. Алгоритмы тестировались на случайных графах и гиперграфах и на реальных данных применительно к дорожным сетям. Данные результаты опубликованы в работах [8, 20–22].

Комплекс состоит из четырех модулей:

1. ModALT — реализует модифицированный алгоритм ALT. Находит решение задачи о кратчайшем пути в нестационарной сети;

2. RevTree — реализует алгоритм RevTree. Находит решение задачи о кратчайшем пути в ресурсоограниченной сети;

3. HFindMCS — реализует алгоритм HFindMIB. Находит все максимально полные подматрицы $(0, 1)$-матрицы инцидентности сети;

4. HFindMIB — реализует алгоритм HFindMCS. Находит все максимальные индуцированные биклики сети.

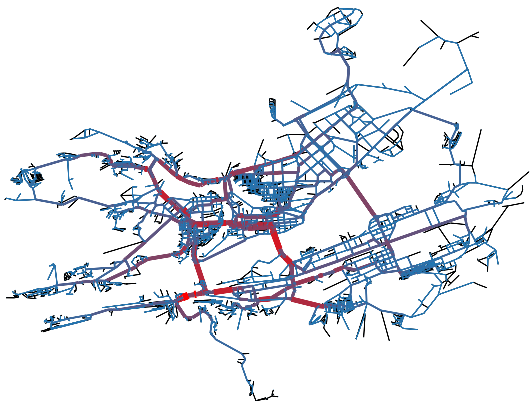
Предлагаемые в работе алгоримы RevTree, HFindMIB и модифицированный алгоритм ALT применялись для анализа дорожных сетей. В качестве рассматриваемых сетей были взяты дорожные карты следующих городов: Красноярск (KJA), Томск (TOF), Новосибирск (NSK), Баку (GYD). Результаты работы каждого алгоритма представлены в табл. 1.

Таблица 1 — Результаты работы алгоритмов ALT, RevTree, HFindMIB

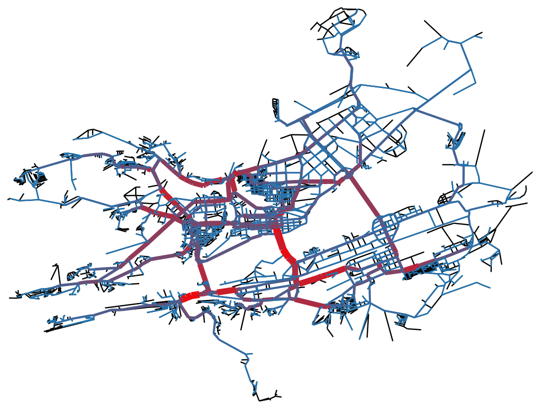
Дорожная сеть	n	m	ALT	RevTree		HFindMIB		
			Время, с.	Доля выполнынных запросов	Время, с.	Δ	$\mathcal{MBC}$	Время, с.
TOF	3840	9639	8,151	0,483	1,708	5	4084	26,527
KJA	4362	6005	9,030	0,849	7,286	5	4823	36,898
NSK	7357	19106	27,838	0,680	12,212	6	7927	103,115
GYD	12458	28936	69,052	0,539	15,998	6	11844	252,244

На рис. 5а) представлена тепловая карта сети KJA для решений задачи TDSP, где дорога обозначена красным цветом в случае, если она была более востребована в процессе маршрутизации и синим цветом в обратном случае, черным цветом обозначены ребра, которые не встретились ни в одном кратчайшем пути. Аналогичная тепловая карта представлена по результатам решения задачи RCSP для сети KJA на рис. 5б). На основе полученных алгоритмом HFindMIB результатов, сделаны выводы о возможной интерпретации элементов дорожной сети согласно размеру биклики.

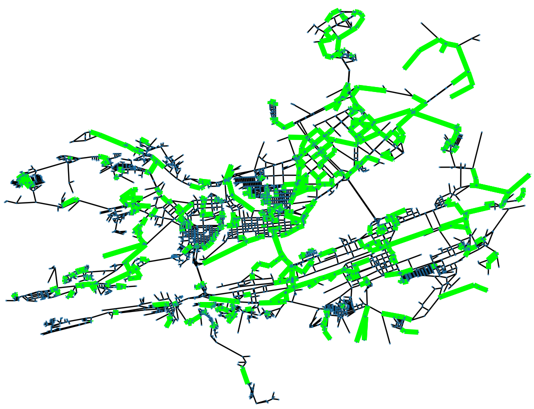
Основываясь на информации о наиболее востребованных ребрах в сети можно выполнять реорганизацию дорожной сети и моделировать новые



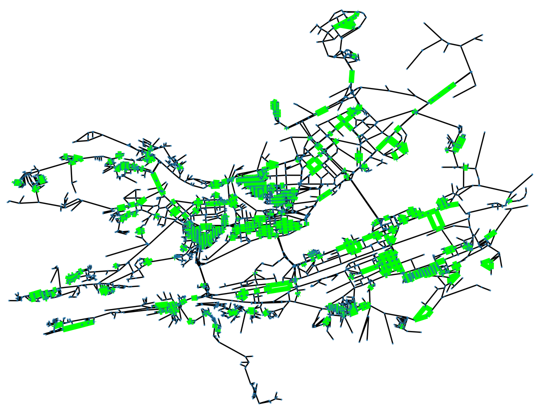
а) тепловая карта сети KJA по результатам решения задачи TDSP



б) тепловая карта сети KJA по результатам решения задачи RCSP



в) карта сети KJA с бикликами размера $(2, 1)$



г) карта сети KJA с бикликами размера $(2, 2)$

Рисунок 5 — Анализ дорожной сети KJA на основе найденных решений

объездные дороги.

В **заключении** диссертации сформулированы основные результаты и выводы, полученные на основе настоящей диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Разработан и теоретически обоснован модифицированный алгоритм ALT для решения задачи поиска кратчайшего пути в нестационарной метрической сети, удовлетворяющей условию FIFO (теоремы 1.1 и 1.2). В алгоритме используется новая графовая модель с двумя весами. С использованием этой модели вычисляются потенциальные функции для алгоритма ALT.

2. Разработан и теоретически обоснован алгоритм RevTree для приближенного решения задачи поиска кратчайшего пути в ресурсоограниченной сети с одним ресурсом (теоремы 2.1, 2.2). Алгоритм позволяет определить точность найденного решения исходя из параметров сети.

3. Сформулирована и доказана теорема об эквивалентности индуцированных двудольных подгиперграфов гиперграфа и двудольных подграфах вершинного графа гиперграфа (теорема 3.1).

4. Разработан и теоретически обоснован алгоритм HFindMCS для поиска всех максимально полных подматриц $(0, 1)$-матрицы инцидентности гиперграфа (теорема 3.2).

5. Разработан и теоретически обоснован алгоритм HFindMIB для поиска всех максимальных индуцированных биклик гиперграфа (теорема 3.3). Алгоритм основан на теореме 3.1 и использует метод генерации максимальных биклик для каждого l-уровня гиперграфа.

6. Создан комплекс программ, реализующий разработанные алгоритмы, для проверки их результативности на случайных графах и гиперграфах и на реальных данных применительно к дорожным сетям.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:

1. Быкова В. В., **Солдатенко А. А.** Оптимальная маршрутизация по ориентирам в нестационарных сетях // Прикладная дискретная математика. — 2017. — № 37. — С. 114–123 (индексируется **Web of Science**, **Scopus**).

2. **Солдатенко А. А.** Адаптивный алгоритм поиска оптимального маршрута в нестационарной сети // Программные продукты и системы. — 2018. — № 2. — С. 321–329.

3. **Солдатенко А. А.** On accuracy of approximation for the resource constrained shortest path problem // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2019. — № 12 (5). — P. 621–627 (индексируется **Web of Science**, **Scopus**).

4. **Солдатенко А. А.**, Семенова Д.В. О нахождении максимально полных подматриц и их связи с бикликами в гиперграфе // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2021. — № 56. — С. 90—99 (индексируется **Web of Science**, **Scopus**).

5. **Soldatenko A. A.**, Semenova D. V. On problem of finding all maximal induced bicliques of hypergraph // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2021. — № 14 (5). — P. 638–646 (индексируется **Web of Science**, **Scopus**).

Статьи в изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus:

6. Быкова В. В., **Солдатенко А. А.** Адаптивное размещение ориентиров при маршрутизации в нестационарных сетях // Supplementary Proceedings of the 9th International Conference on Discrete Optimization and Operations Research and Scientific School (DOOR 2016) — Vladivostok, Russia, September 19-23, 2016. — Published online on the CEUR-Workshop web site, V. 1623. — P. 367–372 (индексируется **Web of Science**, **Scopus**).

7. **Soldatenko A. A.**, Bykova V. V. Optimal Routing in Multi-Service Networks // 2018 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon). — 2018. — P. 1–4 (индексируется **Web of Science**, **Scopus**).

8. **Soldatenko A.**, Semenova D. Algorithm for Analysis of Road Networks Described as Graphs and Hypergraphs // 2021 17th International Asian School-Seminar Optimization Problems of Complex Systems (OPCS). — 2021. — P. 121–125 (индексируется **Web of Science**, **Scopus**).

Публикации в других научных изданиях:

9. Быкова В. В., **Солдатенко А. А.** Маршрутизация по ориентирам в нестационарных сетях // Доклады Седьмой Международной научной конференции «Танаевские чтения», Минск, Беларусь. — 2016. — С. 40–44.

10. **Солдатенко А. А.** Двухфазный алгоритм маршрутизации в нестационарных сетях // Прикладная дискретная математика. Приложение. — 2017. — № 10. — С. 168—171.

11. **Солдатенко А. А.** О решении задачи TDSP двухфазным алгоритмом на больших сетях // Материалы республиканской научно-практической конференции «СТАТИСТИКА и ее применения - 2017», Ташкент. — Ташкент, НУУз, 2017. — С. 84–91.

12. **Солдатенко А. А.** Алгоритм оптимальной маршрутизации в мультисервисных телекоммуникационных сетях // Прикладная дискретная математика. Приложение. — 2018. — № 11. — С. 122–127.

13. Быкова В. В., **Солдатенко А. А.** Об оптимальной маршрутизации в мультисервисных телекоммуникационных сетях // Optimization Problems and Their Applications (OPTA-2018): тезисы докладов VII Международной конференции: памяти проф. А. А. Колоколова — Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2018. — С. 26.

14. Быкова В. В., **Солдатенко А. А.** Об оценке ресурсных возможностей мультисервисных сетей // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2018): Материалы XVII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. — Томск: Изд-во НТЛ, 2018. — С. 230–235.

15. **Солдатенко А. А.** Верхнее оценивание стоимости оптимального маршрута в сети с ограничением // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) материалы XVIII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. — Томска: Изд-во НТЛ. — 2019. — Часть 2. — С. 47–52.

16. **Солдатенко А. А.** Полиномиальный алгоритм поиска приближенного решения в графе с ограничением // Труды республиканской научно-практической конференции СТАТИСТИКА и ее применения-2019. — Ташкент, Филиал МГУ. — 2019. — С. 178–183.

17. **Солдатенко А. А.** Приближенный алгоритм поиска оптимального маршрута в сети с ограничением // Прикладная дискретная математика. Приложение. — 2019. — № 12. — С. 186–191.

18. **Солдатенко А. А.**, Семенова Д.В. Алгоритм HGFC нахождения формальных понятий // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2020) материалы XIX Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. — Томска: Изд-во НТЛ. — 2020. — С. 478–482.

19. Семенова Д. В., **Солдатенко А. А.** Анализ формальных понятий на языке гиперграфов // Математика, ее приложения и математическое образование МПМО'20 Материалы VII Международной конференции. — Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ. — 2020. — С. 186–188.

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ:

20. **Солдатенко А.А.** Программа HFindMCS выделения максимально полных подматриц $(0, 1)$-матрицы. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021662444. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ от 11 августа 2021 г.

21. **Солдатенко А.А.** Программа HFindMIB выделения максимальных индуцированных биклик гиперграфа. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021662445. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ от 11 августа 2021 г.

22. **Солдатенко А.А.** Программа RevTree для поиска ресурсоограниченного пути в сети. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019616547. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ от 24 мая 2019 г.