На правах рукописи

Штуккерт

Штуккерт Полина Константиновна

КВАЗИПОЛЯ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПЛОСКОСТИ ТРАНСЛЯЦИЙ МАЛЫХ ЧЕТНЫХ ПОРЯДКОВ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2014

Работа выполнена в ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель:

д-р физ.-мат. наук, профессор Левчук Владимир Михайлович.

Официальные оппоненты:

Пожидаев Александр Петрович, д-р физ.-мат. наук, доцент,
ФГБОУН «Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН»,
лаборатория теории колец, ведущий научный сотрудник;

Старикова Ольга Александровна, канд. физ.-мат. наук,
ФГБОУ ВПО «Северо-Восточный государственный университет»,
кафедра высшей математики, доцент.

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

Защита состоится 9 октября 2014 года в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 при ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета и на сайте http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан августа 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Федченко Дмитрий Петрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ [1]

Актуальность темы. Кольцо $S = \langle S, +, \circ \rangle$ с единицей $e \neq 0$ называют *полуполем* (согласно А.Г. Курошу [2, II.6.1], *квазителом*), если $S^* = (S \setminus \{0\}, \circ)$ – лупа, то есть для любых $a \in S^*$ и $b \in S$ каждое уравнение $a \circ x = b$ и $y \circ a = b$ однозначно разрешимо в S. Ослабление двусторонней дистрибутивности до односторонней приводит при конечном S к понятию *квазиполя* [8], [13].

Начиная с работ Веблена – Веддерберна [18] и Л. Диксона начала 1900-х годов, построения квазиполей взаимосвязаны с построениями проективных плоскостей трансляций и с середины прошлого века (Е. Клейнфилд [9], Д. Кнут [10]) существенно опираются на компьютерные вычисления. В классическом методе плоскость трансляций ранга n над полем получают из $2n$-мерного пространства, фиксируя n-мерное подпространство, как координатизирующее множество, и превращая его в квазиполе с помощью регулярного множества, [8], [13], [16]. Плоскость дезаргова, когда квазиполе есть поле. См. также Н.Д. Подуфалов [3] и вопросы 9.43, 10.48, 11.76, 11.77 и 12.66 в Коуровской тетради [11].

Конечные *собственные* (или не являющиеся полем) квазиполя изучены мало, см. [7]. В 1991 году Г. Венэ [20] высказал *гипотезу о правоцикличности любого конечного полуполя*, называя конечное полуполе S и лупу S^* *правоциклическими* или *правопримитивными*, если все элементы лупы S^* есть правоупорядоченные степени ее фиксированного элемента. Согласно Альберту [4], изоморфность полуполевых плоскостей равносильна изотопности их полуполей.

Полуполе порядка 32, не являющееся правоциклическим, указал в 2004 году И. Руа [17], основываясь на перечислении Д. Кнута [10] изоморфных классов полуполевых плоскостей порядка 32; его называем *полуполем Кнута – Руа*. Согласно [17], существует изотопное ему полуполе порядка 2^5, имеющее подполе поряда 4, то есть с аномальным свойством в сравнении с конечными полями.

Следующие вопросы для конечного собственного квазиполя выделил В.М. Левчук (доклад на н/и семинаре кафедры алгебры МГУ, 2013 г., и [32]).

(А) *Перечислить максимальные подполя и их порядки.*

(Б) *Выявить конечные квазиполя S с не однопорожденной лупой S^*.* **Гипотеза:** *Верно ли, что лупа S^* конечного полуполя S всегда однопорождена ?*

(В) *Какие возможны спектры лупы S^* конечного полуполя и квазиполя ?*

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00968)

Спектром лупы в [32] названо множество порядков всех ее элементов. *Порядок* $|v|$ *элемента* v *лупы* обобщает соответствующее теоретико-групповое понятие: это наименьшее целое число $m \geq 1$ такое, что хотя бы одна m-я степень элемента v при всевозможных расстановках скобок равна e; порядок бесконечен, если такое m не существует. Вопросы **(A)** – **(B)** исследуются в диссертации для собственных квазиполей и полуполей малых четных порядков.

В конечном квазиполе простое подполе единственно и изоморфно полю Z_p вычетов целых чисел для простого числа p, причем порядок квазиполя p-примарный. При $p > 2$ наименьший порядок такого собственного квазиполя (и недезарговой проективной плоскости трансляций над Z_p) равен p^2 (Л. Диксон [6]), а собственного полуполя – p^3 (Д. Кнут [10]). Наименьшие четные порядки недезарговых проективных полуполевых плоскостей и плоскостей трансляций совпадают и равны 16 (Ж. Вессон [21], Е. Клейнфилд [9]).

Перечисление изоморфных классов плоскостей трансляций порядка 16 завершено в 80-х годах (П. Лоример, У. Демпволф и А. Рейфарт). Е. Клейнфилд [9] доказал, что собственные полуполя порядка 16 образуют два изотопных класса, в которых 18 и 5 попарно неизоморфных полуполей. Д. Кнут [10] выписал формулы умножения двух представителей изотопных классов и показал, что для каждого из 23 полуполей порядок группы автоморфизмов ≤ 6.

Полуполевые плоскости и полуполя порядка 32 классифицировали Д. Кнут и Р. Волкер в 60-х годах; собственные полуполя порядка 32 образуют 5 изотопных классов и, с точностью до изоморфизмов, их число равно 2501. Классификацию всех плоскостей трансляций порядка 32 завершили в 2011 году У. Демпволф и Р. Рокенфеллер; число их изоморфных классов равно 9.

В построении квазиполя S порядка 16 и ядром порядка 4 Клейнфилд [9] использует латинские прямоугольники, рассматривая таблицу Кэли лупы S^*, как латинский квадрат. Связи проективных плоскостей и латинских квадратов отражает Д. Хьюгес в монографии [8].

Исследования латинских квадратов и прямоугольников, восходящие еще к Л. Эйлеру и опирающиеся с 20-го века на компьютерные вычисления, имеют богатую историю. В 2007 году авторы обзора [14] отмечали: "История латинских квадратов длинна и наполнена многими опубликованными ошибками".

Некоторые вопросы о латинских $r \times 6$-прямоугольниках ($r \leq 6$) записал для молодых исследователей в 2004 году В.В. Беляев [1, Вопросы 1.1 – 1.10].

Цель диссертации – исследовать вопросы **(A)** – **(B)** для квазиполей недезарговых проективных плоскостей трансляций малых четных порядков: для представителей изотопных классов полуполей порядка 32 и квазиполей порядка 16, а также для всех полуполей порядка 16.

Основные методы исследования: общие алгебро-геометрические методы и специальные методы построения регулярных множеств проективных плоскостей трансляций, латинских прямоугольников и таблицы Кэли лупы.

Научная новизна и практическая ценность. Все основные результаты диссертации являются новыми. Они носят теоретический характер и могут быть использованы в приложениях теорий проективных плоскостей, квазиполей и неассоциативных колец.

Апробация диссертации. Результаты диссертации апробировались на VII Всесибирском конгрессе женщин-математиков (Красноярск, 2012), IV Российской школе-семинаре "Синтаксис и семантика логических систем" (Улан-Удэ, 2012), на международных конференциях по алгебре (Киев, Украина, 2012), "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2012, 2013), "Алгебра и логика: теория и приложения" (Красноярск, 2013), в 2014 году на XII международной конференции "Алгебра и теория чисел" (Тула), посвященной юбилею профессора МГУ В.Н. Латышева, и на Красноярском алгебраическом семинаре.

Основные публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [23] – [32] и включают статьи [23], [24] в изданиях из перечня ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 83 страницах и состоит из введения, двух глав (из 8 параграфов) и списка литературы, включающего 55 наименований. Номер теоремы, леммы и др. включает последовательно номер главы, параграфа и порядковый номер в параграфе.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В диссертации решаются вопросы **(A)** – **(B)** о строении квазиполей малых четных порядков. К основным результатам относятся следующие.

1) Перечислены максимальные подполя и спектры лупы ненулевых элементов представителей изотопных классов квазиполей порядка 16 и всех полуполей порядка 16, в частности, указаны квазиполе, каждый элемент которого лежит в подполе порядка 4, и полуполя без элементов порядка 3.

2) Доказана однопорожденность лупы ненулевых элементов всех полуполей порядка 16 и (неправоциклического) полуполя Кнута – Руа порядка 32.

3) Указаны представители изотопных классов собственных полуполей порядка 32, простое подполе максимально в них, кроме одного, с единственным максимальным подполем порядка 4, найден спектр их лупы ненулевых элементов, доказана ее порождаемость любым элементом, не лежащим в подполе.

Наряду с развитием метода Клейнфилда построения таблиц Кэли лупы с помощью перечислений латинских прямоугольников, получены также ответы на вопросы В.В. Беляева о латинских $r \times 6$-прямоугольниках ($r \leq 6$).

В § 1.1 **главы 1** приводятся основные определения и свойства, связанные с плоскостями трансляций и квазиполями, постановка основных задач.

Проективную плоскость трансляций π ранга n над полем F определяют, выбирая n-мерное линейное пространство W, как *координатизирующее множество*, внешнюю прямую сумму $V = W \oplus W$ двух копий W и биективное отображение θ пространства W в кольцо всех $n \times n$-матриц над F. *Регулярное множество* $R = \theta(W)$ получают (Д. Хьюгес [8], Т. Ояма [16]), когда R содержит нулевую O и единичную матрицы, причем $R \setminus \{O\}$ и все матрицы $\theta(u) - \theta(v)$ при $u, v \in W,\ u \neq v$, лежат в $GL(n, F)$. Тогда $(W, +, \circ)$ есть квазиполе с умножением

$$x \circ y := x \cdot \theta(y) \quad (x, y \in W). \tag{1}$$

Если квазиполе есть полуполе, плоскость π называют *полуполевой*.

Известно, что число проективных плоскостей трансляций порядка 16, с точностью до изоморфизмов, равно 8, причем полуполевых плоскостей точно 3. Соответствующие регулярные множества, выписанные в [5], дают представители 8 классов изотопных квазиполей порядка 16.

Строение представителей Q_i пяти классов ($1 \leq i \leq 5$), не содержащих полуполей, указывают основные в § 1.2 теоремы 1.2.1 – 1.2.3.

Оказывается, во всех квазиполях Q_i максимальные подполя имеют порядок 4. Теоремы 1.2.1 и 1.2.2 показывают также, что число максимальных подполей в квазиполе Q_2 равно 1, а в Q_5 – 3; в обоих случаях $\{1, 3, 5\}$ – спектр лупы Q_i^* и ее порождает любой элемент, не лежащий в максимальном подполе.

Существенную аномальность оставшихся луп Q_i^* выявляет

Теорема 1.2.3. *Каждое из квазиполей Q_i, $i = 1, 3, 4$, есть теоретико-множественное объединение 7 максимальных подполей порядка 4. В частности, лупа Q_i^* не однопорождена и ее спектр совпадает с $\{1, 3\}$.*

В доказательствах теорем максимальные подполя и спектр лупы находим, исходя, прежде всего, из построения таблицы Кэли лупы.

Теорема 1.2.1 опубликова автором в статье [23]. Теоремы 1.2.2 и 1.2.3 опубликованы в статье [24] в нераздельном соавторстве (соавтор В.М. Левчук).

В § 1.3 приводится классификация Е. Клейнфилда полуполей порядка 16 (теорема 1.3.3). Он основывает метод построения таблицы Кэли лупы полуполя на специальных порождающих последовательностях.

Для построения квазиполя S с левым ядром порядка 4 Клейнфилд вначале задает лупу S^* частью ее таблицы Кэли. Ясно, что таблица Кэли лупы S^* есть латинский квадрат порядка 15. Первые его три строки сразу заполняются как произведения элементов лупы S^* на скаляры из левого ядра [8, стр. 159]. Ключевой является 4-я строка, позволяющая сразу получить 5, 6 и 7-ю строки, как суммы 4-й строки, соответственно, с 1, 2 и 3-й строками. Далее Е. Клейнфилд устанавливает и использует следующую теорему [9, Теорема 2]:

Построенная 7×15*-матрица однозначно определяет таблицу Кэли лупы* Q^* *тогда и только тогда, когда она является латинским* 7×15*-прямоугольником.*

Напомним, что *латинским* $r \times n$*-прямоугольником* ($r \leq n$) называют $r \times n$-матрицу, у которой строки являются перестановками первой строки и в каждой строке и в каждом столбце элементы попарно различны. Его называют *редуцированным*, если элементы его первой строки расположены по возрастанию, а элементы первого столбца возрастают от 1 до r.

В § 1.4 рассматриваются вопросы В.В. Беляева [1, Вопросы 1.1 – 1.10] о латинских $r \times 6$-прямоугольниках ($r \leq 6$).

Число латинских квадратов порядка n обозначают через L_n. Пусть также $R_{r\times n}$ – число редуцированных латинских $r \times n$-прямоугольников и $R_n = R_{n\times n}$. Хорошо известную связь чисел L_n и R_n обобщает теорема 1.4.3:

Число $L_{r\times n}$ *всех латинских* $r \times n$*-прямоугольников при* $1 \leq r \leq n$ *равно*

$$L_{r\times n} = \frac{n!(n-1)!}{(n-r)!} \cdot R_{r\times n} \quad (1 \leq r \leq n).$$

Число латинских $2 \times n$-прямоугольников $L_{2\times n} = (n!)^2 \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ находим, используя комбинаторную формулу включений и исключений (теорема 1.4.4). Это дает ответ на вопрос 1.2. Ответ на вопрос 1.1 завершают найденные формулы:

$$R_4 = 4,\ L_4 = 4!3! \cdot R_4 = 576; \quad R_5 = 56,\ L_5 = 5!4! \cdot R_5 = 161280;$$

$$R_6 = R_{5\times 6} = 9408, \quad L_{5\times 6} = 812851200 = \frac{6!5!}{1!} \cdot R_{5\times 6} = L_6.$$

Ответы на вопрос 1.3 о числе вариантов присоединения третьей строки к четырем определенным латинским 2×6-прямоугольникам и на аналогичный вопрос 1.4 получены также явно.

Вопросы 1.5 - 1.10 используют R-, C- и N- эквивалентные преобразования латинских квадратов (перестановки строк, столбцов и элементов, соответственно), а также их комбинации. Они заключаются в нахождении чисел классов RC- и RCN- эквивалентных латинских квадратов порядков $n = 4, 5$ (или 6) и чисел редуцированных латинских квадратов в каждом эквивалентном классе.

Решение вопроса 1.6 из [1] о RC-эквивалентности латинских квадратов дает

Предложение 1.4.8. *Два латинских квадрата любого фиксированного порядка n лежат в одном RC-эквивалентном классе, если они приводятся к одному и тому же редуцированному виду.*

С учетом известной связи чисел L_n и R_n, ответ на вопрос 1.8 дает следующее предложение 1.4.7, отвечающее также на вопросы 1.9 и 1.10 вместе с предложениями 1.4.6 и 1.4.8: *Число классов RC-эквивалентных латинских квадратов порядка n совпадает с числом R_n.*

На вопрос 1.5 о числах классов RC- и RCN- эквивалентных латинских квадратов порядка 4 и о числе латинских квадратов в каждом из этих классов отвечают предложения 1.4.6 и 1.4.9. На близкий к 1.5 вопрос 1.7 отвечают предложение 1.4.7 при $n = 5$ и следующее предложение.

Предложение 1.4.10. *Латинские квадраты порядка $n = 5$ образуют 2 RCN-эквивалентных класса, мощности классов одинаковые и равны 80640.*

Известные исследования в § 1.4 отражают таблицы 1.4.1 и 1.4.2 о числах R_n ($4 \le n \le 11$) и L_n ($n \le 11$), таблица 1.4.3 (МакКей – Вонлес [15]) о числах $R_{r\times n}$ ($3 \le n \le 11$) и таблица 1.4.4 (Н.Ю. Кузнецов [12] и Жанг – Ма [22]) об оценках чисел R_n при $12 \le n \le 20$ и при $n = 50, 100$.

Основные результаты § 1.4 опубликованы в совместной статье [26] и, как отмечается там же во введении, принадлежат диссертанту.

В **главе 2** исследовано строение всех полуполей порядка 16 и представителей изотопных классов полуполей порядка 32.

Е. Клейнфилд [9] перечислил попарно неизоморфные и изотопные квазиполя T_i ($1 \le i \le 50$) порядка 16 с ядром порядка 4, каждое из которых изотопно

какому-либо полуполю. Полуполями являются лишь $T_{24}, T_{25}, T_{35}, T_{45}$ и T_{50}. (Отметим, что для любого полуполя S в [9] понимается *левое ядро*

$$N_l = N_l(S) = \{x \in S \mid x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z, \quad \forall y, z \in S\}.)$$

Оставшиеся собственные полуполя образуют второй изотопный класс из 18 попарно не изоморфных полуполей V_i $(1 \leq i \leq 18)$ порядка 16 с ядром порядка 2 (теорема 1.3.3 из § 1.3). Предложенный Е. Клейнфилдом алгоритм построения таблиц Кэли лупы V_i^* основан на специальных порождающих последовательностях. Д. Кнут [10] выписал явно формулы умножения представителей двух изотопных классов полуполей.

В § 2.1 список из 23 полуполей Клейнфилда уменьшается до 16 полуполей, с точностью до изоморфизмов и антиизоморфизмов; для каждого из них выписаны формулы умножения. Результаты § 2.1 резюмирует

Теорема 2.1.1. *Всякое собственное полуполе порядка 16, с точностью до изоморфизмов, есть либо одно из 9-и полуполей $V_2, V_{10}, V_{12}, V_{13}, V_{17}, V_{18}, T_{24}, T_{35}, T_{45}$, либо одно из 7-и полуполей $V_1, V_3, V_4, V_8, V_{11}, V_{15}, T_{25}$ или одно из противоположных к ним полуполей $V_6, V_7, V_5, V_9, V_{14}, V_{16}, T_{50}$, соответственно.*

Таким образом, для полуполей порядка 16 вопросы **(A)** – **(B)** достаточно решить для перечисленных в предыдущей теореме 16 полуполей, разбивающихся отношением изотопизма на 2 класса.

В § 2.2 указаны явно регулярные множества $\theta(W)$ и приведена известная классификация недезарговых полуполевых плоскостей порядка 16, как плоскостей ранга 4 над полем Z_2. Получены формулы умножения соответствующих двух представителей изотопных классов полуполей:

$$(a, b, c, d) \circ (u, v, z, w) = (au + bv + cz + dw, av + bu + bw + cz + cw + dz,$$

$$az + bz + bw + cu + cv + cw + dv + dw, aw + bv + bz + bw + cv + cw + du); \qquad (2)$$

$$(a, b, c, d) \circ (u, v, z, w) = (au + bv + cz + dv + dz + dw, av + bu + bz + cw + dz,$$

$$az + bz + bw + cu + cv + cz + cw + dv + dz, aw + bv + bw + cv + cz + cw + du + dw). \quad (3)$$

Их строение выявляют следующие две теоремы.

Теорема 2.2.2. *В полуполе S с умножением (2) минимальное подполе Z_2e является максимальным. Лупа S^* порождается любым ее неединичным элементом, и спектр лупы совпадает с $\{1, 4, 5, 6\}$.*

Теорема 2.2.3. *Полуполе S с умножением (3) имеет точно 2 максимальных подполя H_1 и H_2, и $|H_1| = |H_2| = 4$. Лупа S^* порождается любым элементом из $S \setminus \{H_1 \cup H_2\}$, и ее спектр совпадает с $\{1, 3, 4, 5, 6\}$.*

Отметим, что полуполя из теорем 2.2.2 и 2.2.3 изоморфны Клейнфилдовым полуполям V_7 и T_{25}, соответственно. Строение полуполя порядка 16 с наибольшим числом подполей выявляет

Теорема 2.2.4. *Полуполе V_{13} имеет точно 4 максимальных подполя. Они имеют порядок 4, а любой, не лежащий в них элемент, порождает лупу V_{13}^*. Спектр лупы совпадает с $\{1, 3, 5\}$.*

Аналогично исследованы все полуполя из теоремы 2.1.1, наряду с построением таблицы Кэли лупы их ненулевых элементов. Как следствие, установлено:

Лупа ненулевых элементов каждого полуполя порядка 16 однопорождена.

Результаты структурного описания полуполей порядка 16 резюмирует

Таблица 2.2.5. Строение неизоморфных полуполей порядка 16

Полуполе	$\lvert N_l \rvert$	Число подполей порядка 4	Спектр лупы полуполя	Противоположное полуполе
V_1	2	–	$\{1, 4, 5\}$	$V_1^{op} \simeq V_6$
V_2	2	1	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$V_2^{op} = V_2$
V_3	2	–	$\{1, 4, 5, 6\}$	$V_3^{op} \simeq V_7$
V_4	2	1	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$V_4^{op} \simeq V_5$
V_8	2	2	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$V_8^{op} \simeq V_9$
V_{10}	2	1	$\{1, 3, 5, 6\}$	$V_{10}^{op} = V_{10}$
V_{11}	2	1	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$V_{11}^{op} \simeq V_{14}$
V_{12}	2	–	$\{1, 4, 5, 6\}$	$V_{12}^{op} = V_{12}$
V_{13}	2	4	$\{1, 3, 5\}$	$V_{13}^{op} = V_{13}$
V_{15}	2	2	$\{1, 3, 4, 5\}$	$V_{15}^{op} \simeq V_{16}$
V_{17}	2	1	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$V_{17}^{op} = V_{17}$
V_{18}	2	2	$\{1, 3, 5, 6\}$	$V_{18}^{op} = V_{18}$
T_{24}	4	2	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$T_{24}^{op} = T_{24}$
T_{25}	4	2	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$T_{25}^{op} \simeq T_{50}$
T_{35}	4	1	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	$T_{35}^{op} = T_{35}$
T_{45}	4	3	$\{1, 3, 5\}$	$T_{45}^{op} = T_{45}$

Основные результаты § 2.2 и теорема 2.1.1 опубликованы автором в совместной статье [24] в нераздельном соавторстве (соавтор В.М. Левчук).

В двух заключительных параграфах изучается строение полуполей проективных полуполевых плоскостей порядка 32 и полуполя Кнута – Руа.

Полуполе Кнута – Руа порядка 32, опровергающее гипотезу Г. Венэ о правоцикличности конечных полуполей, обозначаем через $\mathfrak{R}$. Как показано в [17], 21-я правоупорядоченная степень любого элемента лупы $\mathfrak{R}^*$ равна единице e, и поэтому полуполе $\mathfrak{R}$ не является правоциклическим.

Для восстановления формулы умножения полуполя $\Re$ и построения таблицы Кэли лупы $\Re^*$ в § 2.4 используется регулярное множество соответствующей плоскости из [10]. Основной в § 2.4 является следующая теорема, опубликованная в нераздельном соавторстве (соавтор В.М. Левчук) в статье [24].

Теорема 2.4.1. *Лупа $\Re^*$ полуполя $\Re$ однопорождена.*

Проективные плоскости трансляций порядка 32 (с точностью до изоморфизмов, их 9, [5]) координатизируют пространством W строк длины 5 над полем Z_2. Их регулярные множества, выписанные в [5], позволяют нам построить представители всех классов изотопных собственных полуполей порядка 32. Согласно [19], [10], таких классов точно пять.

Основные результаты § 2.3 выявляют строение полуполей P_i $(1 \leq i \leq 5)$, сопоставленных определенным регулярным множествам из [5]. Аномальность (в сравнении с конечными полями) полуполя P_5 указывает

Теорема 2.3.2. *В полуполе P_5 существует подполе H порядка 4, являющееся единственным максимальным подполем и не являющееся ни правым, ни левым ядром. Каждый элемент из $P_5 \setminus H$ порождает лупу P_5^* и имеет порядок > 3; спектр лупы P_5^* совпадает с $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.*

Строение остальных полуполей P_i выявляет

Теорема 2.3.3. *В каждом полуполе P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, подполе порядка 2 есть единственное подполе. Всякий элемент порядка > 1 порождает лупу P_i^*, а спектр лупы P_i^* совпадает с $\{1, 4, 5, 6, 7\}$ при $i = 1, 2$, с $\{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$ при $i = 3$, и с $\{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$ при $i = 4$.*

В доказательствах первоначально восстанавливаем, на основе известных регулярных множеств, взаимосвязано формулы умножения и таблицы Кэли лупы P_i^*. С помощью последних находим спектры и максимальные подполя.

Теоремы 2.3.2 и 2.3.3 опубликованы автором в [23].

Автор благодарна доценту О.В. Кравцовой за постановку первой задачи и помощь в подготовке первой работы, и научному руководителю, профессору В.М. Левчуку, за предложенную тему.

Признательна сотрудникам кафедры алгебры и математической логики и ИМиФИ СФУ за хорошие условия для научной работы.

Список литературы

[1] *Енисейская тетрадь (математические вопросы и задачи для молодых исследователей). Выпуск I* // Красноярск: КГУ. 2004. 32 с.

[2] *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре // С-Петербург: Лань. 2007.

[3] *Подуфалов Н.Д.* О функциях на линейных пространствах, связанных с конечными проективными плоскостями // Алгебра и логика. 2002. Т. 41. №1. С. 83 – 103.

[4] *Albert A.A.* Finite division algebras and finite planes // Proc. Sympos. Appl. Math. Vol. 10. AMS. Providence. R.I. 1960. P. 53 – 70.

[5] *Dempwolff U.* File of translation planes of small order *http* : *//www.mathematik.uni – kl.de/ ~ dempw/dempw_Plane.html.*

[6] *Dickson L.E.* Linear algebras in which division is always uniquely possible // Trans. Amer. Math. Soc. 1906. Vol. 7. P. 370 – 390.

[7] *Johnson N.L., Jha V., Biliotti M.* Handbook of finite translation planes // London New York. 2007. 861 p.

[8] *Hughes D.R., Piper F.C.* Projective planes // Springer - Verlag: New-York Inc. 1973.

[9] *Kleinfeld E.* Techniques for enumerating Veblen-Wedderburn systems // J. Assoc. Comput. Mach. 1960. Vol. 7. P. 330 – 337.

[10] *Knuth D.E.* Finite semifields and projective planes (PhD dissertation) // Pasadena: California Inst. of Thechnology. 1963. P. 1 – 70.

[11] The Kourovka Notebook (unsolved problems in group theory), 15-th Ed. // Novosibirsk. Instit. of Math. SO RAN. 1992.

[12] *Kuznetsov N.Y.* Estimating number of latin rectangles by the fast simulation metod // Cybernet Systems Anal. 2009. Vol. 45. P. 69 – 75.

[13] *Lüneburg H.* Translation planes // Springer - Verlag: New-York Inc. 1980.

[14] *McKay B.D., Meynert A., Myrvold W.* Small latin squares, quasigroups and loops // J. Combin. Designs. 2007. Vol. 15. No. 2. P. 98 – 119.

[15] *McKay B.D., Wanless I.M.* On the number of latin squares // Ann. Combin. 2005. Vol. 9. P. 335 – 344.

[16] *Oyama T.* On quasifields // Osaka J. Math. 1985. Vol. 22. P. 35 – 54.

[17] *Rua I.F.* Primitive and non-Primitive finite semifields // Commun. Algebra. 2004. Vol. 22. P. 223 – 233.

[18] *Veblen O., Maclagan-Wedderburn J.H.* Non-Desarguesian and non-Pascalian geometries // Trans. Amer. Math. Soc. 1907. Vol. 8. No. 3. P. 379 – 388.

[19] *Walker R.J.* Determination of division algebras with 32 elements // Proceed. Symp. Appl. Math. XV, Amer. Math. Soc. 1962. P. 83 – 85.

[20] *Wene G.P.* On the multiplicative structure of finite division rings // A equationes Math. 1991. Vol. 41. P. 791 – 803.

[21] *Wesson J.R.* On Veblen-Wedderburn systems // Amer. Math. Monthly. 1957. Vol. 64. No. 9. P. 631 – 635.

[22] *Zhang C., Ma J.* Counting solutions for the N-queens and latin square problems by Monte Carlo simulations // Phys. Rev. E 79. 2009.

Работы автора по теме диссертации

[23] *Штуккерт П.К.* Квазиполя и проективные плоскости трансляций малых четных порядков // Иркутск: Известия ИГУ. 2014. Т.7. №1. С. 144 – 159.

[24] *Levchuk V.M., Shtukkert P.K.* Problems on structure for quasifields of orders 16 and 32 // J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2014. Vol.7. No. 3. P. 362 – 372.

[25] *Кравцова О.В., Куршакова (Штуккерт) П.К.* К вопросу об изоморфизме полуполевых плоскостей // Красноярск: Вестник КГТУ. 2006. Т.42. С. 13 – 19.

[26] *Левчук В.М., Панов С.В., Штуккерт П.К.* Вопросы перечисления проективных плоскостей и латинских прямоугольников // В сб. научных статей "Моделирование и механика". Красноярск: СибГАУ. 2012. С. 56 – 70.

[27] *Штуккерт П.К.* Перечисление полуполевых плоскостей порядка 16 // Электронный сборник тез. докл. международной науч. конф. "Мальцевские чтения - 2012". Новосибирск: ИМ СО РАН. 2012. С. 53 – 54.

[28] *Штуккерт П.К.* Проективные плоскости и латинские квадраты // Материалы IV Российской школы-семинара "Синтаксис и семантика логических систем". Улан-Удэ: БГУ. 2012. С. 151 – 152.

[29] *Штуккерт П.К.* Перечисление полуполевых плоскостей и латинских квадратов малых порядков // Материалы Всерос. конф. "VII всесибирский конгресс женщин-математиков". Красноярск: СФУ. 2012. С. 235 – 237.

[30] *Polina K. Shtukkert* Semifields planes and Latin squares // Intern. Conf. on Algebra. Kiev: Ukrainian National Academy of Sciences. 2012. P. 145.

[31] *Штуккерт П.К.* О свойствах полуполей четного порядка // Электронный сборник тез. докл. международной науч. конф. "Мальцевские чтения - 2013". Новосибирск: ИМ СО РАН. 2013. С. 114.

[32] *Levchuk V.M., Panov S.V., Shtukkert P.K.* The structure of finite quasifields and their projective translation planes // Proceed. XII Intern. Conf. on Algebra and Number Theory. Tula. 2014. P. 106 – 108.