На правах рукописи

ШЛЕПКИН АЛЕКСЕЙ АНАТОЛЬЕВИЧ

ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ КОНЕЧНЫМИ ГРУППАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Красноярск 2019

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет».

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор

Лыткина Дарья Викторовна

Официальные оппоненты:

Алеев Рифхат Жалялович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)», кафедра системного программирования, профессор;

Казарин Лев Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова», кафедра алгебры и математической логики, заведующий;

Кондратьев Анатолий Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН «Институт математики и механики им Н.Н. Красовского УрО РАН», отдел алгебры и топологии, ведущий начный сотрудник.

Ведущая организация:

ФГБУН «Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН», г. Новосибирск.

Защита состоится 17 мая 2019 года в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 212.099.25, на базе ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, ауд. 34-11.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» http://www.sfu.kras.ru.

Автореферат разослан «___» апреля 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Шлапунов
Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертационной работе рассматриваются два класса бесконечных групп — периодические группы и группы Шункова, обладающие насыщающими множествами, состоящими из конечных групп специального вида. Напомним, что под периодической группой понимается группа, в которой любой её элемент имеет конечный порядок. Класс групп Шункова был введен В.П. Шунковым в 70-е годы прошлого века, и первоначально сам В.П. Шунков называл такие группы сопряженно-бипримитивно конечными [24, 30].

Группа G называется группой Шункова (сопряженно-бипримитивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу.

Как следует из работ А.В. Рожкова и других математиков, группы Шункова отличны от локально конечных групп [28]. Кроме того, построены примеры групп Шункова, содержащих элементы бесконечного порядка и не обладающих периодической частью [35]. Под периодической частью группы понимается множество всех элементов конечного порядка группы при условии, что они образуют подгруппу.

Понятие насыщенности впервые появилось в работе А.К. Шлепкина [36] в 1993 г.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Множество $\mathfrak{X}$ в этом случае будем называть насыщающим множеством.

Появление понятия насыщенности было обусловлено следующими двумя причинами.

Первое. Большинство конструкций периодических не локально конечных групп, известных к тому времени, показали, что между классом локально конечных групп и классом всех периодических групп существует бесконечно много промежуточных классов групп с достаточно слабыми условиями конечности. В качестве примера можно привести конструкции С.В. Алешина [2], Е.С. Голода [5], Р.И. Григорчука [6], И.Г. Лысенка [15], С.В. Иванова [43], П.С. Новикова, С.И. Адяна [1], А.Ю. Ольшанского [22], А.В. Рожкова [28] и А.И. Созутова [31]. Однако сразу выявилась характерная особенность этих конструкций. Как правило, это были группы, не содержащие конечных простых неабелевых подгрупп.

Второе. При исследовании групп с различными вариантами условия минимальности (локально конечные группы с условием минимальности [38], группы Шункова с условием примарной минимальности [37]) возникал контрпример, который являлся группой с системой конкретных конечных простых неабелевых подгрупп.

Отметим, что условие насыщенности не требует, чтобы насыщающее множество состояло из подгрупп группы G. Более того, насыщающее множество определяется неоднозначно для группы G и может содержать группы, не имеющие изоморфных копий в группе G. Однако всегда можно рассматривать насыщающее множество, состоящее из групп, имеющих изоморфные копии в G.

Пусть G — группа, K — подгруппа G, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Через $\mathfrak{X}_G(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если 1 — единичная подгруппа группы G, то $\mathfrak{X}_G(1)$ будет обозначать множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно, о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$, и соответственно вместо $\mathfrak{X}_G(1)$ будем писать $\mathfrak{X}(1)$.

Таким образом, при заданном насыщающем множестве $\mathfrak{X}$ группы G множество $\mathfrak{X}_G(1)$ также является насыщающим множеством для G, но состоящим из подгрупп группы G, являющихся изоморфными копиями групп из множества $\mathfrak{X}$.

Как оказалось впоследствии, понятие насыщенности тесно связано с понятиями покрытия [13] и локальной системы [44].

Пусть G — группа, $\mathfrak{L}$ — множество ее подгрупп. Назовем множество $\mathfrak{L}$ локальной системой, если любая конечно порожденная подгруппа группы G лежит в подгруппе из множества $\mathfrak{L}$.

В 60-е годы прошлого столетия П.Г. Конторович, А.С. Пекелис и А.И. Старостин [8–10] стали рассматривать покрытия в классах бесконечных групп. Локально конечные группы, обладающие локальными системами из конечных групп, рассматривались в [44].

В отличие от насыщающего множества локальная система группы может состоять только из подгрупп группы G. Отметим, что в классе локально конечных групп понятия насыщенности и локальной системы эквивалентны. Приведем ряд примеров и результатов, иллюстрирующих введенные выше понятия насыщенности и локальной системы, а также связь и различие между ними.

Свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ [1]. Данная группа, как следует из результата П.С. Новикова и С.И. Адяна, насыщена группами из множества $\mathfrak{X} = \{\langle a \rangle | a^n = 1,\ n -$ простое, $n \geq 665\}$. Множество $\mathfrak{X}(1) = \{H | H < B(m,n),\ |H| = n\}$, очевидно, не является локальной системой для $B(m,n)$. Отметим, что $B(m,n)$ — периодическая не простая не локально конечная группа.

Группа Ольшанского $G(\infty)$ [22]. Данная группа является двупорожденной периодической простой; она, как следует из результатов А.Ю. Ольшанского, насыщена группами из множества $\mathfrak{X} = \{\langle a \rangle | a^p = 1,\ p$ простое, $p > 10^{74}\}$. Множество $\mathfrak{X}(1) = \{H | H < G(\infty),\ |H| = p\}$, очевидно, не является локальной системой $G(\infty)$.

Группа $L_2(P)$. Пусть P — бесконечное локально конечное поле,

$$P_1 < P_2 < ... < P_i < \ -$$

бесконечная цепочка конечных подполей поля P, такая, что $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$. Тогда $L_2(P)$ насыщена группами из множества $\mathfrak{X} = \{L_2(P_i) | i = 1, 2, ...\}$. В отличие от первых двух случаев, множество $\mathfrak{X}(1) = \{H | H < G, H \widetilde{\in} \mathfrak{X}\}$ — локальная система группы $L_2(P)$. С другой стороны, цепочка $L_2(P_1) < L_2(P_2) < ... < L_2(P_i) < ...$, совпадающая с $\mathfrak{X}$, также является локальной системой группы $L_2(P)$ и $L_2(P) = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_2(P_i)$. Отметим, что насыщающее множество для группы $L_2(P)$, а также две ранее указанные локальные системы состоят из групп лиева типа ранга 1.

Последний пример приводит к следующим обобщениям для локально конечных групп, обладающих локальными системами, состоящими из возрастающей цепочки конечных простых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности.

Теорема (О.Н. Кегель, Б.А. Верфриц, [44]). *Если локально конечная группа обладает локальной системой, состоящей из возрастающей цепочки конечных простых групп лиева типа ранга* 1, *то она изоморфна некоторой группе лиева типа ранга* 1.

Теорема (Следствие из работ В.В. Беляева [3], А.В. Боровика [4], С. Томаса [45], Б. Хартли и Г. Шюта [42]). *Если локально конечная группа обладает локальной системой, состоящей из возрастающей цепочки конечных простых подгрупп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, то и сама группа является группой лиева типа.*

Сформулируем приведенный выше результат в терминах насыщенности.

Теорема. *Если локально конечная группа обладает насыщающим множеством, состоящим из конечных простых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, то и сама группа является группой лиева типа.*

Следующий результат Ф. Холла подчеркивает, в данном случае, важность условия насыщенности локально конечной группы конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности.

Теорема (Ф. Холл) [41]. *Существует счетная локально конечная группа, содержащая любую счетную локально конечную группу* (*с точностью до изоморфизма*).

Из данного результата вытекает существование простых локально конечных групп, обладающих насыщающими множествами, состоящими из конечных простых групп, но не являющихся простыми локально конечными группами лиева типа над подходящим локально конечным полем.

В свете приведенных выше результатов естественно было поставить вопрос о строении периодической группы, насыщенной конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности.

Коуровская тетрадь, вопрос 14.101 [14]. *Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является простой группой лиева типа?*

Приведенный ниже результат А.Ю. Ольшанского подчеркивает, в данном случае, важность условия насыщенности периодической группы конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности. Из него вытекает существование периодических простых не локально конечных групп, содержащих конечные простые неабелевы подгруппы, но не обладающих насыщающими множествами, состоящими из конечных простых неабелевых групп, в частности, из конечных простых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности.

Теорема (А.Ю. Ольшанский) [23]. *Любая счетная периодическая группа вкладывается в простую периодическую группу с двумя порождающими.*

Как отмечалось выше, класс групп Шункова отличен от класса периодических групп. Кроме того, вопрос о расположении элементов конечного порядка в группе Шункова представляет отдельную задачу. Как оказалось, группы Шункова, насыщенные некоторыми группами лиева типа, обладают периодической частью (если все элементы конечных порядков из группы G содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется периодической частью группы G и обозначается $T(G)$ [7, с. 90]), изоморфной соответствующей группе лиева типа над подходящим локально конечным полем. Поэтому уместно рассмотреть следующий вопрос для групп Шункова.

Вопрос А. *Верно ли, что группа Шункова, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, обладает периодической частью, изоморфной простой группе лиева типа?*

При решении вопроса 14.101 возникла необходимость характеризации групп, обладающих насыщающим множеством, состоящим не обязательно из конечных простых групп лиева типа (прямые произведения, центральные расширения, сплетенные группы, группы диэдра). К.А. Филиппов и А.Г. Рубашкин [29], устанавливая структуру периодической группы G, насыщенной конечными простыми группами $L_2(q)$, рассматривали централизатор инволюции x из G. Анализ ситуации, когда все q — нечетные, привел к необходимости установления строения $C_G(x)$. Как оказалось, $C_G(x)$ насыщен конечными группами диэдра. В связи с чем возникла проблема установления структуры групп, насыщенных группами диэдра ([11, проблема 2]). Данная проблема в классе периодических групп была решена Б. Амбергом и Л.С. Казариным [40]. Как оказалось, такая группа будет локально диэдральной. Используя этот факт, удалось показать, что $G \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q. Кроме того, как следует из результатов С.В. Иванова [43] и И.Г. Лысенка [15], бернсайдовы группы $B(m, n)$ достаточно большого четного периода n не локально конечны и насыщены прямыми произведениями групп диэдра, взятых в конечном числе, причем число множителей прямого произведения может быть сколь угодно большим. В связи с упомянутыми выше работами [40], [43], [15] возникла проблема установления структуры групп, насыщенных прямыми произведениями групп ([11, проблема 3]).

Таким образом, актуален общий вопрос о строении группы, насыщенной конечными группами специального вида.

Группы, насыщенные различными множествами конечных групп, изучали А.И. Созутов, К.А. Филиппов, В.Д. Мазуров, Д.В. Лыткина, Д.Н. Панюшкин, А.Г. Рубашкин [16–21, 25–27, 29, 32]. В частности, были получены частичные решения вопроса 14.101 из Коуровской тетради для периодических групп, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами лиева типа ранга 1, и были получены частичные решения вопроса **Вопроса A**) для групп Шункова, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами лиева типа ранга 1: К.А. Филиппов и А.Г. Рубашкин для случая, когда насыщаюшее множество периодической группы состоит из групп $L_2(q)$ [29]; Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватулина, К.А. Филиппов для случая, когда насыщаюшее множество периодической группы состоит из групп $U_3(2^n)$ [19]; Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватулина, К.А. Филиппов для случая, когда насыщаюшее множество периодической группы конечно и состоит из групп $U_3(q)$, $L_3(q)$ [18]; К.А. Филиппов для случая, когда насыщающее множество периодической группы состоит из групп $L_2(2^l)$, $U_3(2^{2^k})$, $Sz(2^{2m+1})$, $Re(3^{2n+1})$ [32]; А.К. Шлепкин для случаев, когда насыщающее множество группы Шункова (не обязательно периодической) является одним из следующих — $\{L_2(p^l)|p$ — фиксированное простое число$\}$, $\{U_3(2^{2^k})\}$, $\{Sz(2^{2m+1})\}$, $\{Re(3^{2n+1})\}$ [37]; К.А. Филиппов для случая, когда насыщающее множество периодической группы Шункова состоит из групп $U_3(q)$ [33]; К.А. Филиппов для случая, когда насыщающее множество группы Шункова (не обязательно периодической) состоит из групп $L_2(q)$ [34].

В обзоре [11] и монографии [12] приведена библиография работ, в которых исследовались группы с условием насыщенности, и сформулированы основные проблемы, связанные с изучением групп, насыщенных группами из заданного множества групп.

Цель диссертации. Исследовать бесконечные группы с фиксированным множеством конечных подгрупп и заданным способом их вложения в рассматриваемую группу. В рамках данного исследования, в частности, для групп, насыщенных конечными простыми группами лиева типа ранга 1, решить вопрос 14.101 из Коуровской тетради. Сформулированный выше **Вопрос А** для групп Шункова решить для случая, когда насыщающее множество состоит из конечных простых неабелевых групп лиева типа ранга 1.

Методы исследования. Для исследования групп с заданным множеством конечных групп и заданным способом вложения конечных групп применяются методы локального анализа конечных групп. Кроме того, используются методы исследования групп с различными условиями конечности.

Научная новизна и практическая ценность. Все основные результаты диссертации являются новыми. Диссертационная работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях бесконечных групп, при чтении спецкурсов.

Основные результаты диссертации

1. Доказано, что периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M} = \{GL_2(q) \mid q$ — степень простого числа$\}$, изоморфна $GL_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле.

2. Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M} = \{PGL_2(q) \mid q$ — степень простого числа$\}$, изоморфна $PGL_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле.

3. Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q) \mid q$ — степень простого числа, $q \geqslant 3\}$, изоморфна $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

4. Доказано, что группа Шункова G, насыщенная группами из множества

$$\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q) \mid q \text{ — степень простого нечетного числа}\},$$

обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

5. Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга 1, изоморфна простой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем.

6. Доказано, что группа Шункова G, насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга 1, обладает периодической частью, изоморфной простой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 19 работах [46–64] в рецензируемых изданиях, удовлетворяющих требованиям, предъявляемым пп. 11-12 Положения о присуждении ученых степеней от 24.09.2013 N 242.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, семи глав и списка литературы. Нумерация определений, теорем, предложений, примеров соответствует разбиению на главы и параграфы. Например, теорема 7.2.1 — это первая теорема из второго параграфа седьмой главы. Текст диссертации представлен на 142 страницах. Список литературы включает 105 наименований.

Содержание работы

Во введении рассматривается актуальность темы диссертационного исследования и формулируются основные результаты.

В первой главе рассматриваются известные факты и вспомогательные утверждения.

Во второй главе изучаются группы, насыщенные не только конечными простыми группами.

В параграфе 2.1 исследуются периодические группы, насыщенные сплетенными группами.

Теорема 2.1.1 *Бесконечная 2-группа, насыщенная сплетенными группами, изоморфна сплетению бесконечной локально циклической 2-группы и группы порядка 2.*

Построен пример 2.1.11, показывающий, что теорема 2.1.1 для произвольных периодических групп неверна. Однако для некоторых классов групп, в частности, для локально конечных групп и групп Шункова, такое обобщение возможно.

Теорема 2.1.12 *Пусть G — локально конечная группа, насыщенная сплетенными группами. Тогда $G = (A \times B) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где $A^v = B$, A — локально циклическая группа, $|v| = 2$.*

Теорема 2.1.13 *Пусть G — группа Шункова, насыщенная сплетенными группами. Тогда G обладает периодической частью $T(G) = (A \times B) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где $A^v = B$, A — локально циклическая группа, $|v| = 2$.*

Теоремы 2.1.1, 2.1.12, 2.1.13 и пример 2.1.11 получены автором лично и опубликованы в [46].

В параграфе 2.2 рассмотрены достаточные условия, при которых бесконечная группа не будет простой.

Получен следующий результат.

Теорема 2.2.1 *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества конечных простых неабелевых групп, и в G есть инволюция z такая, что $C_G(z)$ содержит конечное число элементов конечного порядка. Тогда G обладает периодической частью, изоморфной конечной простой неабелевой группе. В частности, если G — бесконечная группа, то G — не простая группа.*

Теорема 2.2.1 получена автором лично и опубликована в [58].

В параграфе 2.3 исследованы периодические группы и группы Шункова, насыщенные группами диэдра и группой A_5.

Пусть $\mathfrak{A} = \{A_5\}$ — множество, состоящее из одной группы A_5, $\mathfrak{B}$ — множество, состоящее из конечных групп диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$.

Получены следующие результаты:

Теорема 2.3.1 *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна либо группе A_5, либо локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Теорема 2.3.4 *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна либо группе A_5, либо локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Теоремы 2.3.1 и 2.3.4 получены автором лично и опубликованы в [56].

В параграфе 2.4 исследованы группы, насыщенные группами диэдра и линейными группами степени 2.

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество, состоящее из групп $L_2(q)$, где $q \equiv 3, 5 \pmod 8$, $\mathfrak{B}$ — множество, состоящее из конечных групп диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$.

Теорема 2.4.1 *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна либо группе $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q, либо локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Теорема 2.4.10 *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна либо группе $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q, либо локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Теоремы 2.4.1 и 2.4.10 получены автором лично и опубликованы в [60].

В третьей главе исследуются группы, насыщенные $GL_2(q), PGL_2(q)$.

В параграфе 3.1 исследуются локально конечные группы, насыщенные $GL_2(q)$ над конечными полями произвольной характеристики. Пусть $\mathfrak{J} = \{GL_2(q)\}$, где $q = p^n$. Отметим, что ни характеристика поля p, ни натуральное n не фиксируются.

Теорема 3.1.1 *Локально конечная группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{J}$, изоморфна $GL_2(P)$ для некоторого локально конечного поля P.*

Теорема 3.1.1 получена автором лично и опубликована в [47].

В параграфе 3.2 исследуются периодические группы Шункова, насыщенные $GL_2(q), PGL_2(q)$ над конечными полями фиксированной характеристики. Пусть $q = p^n$, $\Im$=$\{GL_2(p^n)\}$ и $\mathfrak{M} = \{PGL_2(p^n)\}$, где p – простое фиксированное число, а натуральное n не фиксируется.

Теорема 3.2.1 *Пусть периодическая группа Шункова G насыщена группами из множества $\Im$, $K \in \Im(1)$. Тогда $Z(K) \leq Z(G)$ и $Z(G)$ – локально циклическая группа.*

Теорема 3.2.7 *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна $PGL_2(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики p.*

Теорема 3.2.13 *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Im$, изоморфна $GL_2(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики p.*

Теоремы 3.2.1., 3.2.7 и 3.2.13 опубликованы в совместной работе с И.В. Сабодах [48]. Идея доказательства теоремы 3.2.1. принадлежит автору диссертации, а оформление доказательства проведено совместно с И.В. Сабодах. Теоремы 3.2.7 и 3.2.13 принадлежат автору диссертации.

В параграфе 3.3 исследуются периодические группы, насыщенные $PGL_2(q)$ над произвольными конечными полями. Пусть $\mathfrak{M} = \{PGL_2(q)|q$ — степень простого числа$\}$.

Теорема 3.3.1 *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна $PGL_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле.*

Теорема 3.3.1 получена автором лично и опубликована в [50].

В параграфе 3.4 исследуются периодические группы Шункова, насыщенные группами $GL_2(q)$ над произвольными конечными полями.

Теорема 3.4.1 *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Im$, состоящего из всех групп $\{GL_2(p^n)\}$ (здесь p и n не фиксируются), изоморфна $GL_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.*

Теорема 3.4.1 получена автором лично и опубликована в [51].

В главе 4 рассмотрены группы, насыщенные унитарными и линейными группами степени 3.

В параграфе 4.1 рассмотрены группы Шункова, насыщенные группами из множества $\mathfrak{M} = \{U_3(p^n)\}$, где p — простое не фиксированное число, n — натуральное не фиксированное число.

Теорема 4.1.7 *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной группе $U_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.*

Теорема 4.1.7 получена автором лично и опубликована в [55].

В параграфе 4.2 исследованы группы Шункова, насыщенные унитарными и линейными группами степени 3 над конечными полями нечетной характеристики.

Теорема 4.2.1 *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества*

$$\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q) \mid q \text{ — степень простого нечетного числа}\}.$$

Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

Теорема 4.2.1 получена автором лично и опубликована в [52].

В параграфе 4.3 исследованы периодические группы, насыщенные унитарными и линейными группами степени 3.

Теорема 4.3.1 *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества*

$$\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q) \mid q \text{ — степень простого числа, } q \geqslant 3\}.$$

Тогда G изоморфна $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

Теорема 4.3.1 опубликована в совместной работе с Д.В. Лыткиной [53]. Идея доказательства этой теоремы совместна с Д.В. Лыткиной, она возникла из обсуждения путей решения данной задачи. Детальная проработка доказательства этой теоремы принадлежит автору диссертации.

В пятой главе рассмотрены группы Шункова, насыщенные группами лиева типа ранга 1.

В параграфе 5.1 рассмотрены группы Шункова, насыщенные группами из множества $\{J_1, L_2(q), Re(q), U_3(q), Sz(q)\}$.

Теорема 5.1.1 *Пусть группа Шункова G насыщена конечными простыми неабелевыми группами, и в любой её конечной 2-подгруппе K все инволюции из K лежат в центре K. Тогда G обладает периодической частью, которая изоморфна одной из групп следующего множества:*

$$\{J_1, L_2(Q), Re(Q), U_3(Q), Sz(Q)\}$$

для подходящего локально конечного поля Q.

Теорема 5.1.1 получена автором лично и опубликована в [63].

В параграфе 5.2 рассмотрены группы Шункова, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1:

Теорема 5.2.1 *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга* 1, *обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе лиева типа ранга* 1 *над подходящим локально конечным полем Q.*

Теорема 5.2.1 получена автором лично и опубликована в [57].

В главе 6 рассмотрены периодические группы, насыщенные группами лиева типа ранга 1.

В параграфе 6.1 рассмотрены периодические группы, насыщенные линейными группами степени 2 и унитарными группами степени 3.

Теорема 6.1.1 *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества конечных простых групп*

$$\mathfrak{M} = \{L_2(r), U_3(q) \mid r, q - \text{ нечётные, } r > 3\}.$$

Тогда G изоморфна $L_2(R)$ или $U_3(Q)$, где R — локально конечное поле нечётной характеристики.

Теорема 6.1.1 получена автором совместно с Д.В. Лыткиной и опубликована в [59]. Идея доказательства этой теоремы принадлежит автору диссертации. Детальная проработка доказательства выполнена автором диссертации, ряд технических шагов этого доказательства был осуществлен при участии Д.В. Лыткиной (реализация схем доказательства лемм 3.11, 3.12, предложенных Д.В.Лыткиной).

В параграфе 6.2 рассмотрены периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1.

Теорема 6.2.1 *Пусть периодическая группа G насыщена конечными простыми группами лиева типа ранга* 1. *Тогда G изоморфна группе лиева типа ранга* 1 *над подходящим локально конечным полем.*

Теорема 6.2.1 получена автором лично и опубликована в [61].

В главе 7 рассмотрены периодические группы 2-ранга 2 и группы Шункова 2-ранга 2, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами. Как показали Альперин, Брауэр и Горенстейн, конечными простыми группами 2-ранга 2, с точностью до изоморфизма, являются следующие группы:

$$L_2(q),\ A_7,\ L_3(p),\ U_3(r),\ M_{11},\ U_3(4),$$

где q, p, r — нечетные, $q > 3$ [39]. В данной главе этот классический результат переносится на периодические группы 2-ранга 2 и на группы Шункова 2-ранга 2, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами.

В параграфе 7.1 рассмотрены периодические группы 2-ранга 2, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами.

Теорема 7.1.1 *Пусть $\mathfrak{G}$ — множество всех периодических групп* 2*-ранга* 2*, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами. Тогда с точностью до изоморфизма*

$$\mathfrak{G} = \{L_2(Q),\ A_7,\ L_3(P),\ U_3(R),\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

где Q, P, R — всевозможные локально конечные поля нечетных характеристик, $|Q| > 3$.

Теорема 7.1.1 получена в соавторстве с А.И. Созутовым и Д.В. Лыткиной и опубликована в совместной работе [62]. Идея доказательства основного результата данной работы получена совместно с Д.В. Лыткиной и А.И. Созутовым. Она возникла в процессе постановки задачи и обсуждения путей её решения. Детальная проработка доказательства и его оформление принадлежат: в части лемм 7.1.7., 7.1.9. — автору диссертации и Д.В. Лыткиной; в части лемм 7.1.14., 7.1.15 — автору диссертации и А.И. Созутову; в части лемм 7.1.2–7.1.6., 7.1.8., 7.1.10.–7.1.13. — автору диссертации.

В параграфе 7.2 рассмотрены группы Шункова 2-ранга 2, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами.

Теорема 7.2.1 *Пусть* $\mathfrak{G}$ *— множество всех групп Шункова 2-ранга 2, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами. Тогда любая группа* $G \in \mathfrak{G}$ *обладает периодической частью* $T(G)$*, которая изоморфна одной из групп множества*

$$\{L_2(Q),\ A_7,\ L_3(P),\ U_3(R),\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

где Q, P, R *— всевозможные локально конечные поля нечетных характеристик,* $|Q| > 3$.

Теорема 7.2.1 получена автором лично и опубликована в [63].

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях (с публикацией тезисов):

1. "Алгебра и математическая логика", посвященная 100-летию со дня рождения В.В. Морозова (Казань, 25.09.2011–30.09.2011).

2. International conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov, (Киев, 20.08.2012–26.08.2012).

3. "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 11.11.2013–15.11.2013).

4. "Современные проблемы математики и ее приложений"(Екатеринбург, 2.02.2014–8.02.2014).

5. "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 10.11.2014-13.11.2014).

6. Groups and graphs, algorithms and automata (Екатеринбург, 09.08.2015–15.08.2015).

7. "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 03.05.2015–07.05.2015).

8. Конференция по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 26.06.2016–2.07.2016).

9. "Алгебра и Логика: Теория и приложения"(Красноярск, 24.07.2016-29.07.2016).

10. Конференция по алгебраической геометрии, комплексному анализу и компьютерной алгебре (Коряжма, 03.08.2016–09.08.2016).

11. Graphs and groups, spectra and symmetries (Новосибирск, 15.08.2016–28.08.2016).

12. "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 21–24.11.2016. **Пленарный доклад**).

13. "Теория групп и ее приложения" (Пермь, 04–07.10.2017. **Пленарный доклад**).

14. "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 20–23.11.2017).

15. "Теория групп и ее приложения", конференция, посвященная 65-летию со дня рождения профессора А.А.Махнева (Геленджик, 13–20.05.2018. **Пленарный доклад**).

16. Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша (Москва, 2018. **Пленарный доклад**).

Результаты диссертации обсуждались на семинарах:

1. Красноярский городской алгебраический семинар, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета (2013,2014,2015,2016,2017,2018).

2. Семинар "Теория групп", Институт математики СО РАН (2015, 2016, 2018).

3. Семинар "Алгебра и логика", Институт математики СО РАН (ноябрь 2015).

4. Семинар, "Алгебра и алгебраическая комбинаторика", Институт математики и механики УрО РАН (февраль 2017).

5. Научно мсследовательский семинар по алгебре кафедры Высшей алгебры Московского гсударственного университета (МГУ)(26 ноября 2018).

Благодарности:

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту — доктору физико-математических наук, профессору Лыткиной Дарье Викторовне за внимательное отношение, ценные замечания и неизменную поддержку при работе над диссертацией.

Литература

[1] Адян, С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах / С.И. Адян. — М.: Наука, 1975. — 335 с.

[2] Алешин, С.В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах / С.В. Алешин // Матем. заметки. — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 319–328.

[3] Беляев, В.В. Локально-конечные группы Шевалле / В.В. Беляев // Исследования по теории групп. — Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1984. — С. 39–50.

[4] Боровик, А. В. Вложения конечных групп Шевалле и периодические линейные группы / А.В. Боровик // Сиб. мат. журн. — 1983. — Т. 24, № 6. — С. 26–35.

[5] Голод, Е.С. О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах / Е.С. Голод // Изв. АН СССР. Сер. "Матем.— 1964. — Т. 28, № 2. — С. 273–276.

[6] Григорчук, Р.И. К проблеме Бернсайда о периодических группах / Р.И. Григорчук // Функц. анализ и его прил. — 1980. — Т. 14, №1. — С. 53–54.

[7] Каргаполов, М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. СПб.: Лань, 2009. — 287 с.

[8] Конторович, П.Г. Инвариантно покрываемые группы // Матем. сб.— 1940.— № 8. — С. 423–430.

[9] Конторович, П.Г. Инвариантно покрываемые группы II // Матем. сб. — 1951. — Т. 28. — С. 79–88.

[10] Конторович, П.Г. Структурные вопросы теории групп /П.Г. Конторович, А.С. Пекелис, А.И. Старостин // Матем. зап. Уральск. ун-та. — 1961. — № 3. — С. 3–50.

[11] Кузнецов, А. А. Группы, насыщенные заданным множеством групп / А.А. Кузнецов, К.А.Филиппов // Сиб. электрон. матем. изв. — 2011. — № 8. — С. 230–246.

[12] Кузнецов, А.А. Группы с условием насыщенности. /А.А. Кузнецов, Д.В. Лыткина, Л.Р.Тухватулинна, К.А. Филиппов// Изд. КрасГАУ, Красноярск, 2010. — С. 254.

[13] Курош, А.Г. Теория групп /А.Г. Курош. — М.: Наука, 1967. — 648 с.

[14] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 16-е изд. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2006.

[15] Лысёнок, И.Г. Бесконечные бернсайдовы группы четного периода / И.Г. Лысёнок // Изв. РАН. Сер. "Матем.", — 1996. — Т. 60, № 3. С. 3–224.

[16] Лыткина, Д.В. О периодических группах, насыщенных $L_2(q)$ и ее центральными расширениями /Д.В. Лыткина, К.А. Филиппов // Матем. системы. — Красноярск: Изд-во КрасГАУ, 2006. — № 5. — С. 35–45.

[17] Лыткина, Д.В. Периодические группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых групп /Д.В. Лыткина// Сиб. мат. журнал. — 2011. — Т. 52, № 2. — С. 340–349.

[18] Лыткина, Д.В. О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп /Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов// Алгебра и логика. — 2008. — № 49(2). — С. 394–399.

[19] Лыткина, Д.В. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами $U_3(2^n)$ /Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов// Алгебра и логика. — 2008. — № 47(3). — С. 288–306.

[20] Лыткина, Д.В. О группах, насыщенных конечными простыми группами /Д. В. Лыткина// Алгебра и логика. 2009. — № 48(5). — С. 628—653.

[21] Лыткина, Д.В. О силовских 2-подгруппах периодических групп, насыщенных конечными простыми группами. /Д.В. Лыткина, В.Дж. Ли// Сиб. мат. журнал. — 2016. — Т. 57, № 6. — С. 1313–1319.

[22] Ольшанский, А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах / А.Ю. Ольшанский, — Москва: Наука, 1989.

[23] Ольшанский, А.Ю. О вложении счетных периодических групп в простые 2-порожденные периодические группы / А.Ю. Ольшанский // Укр. матем. журн. — 1991. Т. 43, № 7–8. — С. 980–986.

[24] Остыловский, А.Н. О локальной конечности одного класса групп с условием минимальности /А.Н. Остыловский// В сб. Исследования по теории групп. — 1975. — Красноярск. С. 32-48.

[25] Панюшкин, Д.Н. О периодической группе Шункова, насыщенной центральными расширениями конечных 2-групп посредством группы $L_2(5)$ / Д.Н. Панюшкин, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2010. — Т. 10, № 1. — С. 88–92.

[26] Панюшкин, Д.Н. О группе Шункова, насыщенной центральными расширениями циклических групп посредством проективных специальных линейных групп / Д.Н. Панюшкин, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов // Труды ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 2. — С. 177–185.

[27] Панюшкин, Д.Н. Группы Шункова, насышенные прямыми произведениями различных групп: дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.01.06 / Панюшкин Денис Николаевич. — Красноярск, 2010. — 66 с.

[28] Рожков, А.В. Условия конечности Шункова /А.В. Рожков//Междунар. конф. по алгебре. — Санкт-Петербург. — 1997. С. 268–269.

[29] Рубашкин, А.Г. О периодических группах насыщенных $L_2(p^n)$ /А.Г. Рубашкин, К.А. Филиппов // Сибирский математический журнал. – 2005. — Т. 46, № 6. – С. 1388–1392.

[30] Сенашов, В.И. Группы с условиями конечности /В.И. Сенашов, В.П. Шунков// — 2001. — Новосибирск, изд. СО РАН.

[31] Середа, В.А. Об одном вопросе из Коуровской тетради / В.А. Середа, А. И. Созутов // Матем. заметки. — 2006. — Т.80, № 1. — С. 154–155.

[32] Филиппов, К.А. О периодических группах, насыщенных конечными простыми группами /К. А. Филиппов// Сиб. матем. журн. — 2012. — № 53:2. — С. 430–438.

[33] Филиппов, К.А. О периодических группах Шункова, насыщенных унитарными группами степени 3. /К.А. Филиппов// Вестн. СибГАУ. — 2012. — № 42.

[34] Филиппов, К.А. О периодической части группы Шункова, насыщенной $L_2(p^n)$ /К.А. Филиппов// Вестн. СибГАУ. — 2012. — С. 611-617.

[35] Череп, А.А. О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе /А.А. Череп// Алгебра и логика. – 1987. — Т. 26, № 4. — С. 518–521.

[36] Шлепкин, А.К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы / А.К. Шлепкин // Сб. тез. 3-й Междунар. конф. по алгебре. Красноярск, 1993. — С. 363.

[37] Шлепкин, А.К. Группы Шункова с дополнительными ограничениями: дисс. д-ра физ.-мат. наук: 01.01.06 /А.К. Шлепкин. — Красноярск, 1998. — 163 с.

[38] Шунков, В.П. О проблеме минимальности для локально конечных групп / В.П. Шунков // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 9, № 2. — С. 220–248.

[39] Alperin, J.L. Finite simple groups of 2 – rank two,/J.L. Alperin, R. Brauer, D. Gorenstein // Scripta math. — 1973. — V. 29, № 3 – 4. — P. 191–214.

[40] Amberg, B. Periodic groups saturated by dihedral subgroups / B. Amberg, L. Kazarin // Book of abstracts of the international algebraic conference dedicated to 70–th birthday of Anatoly Yakovlev. Saint-Petersburg, — 2010. — P. 79–80.

[41] Hall, Ph. Some construction for loccaly finite groups. J. London Math. Soc. — 1959. — 34. — P. 305–309.

[42] Hartley, B. Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type/B. Hartley,G. Shute// The Quarterly Journal of Mathematics Oxford. 1984. Vol. 2, № 137. P. 49–71.

[43] Ivanov, S.V. The free Burnside groups of sufficiently large exponents / S.V. Ivanov // Int. J. of Algebra and Computation. – 1994. — № 4. — P. 1–308.

[44] Kegel, O.N. Locally Finite Groups. /O.N. Kegel,B.A.F. Wehrfritz// Amsterdam: North-Holland, 1973.

[45] Thomas, S. The classification of the simple periodic linear groups// *Arch. Math.* 1983. Vol. 41. P. 103–116.

Работы автора по теме диссертации, опубликованные в изданиях из перечня ВАК

[46] Шлепкин, А.А. Периодические группы, насыщенные сплетенными группами /А.А. Шлепкин // Сиб. электрон. матем. изв. — 2013. — Т. 10. — С. 56–64.

[47] Шлепкин, А.А. О группах, насыщенных $GL_2(p^n)$ /А.А. Шлепкин// Вестн. СибГАУ. — 2013. — № 1. — С. 100—108.

[48] Шлепкин, А.А. О группах Шункова, насыщенных $GL_2(p^n)$ /А.А. Шлепкин, И.В. Сабодах// Сиб. электрон. матем. изв. — 2014. — Т. 11. — С. 734–744.

[49] Шлепкин, А.А. Группы Шункова, насыщенные $L_2(p^n), U_3(2^n)$ /Е.А. Пронина, А.А. Шлепкин // Вестн. СибГАУ. — 2015. — № 3(57). — С. 111–107.

[50] Шлепкин А.А. О периодических группах, насыщенных проективными линейными группами /А.А. Шлепкин// Сиб. матем. журн. — 2015. — № 4, Т. 56, С. 952—957.

[51] Шлепкин, А.А. О группах Шункова, насыщенных полными линейными группами /А.А. Шлепкин// Сиб. матем. журн. — 2016. — № 1, Т. 57. — С. 222–235.

[52] Шлепкин, А.А. Группы Шункова, насыщенные линейными и унитарными группами степени 3 над полями нечетных порядков /А.А. Шлепкин// Сиб. электрон. матем. изв. — 2016. — Т. 13. — С. 341–351.

[53] Шлепкин, А.А. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами типа L_3, U_3 /А.А. Шлепкин, Д.В. Лыткина// Алгебра и логика. — 2016. — № 4(55). — С. 441–448.

[54] Шлепкин, А.А. О периодической группе Шункова, насыщенной конечными простыми группами лиева типа ранга 1 /А.А. Шлепкин// Изв. ИГУ. Серия "Математика". — 2016. — № 16. — С. 106-116.

[55] Шлепкин, А.А. О периодических группах и группах Шункова, насыщенных унитарными группами степени три /А.А. Шлепкин// Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — № 3(22). — С. 299–307.

[56] Шлепкин, А.А. О периодических группах и группах Шункова, насыщенных группами диэдра и A_5/ /А.А. Шлепкин// Изв. ИГУ. Сер. "Математика". — 2017. — № 20. — С. 96–108.

[57] Шлепкин, А.А. Об одном достаточном условии существования периодической части в группе Шункова /А.А. Шлепкин // Изв. ИГУ. Сер. "Математика". — 2017. — № 22. — С. 90–105.

[58] Шлепкин, А.А. Об одном достаточном условии, когда бесконечная группа не будет простой. /А.А. Шлепкин// Журнал СФУ. Сер. "Математика и физика". — 2018. — № 1. С. 103–106

[59] Шлепкин, А.А. Периодические группы, насыщенные линейными группами степени 2 и унитарными группами степени 3 /Д.В. Лыткина, А.А. Шлепкин// Математические труды. — 2018. — № 1. — С. 55–72.

[60] Шлепкин, А.А. О группах, насыщенных группами диэдра и линейными группами степени два /А.А. Шлепкин // Сиб. электрон. матем. изв. — 2018. — Т. 15. — С. 74–85.

[61] Шлепкин, А.А. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1 /А.А. Шлепкин// Алгебра и логика. — 2018. — № 1(57). — С. 118–125.

[62] Шлепкин, А.А. Периодические группы 2-ранга 2, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами /А.И. Созутов, Д.В. Лыткина, А.А. Шлепкин // Сиб. электрон. матем. изв. — 2018. — Т. 15. — С. 786–796.

[63] Шлепкин, А.А. О группах Шункова, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами /А.А. Шлепкин // Изв. ИГУ. Сер. "Математика". — 2018. — № 24. — С. 85–101.

[64] Шлепкин, А.А. О периодической части группы Шункова, насыщенной сплетенными группами /А.А. Шлепкин// Тр. ИММ УрО РАН. — 2018. — № 3(24). — С. 281–285.