На правах рукописи

САБОДАХ ИРИНА ВАЛЕРЬЕВНА

ВЛОЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП В БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С УСЛОВИЯМИ КОНЕЧНОСТИ

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Красноярск-2014

Работа выполнена в Федеральном государственном образовательном бюджетном учреждении высшего профессионального образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики».

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент
Лыткина Дарья Викторовна.

Официальные оппоненты:

Ревин Данила Олегович,
доктор физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
лаборатория теории групп,
ведущий научный сотрудник;

Филиппов Константин Анатольевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Сибирский федеральный университет»,
кафедра теоретические основы экономики, доцент.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Сибирский государственный аэрокосмический университет
имени академика М.Ф. Решетнева».

Защита состоится « 09 » октября 2014 года в 15 : 30 на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 при Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «   »   2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета   Федченко Дмитрий Петрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Структура бесконечной периодической группы в значительной степени зависит от наличия в ней множеств конечных групп с заданной структурой и с заданными свойствами вложения этих групп в исходную группу. Одним из понятий, позволяющих эффективно использовать упомянутые выше соображения для установления структуры исследуемой группы, является понятие насыщенности. По определению, группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X [18].

Например, простые группы лиева типа над локально конечными полями могут быть охарактеризованы как локально конечные группы, насыщенные группами из множества конечных простых групп лиева типа ограниченного лиева ранга [2].

Из результатов И.Г. Лысенка [7] и С.В. Иванова [21] следует, что бернсайдовы группы $B(m, n)$ для достаточно больших четных n не локально конечны и насыщены прямыми произведениями конечных групп диэдра. Далее, А.К. Шлепкин и А.Г. Рубашкин [15] показали, что периодическая группа Шункова, насыщенная группами диэдра, локально конечна, и периодическая группа ограниченного периода, насыщенная группами диэдра, конечна. Более того, Б. Амберг и Л. Казарин [20] доказали, что периодическая группа, насыщенная группами диэдра, локально конечна. В работах [3, 4] доказана локальная конечность групп, насыщенных группами из множеств $\mathfrak{M} = \{L_2(2^m) \times I_n | m, n \in N, m \geq 2\}$, где I_n – элементарная абелева 2-группа порядка 2^n, и $\mathfrak{R} = \{L_2(2^m) \times V\}$, где V – циклическая группа без инволюций. В работах [11, 12] доказана локальная конечность групп, насыщенных группами из множеств $\mathfrak{R} = \{L_2(5) \times I_n | n = 1, 2, ...\}$, где $I_n = \underbrace{Z_2 \times Z_2 \times \cdots \times Z_2}_{n \text{ раз}}$, $\mathfrak{R} = \{L_2(2^n) \times \langle t_m \rangle | n = 1, 2, ..., m = 1, 2, ...\}$, где $(|L_2(2^n)|, |t_m|) = 1$, и $\mathfrak{R} = \{L_2(5) \times \langle v \rangle\}$, где $|v| = 2^k$, $k = 1, 2, ...$. Таким образом, актуальной является поставленная в [6, проблема 3] задача ***изучения групп, насыщенных прямыми произведениями различных конечных групп.***

Примеры периодических не локально конечных групп, насыщенных конечным множеством конечных групп (даже одной группой простого порядка p), хорошо известны – это $B(m, p)$ при $m \geq 2$ и $p \geq 665$ [1]. Однако для случая, когда X состоит из конечного множества конечных простых неабелевых групп, аналогичные примеры не локально конечных групп неизвестны.

В Коуровской тетради [9] А.К. Шлепкиным поставлен вопрос 18.113: ***Пусть $\mathfrak{M}$ – конечное множество конечных простых групп. Верно ли, что периодическая группа, насыщенная группами из $\mathfrak{M}$, изоморфна одной из групп множества $\mathfrak{M}$? Особенно интересен случай, когда $\mathfrak{M}$ одноэлементно.***

Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество всех конечных простых неабелевых групп, в которых централизатор силовской 2-подгруппы содержит нетривиальный элемент нечетного порядка. Как показали А.С. Кондратьев и В.Д. Мазуров [5], множество $\mathfrak{F}$ состоит в точности из групп G следующих двух типов:

1. $G \simeq L_k^\delta(q)$, где $\delta = \pm$, q нечетно, $k = 2^{t_1} + ... + 2^{t_s}$, $0 \leq t_1 < ... < t_s$, $s \geq 2$, и $C = C_1 \times ... \times C_{s-1}$, где C_i – циклическая группа порядка $(q - \delta 1)_{2'}$ при $1 \leq i \leq s - 2$ и порядка $(q - \delta 1)_{2'}/(q - \delta 1, k)_{2'}$ при $i = s - 1$.

2. $G \simeq E_6^\delta(q)$, где q нечетно, и C – циклическая группа порядка $(q - \delta 1)_{2'}/(3, q - \delta 1)$.

Здесь $L_k^+(q)$ и $L_k^-(q)$ означает, соответственно, простые группы $L_k(q)$ и $U_k(q)$, а $E_6^+(q)$ и $E_6^-(q)$ – группы $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$.

В [17] доказан следующий результат: Пусть периодическая группа G насыщена группами из конечного множества конечных простых неабелевых групп $\mathfrak{R}$, имеющего пустое пересечение с $\mathfrak{F}$. Тогда G конечна и изоморфна некоторой группе множества $\mathfrak{R}$. Это утверждение показывает, что если периодическая группа G насыщена группами из конечного множества $\mathfrak{N}$, состоящим из конечных простых неабелевых групп, то в большинстве случаев G конечна и изоморфна одной из групп насыщающего множества $\mathfrak{N}$.

В работе [16] описаны периодические группы, насыщенные конечным подмножеством множества $\mathfrak{S}$ всех конечных простых групп S, обладающих тем свойством, что нечетные порядки элементов централизатора силовской 2-подгруппы из S не превосходят числа 3.

Как вытекает из [5], множеству $\mathfrak{S}$ принадлежит любая конечная простая группа, за исключением групп типа L_n, U_n, E_6, ${}^2E_6$ над некоторыми полями нечетного порядка. В частности, множеству $\mathfrak{S}$ не принадлежит бесконечное множество групп типов L_3 и U_3 над некоторыми полями нечетных характеристик, и в [8] дана классификация периодических групп, насыщенных конечным множеством групп вида $L_3(q)$ и $U_3(q)$, где q нечетно.

В [13] доказано, что периодическая группа, насыщенная множеством, состоящим из групп $L_2(p^n)$ (соответственно $SL_2(p^n)$), где p и n не фиксируются, изоморфна $L_2(Q)$ (соответственно $SL_2(Q)$), где Q – локально конечное поле.

Таким образом, актуальным становится обобщение указанных результатов на случай, когда группа насыщена множеством групп, состоящим из различного рода расширений групп $L_2(p^n)$ и $SL_2(p^n)$, в частности, множеством $\{GL_2(p^n)|n = 1, 2, ...\}$.

В [10, 14, 22] получены некоторые результаты, касающиеся строения силовской p-подгруппы группы G, насыщенной $\{GL_2(p^n)|n = 1, 2, ...\}$, где p – фиксированное простое число, а также доказано, что локально конечная группа, насыщенная группами из множества $\{GL_2(p^n)|n = 1, 2, ...\}$, локально конечна и изоморфна $GL_2(P)$ для локально конечного поля P характеристики p.

Как известно, структура централизатора инволюции при изучении конечных простых неабелевых групп имеет важное значение для их строения. Аналогичная ситуация складывается и при изучении бесконечных периодических групп, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами. Известно, что централизатор инволюции в $L_3(q)$ изоморфен $GL_2(q)$. Поэтому для изучения групп, насыщенных $L_3(q)$, необходимо установить структуру централизатора инволюции, который, как нетрудно показать, насыщен $GL_2(q)$. Отсюда вытекает актуальность еще одного вопроса, поставленного в [6, проблема 6]: ***как устроена группа G, насыщенная группами $GL_n(q)$?***

Цель диссертации. Исследование групп, насыщенных расширениями конечных групп.

Методы исследований. Используются методы абстрактной теории групп.

Научная новизна и практическая ценность. Все результаты диссертационной работы являются новыми. Они носят теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы в теории групп и её приложениях.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались автором на XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2011 г.), на 43-й Всероссийской молодежной школе-конференции (Екатеринбург, 2012 г.), на Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2013 г.), на Международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2014 г.). Результаты диссертации обсуждались на Красноярском городском алгебраическом семинаре (СФУ) и на семинаре «Математические системы» (КрасГАУ).

Основные результаты диссертации.

1. Пусть $\mathfrak{H}$ – конечное непустое множество конечных групп, в каждой из которых силовская 2-подгруппа содержит свой централизатор.

Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из $\mathfrak{H}$, принадлежит множеству $\mathfrak{H}$ (теорема 1).

2. Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех конечных простых неабелевых групп, $\mathfrak{B}$ – множество конечных простых неабелевых групп, у которых в централизаторе силовской 2-подгруппы есть элементы нечетного порядка l, и положим $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \backslash \mathfrak{B}$. Пусть $\{L_1, L_2, ..., L_n\}$ – фиксированный конечный набор элементов множества $\mathfrak{D}$, и пусть группа $L = L_1 \times ... \times L_i \times ... \times L_n$ – прямое произведение групп L_i $(i = \overline{1, n})$.

Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группой L, изоморфна L (теорема 2).

3. Пусть $\mathfrak{L}_3 = \{L_3(q), U_3(q) | q$ нечетно$\}$, $\mathfrak{S}$ – множество всех конечных простых групп S, обладающих тем свойством, что нечетные порядки элементов централизатора силовской 2-подгруппы из S не превосхо-

дят числа 3, $\mathfrak{E}$ – множество конечных элементарных абелевых 2-групп и $\mathfrak{M} = \{L \times E | L \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{L}_3, E \in \mathfrak{E}\}$.

Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из конечного подмножества $\mathfrak{M}$, принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ (теорема 3).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [23] – [31], из них две работы опубликованы в изданиях из перечня ВАК [23, 24].

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы (47 наименований), занимает 57 страницы текста, набранного в пакете LaTeX. Нумерация теорем и лемм сквозная.

Содержание работы

В первой главе диссертации собраны вспомогательные результаты, используемые в доказательстве основных результатов. Некоторые из них были получены в процессе работы и приведены с доказательствами.

Во второй главе диссертации изучаются группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп.

Получены следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ – конечное непустое множество конечных групп, в каждой из которых силовская 2-подгруппа содержит свой централизатор. Если G – периодическая группа, насыщенная группами из $\mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{H}$.*

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех конечных простых неабелевых групп, $\mathfrak{B}$ – множество конечных простых неабелевых групп, у которых в централизаторе силовской 2-подгруппы есть элементы нечетного порядка l, и положим $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \backslash \mathfrak{B}$. Пусть $\{L_1, L_2, ..., L_n\}$ – фиксированный конечный набор элементов множества $\mathfrak{D}$, и пусть группа $L = L_1 \times ... \times L_i \times ... \times L_n$ – прямое произведение групп L_i $(i = \overline{1, n})$.

Теорема 2. *Пусть периодическая группа G насыщена группой L. Тогда $G \simeq L$.*

В третьей главе диссертации изучаются группы, насыщенные конечным множеством групп, каждая из которых является прямым произведением двух групп, одна из них принадлежит множеству $\mathfrak{S} \cup \mathfrak{L}_3$, где $\mathfrak{L}_3 = \{L_3(q), U_3(q) | q$ нечетно$\}$, $\mathfrak{S}$ – множество всех конечных простых групп S, обладающих тем свойством, что нечетные порядки элементов централизатора силовской 2-подгруппы из S не превосходят числа 3, а другая принадлежит множеству $\mathfrak{E}$ конечных элементарных абелевых 2-групп.

Положим $\mathfrak{M} = \{L \times E | L \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{L}_3, E \in \mathfrak{E}\}$.

Получен следующий результат:

Теорема 3. *Если G – периодическая группа, насыщенная конечным множеством групп из $\mathfrak{M}$, то $G \in \mathfrak{M}$.*

В четвертой главе изучаются периодические группы Шункова, насыщенные полными линейными группами размерности два над конечными полями.

Напомним, что под группой Шункова (сопряженно бипримитивно конечной группой [19]) понимается группа, в которой любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную подгруппу и это свойство сохраняется при переходе к факторгруппе по конечной подгруппе.

Доказаны следующие результаты:

Пусть p – фиксированное простое число, $\mathfrak{I}_p = \{GL_2(p^n) | n \in N\}$.

Теорема 4. *Пусть G – периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества $\Im_p$, и K – подгруппа из G, изоморфная группе из $\Im_p$. Тогда $Z(K) \subset Z(G)$ и $Z(G)$ – локально циклическая группа.*

Пусть p – фиксированное простое число, $\mathfrak{I}_p = \{PGL_2(p^n) | n \in N\}$.

Теорема 5. *Периодические группы Шункова, насыщенные группами из множества $\mathfrak{I}_p$, изоморфны $PGL_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля характеристики p.*

Теорема 6. *Периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества $\{GL_2(p^n) | n \in N\}$, изоморфна $GL_2(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики p.*

Теоремы 1, 2 получены в нераздельном соавторстве с А.А. Шлепкиным и опубликованы в работах [23, 25]. Теорема 3 получена автором лично и опубликована в работах [24, 30]. Теоремы 4, 5 получены в нераздельном соавторстве с А.А. Шлепкиным. Теорема 4 опубликована в работе [29]. Теорема 5 опубликована в работе [31]. Теорема 6 получена автором лично.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Д.В. Лыткиной за постановку задачи, помощь в работе и постоянное внимание. Отдельная благодарность А.К. Шлёпкину за ценные советы и полезные замечания при обсуждении работы, за доброжелательность и внимательное отношение.

Литература

1. Адян С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. – М.: Наука, 1975. – 335 с.

2. Беляев В.В. Локально конечные группы Шевалле // Исследования по теории групп. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – С. 39-50.

3. Дуж А.А., Шлепкин А.А. О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп // Владикавказ. мат. журн. – 2012. – Т. 14. № 2. – С. 35-38.

4. Дуж А.А. Периодические группы Шункова, насыщенные прямыми произведениями элементарных абелевых 2-групп и простых групп $L_2(2^m)$ // Сиб. электронные мат. известия. – 2013. – Т. 10. – С. 558-561.

5. Кондратьев А.С., Мазуров В.Д. 2-сигнализаторы конечных простых групп // Алгебра и логика. – 2003. – № 5. – С. 594-623.

6. Кузнецов А.А., Филиппов К.А. Группы, насыщенные заданным множеством групп // Сиб. электронные мат. известия. – 2011. – Т. 8. – С. 230-246.

7. Лысёнок И.Г. Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. РАН. Сер. матем. – 1996. – Т. 60. – С. 4-5.

8. Лыткина Д.В., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А. О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп // Сиб. мат. журн. – 2008. – Т. 49. № 2. – С. 394-399.

9. Нерешенные вопросы теории групп Коуровская тетрадь / Рос. академия наук, Сиб. отделение, Ин-т математики. – Изд. 18-е, доп., включ. Архив решенных задач. – Новосибирск, 2014. – 252 с.

10. Панюшкин Д.Н. Группы Шункова, насыщенные прямыми произведениями различных групп: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Красноярск, 2010. – 66 с.

11. Панюшкин Д.Н., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А. О группе Шункова, насыщенной центральными расширениями циклических групп посредством проективных специальных линейных групп // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16. № 2. – С. 177-185.

12. Панюшкин Д.Н., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А. О периодической группе Шункова, насыщенной центральными расширениями конечных 2-групп посредством группы $L_2(5)$ // Вест. НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2010. – Т. 10. № 1. – С. 88-92.

13. Филиппов К.А., Рубашкин А.Г. О периодических группах, насыщенных $L_2(p^n)$ // Сиб. мат. журн. – Новосибирск, 2005. – № 6. – С. 1388-1392.

14. Шлепкин А.А. О группах, насыщенных $GL_2(p^n)$ // Вест. СибГАУ. – 2013. – № 1. – С. 100-108.

15. Шлепкин А.К., Рубашкин А.Г. Об одном классе периодических групп // Алгебра и логика. – 2005. – Т. 44. № 1. – С. 110-119.

16. Шлепкин А.К., Рубашкин А.Г. О группах, насыщенных конечным множеством групп // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45. № 6. – С. 1397-1400.

17. Шлепкин А.К., Рубашкин А.Г. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами // Мат. системы. – Красноярск, 2004. – № 2. – С. 96-100.

18. Шлепкин А.К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Сб. тез. 3-й междунар. конф. по алгебре. – Красноярск, 1993. – 363 с.

19. Шунков В.П. Об одном классе групп // Алгебра и логика. – 1970. – № 4. – С. 484-496.

20. Amberg B., Kazarin L. Periodic groups saturated by dihedral subgroups // International Algebraic conference dedicated to 70–th birthday of Anatoly Yakovlev, 19–24 june 2010. – Saint–Petersburg, 2010.

21. Ivanov S.V. The free Burnside groups of sufficiently large exponents // Int. J. of Algebra and Computation. – 1994. – P. 2.

22. Shlyopkin A.A. Periodic groups saturated by the groups $GL_2(p^n)$ // Book of abstracts of the international conference on algebra. – Kyiv, 2012. – P. 144.

Работы автора по теме диссертации

23. Сабодах И.В., Шлепкин А.А. Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп // Вест. НГУ. Серия: математика, механика, информатика. – 2012. – Т. 12. № 2. – С. 123-126.

24. Сабодах И.В. О периодических группах, насыщенных конечным множеством групп // Сиб. электронные мат. известия. – 2014. – Т. 11. – С. 321-326.

25. Sabodakh I.V., Shlepkin A.A. Groups saturated by direct products of finite non-abelian simple groups // Journal of mathematical sciences. – New York, May 7, 2014. – V. 198. – № 5. – P. 621-624.

26. Сабодах И.В., Шлепкин А.А. Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп // Студент и научно-технический прогресс: материалы XLIX междунар. науч. студ. конф. 16-20 апреля 2011 / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2011. – С. 21.

27. Сабодах И.В., Шлепкин А.А. Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп // Мат. системы / Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2011. – Вып. 9. – С. 161-164.

28. Сабодах И.В., Шлепкин А.А. Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп // Современные проблемы математики: тез. 43-й Всерос. молодежной школы-конф. / Ин-т математики и механики УрО РАН, 25 января - 5 февраля 2012. – Екатеринбург, 2012. – С. 82.

29. Sabodakh I.V., Shlyopkin A.A. About Shunkov group center with one saturation condition // International conference Mal'tsev meeting. – Novosibirsk, 2013. – P. 124.

30. Сабодах И.В. О группах, насыщенных конечным множеством групп // Международная конференция: Алгебра и математическая логика: теория и приложения, Казань, 2-6 июня 2014. – С. 125.

31. Shlyopkin A.A., Sabodakh I.V. About Shunkov groups saturated by $PGL_2(p^n)$ // Международная конференция: Алгебра и математическая логика: теория и приложения, Казань, 2-6 июня 2014. – С. 131.