На правах рукописи

ПУРГИН АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ

РЕШЕТКИ ПРАВЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2009

Работа выполнена в Красноярском государственном педагогическом университете имени В. П. Астафьева

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Царев Сергей Петрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Егорычев Георгий Петрович,
	кандидат физико-математических наук, профессор Ларин Сергей Васильевич
Ведущая организация:	Институт вычислительного моделирования СО РАН

Защита состоится "22" декабря 2009 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан "___" ноября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Н.А. Бушуева

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Теория решеток развилась в 30-е годы 20 века из приложений частично упорядоченных множеств к геометрическим и алгебраическим свойствам подпространств, подмодулей, подгрупп. Один из создателей теории решеток О. Оре применял решетки в вопросах, связанных с делителями в некоммутативном кольце линейных обыкновенных дифференциальных операторов [10] – [12]. Диссертация посвящена приложениям общих результатов теории решеток к решеткам правых делителей линейных обыкновенных дифференциальных операторов.

В последнее время алгоритмические вопросы теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений получили значительное развитие. Некоторые из ранее полученных алгоритмов нахождения элементарных решений и решений, выражающихся в квадратурах, были реализованы в имеющихся системах компьютерной алгебры Maple и Mathematica в виде больших прикладных пакетов. Продолжается как теоретическое исследование алгоритмов решения отдельных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, так и их реализация (см. [1], [6]–[14]). Для решения конкретных уравнений часто полезно знать, как устроено множество правых делителей данного линейного обыкновенного дифференциального оператора (ЛОДО).

В вопросах, связанных с поиском точных решений линейных дифференциальных уравнений в различных классах функций, разложение соответствующего оператора на множители играет важную роль. В частности, сведение поиска решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения к поиску решений уравнений меньших порядков путем разложения соответствующего оператора широко используется в компьютерной алгебре. Напомним, что необратимый (т.е. такой, для которого не существует обратного) элемент кольца называется *неприво-*

димым, если в любом его разложении в произведение двух множителей из данного кольца один из этих множителей оказывается обратимым, в противном случае элемент называется *приводимым.*

Другими словами, линейный обыкновенный дифференциальный оператор P будем называть неприводимым, если он не факторизуется на операторы более низкого порядка (подробнее см. [1], [6]–[12], [13]–[14]).

Для элементов кольца $\mathbf{K}[D]$ линейных обыкновенных дифференциальных операторов с коэффициентами из дифференциального поля $\mathbf{K}$, вообще говоря, не гарантируется единственность разложения на неприводимые множители. Пусть, например, $\mathbf{K} = \mathbf{C}(x)$ (поле рациональных функций), $D = \frac{d}{dx}$, тогда

$$D^2 = (D + \frac{1}{x-c}) \circ (D - \frac{1}{x-c})$$

для любого $c \in \mathbf{C}$; можно допустить равенство $c = \infty$, считая, что оба множителя в правой части в этом случае равны D.

Рассматривая какое-то одно разложение фиксированного оператора на неприводимые множители, приходится учитывать возможность такого рода неоднозначности. Для решения некоторых задач важна степень неоднозначности разложения, и желательно иметь представление о том, чем могут отличаться другие возможные разложения от данного.

В настоящее время в литературе, и, в частности, в литературе по компьютерной алгебре, вместо термина «разложение на множители» часто прибегают к термину *факторизация.* Разложение на неприводимые множители называют *полной* факторизацией. В диссертации мы будем для краткости говорить просто о факторизации, подразумевая при этом полную факторизацию.

Множество работ 20 века, например, [1], [6]–[12], [13]–[14], посвящено алгоритмам факторизации линейных дифференциальных операторов. Известно ([13]), что произвольный линейный обыкновенный дифференциальный оператор разлагается на неприводимые множители (факторизуется) с конечным числом параметров.

Два (для простоты неприводимых) оператора P и Q будем называть перестановочными в произведении $P \circ Q$, если $P \circ Q = Q_1 \circ P_1, \quad Q_1 \neq P$, $P_1 \neq Q$ [13].

Ставится задача исследования алгебраических свойств множества правых делителей заданного линейного обыкновенного дифференциального оператора в случае отсутствия параметров в факторизациях и в случае, когда все факторы перестановочны.

Относительно недавно был получен алгоритм ([13]), который перечисляет все возможные факторизации заданного линейного обыкновенного дифференциального оператора с рациональными коэффициентами. Но общая структура всех факторизаций операторов неизвестна. Тем самым поставленная задача описания алгебраической структуры множества правых делителей является важной актуальной задачей.

Цель диссертации

Целью настоящей диссертационной работы является изучение алгебраических свойств множества правых делителей заданного линейного обыкновенного дифференциального оператора.

Методика исследования

В работе используются результаты алгебраической теории факторизации линейных дифференциальных операторов, с помощью которых доказывается теорема второй главы диссертации. Для получения остальных результатов используются результаты и методы теории частично упорядоченных множеств и модулярных решеток.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность

Результаты представляют теоретический интерес и могут быть применены в теории решеток и в теории факторизации ЛОДО.

Апробация работы

По материалам диссертации делались доклады на

— международной конференции «Мальцевские чтения» (г. Новосибирск, август 2009),

— Красноярском алгебраическом семинаре при СФУ (март 2009),

— семинаре «Интегрируемые уравнения и стохастические системы» (г. Красноярск, КГПУ, рук. проф. В.М. Логинов, октябрь 2008),

— семинаре «Математические модели и методы интегрирования» (г. Красноярск, ИВМ СО РАН, рук. проф. О.В. Капцов, март 2009).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [15]–[19]. Работа [17] входит в перечень ведущих научных изданий, определенный Высшей аттестационной комиссией.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения и трех глав основного содержания. Список литературы содержит 29 наименований. Работа изложена на 79 страницах. Нумерация утверждений включает последовательно номера главы, параграфа и порядковый номер утверждения в главе.

Содержание работы

Во **введении** дается обзор известных результатов, даются необходимые определения, кратко излагается содержание диссертации и ее основные результаты.

Одним из самых старых результатов, касающихся факторизаций ЛОДО, является следующая теорема Э. Ландау [7].

Предложение 1. *Если* $L = P_1 \circ \ldots \circ P_k = \overline{P}_1 \circ \ldots \circ \overline{P}_{\overline{k}}$ *— две различные полные факторизации одного и того же оператора* L*, то* $k = \overline{k}$*, и между множителями, входящими в первую и вторую факторизации можно установить взаимно однозначное соответствие* $P_i \leftrightarrow \overline{P}_{j_i}$*, такое, что* $ord(P_i) = ord(\overline{P}_{j_i})$*,* $i = 1, \ldots, k$*.*

В некоторой конкретной факторизации могут встретиться совпадающие множители. Мы, однако, различаем операторы, имеющие разные порядковые номера.

В некоммутативном кольце ЛОДО есть правый (и левый) алгоритмы Евклида деления с остатком, а также для любых двух ЛОДО L и P имеется их правое (левое) наименьшее кратное, то есть существуют операторы M и N, такие, что $M \circ L = N \circ P = \mathrm{rLCM}(L, P)$ и порядки M и N минимально возможные. При этом все прочие общие кратные L и P будут делиться справа на $\mathrm{rLCM}(L, P)$.

Через $\mathrm{rGCD}(P_1, P_2)$ будем обозначать оператор, являющийся правым наибольшим общим делителем ненулевых операторов P_1.

Как известно (см. [1], [7]-[14]), для любых двух ЛОДО P_1 и P_2 существуют и единственны $\mathrm{rGCD}(P_1, P_2)$ и $\mathrm{rLCM}(P_1, P_2)$.

Определение 1. *[13] Будем говорить, что оператор* P *(справа) преобразуется в оператор* P_1 *оператором* B *и писать* $P \xrightarrow{B} P_1$ *если* $rGCD(P, B) = 1$ *и* $K = rLCM(P, B) = P_1 \circ B = B_1 \circ P$*. В этом случае операторы* P *и* P_1 *будем называть сходными.*

Отношение сходности является отношением эквивалентности (см. [13]).

Также классическим результатом является следующая теорема Леви [8, 9].

Предложение 2. *Если оператор* $P = P_1 \circ P_2$*, т. е. факторизуется на два неприводимых оператора, то существуют три случая:*

1) Эта факторизация единственная, а операторы P_1 и P_2 являются неперестановочными. Они могут быть как несходными, так и сходными.

2) Существует еще одна, и только одна факторизация $P_1 \circ P_2 = \overline{P_2} \circ \overline{P_1}$. В этом случае операторы P_1 и P_2 являются перестановочными, но не сходными.

3) Существует бесконечно много факторизаций $P = \widetilde{P_1} \circ \widetilde{P_2}$ с операторами $\widetilde{P_i}$, зависящими от одного параметра. В этом случае операторы P_1 и P_2 являются перестановочными и сходными.

В диссертации для исследования этой структуры используются методы одного из важных разделов алгебры — теории частично упорядоченных множеств. Адекватным представлением структуры данных, выдаваемых упомянутым выше алгоритмом нахождения всех факторизаций данного оператора, является решетка — частично упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов существует их точная верхняя и точная нижняя грань.

Введем отношение частичного порядка на множестве всех правых делителей произвольного ЛОДО P следующим образом: пусть P_1 и P_2 – некоторые правые делители оператора P, будем говорить, что $P_1 \leqslant P_2$, если оператор P_1 является правым делителем оператора P_2.

Таким образом заданное частично упорядоченное множество правых делителей произвольного ЛОДО P является решеткой с операциями взятия точной нижней грани $\inf\{P_1, P_2\} = \mathrm{rGCD}(P_1, P_2)$ и точной верхней грани $\sup\{P_1, P_2\} = \mathrm{rLCM}(P_1, P_2)$.

Определение 2. *Будем говорить, что элемент x покрывается элементом y (или y покрывает x) и писать $x \prec y$, если $x < y$, и для любого z такого, что $x \leqslant z \leqslant y$, либо $z = x$, либо $z = y$. В этом случае элемент x будем называть нижним покрытием элемента y, а элемент y — верхним покрытием x.*

Через **n** будем обозначать n-элементную цепь, т. е. решетку, в которой любые 2 элемента сравнимы. Например, решетка **2** изображена на рис. 1 в виде диаграммы Хассе (т. е. элементы решетки обозначены кружками и если $x \prec y$, то элементы x и y соединены отрезком, и элемент x находится ниже элемента y).

Рис. 1 Решетка **2**.

Определение 3. *Длиной конечной цепи будем называть число, на единицу меньшее количества ее элементов.*

Теоретико-решеточные операции будем обозначать следующим образом: $\sup\{x, y\} = x \vee y = x + y$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y = xy$.

Определение 4. *Операцию взятия точной верхней грани множества элементов будем также называть объединением этого множества элементов, а операцию взятия точной нижней грани — соответственно пересечением множества элементов.*

Будем обозначать наибольший элемент решетки L символом 1_L, а наименьший — символом 0_L. Решетку правых делителей оператора P будем обозначать L_P.

Определение 5. *Решетка L называется дистрибутивной, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество $x(y + z) = xy + xz$.*

Определение 6. *Решетка L называется модулярной, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество $x(y + xz) = xy + xz$.*

Целью **первой главы** диссертации является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.3.1. *Для ЛОДО P следующие условия эквивалентны:*

1. Дистрибутивное тождество $x_1(x_2 + x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$ выполняется на решетке правых делителей ЛОДО P;

2. Все факторы оператора P непараметризованы (что эквивалентно конечности решетки правых делителей оператора P).

Определение 7. *Интервалом $I = [x, y]$ называется множество всех таких $z \in L$, что $x \leqslant z \leqslant y$.*

Определение 8. *Под высотой элемента x решетки L будем понимать длину максимальной цепи в интервале $[0_L, x]$*

Высоту элемента x будем обозначать $h(x)$.

Определение 9. *Высотой ограниченной модулярной решетки L будем называть высоту элемента 1_L.*

Предложение 3. *[4, стр. 225] (Жордан-Гельдер) В модулярной решетке конечной высоты любые две максимальные цепи имеют одинаковую длину.*

Как очевидно, это предложение есть переформулировка на языке решеток результата Э. Ландау (предложение 1) о равенстве количества неприводимых множителей в различных факторизациях одного и того же оператора.

Высоту решетки L будем обозначать $h(L)$.

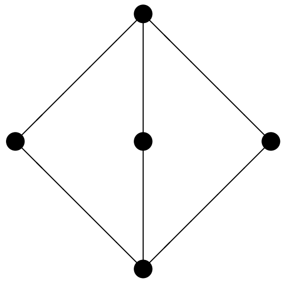

Рис. 2 Решетка M_3.

Доказана следующая лемма, представляющая самостоятельный интерес в теории решеток.

Лемма 1.2.1. *Пусть L — модулярная решетка конечной высоты. Тогда, если решетка M_3 вложима в решетку L, то M_3 вложима в некоторый интервал высоты 2 и решетка L не является дистрибутивной.*

Во **второй главе** диссертации рассматриваются комбинаторные вопросы и приводится алгоритм построения по заданному конечному ч. у. множеству M дистрибутивной решетки его порядковых идеалов в необходимой нам интерпретации.

Определение 10. *Оператор* P *называется Д'Аламберовым, если все его неприводимые множители* P_i *являются операторами первого порядка:* $P_i = D + a_i(x), a_i \in C(x)$.

Следующая теорема устанавливает, что любая дистрибутивная решетка является решеткой правых делителей некоторого ЛОДО.

Теорема 2.4.1. *Пусть* L *– произвольная конечная дистрибутивная решетка высоты* n. *Тогда существует Д'Аламберов линейный обыкновенный дифференциальный оператор* P *порядка* n *(не обязательно единственный) с коэффициентами из дифференциального поля рациональных функций такой, что решетка* L_P *его правых делителей изоморфна* L.

В **третьей главе** диссертации исследуются строение и алгебраические свойства решетки правых делителей L_P линейного обыкновенного дифференциального оператора P, когда все факторы в любой факторизации (т. е. в разложении на неприводимые множители) перестановочны.

Частично упорядоченное множество называется *полной решеткой*, если всякое его непустое подмножество имеет как точную верхнюю, так и точную нижнюю грань [5, стр. 42]. Пусть L – полная решетка. Элемент $a \in L$ называется *компактным*, если для любого подмножества $A \subseteq L$ из $a \leqslant \bigvee A$ следует $a \leqslant \bigvee K$ для некоторого конечного подмножества $K \subseteq A$ [3, стр. 27].

Определение 11. *Элемент решетки* L, *покрывающий элемент* 0_L, *называется атомом, а элемент, покрываемый элементом* 1_L, *называется коатомом.*

Решетка L называется *алгебраической*, если L – полная решетка и любой элемент из L есть точная верхняя грань некоторого множества компактных элементов [3, стр. 27]. Решетка L называется *полумодулярной*, если она удовлетворяет условию покрываемости сверху, т. е. $a \prec b \Rightarrow a + c \prec b + c$ или $a + c = b + c$ [4, стр. 224]. Решетка L называется *геометрической*, если она алгебраическая, полумодулярная, и компактными элементами которой являются конечные объединения атомов и только они [4, стр. 233].

Следующий результат дает алгебраическую характеризацию решетки правых делителей ЛОДО P в случае, когда в любой факторизации оператора P все факторы перестановочны.

Теорема 3.2.1. *Решетка L_P является геометрической тогда и только тогда, когда у оператора P порядка n все факторы перестановочны.*

В следующей теореме рассматривается независимое (в терминах теории решеток) подмножество атомов решетки правых делителей ЛОДО P.

Элементы $a_1, \ldots, a_n$ модулярной решетки L с 0_L назовем *независимыми*, если

$$(a_1 + \ldots a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n)a_i = 0_L$$

для всех $i = 1, \ldots, n$ [5, стр. 108].

Метод пузырьковой сортировки описан в Приложении к тексту диссертации.

Теорема 3.2.11. *Пусть $P = P_1 \circ \ldots \circ P_n$ и все факторы перестановочны. Переместим P_i вправо до $h(\langle \widetilde{P}_i \rangle) = 1$ методом пузырьковой сортировки ($i = 1, \ldots, n-1$). Тогда $\langle \widetilde{P}_1 \rangle, \ldots, \langle \widetilde{P}_{n-1} \rangle, \langle P_n \rangle$ – независимое множество атомов решетки L_p и подрешетка, порожденная этим множеством конечна, дистрибутивна и булева.*

Третий параграф посвящен доказательству теоремы о прямом разложении решетки L_P в случае, когда все факторы перестановочны. В следующей теореме описывается строение решетки L_P в этом случае.

Теорема 3.3.3. *Пусть у оператора P все факторы перестановочны. Тогда существует факторизация*

$$P = P_1 \circ P_2 \circ \ldots \circ P_l \circ P_{k_{11}} \circ \ldots \circ P_{k_{1s_1}} \circ P_{k_{21}} \circ \ldots \circ P_{k_{2s_2}} \circ \ldots \circ P_{k_{r1}} \circ \ldots \circ P_{k_{rs_r}}$$

(в которой мы имеем l (где $l \geqslant 0$) попарно несходных факторов и r (где $r \geqslant 0$) множеств факторов, в каждом из которых все факторы одного цвета, т. е. сходные) и решетка L_P изоморфна прямому произведению l экземпляров **2** *и r экземпляров решеток $M_\infty^{k_i}$ подпространств k_i-мерных векторных пространств, $i = 1, \ldots, r$.*

В силу принципа двойственности из теории частично упорядоченных множеств [4, стр. 17] все результаты настоящей работы справедливы для решеток левых делителей ЛОДО, для чего удобно рассматривать сопряженные операторы, см. [2].

Основные результаты

1. Охарактеризованы в терминах теории решеток линейные обыкновенные дифференциальные операторы, в факторизациях которых отсутствуют параметры.

2. Доказано, что любая конечная дистрибутивная решетка является решеткой правых делителей некоторого линейного обыкновенного дифференциального оператора.

3. Описано строение решеток правых делителей линейных обыкновенных дифференциальных операторов в случае, когда в любой факторизации оператора все факторы перестановочны.

Список литературы

[1] Абрамов С. А., Царев С. П. О периферийной факторизации линейных дифференциальных операторов // Программирование. – 1997. – N 1. – C. 59–67.

[2] Ганжа Е. И., Царев С. П. Классические методы интегрирования гиперболических систем и уравнений второго порядка: Учебное пособие. – Красноярск, 2007. – 118 с.

[3] Горбунов В. А. Алгебраическиая теория квазимногообразий. – Новосибирск.: Научная книга, 1999. – 368 с.

[4] Гретцер Г. Общая теория решеток. – М.: Мир, 1982. – 456 с.

[5] Скорняков Л. А. Элементы теории структур. – М.: Наука. 1982. – 160 с.

[6] van Hoeij M. Factorization of differential operators with rational functions coefficients // *J. Symbolic Comput.* – 1997. – V. 24. – P. 537–561.

[7] Landau E. Über irreduzible Differentialgleichungen // *J. für die reine und angewandte Mathematik.* – 1902. – V. 124. – P. 115–120.

[8] Loewy A. Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen// *Math. Annalen.* – 1903. V. 56. – P. 549–584.

[9] Loewy A. Über vollstandig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen // *Math. Annalen.* – 1906. – V. 62. – P. 89–117.

[10] Ore O. Formale Theorie der linearen Differentialgleichungen (Erster Teil) // *J. für die reine und angewandte Mathematik.* – 1932. – V. 167. – P. 221–234.

[11] Ore O. Formale Theorie der linearen Differentialgleichungen (Zweiter Teil) // *J. für die reine und angewandte Mathematik.* – 1932. – V. 168. – P. 233–252.

[12] Ore O. Theory of non-commutative polynomials // *Annals of Mathematics.* – 1933. – V. 34. – P. 480–508.

[13] Tsarev S. P. An algorithm for complete enumeration of all factorizations of a linear ordinary differential operator // *Proceedings of ISSAC'96* – 1996. – ACM Press. – P. 226–231.

[14] Tsarev S. P. Factorization of linear partial differential operators and Darboux integrability of nonlinear PDEs // *SIGSAM Bulletin 32.* – *N 4* – 1998. – P. 21–28; also "Computer Science"e-print cs/9811002; INTERNET URL: http://xxx.lanl.gov/abs/cs.SC/9811002.

Работы автора по теме диссертации

[15] Пургин А. В. О решетках правых делителей линейных обыкновенных дифференциальных операторов // Программирование. – 2006. – N 2. – С. 40–47.

[16] Пургин А. В. О дистрибутивных решетках правых делителей линейных обыкновенных дифференциальных операторов // Программирование. – 2009. – N 2. – С. 98–104.

[17] Пургин А. В. Дистрибутивные и геометрические решетки правых делителей линейных обыкновенных дифференциальных операторов // Успехи математических наук. – 2009. – т. 64, N 3. – С. 185–188.

[18] Пургин А. В. Решетки правых делителей линейных обыкновенных дифференциальных операторов // Тезисы международной конференции: Аналитические функции многих комплексных переменных, г. Красноярск, 12–18 августа 2009. – Красноярск. – С. 31–33.

[19] Пургин А. В. О структуре факторизаций линейных обыкновенных дифференциальных операторов // Тезисы международной конференции: Мальцевские чтения, г. Новосибирск, 24–28 августа 2009. – Новосибирск. – С. 130.

Подписано в печать .2009 г. Формат 60 х 84 /16
Печать офсетная
Усл. печ. л. Усл. изд. л.
Тираж 110 Заказ №

Редакционно-издательский отдел КГПУ
660049, г. Красноярск, ул. Лебедевой, 79.