На правах рукописи

Пейчева Анастасия Сергеевна

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ СМЕШАННЫМИ ЗАДАЧАМИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Красноярск 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор **Шлапунов Александр Анатольевич**

Официальные оппоненты:
Кац Борис Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет им. Н.И. Лобачевского», кафедра математического анализа, профессор;

Кожанов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН «Институт математики им. С.Л. Соболева» СО РАН, лаборатория дифференциальных и разностных уравнений, главный научный сотрудник.

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону.

Защита состоится «27» июня 2018 г. в 15.00 на заседании диссертационного совета Д 212.099.25 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 34-11.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» и на сайте http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «____» мая 2018 г.

И.о. ученого секретаря диссертационного совета — Нужин Яков Нифантьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Хорошо известно, что интегро-дифференциальные эрмитовы формы тесно связаны с обобщенными постановками краевых задач для дифференциальных уравнений и систем, а также с теоремами существования и единственности для таких задач, см. труды М.С. Аграновича[1], М.И. Вишика[2], С.Л. Соболева[3] и других.

Однако, при изучении краевых задач важны не только теоремы существования и единственности, но и формулы для нахождения их точных и приближенных решений. Классический подход к изучению эллиптических уравнений в гильбертовых пространствах позволяет находить решение краевых задач в (весовых) пространствах соболевского типа в различных областях (гладкие области, липшицевы области, области с коническими точками и реберами и тд.), см. работы С. Агмона[4], Ф.Е. Браудера[5], Ю. Егорова, В. Кондратьева и Б.В. Шульце[6], и многие другие. Не так давно данный подход был адаптирован к изучению широкого класса некоэрцитивных (субэллиптических) смешанных краевых задач, см. труды Н.Н. Тарханова и А.А. Шлапунова[7,8].

Фактически, мы рассматриваем краевые задачи как операторные уравнения в подходящих пространствах Гильберта. Конечно, всегда можно воспользоваться методом Фаэдо-Галеркина, но дополнительная информация о полной системе функций, с помощью которой строятся решения краевых задач, может существенно упростить вычисления. В случае уравнений с самосопряженными операторами обычно применяются спектральные теоремы; например, теорема Гильберта-Шмидта[9], гарантирующая полноту ортогональной системы собственных векторов самосопряженного компактного оператора, а, значит, и возможность построения точных и приближенных решений

---

[1]Агранович, М.С. Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка / М.С. Агранович// Функ. анализ и его прил., **45**(2011), №. 2, 1-22. Агранович, М.С. Спектральные задачи в липшицевых областях / М.С. Агранович// Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 2011, №. 39, 11-35.

[2]Вишик, М.И. О строго эллиптических системах дифференциальных уравнений / М.И. Вишик// Мат. сб., 1951, Т. 29(71), №3.

[3]Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев// Москва, Наука, 1988, 333 с.

[4]Agmon, S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems / S. Agmon// Comm. Pure Appl. Math., **15**(1962), 119-147.

[5]Browder, F.E. On the eigenfunctions and eigenvalues of the general elliptic differential operator / F.E. Browder// Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **39**(1953), 433-439.

[6]Egorov, Yu. Completeness of eigenfunctions of an elliptic operator on a manifold with conical points/ Yu. Egorov, V. Kondratiev, B.-W. Schulze// Russ. J. Math. Phys. **8:3**(2001), 267-274.

[7]Тарханов, Н. Задачи Штурма-Лиувилля в весовых пространствах в областях с негладкими ребрами. I. / Н. Тарханов, А.А. Шлапунов// Математические труды, 2015, Т. 18, №1, 118–189.

[8]Shlapunov, A. On completeness of root functions of Sturm-Liouville problems with discontinuous boundary operators / A. Shlapunov, N. Tarkhanov// Journal of Differential Equations **255**(2013), 3305-3337.

[9]Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров// Москва, ФИЗМАЛИТ, Изд. 4-е, перераб., 2006, 543 с. (на 246 стр.)

операторных уравнений. Поэтому одной из целей будет нахождение соответствующих собственных значений и построение собственных функций краевых задач.

В случае уравнений с несамосопряженным оператором все еще можно использовать концепцию корневых элементов линейного оператора, но для этого опять требуется доказать полноту системы корневых функций, см. например, работу М.В. Келдыша[10] и книги Н. Данфорда и Е.Л. Шварц[11] или И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна[12]. Это замечание справедливо и в том случае, если для нахождения решений операторных уравнений используются численные методы.

По-видимому, впервые разложение по корневым векторам несамосопряженных операторов в пространствах Гильберта обосновал М.В. Келдыш (см. подтекстовую сноску 10). Им была доказана полнота системы корневых векторов слабых возмущений компактных самосопряженных операторов, а соответствующие результаты использованы при изучении задачи Дирихле для слабо возмущенного оператора Лапласа. Применительно к общей теории краевых задач, результаты такого типа хорошо известны для коэрцитивных (эллиптических) задач в областях с гладкими границами и можно найти, например, в работах С. Агмона и Ф.Е. Браудера (см. подтекстовые сноски 4, 5). Корневые функции общих эллиптических задач в весовых пространствах Соболева для областей с коническими точками и ребрами изучались В.А. Кондратьевым[13], Н. Тархановым[14] и многими другими; при этом использование весовых пространств позволяет выбирать решения с предписанным асимптотическим поведением вблизи особых точек границы.

Субэллиптические (некоэрцитивные) краевые задачи для эллиптических систем уравнений были обнаружены в середине XX-го столетия, см. работы С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг[15] и Дж. Кон[16]. Обычно в таких краевых задачах регулярность решений вблизи границы области существенно хуже, чем внутренняя регулярность. Рассматривая некоэрцитивные задачи, мы, по существу, расширяем класс граничных условий, для которых полнота корне-

[10] Келдыш, М.В. О характеристических значениях и характеристических функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений / М.В. Келдыш// Докл. АН СССР, **77**(1951), 11-14.

[11] Dunford, N. Linear Operators, Vol. II, Selfadjoint Operators in Hilbert Space / N. Dunford and J.T. Schwartz// Intersci. Publ., New York, 1963.

[12] Гохберг, И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн// Москва, Наука, 1965, 448 с.

[13] Kondrat'ev, V.A. Completeness of the systems of root functions of elliptic operators in Banach spaces / V.A. Kondrat'ev// Russ. J. Math. Phys., **6:10**(1999), 194-201.

[14] Tarkhanov, N. On the root functions of general elliptic boundary value problems / N. Tarkhanov// Compl. Anal. Oper. Theory, **1**(2006), 115-141.

[15] Agmon, S. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, P. 1. / S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg// Comm. Pure Appl. Math. **12**(1959), 623-727.

[16] Kohn, J.J. Non-coercive boundary value problems / J.J. Kohn, L. Nirenberg// Comm. Pure Appl. Math., **18**(1965), 443-492.

вых функций все еще справедлива. Это может привести к потере регулярности решений задачи вблизи границы, но оправдывается самим характером задач, (см. подтекстовые сноски 7, 8).

В качестве применения теории некоэрцитивных краевых смешанных задач отметим задачу Коши для эллиптических линейных дифференциальных уравнений, находящюю свое применение в физике, электродинамике, механике жидкости и газа и т.д. Широкий класс методов ее изучения описан, например, в монографии Л.А. Айзенберга[17] в комплексном анализе или книге Н.Н.Тарханова[18]. Итерационные методы регуляризации для такого рода задач были указаны в статье В.А. Козлова, В.Г. Мазья, А.В. Фомина[19]. Недавно был разработан новый подход. Он основан на простом наблюдении, что нахождение решений задач Коши для эллиптических уравнений сводится к нахождению (возможно, некоэрцитивных) смешанных краевых задач для сильно эллиптических уравнений с граничными условиями робеновского типа. Текущий прогресс в теории некоэрцитивных задач типа Зарембы позволяет нам усилить результаты А.А. Шлапунова и Н.Н. Тарханова[20] и получить новый критерий разрешимости задачи. Также описан и метод построения ее решения в виде формул карлемановского типа.

Цель диссертационной работы – найти подходящие функциональные пространства для решения некоэрцитивных смешанных задач, описать условия их разрешимости и фредгольмовости, отыскать условия, гарантирующие полноту соответствующих систем корневых функций, а также научиться строить точные и приближенные решения таких краевых задач.

Методы исследования. В работе использованы методы функционального анализа, комплексного анализа, а также метод интегральных представлений.

Достоверность результатов. Основные результаты строго доказаны, опубликованы в рецензируемых журналах и докладывались на научных семинарах и конференциях.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты носят теоретический характер и могут быть применены в теории смешанных краевых задач, теории дифференциальных и псевдодифференциальных операторов в частных производных, в гидродинамике, механике, а также при решении задач математической физики.

Финансовая поддержка. Исследования по теме диссертации проводи-

---

[17]Айзенберг, Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. / Л.А. Айзенберг// Наука, Новосибирск, 1990, 248 с.

[18]Tarkhanov, N.N. *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations* / N.N. Tarkhanov// Berlin: Acad. Verl., 1995, Vol. 7.

[19]Козлов, В.А. Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений / В.А. Козлов, В.Г. Мазья, А.В. Фомин// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **31**:1(1991), 64-74.

[20]Shlapunov, A.A. Mixed problems with a parameter / A.A. Shlapunov, N. Tarkhanov// Russ. J. Math. Phys., **12**(2005), №1, 97-124.

лись при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (гос. задание для Сибирского федерального университета № 1.2604.2017/ПЧ).

Апробация результатов. Основные положения и результаты работы прошли апробацию на следующих семинарах и научных конференциях:

1. 52-ая Международная научная студенческая конференция (Новосибирск, 11-18 апреля 2014 г.).

2. Международная школа-конференция по многомерному комплексному анализу и дифференциальным уравнениям (Красноярск, 20-23 октября 2014 г.).

3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых „Молодежь и наука: проспект Свободный", (Красноярск, 2014-2018гг.).

4. Международная конференция „VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике" (Ростов-на-Дону, 11-16 сентября 2016 г.).

5. Красноярский городской семинар по комплексному анализу и алгебраической геометрии (Сибирский федеральный университет, 2014-2018).

Публикации и личный вклад. Основные результаты диссертационной работы были опубликованы в 4-х статьях ([6], [7], [8], [9]) и 5 тезисах ([1], [2], [3], [4], [5]). Все работы опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций. Результаты статей [6], [7] получены автором самостоятельно, статья [9] опубликована в соавторстве с А.А. Шлапуновым, а [8] – в соавторстве с А. Лаптевым и научным руководителем. Вклад авторов в совместные работы равнозначен и неделим.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 81 наименование, а список работ автора по теме диссертации – 9. Общий объем диссертации: 130 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава диссертационной работы посвящена изложению элементов теории некоэрцитивных задач в пространствах Соболева. Более точно, **параграф 1.1** посвящен обзору литературы, относящейся к тематике работы. В этом параграфе мы вводим все основные обозначения диссертации. Как обычно, для пространства Банаха $\mathcal{X}$ обозначим через $[\mathcal{X}]^k$ декартово произведение k копий $\mathcal{X}$. Это банахово пространство с нормой $\|u\|_{[\mathcal{X}]^k} = \Big(\sum_{j=1}^k \|u_k\|^2_{\mathcal{X}} \Big)^{1/2}$, $u = (u_1, \ldots, u_k) \in [\mathcal{X}]^k$.

В **параграфе 1.2** описаны вложения функциональных пространств, ассоциированных с одним классом эрмитовых форм, в шкалу пространств Соболева-Слободецкого. В этом параграфе мы рассматриваем однородный дифференциальный линейный матричный оператор первого порядка

$$A(x,\partial) = \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\partial^j,$$

где $A_j(x)$ суть некоторые функциональные матрицы размерности $l \times k$ на открытом множестве X из $\mathbb{R}^n$, содержащем замыкание области D.

Мы будем предполагать, что для этого оператора выполняется следующее свойство единственности в малом на X:

если $Au = 0$ в области $U \subset X$ и $u \equiv 0$ на открытом подмножестве $V \subset U$, то $u \equiv 0$ в области U. (1)

Рассмотрим эрмитову форму

$$(u,v)_+ = (Au, Av)_{[L^2(D)]^l} + (a_{0,0}u, v)_{[L^2(D)]^k} + (b_{0,0}u, v)_{[L^2(\partial D\setminus S)]^k},$$

где S – некоторое подмножество границы ∂D области D, $a_{0,0}(x)$ – эрмитова неотрицательная функциональная $(k \times k)$-матрица в D, для компонент которой справедливо, что $a_{0,0}^{(p,q)} \in L^\infty(D)$, а $(k \times k)$-матрица $b_{0,0}$ есть эрмитова неотрицательная $(k \times k)$-матрица, а ее элементы представляют собой измеримые, ограниченные функции на $\partial D \setminus S$; здесь, как обычно, через $L^p(D)$, $1 \le p \le +\infty$, обозначаются пространства Лебега в области D. В диссертации указываются простые достаточные условия, при которых эрмитова форма определяет скалярное произведение.

Обозначим через $C^1(\overline{D}, \overline{S})$ пространство непрерывно дифференцируемых функций в замыкании области D равных нулю в некоторой относительной окрестности множества S в $\overline{D}$, а через $H^+(D)$ – пополнение $[C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$ относительно нормы $\|\cdot\|_+$, индуцированной скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_+$ (в тех случаях, когда форма таковым является). Нам необходимо связать это пространство с уже известной шкалой пространств Соболева-Слободецкого $H^s(D)$, $s \ge 0$. С этой целью обозначим через $H^s(D,S)$ пополнение $[C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$ в $H^s(D)$.

Далее, через A^* будем обозначать формально сопряженный дифференциальный оператор для A. Если оператор A эллиптичен на X, то дифференциальный оператор второго порядка A^*A сильно эллиптичен на X. Следовательно, форма $(\cdot,\cdot)_+$ связана со смешанной задачей для оператора A^*A.

Мы предполагаем, что введенное пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство $[L^2(D)]^k$, что не является слишком ограничительным условием.

Определение 1.2.1. *Эрмитову форму $(\cdot,\cdot)_+$ будем называть коэрцитивной на некотором функциональном, гильбертовом пространстве $\mathcal{Y}$, если найдутся такие положительные постоянные c_1 и c_2, что*

$$c_1\|u\|_{\mathcal{Y}} \le \|u\|_+ \le c_2\|u\|_{\mathcal{Y}} \text{ для всех } u \in \mathcal{Y}.$$

Таким образом, если эрмитова форма $(\cdot,\cdot)_+$ коэрцитивна на $[H^1(D,S)]^k$, то, в частности, пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $[H^1(D,S)]^k$.

Обозначим через ι оператор непрерывного вложения

$$\iota : H^+(D) \to [L^2(D)]^k. \tag{2}$$

Отметим, что из определения нормы $\|\cdot\|_+$ следует непрерывное вложение пространства $H^+(D)$ в пространство $[L^2(D)]^k$, если существует постоянная $c>0$, что выполнено $a_{0,0} \ge cI$ в $\overline{D}$. Через $H^-(D)$ мы будем обозначать пополнение $[H^1(D,S)]^k$ по норме

$$\|u\|_- = \sup_{\substack{v\in H^+(D)\\ v\neq 0}} \frac{|(v,u)_{[L^2(D)]^k}|}{\|v\|_+}.$$

Ясно, что пространство $[L^2(D)]^k$ непрерывно вложено в $H^-(D)$; соответствующее вложение обозначим также через ι'.

Основным результатом данной главы является теорема вложения в шкалу пространств Соболева-Слободецкого для пространства $H^+(D)$.

Теорема 1.2.1. (см. [7]) *Предположим, что коэффициенты оператора A являются бесконечно гладкими в замыкании некоторой окрестности X и найдется постоянная $c>0$ такая, что выполнено*

$$\|b_{0,0}\|_{[L^2(\partial D\setminus S)]^k} \ge c_1\,\|u\|_{[L^2(\partial D\setminus S)]^k} \text{ для всех } u\in [H^1(\partial D,S)]^k.$$

Тогда пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство $[H^{1/2-\epsilon}(D)]^k$ с произвольным $\epsilon>0$, если:

1) *либо существует такая постоянная $c_1>0$, что $a_{0,0}\ge c_1 I$ в $\overline{D}$;*

2) *либо для всех $u\in[C_0^\infty(X)]^k$ справедливо неравенство*

$$(Au,Au)_{[L^2(X)]^l} \ge m\,\|u\|^2_{[L^2(X)]^k}$$

с постоянной $m>0$, независящей от функции u.

Более того, если $\partial D\in C^2$, то в этом случае пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство $[H^{1/2}(D)]^k$.

Для различных классов скалярных операторов с комплекснозначными коэффициентами подобные теоремы были получены А.Н. Полковниковым[21], А.А. Шлапуновым и Н.Н. Тархановым (см. подтекстовую сноску 8).

Теорема 1.2.1 дает возможность в **параграфе 1.3** доказать фредгольмовость одного класса смешанных задач для дифференциальных матричных операторов второго порядка и описать их спектральные свойства. Именно, рассматривается следующая смешанная задача: по заданному $f \in H^-(D)$ найти $u \in H^+(D)$ такую, что

$$(Au, Av)_{[L^2(D)]^l} + \left(b_1^{-1}(\partial_t + b_0)u, v\right)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^k} + \Big(a_1 Au + a_0 u, v\Big)_{[L^2(D)]^k} = \langle f, v\rangle$$

для всех $v \in H^+(D)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает спаривание между элементами $H^-(D)$ и $H^+(D)$, а a_j, b_j суть некоторые известные функциональные матрицы, а t - некоторое касательное векторное поле к ∂D. В данной главе даны условия разрешимости этой смешанной задачи и указаны условия полноты ее корневых функций в ситуации, когда выполнены условия теоремы 1.2.1, см. также работы А.Н. Полковникова, А.А. Шлапунова и Н.Н. Тарханова (см. подтекстовые сноски 8, 21). Данные результаты опубликованы в [7]. Для случая коэрцитивных операторов результаты **главы 1** достаточно хорошо известны, см. работы С. Агмона, М.С. Аграновича, Ф.Е. Браудера (см. подтекстовые сноски 1, 4, 5) и многие другие.

Основная задача **параграфа 1.4** состоит в регуляризации некорректной задачи Коши для матричного эллиптического дифференциального оператора первого порядка A и нахождения формулы ее решения. Более точно, рассмотрен оператор $A = \sum_{j=1}^n A_j(x)\partial_j + A_0(x)$, где $A_j(x)$ – это $(k \times k)$-матрицы, чьи компоненты суть комплекснозначные $C^\infty(X)$-функции.

Далее, рассмотрим некорректную задачу Коши для оператора A в области D с граничными значениями на множестве S: *по заданному распределению f на D, найти распределение u, удовлетворяющее, в подходящем смысле,*

$$\begin{cases} Au &= f \quad \text{в} \quad D, \\ u &= 0 \quad \text{на} \quad S. \end{cases} \tag{3}$$

Как хорошо известно, эта задача некорректна во всех стандартных функциональных пространствах. Несмотря на это, она часто встречается в приложениях.

Для того, чтобы проконтролировать поведение решения задачи (3), естественно ввести следующие функциональные пространства. Для $\varepsilon \geq 0$ рассмотрим эрмитову форму $\varepsilon \geq 0$:

$$(u, v)_{+,\varepsilon} = \varepsilon\,(u, v)_{[L^2(\partial D)]^k} + (Au, Av)_{[L^2(D)]^k}$$

[21] Polkovnikov, A.N. On spectral properties of a non-coercive mixed problem associated with the $\overline{\partial}$-operator / A.N. Polkovnikov, A.A. Shlapunov// Journal of Siberian Federal University, Math. and Phys., №6, 2013(2), 247-261.

на пространстве $[C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$. Как следует из Теоремы 1.2.1, соответствующее пополнение $H^+(D)$ пространства $[C^1(\overline{D}, \overline{S})]^k$ непрерывно вложено в пространство $[H^{1/2-\epsilon}(D)]^k$ с произвольным $\epsilon > 0$. Легко увидеть, что если искать ее решение в пространстве $H^+(D)$, то ее можно интерпретировать как исследование ограниченного линейного оператора

$$A : H^+(D; S) \to [L^2(D)]^k. \tag{4}$$

Нетрудно понять, что если $f \in [L^2(D)]^k$, то функция $u \in H^+(D)$ будет решением задачи (3) тогда и только тогда, когда для всех $v \in H^+(D)$ верно, что

$$(Au, Av)_{[L^2(D)]^k} = (f, Av)_{[L^2(D)]^k}. \tag{5}$$

Одной из важных целей **параграфа 1.4** является получение условия разрешимости задачи (3) с помощью подходящего возмущения задачи (5).

Задача 1.4.1. *Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1]$. По заданной функции $f \in [L^2(D)]^k$, найти элемент $u_\varepsilon \in H^+(D)$ такой, что для любого $v \in H^+(D)$ будет выполнено*

$$(Au_\varepsilon, Av)_{[L^2(D)]^k} + \varepsilon\,(u_\varepsilon, v)_{[L^2(\partial D \setminus \overline{S})]^k} = (f, Av)_{[L^2(D)]^k}. \tag{6}$$

Принципиальная разница между задачами (3) и 1.4.1 в том, что последняя корректна в пространстве $H^+(D)$.

Как следует из результатов параграфа о спектральных свойствах первой главы, для любого $\varepsilon > 0$ и $f \in [L^2(D)]^k$ существует единственное решение $u_\varepsilon(f) \in H^+(D)$ задачи 1.4.1. Более того, для него выполнено неравенство

$$\|u_\varepsilon(f)\|_{+,\varepsilon} \le \|f\|_{[L^2(D)]^k}.$$

Опишем условия разрешимости задачи (3) с помощью поведения семейства $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$.

Теорема 1.4.1. (см. [6]) *Семейство $\{\|u_\varepsilon(f)\|_{+,1}\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ ограниченно тогда и только тогда, когда существует такая функция $u \in H^+(D)$, что выполнено (5). Более того, $\lim_{\varepsilon\to+0} \|Au_\varepsilon(f) - f\|_{[L^2(D)]^k} = 0$ и последовательность $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится слабо в $H^+(D)$ при $\varepsilon \to +0$ к решению $u \in H^+(D)$ задачи (3). Более того, $\{u_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ сходится к u в $[H^s(D)]^k$ для всех $s < 1/2$ также и в пространстве $[H^1_{\mathrm{loc}}(D \cup S)]^k$.*

Наконец, пользуясь теоремой 1.4.1, мы строим формулы Карлемана для решения задачи Коши (3).

Подобные результаты для системы Коши-Римана были получены в работе А.А. Шлапунова и А.Н. Полковникова[22]. В работе А.А. Шлапунова и Н.Н. Тарханова (см. подтекстовую сноску 20) получены результаты для общих

[22]Полковников, А.Н. О построении формул Карлемана с помощью смешанных задач с граничными условиями, содержащими параметр / А.Н. Полковников, А.А. Шлапунов// Сиб. матем. журн. Том 58 (2017), N. 4 (344), с. 870–884.

эллиптических систем в несколько других пространствах, где получаются более слабые результаты о сходимости регуляризуюшей последовательности.

Во **второй главе** рассмотрены три краевые задачи Штурма-Лиувилля (две из которых будут коэрцитивными, а одна некоэрцитивная) для оператора Ламе с граничными условиями робэновского типа в весовых пространствах в ограниченной липшицевой области D. В **параграфе 2.1** сформулированы сами задачи и доказаны теоремы вложения для пространств, ассоциированных с весовыми эрмитовыми формами, в шкалу весовых пространств Соболева-Слободецкого, а также рассмотрен вопрос фредгольмовости таких задач. Более точно, обозначим через $\mathcal{L}_0$ оператор типа Ламе в $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{L}_0(x,\partial) = -\mu(x) I_n \Delta_n - (\lambda(x)+\mu(x))\nabla_n \mathrm{div}_n,$$

где I_n – единичная матрица, размерности $(n\times n)$, Δ_n – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$,∇_n есть оператор градиента в $\mathbb{R}^n$, div_n – оператор дивергенции в $\mathbb{R}^n$, а μ, λ – вещественные функции из пространства Лебега $L^\infty(D)$ такие, что $\mu \geq \kappa$, $(2\mu+\lambda) \geq \kappa$ для некоторой постоянной $\kappa > 0$. При $n = 3$ и $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 0$ этот оператор играет важную роль при описании смещений упругого тела под нагрузкой. Также это может служить одной из линеаризаций стационарной версии уравнений Навье-Стокса для сжимаемой жидкости при заданном (известном) давлении.

Хорошо известно, что если функции μ, λ принадлежат пространству Липшица $C^{0,1}(\overline{D})$, то при описанных выше условиях оператор Ламе является сильно эллиптическим. Более того, существует такой формально самосопряженный «неотрицательный» оператор $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}(x,\partial) = \mathfrak{D}^*\mathfrak{D}$, который отличается от оператора $\mathcal{L}_0(x,\partial)$ слагаемыми младшего порядка; здесь $\mathfrak{D} = \sum_{j=1}^n \mathfrak{D}_j \partial_j$ – дифференциальный $(k\times n)$-матричный оператор первого порядка, а $\mathfrak{D}^*$ – формально сопряженный к нему. В главе 2 были рассмотрены три возможных факторизации $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}(x,\partial)$. Для того, чтобы ввести третью из них, обозначим через $M_1 \otimes M_2$ произведение Кронекера матриц M_1 и M_2, rot_n понимается как $\left(\frac{(n^2-n)}{2}\times n\right)$-матричный оператор, строки которого имеют вид $(-1)^{i+j}\left(\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$, $1 \leq i < j \leq n$, где $\vec{e}_i$ – единичный вектор в $\mathbb{R}^n$ с i-той компонентой, равной единице, представляющий завихренности (или стандартный оператор rot для $n = 2, n = 3$), и за $\mathbb{D}_n$ мы обозначим $\left(\frac{(n^2+n)}{2}\times n\right)$-матричный оператор, строки которого имеют вид $\sqrt{2}\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, и $\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} + \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ при $1 \leq i < j \leq n$, представляющий деформацию (напряжение). Итак, примерами оператора $\mathfrak{D}$ являются:

$$\mathfrak{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\ \mathbb{D}_n \\ \sqrt{\lambda}\mathrm{div}_n \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\ I_n \otimes \nabla_n \\ \sqrt{\mu+\lambda}\ \mathrm{div}_n, \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D}^{(3)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\ \mathrm{rot}_n \\ \sqrt{2\mu+\lambda}\mathrm{div}_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, стоит отметить, что размерности матричных операторов $\mathfrak{D}^{(j)}$, $j=\overline{1,3}$, и ограничения на μ,λ будут следующими: $k_1=(n^2+n)/2+1$ и $\lambda\geq 0$, $(\mu+\lambda)\geq 0$ для первого оператора; $k_2=n^2+1$ и $\lambda\geq 0$, $(2\mu+\lambda)\geq\kappa>0$ для второго оператора; $k_3=(n^2-n)/2+1$ и $\lambda\geq 0$, $(2\mu+\lambda)\geq\kappa>0$ для третьего оператора. Ранги символов любого из операторов $\mathfrak{D}^{(j)}$ максимальны, а сами операторы $\mathfrak{D}^{(j)}$ являются (переопределенными) эллиптическими.

Зафиксируем связное подмножество S на ∂D, открытое в относительной топологии на границе и имеющее кусочно-гладкую границу на гиперповерхности ∂D. Также зафиксируем подмножество Y из ∂S и весовую функцию ρ, связанную с ними. Кроме того, мы будем предполагать, что функции $\mu,\lambda\in C^{0,1}(D)\cap L^\infty(D)$, $\rho\nabla_n\mu\in[L^\infty(D)]^n$, $\rho\nabla_n\lambda\in[L^\infty(D)]^n$.

Рассмотрим $(n\times n)$-матричный линейный дифференциальный оператор $\mathfrak{A}$ в области D, ассоциированный с $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}(x,\partial)=\mathfrak{D}^*\mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ – один из операторов $\mathfrak{D}^{(j)}$, $j=1,2,3$:

$$\mathfrak{A}u=\mathfrak{D}^*\mathfrak{D}u+a_1\ I_n\otimes\nabla_n+a_0(x)u, \tag{7}$$

здесь a_0 и a_1 суть функциональные $(n\times n)$- и $(n\times n^2)$- матрицы соответственно, а для их компонент $a_j^{(p,q)}$ справедливо, что $\rho^2 a_0^{(p,q)}\in L^\infty(D)$, $\rho a_1^{(p,q)}\in L^\infty(D)$.

Пусть $\nu_{\mathfrak{D},\partial D}=\sum_{j=1}^n\mathfrak{D}_j^*\nu_j\mathfrak{D}$ – конормальная производная, определенная относительно оператора $\mathfrak{D}$, где $\nu=(\nu_1,\dots\nu_n)$ – векторное поле, состоящее из единичных внешних нормалей по отношению к ∂D (определенное для почти всех точек $x\in\partial D$). Очевидно, что два оператора типа $\nu_{\mathfrak{D},\partial D}$, рассмотренные выше, различаются на матрицу, элементы которой суть касательные производные к границе.

Теперь введем в рассмотрение граничный оператор

$$\mathfrak{B}=b_1(x)\nu_{\mathfrak{D},\partial D}+b_0(x)+\partial_\tau,$$

где ∂_τ – это $(n\times n)$-матрица, состоящая из касательных производных к ∂D. О $(n\times n)$-матрицах $b_0(x)$ и $b_1(x)$ будем предполагать, что их компоненты локально ограниченные, измеримые функции на $\partial D\setminus Y$. Мы позволим матрице $b_1(x)$ вырождаться (и даже исчезать) на открытом связном подмножестве S поверхности ∂D, имеющем кусочно-гладкую границу ∂S; в этом случае предполагается, что матрица $b_0(x)$ не вырождена на S, а компоненты касательной составляющей ∂_τ равны нулю на S. Также, в случае если $S\neq\emptyset$, будем требовать, чтобы $b_1(x)|_S=0$, $\partial_\tau|_S=0$, а $b_0(x)$ не вырождалась на S.

Обычно для задания краевых условий первого порядка к оператору типа Ламе используется граничный тензор напряжений σ_T с компонентами

$$\sigma_T^{i,j}=\mu\,\delta_{i,j}\sum_{k=1}^n\nu_k\frac{\partial}{\partial x_k}+\mu\,\nu_j\frac{\partial}{\partial x_i}+\lambda\,\nu_i\frac{\partial}{\partial x_j},\ 1\leq i,j\leq n. \tag{8}$$

Граничный тензор напряжений σ_T с компонентами (8) связан с конормальными производными, определенными относительно операторов $\mathfrak{D}^{(j)}$, следующим образом:

$$\sigma_T = \nu_{\mathfrak{D}^{(1)},\partial D} = \nu_{\mathfrak{D}^{(2)},\partial D} + \mu(x)\partial_{\tau_0} = \nu_{\mathfrak{D}^{(3)},\partial D} + 2\mu(x)\partial_{\tau_0}$$

с касательной составляющей

$$\partial_{\tau_0} = \left((\nu(x)\mathrm{div}_\mathrm{n})^\mathrm{T} - \nu(\mathrm{x})\mathrm{div}_\mathrm{n}\right).$$

Таким образом, будем искать решение следующей смешанной задачи: *по данной обобщенной n-векторной функции f в D, найти n-векторное распределение u в D удовлетворяющее в подходящем смысле*

$$\begin{cases} \mathfrak{A}u &= f \quad \text{в} \quad D, \\ \mathfrak{B}u &= 0 \quad \text{на} \quad \partial D. \end{cases} \tag{9}$$

При $S = \partial D$ мы получаем классическую задачу Дирихле для сильно эллиптических операторов. Наличие коэрцитивной оценки для такой задачи следует из неравенства Гординга для сильно эллиптических операторов. Известно, что для произвольного (вообще говоря, переопределенного) эллиптического $(l \times k)$-матричного оператора A порядка p оператор $\mathfrak{A} = A^*A$ порядка $2p$ сильно эллиптичен. Если для любой функции $u \in C_0^\infty(D)$ из того, что $Au = 0$ следует, что $u = 0$, то существует такая постоянная $c > 0$, что

$$\|u\|^2_{[H^p(D)]^k} \le c\|Au\|^2_{[L^2(D)]^l}.$$

Однако, эти стандартные рассуждения приводят к теореме существования и коэрцитивности для задачи только в случае $S = \partial D$. Нас в первую очередь будет интересовать случай $S \neq \partial D$.

Во второй главе мы покажем, что при $S \neq \partial D$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(1)}$ или $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(2)}$ смешанная задача (9) коэрцитивна в весовых пространствах Соболева, но при $S \neq \partial D$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(3)}$ она некоэрцитивна в них.

Так как при изучении спектральных свойств задачи мы будем использовать метод возмущения компактных самосопряженных операторов, то расщепим коэффициенты

$$a_0 = a_{0,0} + \delta a_0,\ b_0 = b_{0,0} + \delta b_0,$$

где $a_{0,0}(x)$ – эрмитова неотрицательная функциональная $(n \times n)$-матрица в D, для компонент которой справедливо, что $\rho^2 a_{0,0}^{(p,q)} \in L^\infty(D)$, а $(n \times n)$-матрица $b_{0,0}$ выбрана так, что $(n \times n)$-матрица $b_1^{-1}b_{0,0}$ (при условии существования обратной к b_1) была бы эрмитовой неотрицательной и ее элементы представляли бы собой локально измеримые, ограниченные функции на $\partial D \setminus S$.

Пусть $s \in \mathbb{Z}_+$. Выберем какое-нибудь замкнутое множество $Y \subset \overline{D}$, расположенное на ∂D. Мы предположим, что $\rho \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \setminus Y)$, т.е. она есть C^1-гладкая функция в $\overline{D} \setminus Y$ такая, что $0 \leq \rho(x) \leq 1$, $x \in \overline{D}$, $\frac{\partial \rho}{\partial x_j} \in L^\infty(D)$, $1 \leq j \leq n$ и $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in Y$. Теперь, для $\gamma \in \mathbb{R}$ обозначим через $H^{0,\gamma}(D)$ и $H^{1,\gamma}(D)$ пополнения множеств $C^0(\overline{D}, Y)$ и $C^1(\overline{D}, Y)$, соответственно, относительно норм, индуцированных скалярными произведениями

$$(u, v)_{H^{s,\gamma}(D)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \left(\rho^{|\alpha| - \gamma - s} \partial^\alpha u, \rho^{|\alpha| - \gamma - s} \partial^\alpha v \right)_{L^2(D)}, \ s = 0, 1.$$

Эти пространства естественно называть весовыми пространствами Лебега и Соболева, соответственно.

Кроме того, для $0 < s < 1$ введем весовые пространства Соболева-Слободецкого как пополнение множества $C^1(\overline{D}, Y)$ по норме, индуцированной скалярным произведением

$$(u, v)_{H^{s,\gamma}(D)} = (u, v)_{H^{0,\gamma+s}(D)} + (\rho^{-\gamma} u, \rho^{-\gamma} v)_{H^s(D)}.$$

Случай, когда $\rho \equiv 1$ соответствует обычным пространствам Соболева и Соболева-Слободецкого.

Если множество Y расположено на $(n-2)$-мерной поверхности на ∂D, то через $H^{0,\gamma}(\partial D)$ обозначим весовое пространство Лебега, т.е. пополнение пространства $C^0(\partial D, Y)$ по следующей норме:

$$\|u\|_{H^{0,\gamma}(\partial D)} = \|\rho^{-\gamma} u\|_{L^2(\partial D)}.$$

Также при $0 < s < 1$ будем обозначать через $H^{s,\gamma}(\partial D)$ весовое пространство Соболева-Слободецкого на ∂D, т.е. пополнение $C^{0,1}(\partial D, Y)$ по соответствующей норме, порожденной следующим скалярным произведением

$$(u, v)_{H^{s,\gamma}(\partial D)} = (u, v)_{H^{0,\gamma+s}(\partial D)} + (\rho^{-\gamma} u, \rho^{-\gamma} v)_{H^s(\partial D)};$$

здесь $H^s(\partial D)$ – это обычное пространство Соболева-Слободецкого на ∂D, а $C^{0,1}(\partial D, Y)$ – это подмножество липшицевых функций $C^{0,1}(\partial D)$, исчезающих в окрестности Y в относительной топологии на ∂D.

На пространстве $[C^1(\overline{D}, \overline{S} \cup Y)]^n$ рассмотрим следующую эрмитову форму:

$$(u, v)_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}} = \left(\mathfrak{D}^{(j)} u, \mathfrak{D}^{(j)} v \right)_{[H^{0,\gamma}(D)]^{k_j}} + (a_{0,0} u, v)_{[H^{0,\gamma}(D)]^n} + (b_1^{-1} b_{0,0} u, v)_{[H^{0,\gamma}(\partial D \setminus S)]^n}.$$

Легко понять, что форма $(\cdot, \cdot)_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(2)}}$ сильно коэрцитивна на весовом пространстве $[H^{1,\gamma}(D, S \cup Y)]^n$ для всех $\gamma \in \mathbb{R}$, т.е.

$$\|\mathfrak{D}^{(2)} u\|^2_{[H^{0,\gamma}(D)]^{k_2}} \geq c \|\nabla_n u_j\|^2_{H^{0,\gamma}(D)} \text{ для всех } u \in [H^{1,\gamma}(D, S \cup Y)]^n$$

с некоторой постоянной c, независящей от u. Формы, соответствующие операторам $\mathfrak{D}^{(1)}$ и $\mathfrak{D}^{(3)}$, не являются сильно коэрцитивными в общем случае. Например, при $\rho = 1$ для оператора $\mathfrak{D}^{(1)}$ равенство $\mathfrak{D}^{(1)}u = 0$ выполняется для некоторого непостоянного вектора $u = x_i\vec{e}_j - x_j\vec{e}_i$, $i \neq j$, а для оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$ выполняется аналогичное равенство $\mathfrak{D}^{(3)}\nabla_n h = 0$ в D для всех гармонических функций h в D. Однако, форма, соответствующая оператору $\mathfrak{D}^{(1)}$, будет также коэрцитивна при разумных допущениях на $[H^{1,\gamma}(D, S\cup Y)]^n$ для всех $\gamma \in \mathbb{R}$, т.е.

$$\|u\|^2_{[H^{0,\gamma}(D)]^n} + \|\mathfrak{D}^{(1)}u\|^2_{[H^{0,\gamma}(D)]^{k_1}} \geq c\|u\|^2_{[H^{1,\gamma}(D)]^n} \text{ для всех } u \in [H^{1,\gamma}(D, S\cup Y)]^n$$

(при $\rho = 1$ это известное неравенство Корна).

Обозначим через $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D)$ пополнение $[C^1(\overline{D}, \overline{S}\cup Y)]^n$ относительно нормы $\|\cdot\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}}$, индуцированной скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}}$ (в тех случаях, когда форма таковым является). Для операторов $\mathfrak{D}^{(1)}$ и $\mathfrak{D}^{(2)}$ утверждения о вложении в шкалу весовых пространств Соболева-Слободецкого вполне ожидаемы и получаются достаточно просто (см. [9, Lemma 3.2]).

Следующее утверждение описывает условия, при которых справедливы непрерывные вложения $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ в шкалу пространств Соболева-Слободецкого.

Обозначим через $h^s(D)$ пространство решений уравнения $\mathcal{L}_0 u = 0$ в области D, принадлежащих пространству Соболева $[H^s(D)]^n$; поскольку оператор $\mathcal{L}_0$ эллиптичен, то $h^s(D) \subset [C^\infty(D)]^n$, если $\mu, \lambda \in C^\infty(\overline{D})$.

Основными результатами **главы 2** является следующие четыре теоремы.
Теорема 2.1.1. (см. [9]) *Пусть коэффициенты μ, λ лежат в классе $C^\infty(X)$ в некоторой окрестности X компакта $\overline{D}$ в $\mathbb{R}^n$, а $\rho \equiv 1$. Тогда:*
1) пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ непрерывно вложено в $[L^2(D)]^n$, если выполнено

$$\rho^2 a_{0,0} \geq qI_n \text{ в } \overline{D}\setminus Y; \tag{10}$$

2) пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ непрерывно вложено в $[H^{1/2-\varepsilon}(D)]^n$ для любого $\varepsilon > 0$, если

$$b_1^{-1} b_{0,0} \geq c_1 I_n \text{ на } \partial D\setminus S \text{ с некоторой постоянной } c_1 > 0. \tag{11}$$

Более того, если $\partial D \in C^2$, то из (11) следует, что пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ непрерывно вложено в пространство $[H^{1/2}(D)]^n$.

Для скалярных сильно эллиптических операторов с комплекснозначными коэффициентами подобная теорема была получена Н.Н. Тархановым и А.А. Шлапуновым (см. подтекстовую сноску 7).

Из теоремы 2.1.1 нетрудно извлечь следующее утверждение.
Следствие 2.1.1. (см. [9]) *Пусть μ, $\lambda \in C^\infty(X)$ и выполнены (10), (11). Тогда пространство $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ непрерывно вложено в $[H^{1/2-\varepsilon,\gamma}(D)]^n$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Если $n = 2$ и $\mu = 1 = -\lambda$, то оператор $\mathfrak{D}^{(3)}$ можно отождествить с оператором Коши-Римана в $\mathbb{C}$. Это означает, что, вообще говоря, в условиях теоремы 2.1.1, при $S = \emptyset$ и $\partial D \in C^2$ непрерывное вложение $H^+_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D) \to [H^{1/2}(D)]^n$ является не улучшаемым по шкале пространств Соболева-Слободецкого, см., также, примеры 1, 2 из работы А.А. Шлапунова и А.Н. Полковникова (см. подтекстовую сноску 21) в случае, когда область D – единичный шар.

Перейдем к рассмотрению обобщенной постановки задачи Штурма-Лиувилля для операторов типа Ламе. С этой целью, предположим, что $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ непрерывно вложено в $H^{0,\gamma}(D)$ и обозначим через пространство $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ пополнение $[H^1(D,S)]^n$ по соответствующей норме

$$\|u\|_{-,\gamma,\mathfrak{D}} = \sup_{\substack{v \in [H^1(D,S)]^n \\ v \neq 0}} \frac{|(v,u)_{[H^{0,\gamma}(D)]^n}|}{\|v\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}}}.$$

Пространство $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ топологически изоморфно сопряженному $(H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D))^*$, что описано, например, в работе М. Шехтера[23]. Соответствующее спаривание, определяющее изоморфизм, обозначим через $\langle v, u\rangle_\gamma$.

Предположим теперь, что

$$\left| \left(b_1^{-1}(\delta b_0 + \partial_\tau)u, v\right)_{[L^2(\partial D \setminus S)]^n} + \left(a_1\ I_n \otimes \nabla_n u + \delta a_0\, u, v\right)_{[L^2(D)]^n} \right| \leq \tag{12}$$

$$\leq c\, \|u\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}} \|v\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}}$$

для всех $u, v \in [H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D, S \cup Y)]^n$, где c – некоторая положительная постоянная, независящая от u и v. При выполнении условия (12), для каждого фиксированного элемента $u \in H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ эрмитова форма

$$Q(u,v) = (\mathfrak{D}u, \mathfrak{D}v)_{[H^{0,\gamma}(D)]^k} + \left(b_1^{-1} b_0 u, v\right)_{[H^{0,\gamma}(\partial D \setminus S)]^n} +$$

$$+\left(a_1\ I_n \otimes \nabla_n u - 2\gamma \rho^{-1} (\mathfrak{D}\rho)^* \mathfrak{D} u + a_0 u, v\right)_{[H^{0,\gamma}(D)]^k}$$

определяет непрерывный линейный функционал f на пространстве $H^{+,\gamma}(D)$ с помощью равенства

$$f(v) := \overline{Q(u,v)} \text{ для всех } v \in H^{+,\gamma}(D).$$

Тогда найдется единственный элемент $H^{-,\gamma}(D)$, который мы обозначим через Lu, такой, что $f(v) = \langle v, Lu\rangle_\gamma$ для всех $v \in H^{+,\gamma}(D)$. Таким образом, мы определили линейный оператор

$$L : H^{+,\gamma}(D) \to H^{-,\gamma}(D).$$

[23] Schechter, M.Negative norms and boundary problems / M.Schechter// Ann. Math. **72**(1960), №3, 581-593.

Как следует из (12) оператор L ограничен. Ограниченный линейный оператор L_0, определенный этим же способом с помощью эрмитовой формы $(\cdot,\cdot)_{+,\gamma}$:

$$(v,u)_{+,\gamma,\mathfrak{D}} = \langle v, L_0 u\rangle_\gamma, \quad L_0 : H^{+,\gamma}(D) \to H^{-,\gamma}(D), \tag{13}$$

для всех $u,v \in H^{+,\gamma}(D)$, соответствует случаю $a_1 = \rho^{-1}\mathfrak{D}^*\rho$, $a_0 = a_{0,0}$ и $b_0 = b_{0,0}$.

Теперь мы можем сформулировать задачу (9) в обобщенной постановке в весовых пространствах: *по заданному элементу $f \in H^{-,\gamma}(D)$, найти такой $u \in H^{+,\gamma}(D)$, что*

$$\overline{Q(u,v)} = \langle v, f\rangle_\gamma \text{ для всех } v \in H^{+,\gamma}(D). \tag{14}$$

Исследуем задачу (14) стандартными методами функционального анализа, аналогично коэрцитивному случаю. В коэрцитивном случае (соответствующий операторам $\mathfrak{D}^{(1)}$, $\mathfrak{D}^{(2)}$) мы можем расширить класс возмущений. С этой целью зафиксируем некоторую полную систему $\{t_j\}$ среди касательных векторов (с ограниченными интегрируемыми компонентами). Это могут быть, например, вектора

$$\vec{e}_j\nu_i - \vec{e}_i\nu_j, \quad i > j.$$

Тогда $\partial_\tau = \sum_{i>l} d_{i,l}(x)\partial_{t_{i,l}}$ с некоторыми $(n\times n)$-матрицами $d_{i,l}(x)$.

Произведем следующее расщепление

$$\delta b_0 = \delta b_0^{(s)} + \delta b_0^{(c)}, \ \ \delta a_0 = \delta a_0^{(s)} + \delta a_0^{(c)}, \ \ a_1 \nabla_n \otimes I_n =$$

$$= 2\gamma\rho^{-1}(\mathfrak{D}\rho)^*\mathfrak{D} + (a_1^{(s)} + a_1^{(c)})\nabla_n \otimes I_n,$$

так, чтобы $\delta b_0^{(c)}$, $\delta a_0^{(c)}$ и $a_1^{(c)}$ индуцировали компактные возмущения оператора $L_{\mathfrak{D}}$, а слагаемые $\delta b_0^{(s)}$, $\delta a_0^{(s)}$ и $a_1^{(s)}$ – достаточно маленькие.

Теорема 2.1.2. (см. [9]) *Пусть $j=1$ или $j=2$. Допустим $d_{i,l} \in [C^{0,1}(\partial D \setminus S)]^n$, $i > l$. Кроме того, пусть выполнено неравенство (10) или $\rho \equiv 1$. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\rho^{2-\varepsilon}\delta a_0^{(c)} \in [L^\infty(D)]^n$, $\rho^{1-\varepsilon}a_1^{(c)} \in [L^\infty(D)]^n$, $\rho^{1-\varepsilon}\delta b_0^{(c)} \in [L^\infty(\partial D\setminus S)]^n$, и*

$$|(b_1^{-1}(\delta b_0^{(s)} + \partial_\tau)u, v)_{[L^2(\partial D\setminus S)]^n} + (a_1^{(s)}\ I_n \otimes \nabla_n u + \delta a_0^{(s)}\, u, v)_{[L^2(D)]^n} \le |$$

$$\le M\, \|u\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}} \|v\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(j)}}$$

для всех $u,v \in [H^1(D, S\cup Y)]^n$ с некоторой постоянной $0 < M < 1$, независящей от u и v, то задача (9) фредгольмова.

Для оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$, порождающего некоэрцитивную эрмитову форму, мы произведем расщепление немного по-другому:

$$\tilde{a}_1 = 2\gamma\rho^{-1}(\mathfrak{D}^{(3)}\rho)^* + \tilde{a}_1^{(s)} + \tilde{a}_1^{(c)}.$$

Теорема 2.1.3. (см. [9]) *Пусть $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(3)}$, справедливо (11), λ, μ бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности $\overline{D}$, $\tau = 0$, $\delta b_0^{(c)} = 0$. Кроме того, пусть выполнено неравенство (10) или $\rho \equiv 1$. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что реализуются вложения $\rho^{2-\varepsilon}\delta a_0^{(c)} \in [L^\infty(D)]^n$, $\rho^{1-\varepsilon} a_1^{(c)} \in [L^\infty(D)]^n$, и*

$$|(b_1^{-1}\delta b_0^{(s)} u, v)_{[L^2(\partial D\setminus S)]^n} + (\tilde{a}_1^{(s)}\mathfrak{D}^{(3)}u + \delta a_0^{(s)}\, u, v)_{[L^2(D)]^n}| \le \tilde{M}\|u\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(3)}}\|v\|_{+,\gamma,\mathfrak{D}^{(3)}}$$

для всех $u, v \in [H^1(D, S \cup Y)]^n$ с некоторой постоянной $0 < \tilde{M} < 1$, независящей от u и v, то задача (14) фредгольмова.

В **параграфе 2.2** обсуждаются спектральные свойства для трех краевых задачи Штурма-Лиувилля для оператора Ламе с граничными условиями робеновского типа в ограниченной липшицевой области D. С этой целью рассмотрим на пространстве $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ полуторалинейную форму

$$(u, v)_{-,\gamma,\mathfrak{D}} := \langle L_0^{-1} u, v\rangle_\gamma \text{ для } u, v \in H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D),$$

для которой $\sqrt{(u,u)_{-,\gamma,\mathfrak{D}}} = \|u\|_{-,\gamma,\mathfrak{D}}$ для всех $u \in H^{-,\gamma}(D)$. Отныне мы наделяем пространство $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{-,\gamma,\mathfrak{D}}$.

Всюду далее $\iota_\gamma : H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{0,\gamma}(D)$ есть оператор естественного вложения, тогда $\iota'_\gamma : H^{0,\gamma}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$

Теорема 2.2.1. (см. [9]) *Если $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ непрерывно вложено в $H^{0,\gamma}(D)$, то обратный оператор L_0^{-1} к оператору (13) индуцирует положительные самосопряженные операторы*

$$\iota'_\gamma \iota_\gamma\, L_0^{-1} : H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D),\ \iota_\gamma\, L_0^{-1}\, \iota'_\gamma : H^{0,\gamma}(D) \to H^{0,\gamma}(D),$$

$$L_0^{-1}\, \iota'_\gamma \iota_\gamma : H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D),$$

которые имеют одинаковые системы собственных векторов и собственных значений. Более того, если $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ непрерывно вложено в $[H^{s,\gamma}(D)]^n$ при $0 < s \le 1$, то эти операторы компактны, порядки их конечны и равны $2s$, а собственные вектора образуют ортогональные базисы в пространствах $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$, $H^{0,\gamma}(D)$ и $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$. Нетрудно показать, что оператор $L : H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ индуцирует замкнутый плотно определенный линейный оператор T, действующий на пространстве $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$, т.е. $T : H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$ с областью определения $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$. При этом оператору L_0 соответствует симметрический оператор $T_0 : H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$, имеющий те же собственные вектора, что и оператор $\iota'_\gamma \iota_\gamma\, L_0^{-1} : H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D) \to H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}}(D)$. Как известно, несамосопряженные операторы в бесконечномерных пространствах могут вовсе не иметь собственных векторов для построения базиса. Поэтому важное значение в построении решений краевых задач имеет понятие корневого вектора.

Следствие 2.2.1. (см. [9]) *В условиях теоремы 2.1.2, если* $M < \sin\pi/n$, *то система корневых функций замкнутого оператора* T *полна в пространствах* $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D)$, $H^{0,\gamma}(D)$ *и* $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(j)}}(D), j = 1, 2$. *Более того, для любого* $\delta > 0$ *все собственные значения оператора* T *(кроме их конечного числа) принадлежат углу* $|\arg\lambda| < \delta + \arcsin M$ *в* $\mathbb{C}$.

Следствие 2.2.2. (см. [9]) *В условиях теоремы 2.1.3, если* $\tilde{M} < \sin\pi/2n$, *то система корневых функций замкнутого оператора* T *полна в пространствах* $H^{-,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$, $H^{0,\gamma}(D)$ *и* $H^{+,\gamma}_{\mathfrak{D}^{(3)}}(D)$ *и, для любого* $\delta > 0$ *все собственные значения оператора* T *(кроме их конечного числа) принадлежат углу* $|\arg\lambda| < \delta + \arcsin\tilde{M}$ *в* $\mathbb{C}$.

Для операторов $\mathfrak{D}^{(1)}$ и $\mathfrak{D}^{(2)}$ все вышеперечисленные результаты в стандартных пространствах Соболева следуют из общей спектральной теории эллиптических краевых задач, см. работы С. Агмона и М.С. Аграновича и многие другие (см. подтекстовые сноски 1, 4, 5). Для оператора $\mathfrak{D}^{(3)}$ такого типа результаты в стандартных пространствах Соболева вытекают из спектральных теорем первой главы. Для весовых пространств нам такие теоремы применительно к операторам $\mathfrak{D}^{(j)}$ неизвестны.

Наконец, в завершающем **параграфе 2.3** приводится несколько содержательных примеров.

В **3 главе** будем рассматривать краевую задачу с граничными условиями типа Зарембы для оператора Лапласа в единичном круге на комплексной плоскости. В этой главе получен критерий, которому должно удовлетворять комплексное число, чтобы быть собственным значением для этой задачи. С этой целью мы воспользуемся теоремой Эренпрайса-Мальгранжа-Паламодова об экспоненциальном представлении решений уравнений с постоянными коэффициентами. Итак, **параграф 3.1** посвящен постановке краевой задачи типа Зарембы для единичного круга. Более точно, пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость с координатами $z = x_1 + \sqrt{-1}x_2, \bar{z} = x_1 - \sqrt{-1}x_2$. Пусть, далее, $\mathcal{D}$ – это единичный диск в $\mathbb{C}$. Будем рассматривать комплекснозначные функции, определенные в диске $\mathcal{D}$ и в его замыкании $\overline{\mathcal{D}}$. Пусть S будет (относительно) открытым, связным подмножеством границы диска $\partial\mathcal{D}$ и пусть a_0, b_0, b_1, b_2 – суть неотрицательные числа со следующим условием условием: $b_1 + b_2 = 2$.

Рассмотрим следующую (вообще говоря, некоэрцитивную) задачу типа Зарембы для оператора Лапласа с граничными условиями смешанного типа на диске $\mathcal{D}$.

Задача 3.1.1. *По заданному распределению* f, *определенному на диске* $\mathcal{D}$, *найти распределение* u, *определенное в диске* $\mathcal{D}$ *такое, что*

$$\begin{cases} -\Delta u + a_0 u &= f \quad \text{в} \quad \mathcal{D}, \\ u &= 0 \quad \text{на} \quad S, \\ Bu &= 0 \quad \text{на} \quad \partial\mathcal{D} \setminus S, \end{cases}$$

где граничный оператор B определяется следующим образом

$$Bu = b_0 u + b_1 z\partial + b_2 \overline{z}\overline{\partial}.$$

Безусловно, случай $S = \partial\mathcal{D}$ соответствует задаче Дирихле для оператора Лапласа в $\mathcal{D}$. Более подробно, пусть $\bar{\partial}$ – это оператор Коши-Римана, т.е.

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\Big).$$

При решении данной задачи мы, как и ранее, будем использовать функционал $\|u\|_+$, который в этой главе будем рассматривать на пространстве $H^1(\mathcal{D})$:

$$\|u\|_+ = \Big(a_0\|u\|^2_{L^2(\mathcal{D})} + 2b_1\|\partial u\|^2_{L^2(\mathcal{D})} + 2b_2\|\overline{\partial}u\|^2_{L^2(\mathcal{D})} + b_0\|u\|^2_{L^2(\partial\mathcal{D}\setminus S)}\Big)^{1/2}.$$

Если функционал определяет норму на $H^1(\mathcal{D}, S)$, то через $H^+(\mathcal{D})$ обозначим пополнение $H^1(\mathcal{D}, S)$ по данной норме. Тогда $H^+(\mathcal{D})$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_+ = a_0(u,v)_{L^2(\mathcal{D})} + 2\,b_1(\partial u, \partial v)_{L^2(\mathcal{D})} + 2\,b_2(\overline{\partial}u, \overline{\partial}v)_{L^2(\mathcal{D})} + b_0(u,v)_{L^2(\partial\mathcal{D}\setminus S)}.$$

По определению, элементы пространства $H^+(\mathcal{D})$ имеют хорошо определенный след на границе $\partial\mathcal{D}$, принадлежащий пространству $L^2(\partial\mathcal{D})$; в частности, по эллиптической регулярности, функции из пространства $H^+(\mathcal{D})$ принадлежат также пространству $H^1_{loc}(\mathcal{D}\cup S)$ и равны нулю на S.

Предположим, что $H^+(\mathcal{D})$ непрерывно вложено в $L^2(\mathcal{D})$. Тогда, как и ранее, обозначим через $H^-(\mathcal{D})$ двойственное пространство к $H^+(\mathcal{D})$ и через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – спаривание, индуцированное скалярным произведением в $L^2(\mathcal{D})$.

Далее переформулируем задачу типа Зарембы для оператора Лапласа с граничными условиями смешанного типа в $\mathcal{D}$.

Задача 3.1.2. *По заданному распределению $f \in H^-(\mathcal{D})$, найти такую функцию $u \in H^+(\mathcal{D})$, что*

$$(u,v)_+ = \langle f, v\rangle \text{ для всех } v \in H^+(\mathcal{D}).$$

Тогда по теореме Рисса об общем виде непрерывных линейных функционалов в гильбертовых пространствах существует единственное решение $u \in H^+(\mathcal{D})$ задачи 3.1.2 для каждой $f \in H^-(\mathcal{D})$, "ортогональной" к нулевому пространству задачи в отношении спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$. По теореме единственности для задачи Коши для эллиптических систем нулевое пространство равно нулю, если S открыто и не пусто.

В **параграфе 3.2** для поиска собственных значений задачи 3.1.2 применяется метод Фурье.

Так как оператор Гельмгольца $(-\Delta+a_0-\lambda)$ – эллиптический, то собственные функции задачи 3.1.2, если они существуют, принадлежат пространству

$C^\infty(\mathcal{D} \cup S)$. Более того, в соответствии с теоремой Петровского, они будут также вещественно-аналитическими в диске $\mathcal{D}$. Результаты С. Б. Моррея и Л. Ниренберга[24] показывают, что решения поставленной задачи также аналитически продолжаются в окрестность компакта $K \subset S$. Однако, точки множества $\partial S \subset \partial\mathcal{D}$ могут быть особыми для собственных функций задачи 3.1.2.

Также в данном параграфе из задачи 3.1.2 вытекает обобщенная постановка: найти такой элемент $u \in H^+(\mathcal{D})$, что для всех элементов $v \in H^1(\mathcal{D}, S)$ верно следующее

$$2b_1(\partial u, \partial v)_{L^2(\mathcal{D})} + 2b_2(\overline{\partial} u, \overline{\partial} v)_{L^2(\mathcal{D})} + b_0(u,v)_{L^2(\partial\mathcal{D}\setminus S)} = (\lambda - a_0)(u,v)_{L^2(\mathcal{D})}. \quad (15)$$

В завершении параграфа рассмотрены два важных примера, объясняющие, почему собственные функции задачи 3.1.2, соответствующие собственному значению λ, в единичном круге естественно искать в полярных координатах в виде

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\sqrt{-1}p_k\varphi} \mathcal{J}_{p_k}(r\sqrt{\lambda - a_0}) \quad (16)$$

с некоторыми числами $p_k \in \mathbb{Z}$ и $c_k \in \mathbb{C}$, где $\mathcal{J}_p$ суть функции Бесселя.

В **параграфе 3.3** мы формализуем формулу (16). Более точно, рассмотрим (линейное) пространство формальных рядов

$$\mathfrak{C}(\partial\mathcal{D}) = \left\{ d = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \frac{d_q \zeta^q \, d\zeta}{2\pi\sqrt{-1}\zeta}, \ |\zeta| = 1 \right\},$$

где $\{d_q\}$ выбирается таким образом, чтобы следующий функционал был конечен

$$\|d\|_- = \sup_{\substack{v\in C(\partial\mathcal{D})\\ v\neq 0}} \frac{\left|\sum_{q\in\mathbb{Z}} (v, \zeta^q)_{L^2(\partial\mathcal{D})} d_q\right|}{\|v\|_{C(\partial\mathcal{D})}}.$$

Теорема 3.3.1. (см. [8]) *Любая собственная функция задачи 3.1.2 в диске $\mathcal{D}$ представима в следующем виде*

$$u(z) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} (z/|z|)^q \, \mathcal{J}_q(|z|\sqrt{\lambda}) \, d_q$$

с коэффициентами $\{d_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющими $\|d\|_- < \infty$. Более того, если $S \neq \partial\mathcal{D}$ и $S \neq \emptyset$, то число ненулевых коэффициентов d_q в сумме будет бесконечным.

[24] Morrey, C.B. On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations/ C.B. Morrey and L. Nirenberg// Comm. Pure and Appl. Math. **10**(1957), 271-290.

Пусть теперь

$$\varrho_{p,q} = \alpha_p^{(1)}\beta_{p,q}^{(2)} - \alpha_p^{(2)}\beta_{p,q}^{(1)},$$

$$\alpha_p^{(1)}(\lambda) = \pi(-1)^p \mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}),$$

$$\alpha_p^{(2)}(\lambda) = \pi(-1)^p \Big(2(b_0 - pb_2)\,\mathcal{J}_{2p}(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\,\mathcal{J}_{2p-1}(\sqrt{\lambda})\Big),$$

$$\beta_{p,q}^{(1)}(\lambda) = \frac{2(-1)^q\,\mathcal{J}_{2q-1}(\sqrt{\lambda})}{2p+1-2q} = \frac{\beta_{q,q}^{(1)}(\lambda)}{2p+1-2q},$$

$$\beta_{p,q}^{(2)}(\lambda) = \Big(b_2\mathcal{J}_{2q}(\sqrt{\lambda}) - b_1\mathcal{J}_{2q-2}(\sqrt{\lambda})\Big)\frac{(-1)^q}{2p+1-2q} = \frac{\beta_{q,q}^{(2)}(\lambda)}{2p+1-2q}.$$

Главным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.3.2. (см. [8]) *Пусть $S \neq \emptyset$. Число $\lambda > 0$ будет собственным значением задачи 3.1.2 при $a_0 = 0$ тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор D с коэффициентами $\{d_q\}$ с конечной нормой $\|d\|_-$, такой, что его ненулевая нечетная часть*

$$D_{\text{odd}}^T = (d_{-1},\ d_1\ d_{-3},\ \ldots d_{2p-1},\ d_{-2p-1},\ \ldots),\ p \in \mathbb{N},$$

удовлетворяет

$$\tilde{A}_{\text{odd}} D_{odd}(\lambda) = 0,$$

где

$$\tilde{A}_{\text{odd}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \varrho_{0,0}(\lambda) & \varrho_{0,1}(\lambda) & \varrho_{0,-1}(\lambda) & \ldots & \varrho_{0,p}(\lambda) & \varrho_{0,-p}(\lambda) & \ldots \\ \varrho_{1,0}(\lambda) & \varrho_{1,1}(\lambda) & \varrho_{1,-1}(\lambda) & \ldots & \varrho_{1,p}(\lambda) & \varrho_{1,-p}(\lambda) & \ldots \\ \varrho_{-1,0}(\lambda) & \varrho_{-1,1}(\lambda) & \varrho_{-1,-1}(\lambda) & \ldots & \varrho_{-1,p}(\lambda) & \varrho_{-1,-p}(\lambda) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varrho_{p,0}(\lambda) & \varrho_{p,1}(\lambda) & \varrho_{p,-1}(\lambda) & \ldots & \varrho_{p,p}(\lambda) & \varrho_{p,-p}(\lambda) & \ldots \\ \varrho_{-p,0}(\lambda) & \varrho_{-p,1}(\lambda) & \varrho_{-p,-1}(\lambda) & \ldots & \varrho_{-p,p}(\lambda) & \varrho_{-p,-p}(\lambda) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Кроме того, соответствующая мера $d\mu \in \mathfrak{C}(\partial\mathcal{D})$ не имеет конечное число ненулевых коэффициентов d_q.

С другой стороны, теорема Зигеля об общих нулях функций Бесселя задает некоторые ограничения на одновременное обращения в нуль детерминант $\varrho_{p,q}(\lambda)$.

Указаны и некоторые усиления теоремы 3.3.2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы следующие:

1. Доказаны теоремы вложения для (весовых) пространств соболевского типа, порожденных некоэрцитивными (и коэрцитивными) эрмитовыми формами, в шкалу пространств Соболева-Слободецкого. Как следствие, описаны условия разрешимости и фредгольмовости для широкого класса соответствующих этим формам смешанных задач, а также доказаны теоремы о полноте их корневых функций.

2. В весовых пространствах соболевского типа получены условия разрешимости и фредгольмовости для трех задач Штурма-Лиувилля (двух коэрцитивных и одной некоэрцитивной) для возмущенного оператора Ламе в $\mathbb{R}^n$ с граничными условиями робеновского типа, а также доказаны теоремы о полноте соответствующих систем корневых функций.

3. Указан один способ нахождения собственных значений некоэрцитивной задачи типа Зарембы для оператора Лапласа в единичном круге на комплексной плоскости и построения ее собственных функций.

4. Получены условия разрешимости некорректной задачи Коши для матричного эллиптического дифференциального оператора первого порядка A, а также найдены формулы точных и приближенных решений для данной задачи.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Пейчева, А.С. О полноте корневых функций одной задачи Штурма-Лиувилля для оператора Ламе / А.С. Пейчева // Материалы 52-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2014: Математика/Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2014, 257 с. ISBN 978-5-4437-0247-6.

2. Пейчева, А.С. Об одной некоэрцитивной задаче Штурма-Лиувилля для оператора Ламе / А.С. Пейчева // М754 Молодежь и наука: в 3 т.: материалы конф. Т. 2/отв. за выпуск А. Н. Тамаровская. - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2014, 280 с. Электронный доступ: М75 Молодежь и наука: сборник материалов X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края, [Электронный ресурс], № заказа 1644/отв. ред. О. А. Краев - Красноярск: Сиб. федер. ун-т., 2014.

3. Пейчева, А.С. О полноте корневых функций задачи Штурма-Лиувилля для оператора Ламе в весовых пространствах / А.С. Пейчева // Проспект Свободный-2015: материалы науч. конф., посвященной 70-летию Великой Победы (15-25 апреля 2015 г.) [Электронный ресурс]/отв. ред. Е. И. Костоглодова. - Электрон. дан. - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2015. - Систем.

требования: PC не ниже класса PentiumI; 128 RAM; Windows 98/XP/7; Adobe Reader V8.0 и выше. - Загл. с экрана.

4. Пейчева, А.С. Поиск собственных значений и функций задачи Зарембы для круга / А.С. Пейчева // Проспект Свободный-2016: материалы науч. конф., посвященной Году образования в Содружестве Независимых Государств (15-25 апреля 2016 г.) [Электронный ресурс]/отв. ред. А.Н. Тамаровская. - Электрон. дан. - Красноярск: Сиб. фе-дер. ун-т, 2016. - Систем. требования: PC не ниже класса PentiumI; 128 Mb RAM; Windows 98/XP/7; Adobe Reader V8.0 и выше. - Загл. с экрана.

5. Peicheva, A.S. On a non-coercive Sturm-Liouville problem for the Lame system / A.S. Peicheva // [Электронный ресурс]: материалы VI Российско-Армянского совещания по математическому анализу, математической физике и аналитической механике (г. Ростов-на-Дону, 11 - 16 сентября 2016 г.)/под общ. ред. А.Н. Карапетянца; Дон. гос. техн. ун-т. - Электрон. текстовые дан. - Ростов н/Д: ДГТУ, 2016, 43 с. - Режим доступа: http://rusarm.sfedu.ru/thethis.pdf.ISBN 978-5-7890-1160-7.

6. Peicheva, A.S. Regularization of the Cauchy problem for elliptic operators / A.S. Peicheva // Журнал Сибирского фед. университета. Математика и Физика., 2018, Т. 11, N. 2, 191-193.

7. Peicheva, A.S. Embedding Theorems for Functional Spaces Associated with a Class of Hermitian Forms / A.S. Peicheva // Журнал Сиб. фед. университета. Математика и Физика., 2017, Т. 10, N. 1, 83-95.

8. Peicheva, A. Finding Eigenvalues and Eigenfunctions of the Zaremba Problem for the Circle / Ari Laptev, A. Peicheva, A. Shlapunov // Complex Anal. Oper. Theory, 11(4), 2017, 895-926.

9. Peycheva, A.S. On the completeness of root functions of Sturm-Liouville problems for the Lame system in weighted spaces / A.S. Peycheva, A.A. Shapunov // ZAMM (Z. Angew. Math. Mech.), 2015, V. 95, no. 11, 1202-1214.