

На правах рукописи

**МИНАКОВ АНДРЕЙ ВИКТОРОВИЧ**

**Численное моделирование течений  
вязкой несжимаемой жидкости  
с подвижными границами**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Красноярск — 2008

Работа выполнена в Сибирском федеральном университете

Научный руководитель: кандидат технических наук,

Дектерев Александр Анатольевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор  
Белолипецкий Виктор Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор  
Илюшин Борис Борисович

Ведущая организация: Институт вычислительных технологий СО РАН  
(г. Новосибирск)

Защита состоится 19 декабря 2008 года в 14:00 на заседании диссертационного совета ДМ 212.099.06 при Сибирском федеральном университете по адресу: ул. академика Киренского, 26, Красноярск, 660074, ауд. УЛК 1-15.

E-mail: [tov-andrey@yandex.ru](mailto:tov-andrey@yandex.ru)

Телефон: (3912) 43-06-92 (ИКИТ, для каф. Информатики)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан            ноября 2008 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета,  
к.т.н.

Р. Ю. Царев

## **Общая характеристика работы**

### **Актуальность темы**

Течения несжимаемой жидкости с подвижными границами широко распространены как в природных явлениях, так и в различных технологических процессах. С практической точки зрения наибольший интерес представляют два вида течений с подвижной границей: течения со свободной поверхностью и течения с движущимися телами. Течения жидкости со свободной поверхностью играют огромную роль в природе и технике: поверхностные волны, капли, струи, пузыри, пленки. Процессы, связанные с течениями жидкости с движущимися твердыми телами, имеют большое значение в промышленности и встречаются в различных устройствах: турбины, клапаны, насосы, миксеры, корабельная и авиационная техника. Экспериментальное исследование подобного рода задач сопряжено со значительными трудностями и затратами, поэтому разработка эффективного и надежного численного алгоритма, способного достоверно описывать течения жидкости с подвижными границами раздела, является актуальной задачей.

**Цель работы** – разработка и адаптация эффективного численного алгоритма для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости с подвижными границами.

### **Задачи исследования**

1. Анализ современных подходов к моделированию течений вязкой жидкости с подвижными границами.
2. Разработка и тестирование эффективной численной методики для решения нестационарного пространственного уравнения конвективного переноса.
3. Разработка и реализация методики численного моделирования пространственных течений вязкой жидкости с подвижными границами.
4. Проведение тестирования разработанного численного алгоритма. Сопоставление результатов расчетов с известными аналитическими решениями, экспериментальными данными и расчетами других авторов.
5. Применение разработанной численной методики к решению прикладных задач.

### **Научная новизна работы**

1. Предложен новый эффективный алгоритм расчета течений несжимаемой жидкости с подвижными твердыми телами на основе метода жидкости в ячейках (VOF метода).
2. Предложена методика решения нестационарного пространственного уравнения конвективного переноса на основе TVD схемы Superbee с явным локально-одномерным расщеплением пространственного оператора.
3. Созданы численный алгоритм и комплекс программ для решения задач взаимодействия движущегося твердого тела произвольной формы и несжимаемой жидкости со свободной поверхностью.

## **Практическая значимость работы**

1. Предложенная модификация метода жидкости в ячейках позволяет описывать широкий класс течений несжимаемой жидкости с движущимися твердыми телами, не накладывая никаких ограничений на форму тела и траекторию его движения, что является очень важным в процессе моделирования реальных технологических устройств.

2. Разработанная численная методика была использована для решения ряда важных прикладных задач: оптимизация процесса разлива металла (Саяногорский алюминиевый завод), моделирование работы вискозиметра с осциллирующим телом (фирма Baker Hughes).

3. Разработанное программное обеспечение используется в процессе обучения студентов кафедры Теплофизики СФУ.

**Достоверность полученных результатов** подтверждена проведением многочисленных тестовых расчетов. Результаты проведенных в настоящей работе тестовых расчетов качественно и количественно согласуются с аналитическими решениями, экспериментальными данными и расчетами других авторов.

**Личное участие автора в получении представленных научных результатов заключается** в постановке задач исследования, разработке и апробации численного алгоритма расчета течений несжимаемой жидкости с подвижными границами, применении расчетного алгоритма к решению практических задач.

**Апробация результатов диссертации.** Основные результаты диссертации докладывались на: VI – VIII Всероссийских конференциях молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Кемерово, Красноярск, Новосибирск, 2005-2007), VIII Всероссийском семинаре «Моделирование неравновесных систем» (Красноярск, 2005), Всероссийской научной конференции «Наука. Технологии. Инновации» (Новосибирск, 2005), XII Международной конференции «Алюминий Сибири 2006» (Красноярск, 2006), III Международной научной летней школе «Гидродинамика больших скоростей и численное моделирование» (Кемерово, 2006), IV Российской национальной конференции по теплообмену (Москва, 2006), IX Всероссийской школе-конференции молодых ученых «Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики» (Новосибирск, 2006), Всероссийской школе-семинаре молодых ученых «Физика неравновесных процессов в энергетике и наноиндустрии» (Новосибирск, 2006), III Всероссийской конференции «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Бийск, 2008).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 15 работ, из которых: 3 статьи в периодических изданиях из списка ВАК, 5 статей в сборниках научных трудов, 7 тезисов конференции.

### **Структура и объем работы**

Диссертация состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка литературы из 158 наименований. Работа изложена на 190 страницах машинописного текста, включая 95 иллюстраций (45 страниц), 8 таблиц.

## Содержание работы

Во введении обоснована актуальность выбранной темы исследования, ее научное и практическое значение, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, перечислены полученные новые результаты.

В разделе 1 приведен обзор литературы по тематике работы, а также анализ современных подходов к численному моделированию течений несжимаемой жидкости с подвижными границами.

Проведенный в рамках диссертационной работы литературный обзор показал, что существует большое количество различных методик решения задач с подвижными границами. Все численные алгоритмы разрешения подвижной контактной границы по типу используемой сетки можно условно разделить на три большие группы – лагранжевы, эйлеровы и так называемые бессеточные методы.

В лагранжевых алгоритмах узлы расчетной сетки движутся вместе со сплошной средой, и подвижная граница отслеживается расположенными на ней расчетными узлами. Этот подход позволяет максимально точно описывать контактную границу и аккуратно проводить учет сложных граничных условий на ней, например, учесть силу поверхностного натяжения. Однако использование лагранжева подхода требует пересчета сетки на каждом временном шаге, что может быть весьма затратным. Кроме того, поскольку форма подвижной границы и траектория ее движения часто очень сложны, то использование лагранжевых методов может привести к существенному искривлению расчетных ячеек, что вызывает значительные погрешности в результатах расчета. Частично решить данную проблему позволяет использование неструктурированных расчетных сеток, а также многоблочных перекрывающихся или скользящих сеток. Этот подход получил особенно большое распространение для моделирования течений с движущимися твердыми телами.

В эйлеровых алгоритмах узлы расчетной сетки покоятся, а сплошная среда движется сквозь неподвижную сетку. Эйлеровы методы хороши тем, что для расчетов используют неподвижную, часто ортогональную и равномерную расчетную сетку. При этом отслеживание межфазной границы в данной группе методов осуществляется с помощью дискретных лагранженных или непрерывных эйлеровых маркеров. По способу отслеживания контактной границы эйлеровы методы можно условно разделить на три группы: алгоритмы дискретных точечных маркеров (**point tracking methods**), алгоритмы дискретных или непрерывных поверхностных маркеров (**interface tracking methods**), и алгоритмы непрерывных объемных маркеров (**interface capturing methods**).

Идея алгоритмов дискретных точечных маркеров основана на методе частиц в ячейках (Particle in Cell), предложенном Харлоу в 1955 г., и продолжена в его более поздних модификациях – MAC (Marker in Cell) и SMAC (Simplified Marker in Cell) методах. В данной группе методов используется смешанное лагранжево-эйлерово представление, при котором основное тече-

ние описывается на неподвижной эйлеровой сетке, а сплошная среда представляется набором частиц.

Естественным развитием методов дискретных точечных маркеров явились методы поверхностных маркеров (**interface tracking methods**), в которых контактная граница представлена набором дискретных или непрерывных, маркеров расположенных только на поверхности раздела.

В алгоритмах непрерывных объемных маркеров (**interface capturing methods**) идентификация границы раздела осуществляется по значениям специальных функций маркеров, подчиняющихся эйлерову уравнению переноса. Точное положение контактной границы при этом явно не отслеживается, и приходится применять специальные методики реконструкции границы раздела. К методам, реализующим идею непрерывных маркеров, можно отнести следующие: **метод крупных частиц** (О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов), **метод жидкости в ячейках (Volume of Fluid method Hirt, Nichols)**, **метод псевдо-концентраций** (Tomson). Стоит отметить также и **метод функций уровня (Level set method)**, в котором в качестве функции маркера используется функция уровня, указывающая расстояние до поверхности раздела.

Отдельно можно выделить группу бессеточных методов, в которых либо вообще не используется расчетная сетка, либо используется только поверхностная сетка. К данной группе методов относятся методы граничных элементов и обширный класс методов частиц.

Раздел 2 посвящен описанию разработанной в работе математической модели и численной методики расчета течений вязкой несжимаемой жидкости с подвижными границами.

В подразделе 2.1.1 приводится общая постановка нестационарной задачи движения вязкой несжимаемой жидкости с подвижной границей.

Подраздел 2.1.2 посвящен описанию метода жидкости в ячейках (Volume-of-Fluid метод), который в данной работе использовался для решения задач со свободной поверхностью.

В подразделе 2.1.3 излагается предложенный в работе алгоритм расчета течений несжимаемой жидкости с подвижными твердыми телами.

Для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости с движущимися твердыми телами предложен алгоритм переноса объемной доли твердого тела в расчетной ячейке. Данный алгоритм можно рассматривать как расширение классического метода жидкости в ячейках Хирта на решение задач с подвижными телами. Суть предлагаемого алгоритма состоит в том, что для описания движения твердого тела используется эйлеров подход, и положение тела в пространстве определяется путем решения конвективного уравнения переноса объемной доли твердого тела в расчетной ячейке. Для организации взаимодействия между твердым телом и жидкостью в расчетных ячейках, занятых телом, в уравнение закона сохранения импульса жидкой среды вносится сила сопротивления, обеспечивающая равенство скорости потока и скорости тела в данных ячейках.

Также как в классическом методе жидкости в ячейках для описания течений со свободной поверхностью была введена доля жидкой фазы в расчетной ячейке, для описания движения твердого тела в рассмотрение можно вве-

сти объемную долю твердого тела в расчетной ячейке  $S(x, y, z, t)$ , которая определяется следующим образом:

$$S(x, y, z, t) = \begin{cases} 0, & \text{если ячейка пустая} \\ 1, & \text{если ячейка полностью заполнена твердым телом} \end{cases}$$

и  $0 < S < 1$ , если через ячейку проходит граница поверхности тела.

Использование похожего подхода можно встретить в методе дробных ячеек Ю.М. Давыдова, О.М. Белоцерковского.

Отслеживание перемещения тела в пространстве предлагается осуществлять путем решения эйлерова уравнения переноса для объемной доли твердого тела в ячейке:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v}_S \cdot \nabla S = 0,$$

где  $\mathbf{v}_S$  – скорость движения твердого тела в пространстве, которая складывается из скорости перемещения центра масс и угловой скорости вращения вокруг оси, проходящей через центр масс.

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_{C.M.} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{C.M.}),$$

где скорость движения центра масс  $\mathbf{v}_{C.M.}$  и угловая скорость вращения  $\boldsymbol{\omega}$  находятся из уравнений движения тела:

$$m \frac{d\mathbf{v}_{C.M.}}{dt} = \sum \mathbf{F}_f, \quad \mathbf{I} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \sum \mathbf{M}_f,$$

где  $m$  – масса тела,  $\mathbf{I}$  – тензор момента инерции тела,  $\mathbf{F}_f$  – силы, действующие на тело, в том числе и силы сопротивления со стороны жидкости,  $\mathbf{M}_f$  – момент этих сил.

Масса, объем, компоненты тензора инерции, а также координаты центра масс твердого тела находятся естественным способом путем вычисления следующих интегралов по всему объему расчетной области  $\Omega$ :

$$m = \int_{\Omega} \rho_T S(x, y, z, t) dV, \quad V_T = \int_{\Omega} S(x, y, z, t) dV,$$

$$x_{C.M.} = \frac{\int_{\Omega} x S(x, y, z, t) dV}{V_T}, \quad I_{xx} = \int_{\Omega} \left( (y - y_{C.M.})^2 + (z - z_{C.M.})^2 \right) \rho_T S(x, y, z, t) dV,$$

здесь  $\rho_T$  – плотность твердого тела,  $V_T$  – объем,  $I_{xx}$  – компонента тензора инерции,  $x_{C.M.}$  – координата центра масс.

Для нахождения сил и моментов сил сопротивления, действующих на тело со стороны потока, необходимо решить систему уравнений движения жидкости с учетом наличия в расчетной области рассматриваемого тела, т.е. в полной постановке решить задачу обтекания твердого тела. Моделирование наличия тела в потоке жидкости без деформации расчетной сетки можно провести различными способами. Чаще всего используют подход, связанный с искусственным завышением молекулярной вязкости в области, занятой телом. Такой подход был рассмотрен на начальном этапе работы. Однако при проведении методических расчетов было обнаружено, что для корректного описания наличия тела в потоке данным способом необходимо, чтобы вяз-

кость в области тела на несколько порядков превышала вязкость жидкости. В результате получалась задача с большим градиентом коэффициента вязкости, скорость решения которой очень сильно уменьшалась по сравнению со случаем однородной вязкости. Поэтому был выбран другой способ моделирования наличия тела в жидкости. Суть этого подхода заключается во введении в правую часть уравнений гидродинамики силы сопротивления  $\mathbf{F}_T$ , вносимого твердым телом в поток:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_T.$$

Величина этой силы определяется из следующего соотношения:

$$\mathbf{F}_T = -k \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \cdot S(x, y, z, t).$$

Входящий в это выражение коэффициент сопротивления  $k$  задается из условия равенства скорости потока и твердого тела в ячейках, занятых телом. Схожий подход используется в методе погруженных границ (IBM метод, Peskin C.S. 1972), в котором подобная сила вводится в узлах, лежащих на поверхности тела.

Силы сопротивления, действующие на тело со стороны жидкости, а также моменты этих сил находятся из следующих интегралов:

$$\mathbf{F}_P = -\int_S p \mathbf{n} ds, \quad \mathbf{F}_\tau = \int_S \boldsymbol{\tau} \mathbf{t} ds, \quad \mathbf{F}_f = \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_\tau$$

$$\mathbf{M}_P = -\int_S p (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{C.M.}) \times \mathbf{n} ds, \quad \mathbf{M}_\tau = \int_S \boldsymbol{\tau} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{C.M.}) \times \mathbf{t} ds, \quad \mathbf{M}_f = \mathbf{M}_P + \mathbf{M}_\tau,$$

где  $\mathbf{F}_P$  – сила давления,  $\mathbf{F}_\tau$  – сила трения,  $\boldsymbol{\tau}$  – напряжение трения,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}$  – нормальный и тангенциальный к поверхности тела вектора,  $p$  – давление в жидкости. Интегралы вычисляются по поверхности твердого тела  $S$ .

Основным преимуществом данного метода является то, что при описании движения твердого тела в потоке расчетная сетка не изменяется в процессе движения. При этом метод не накладывает никаких ограничений на форму поверхности твердого тела и траекторию его движения и может применяться для произвольной геометрии тел и любого вида движения. Расчетная сетка при этом может быть равномерной и ортогональной, что обеспечивает наилучшие условия для точности и скорости решения численного алгоритма. Метод не требует перестройки расчетной сетки на каждом временном шаге, как это делается в лагранжевых методах, а значит, существенно экономит расчетное время. Еще одним достоинством метода является то, что метод можно использовать не только для описания движения тел, но и для расчета течения жидкости в объектах сложной геометрии, используя при этом ортогональную расчетную сетку. Геометрия объекта при этом задается не расчетной сеткой, а искусственно встроенным в декартову расчетную область неподвижным твердым телом, форма которого совпадает с границей объекта, в котором происходит течение. К недостатку метода следует отнести искусственное размытие границы твердого тела, связанное с численным решением эйлера уравнения переноса. Существенно улучшить качество численного решения этого уравнения позволяет использование предложенной в работе



методики на основе TVD схемы Superbee с использованием локально-одномерного расщепления пространственного оператора.

Подраздел 2.2 посвящен описанию использованной в работе численной методики. Здесь приводится краткое изложение ее основ. Для разностного решения уравнений гидродинамики в работе использовался метод контрольного объема для структурированных многоблочных сеток, при применении которого автоматически выполняется консервативность полученной разностной схемы. Для аппроксимации конвективных членов уравнений гидродинамики в работе использовалась противопоточная схема второго порядка аппроксимации QUICK. Решение эйлерова уравнения переноса осуществлялось предложенным в работе алгоритмом на основе TVD схемы Superbee с использованием локально-одномерного расщепления пространственного оператора. Для аппроксимации нестационарных слагаемых уравнений гидродинамики использовалась неявная схема первого порядка. Диффузионные потоки и источниковые члены аппроксимировались со вторым порядком точности. Уравнения гидродинамики решались в естественных переменных. Связь между полями скорости и давления осуществлялась при помощи SIMPLEC процедуры на совмещенных расчетных сетках. Для устранения осцилляций поля давления использовался подход Рхи-Чоу, связанный с введением монотонизатора в уравнение для поправки давления. Полученная в ходе дискретизации система разностных уравнений решалась итерационным способом с применением явного метода Булеева, ускоренного методом сопряженных невязок. Решение уравнений движения твердого тела осуществлялось методом Рунге-Кутты второго порядка аппроксимации.

В разделе 3 приведены результаты тестирования разработанной в работе методики моделирования течений вязкой жидкости с подвижными границами.

В подразделе 3.1 приведены результаты тестирования методов решения конвективного уравнения переноса. Поскольку существенным недостатком методов непрерывных объемных маркеров является искусственное размытие подвижной границы раздела, связанное с численным решением уравнения переноса, то вопросу разработки и тестирования методики решения данного уравнения в работе уделено особое внимание. Верификация методик решения уравнения конвективного переноса проводилась на большом числе как одномерных, так и пространственных задач. В работе приводятся три наиболее характерных примера, на которых хорошо проявляются различия рассмотренных методов. Это двумерные задачи о конвективном переносе начального распределения функции маркера в виде квадрата и кольца, а также задача о “твердотельном” вращении начального распределения вокруг оси симметрии.

На рис.1 приведены результаты решения задачи о конвективном переносе начального распределения функции маркера в форме квадрата из левого нижнего угла расчетной области в правый верхний.

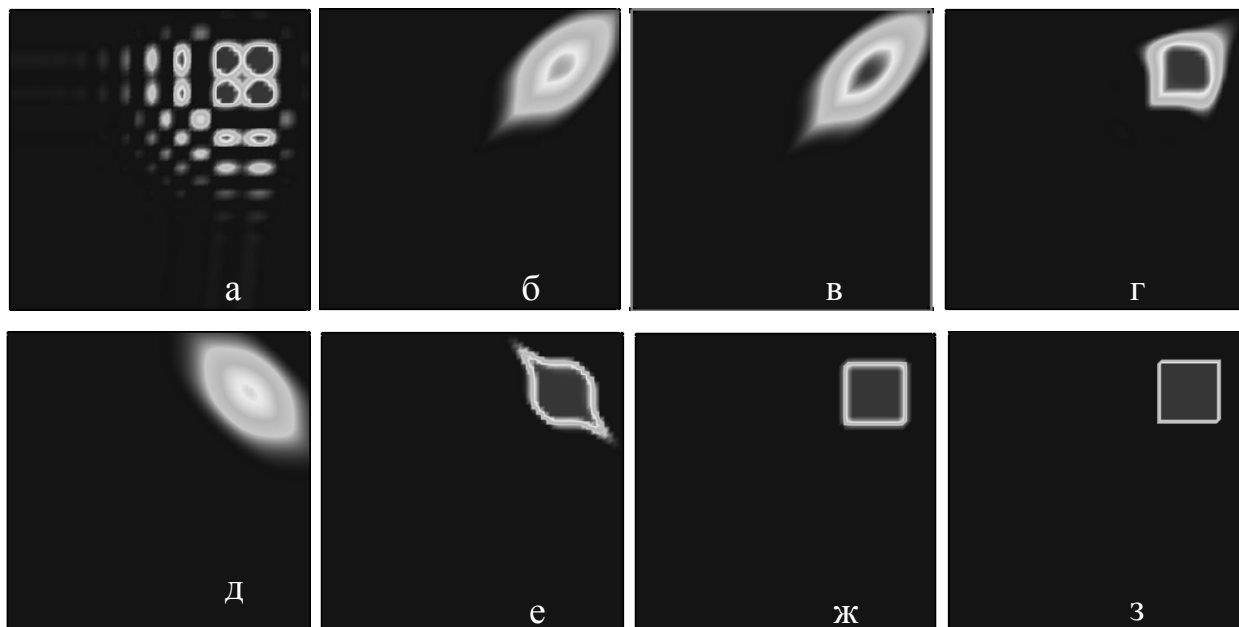


Рис.1. Численное решение задачи о переносе “квадрата”

Решения на рис.1 соответствуют следующим схемам: а) явная схема QUICK; б) неявная схема UMIST; в) неявная схема Superbee; г) схема Superbee второго порядка; д) явная схема Hybrid; е) явная схема Superbee; ж) схема Superbee с локально одномерным расщеплением; з) точное решение.

Из представленных рисунков видно, что метод интегрирования уравнения переноса оказывает существенное влияние на качество численного решения.

По итогам тестовых расчетов лучшей для решения уравнения конвективного переноса оказалась предложенная в данной работе численная методика на основе TVD схемы Superbee с использованием явного локально-одномерного расщепления пространственного оператора. Этот алгоритм был выбран в качестве основного метода решения уравнения переноса объемной доли жидкой и твердой фазы в расчетной ячейке.

В подразделе 3.2 приведены результаты тестирования схем аппроксимации конвективных слагаемых уравнений гидродинамики. Тестирование проводилось на задаче о циркуляционном течении в квадратной двумерной камере. По итогам тестирования лучшей оказалась схема второго порядка аппроксимации QUICK.

В подразделе 3.3 приведены результаты решения тестовых задач со свободной поверхностью. Рассмотрены следующие тестовые задачи: задача о разрушении водяной дамбы в двумерной и пространственной постановках, задача о колебаниях жидкости в закрытом резервуаре.

Подраздел 3.3.1. Задача о разрушении дамбы является одним из самых распространенных тестов для алгоритмов решения задач со свободной поверхностью. Постановка этой задачи следующая. Стенка высотой  $2a$  ограничивает столб воды шириной  $a$ , в начальный момент расчета стенка мгновенно удаляется и под действием силы тяжести жидкость растекается по расчетной области. На рис.2 приведено сопоставление формы свободной поверхности

воды для двумерной задачи обрушения дамбы в расчете и эксперименте. Как можно видеть, качественное согласование формы свободной поверхности в соответствующие моменты времени в эксперименте и расчете наблюдается.

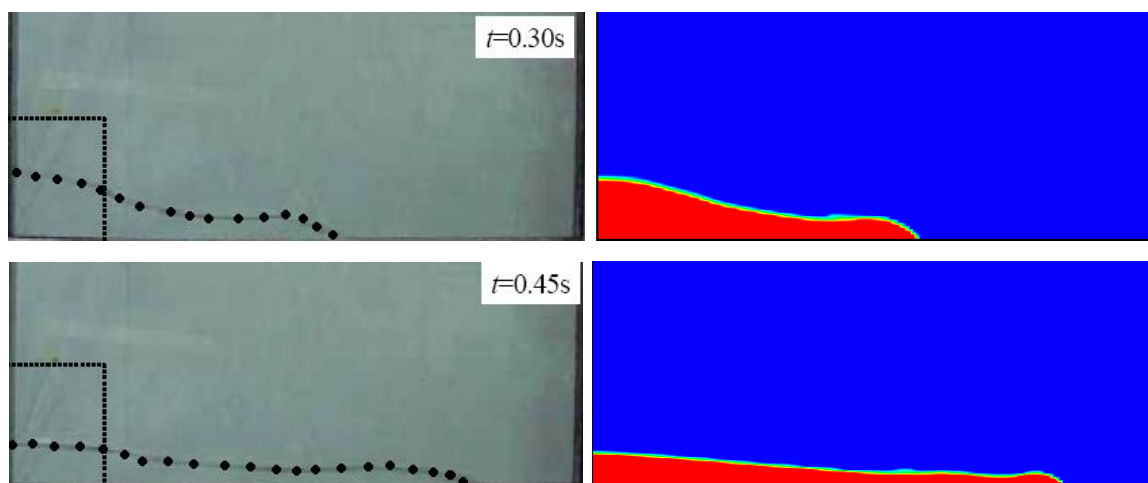


Рис.2. Форма свободной поверхности воды в моменты времени 0.3с и 0.45с после начала движения. Левые рисунки – экспериментальные фотографии

Количественное сопоставление результатов расчетов с экспериментом (Martin J.C., Моусе, W.J., 1952) представлено на рис.3. Сопоставление проведено по двум параметрам: расстоянию  $x$ , на которое распространится вода за время  $t$  от начала открытия дамбы (рис.3а), и уровню воды  $b$  у левой стенки резервуара (рис.3б). Видно, что наблюдается хорошее совпадение численных результатов с экспериментальными данными.

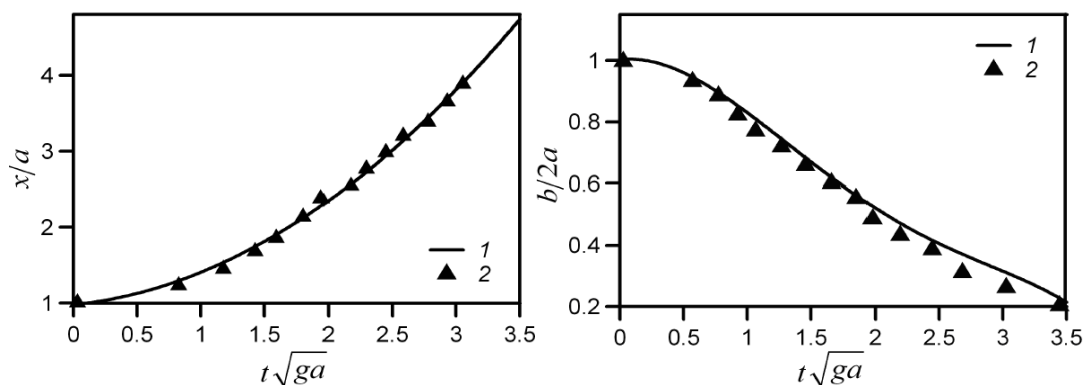


Рис.3. Количественное сопоставление с экспериментом  
Расчет (1), эксперимент (2)

В подразделе 3.3.2 рассмотрена задача об обрушении водяного столба в пространственной постановке. Трехмерность задачи в данном случае обусловлена наличием препятствия конечного размера, установленного на пути движущейся воды. Экспериментальное исследование этой задачи было проведено в Морском научно-исследовательском институте Нидерландов (MARIN). На рис.4 приведена качественная картина течения жидкости в различные моменты времени после начала движения.

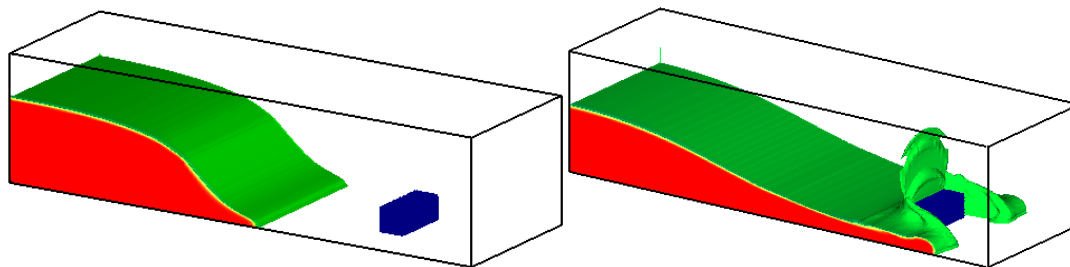


Рис.4. Форма свободной поверхности воды в моменты времени 0.25с и 0.6с

Количественное сравнение с экспериментом приведено на рис.5. Сопоставление проводилось по уровню жидкости над точкой, расположенной на дне бассейна около бруска, а также давлению в точке, расположенной на левой грани бруска.

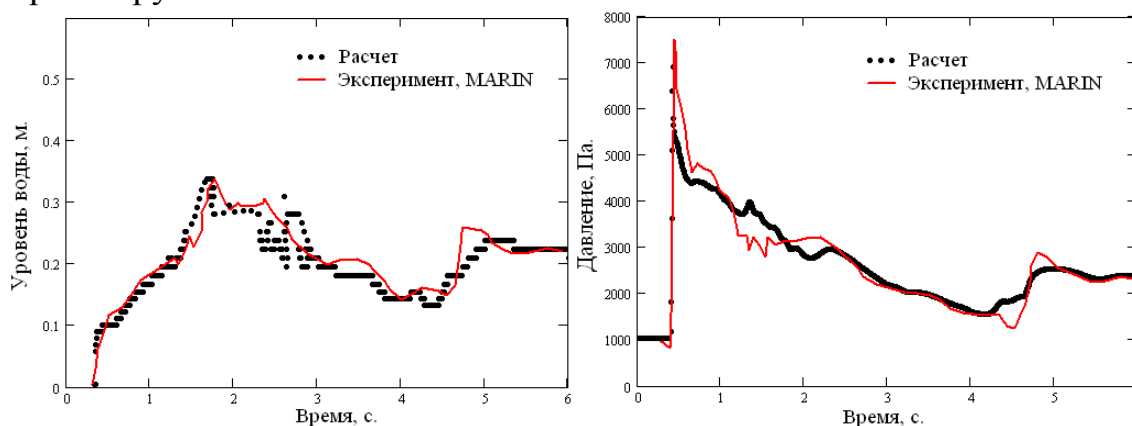


Рис.5. Сопоставление с экспериментом

В подразделе 3.3.3 рассмотрен процесс колебаний жидкости под действием периодической вынуждающей горизонтальной силы. В закрытом баке размерами  $1.2\text{м} \times 0.6\text{м} \times 0.2\text{м}$  в начальный момент времени покоится слой жидкости толщиной  $0.12\text{м}$ . Под действием горизонтальной периодической силы бак начинает двигаться с ускорением, передавая движение жидкости. Экспериментальное исследование данной задачи было проведено М. Hinatsu, Y. Tsukada. Качественное сопоставление результатов расчета с экспериментом приведено на рис.6. Как видно из рисунков, форма свободной поверхности жидкости в сходные моменты времени в эксперименте и расчете согласуется.

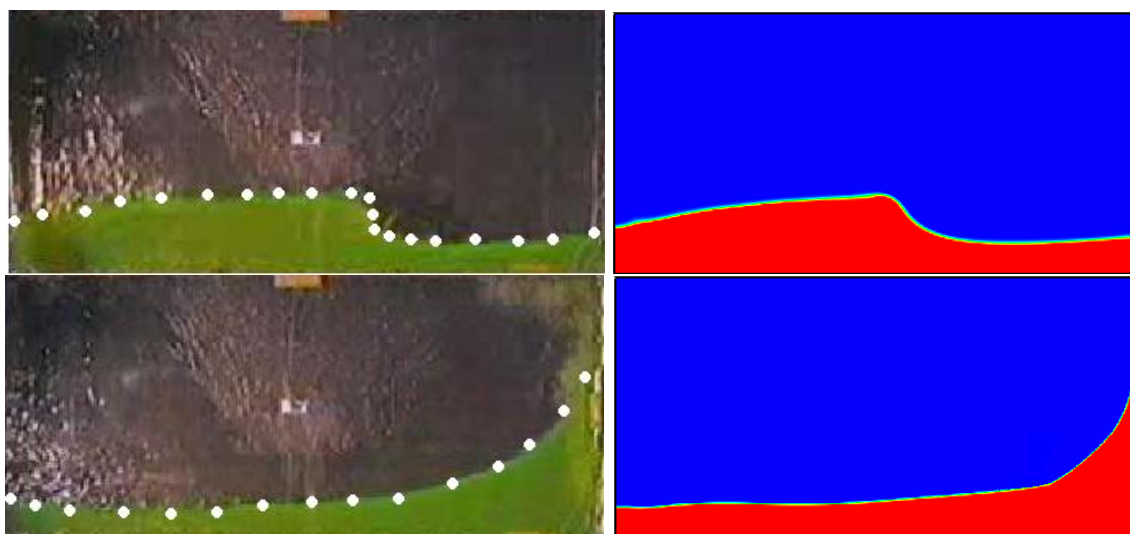


Рис.6. Форма поверхности воды в моменты времени 2.68с и 3.16с

Количественное сравнение проводилось по величине статического давления в нескольких точках, расположенных на нижней и левой боковой стенках бака. На рис.7 приведено сопоставление эксперимента и расчета для грубой и детальной сеток. Видно, что всюду кроме первого периода колебаний статическое давление в расчетах хорошо согласуется с экспериментом как по величине, так и по периоду изменений. С увеличением детализации расчетной сетки расчетные данные лучше описывают результаты эксперимента. Наиболее наглядно это видно по величине пиков давления. Однако к существенным изменениям картины течения детализация сетки не приводит. Расхождение величины давления в расчете и эксперименте в первый период колебаний возможно связано с тем, что в имеющихся экспериментальных данных время  $t=0$  связано не с началом движения бака, а с выходом колебаний на периодический режим. В расчетах Т. Waclawczyk и Т. Koronowicz наблюдается аналогичное расхождение с экспериментом в первый период колебаний.

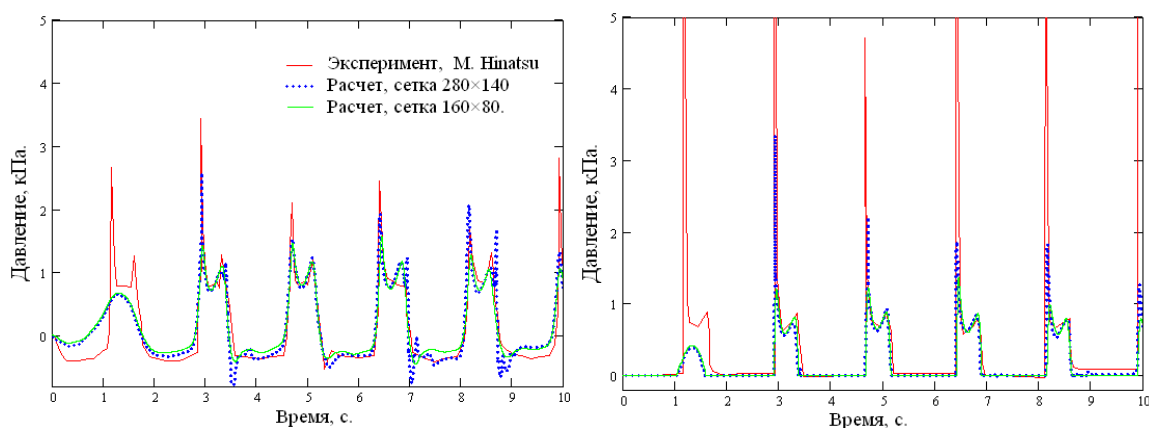


Рис.7. Величина статического давления в точках, лежащих на нижней (а) и левой боковой (б) стенках бака

В подразделе 3.4 приведены результаты тестирования предложенной в работе методики моделирования течений с движущимися телами.

Тестирование представленного в диссертации алгоритма взаимодействия жидкости и подвижного твердого тела в начале было проведено на задачах обтекания неподвижных тел. Рассмотрено ламинарное обтекание бесконечно-длинного круглого цилиндра и шара в диапазоне чисел Рейнольдса от 0.05 до 200. Для расчетов использовалась ортогональная декартова сетка, состоящая из  $200 \times 200$  узлов для цилиндра и  $70 \times 70 \times 70$  узлов для шара.

Расчеты обтекания цилиндра проводились как для стационарного режима течения —  $Re$  от 0,1 до 40, так и для нестационарного —  $Re$  от 50 до 200. На рис.8а приведено сопоставление расчетных линий тока с фотографиями из альбома течений Ван Дайка. Верхний рисунок соответствует  $Re = 26$ , нижний  $Re = 41$ . Количественное сравнение результатов расчетов нестационарного обтекания цилиндра с экспериментом производилось по зависимости числа Струхалия от числа Рейнольдса (рис.8б). Максимальное отклонение расчета от экспериментальных данных не превышает 3%. Для сравнения приведены также расчетные данные из монографии Ю.А. Быстрова, С.А. Исаева и др. согласование с которыми также хорошее.

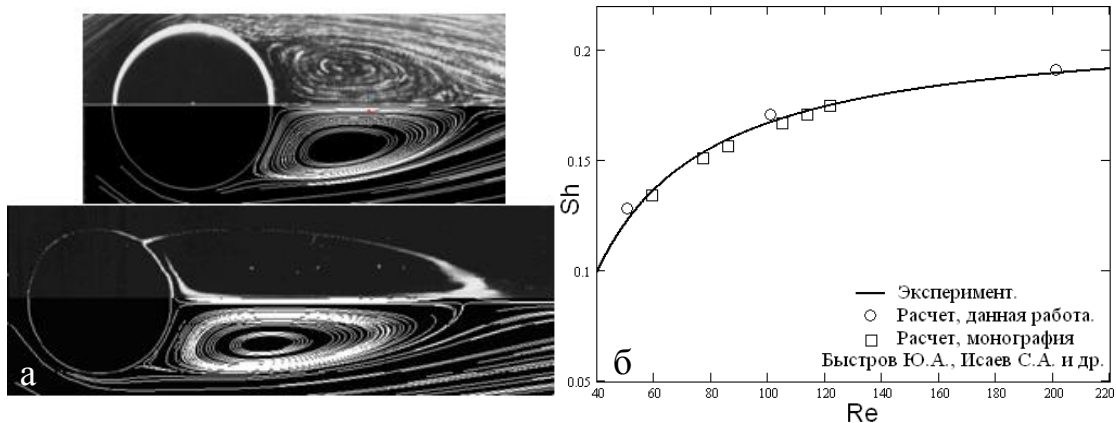


Рис.8. Ламинарное обтекание цилиндра

Далее в работе рассматривается несколько тестовых задач с движущимися в потоке твердыми телами.

В подразделе 3.4.3 рассмотрена задача о затухающих колебаниях шарика радиусом  $R$  и массой  $m$ , закрепленного на невесомом стержне длины  $L$ , в неограниченном пространстве, заполненном жидкостью с вязкостью  $\mu$ . Шарик на стержне можно рассматривать как физический маятник, тогда уравнение его движения можно записать в виде:  $I_z \ddot{\varphi} = -F_S \cdot (L+R) \cos \varphi - mg(L+R) \sin \varphi$ , где  $\varphi$  - угол отклонения шарика от положения равновесия,  $F_S$  - сила сопротивления, действующая на шарик. В случае малых колебаний данную силу можно приближенно рассматривать как силу Стокса:  $F_S = 6\pi\mu R \dot{\varphi} L$ . Решение уравнения движения маятника с силой сопротивления Стокса можно считать аналитическим решением рассматриваемой задачи. Данное решение будет справедливым при  $Re < 0.5$ .

Численное решение данной задачи в трехмерной постановке было получено при помощи предложенного в работе алгоритма расчета течений жидкости с подвижными телами. Для расчета использовалась неравномерная ортогональная сетка, сгущенная в области движения шара и состоящая из  $80 \times 60 \times 60$  расчетных узлов. Для уменьшения влияния стенок расчетной области на результаты расчета границы расчетной области были значительно удалены от места движения маятника. На рис.9 приведено сравнение аналитического и численного решения расчета процесса колебания маятника при следующих параметрах:  $\mu = 0.75 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $R = 0.15 \text{ м}$ ,  $m = 2 \text{ кг}$ ,  $L = 0.5 \text{ м}$ ,  $\varphi_0 = 10^\circ$ .

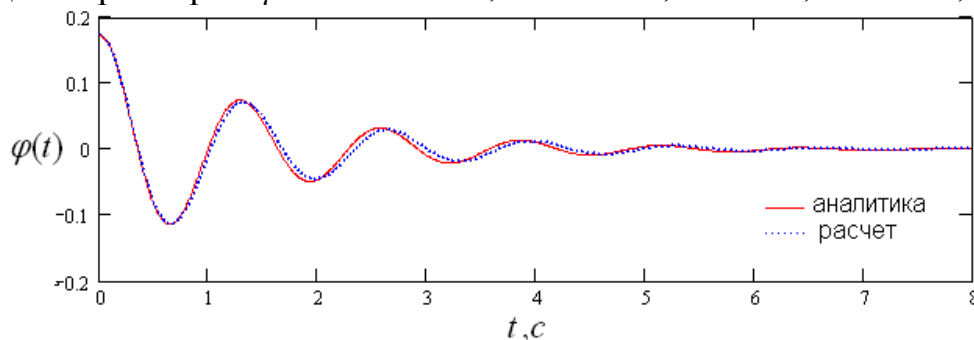


Рис.9. Угол отклонения маятника от положения равновесия

В подразделе 3.4.4 рассматривается движение шара под действием силы тяжести в канале, заполненном вязкой средой. Диаметр шара 0.4см, масса 0.07г, размеры канала  $2 \times 2 \times 8$  см. Для расчета использовалась равномерная сет-

ка, состоящая из  $40 \times 40 \times 160$  расчетных узлов. На рис.10а представлено распределение поля давления в центральном продольном сечении канала через промежуток времени 0.05с. Полученные результаты были сопоставлены с расчетными данными из работы L.T. Chang, где эта задача была решена методом подвижных сеток, в котором граница поверхности шарика отслеживалась узлами довольно детальной расчетной сетки. Сравнение проводилось по зависимости скорости шарика от времени (рис.10б). На графике также приведена теоретическая величина установившейся, в результате действия сил сопротивления жидкости, скорости падения шарика (горизонтальная серая линия). Как видно, наблюдается достаточно хорошее согласование расчетов, полученных различными методами.

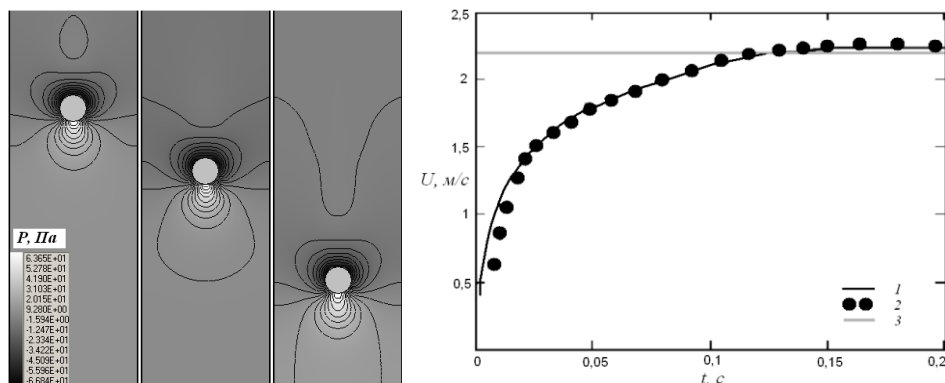


Рис.10. Задача о падении шара в вязкой среде

Тестирование расчетного алгоритма завершается двумя задачами, в которых движущееся тело взаимодействует с жидкостью со свободной поверхностью. В первой задаче рассматривается погружение твердого круглого цилиндра в воду. Во второй задаче рассматривается его всплытие. Результаты численного решения этих задач были сопоставлены с экспериментальными данными Greenhow M. и Lin W.M.. В эксперименте торцы цилиндра скользили по направляющим пластинам, поэтому можно рассматривать двумерную постановку. Для моделирования движения жидкости использовался VOF метод, для моделирования движения цилиндра – метод переноса доли твердого тела в расчетной ячейке. Расчеты были проведены для прямоугольной области размерами  $0.6 \times 0.9$  м. Для расчетов использовались ортогональные одноблочные сетки различной детализации –  $150 \times 100 \times 3$  и  $300 \times 150 \times 3$  узлов. Качественное сопоставление результатов расчета с экспериментальными фотографиями приведено на рис.11 – 12. Видно, что качественно расчетные изолинии повторяют очертания свободной поверхности воды на экспериментальных фотографиях. Существенные различия наблюдаются в области выплескивания жидкости, где образуется множество мелких капелек и струй (брызги), для разрешения которых требуется очень детальная расчетная сетка.

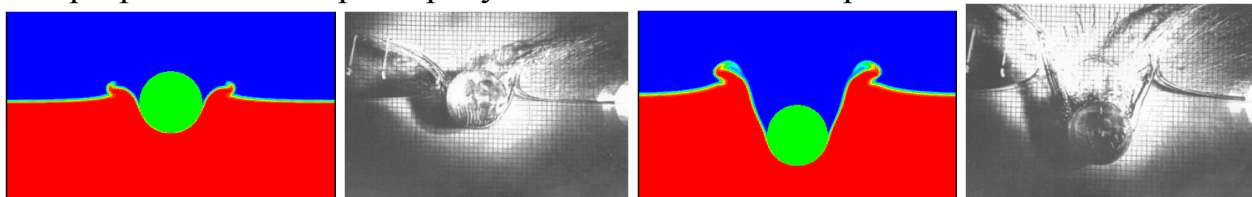


Рис.11. Форма поверхности воды в моменты времени 0.03с и 0.085с

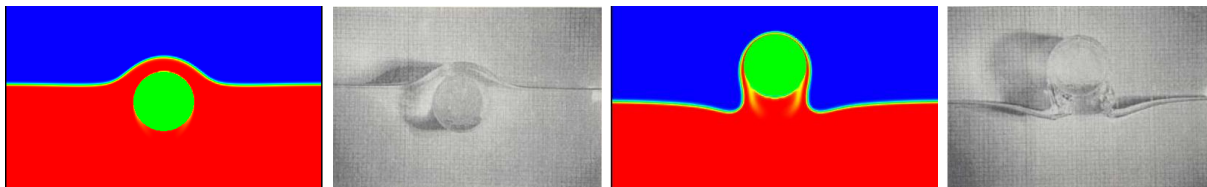


Рис.12. Форма поверхности воды в моменты времени 0.165с и 0.22с

На рис.13 приведено количественное сравнение результатов расчетов погружения (а) и всплытия (б) цилиндра с экспериментом и результатами расчетов Xinying Zhu. В обоих случаях согласование достаточно хорошее.

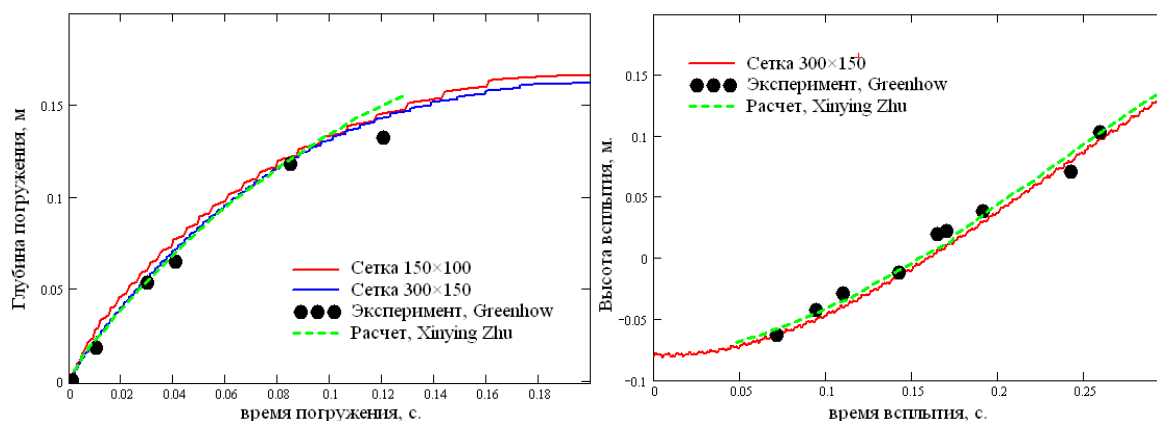


Рис.13. Сопоставление результатов расчетов погружения (а) и всплытия (б) цилиндра с экспериментом и расчетами других авторов.

Раздел 4 посвящен результатам применения расчетного алгоритма к решению практических задач.

В подразделе 4.1 рассмотрена задача оптимизации процесса заполнения изложницы жидким металлом.

Важным условием повышения эффективности производства алюминиевых слитков является условие увеличения скорости разлива металла в изложницы (изложница – форма для получения слитков). Но при этом с неизбежностью происходит увеличение потерь металла, обусловленное его разбрызгиванием и окислением кислородом воздуха. В связи с этим в данной работе было проведено исследование влияния скорости и способа разлива на качество литья. Для этого в трехмерной постановке была решена задача нестационарного заполнения изложницы жидким металлом. В работе было рассмотрено два существующих на производстве способа разлива жидкого алюминия: разлива при помощи разливочной машины (струя металла падает вертикально) и разлива при помощи лотка (струя падает под углом к дну изложницы). Расчеты проводились для трех различных расходов литья: 5, 7 и 10 т/ч. На заводе разлива металла осуществлялась при расходе 5т/ч, и основной целью данного исследования было показать возможность увеличения скорости литья без ухудшения его качества.

На рис.14 представлена эволюция формы свободной поверхности жидкого металла при заполнении изложницы с помощью лотка для расхода литья 10т/час. Видно, что процесс литья сопровождается значительным волнообразованием, особенно на начальном этапе. С увеличением расхода литья интен-



сивность волнообразования увеличивается вместе с площадью контакта металла с кислородом воздуха.

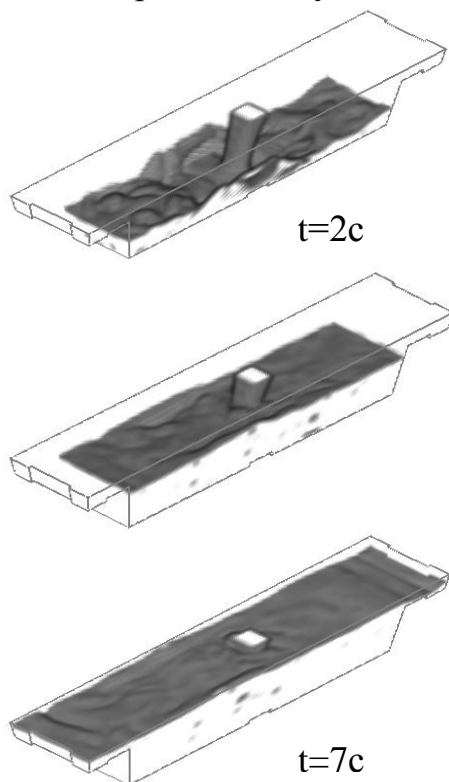


Рис. 14. Форма свободной поверхности металла в различные моменты времени

жидкого металла. Под избыточной площадью поверхности в данном случае понимается разность между “реальной” площадью поверхности металла в данный момент времени и площадью поверхности металла в случае идеальной разливки (без волнообразования и попадания пузырей воздуха). Чем выше величина избыточной площади поверхности металла, тем выше площадь соприкосновения металла с кислородом воздуха, и, как следствие, выше потери металла на окисление. Зависимость избыточной площади поверхности жидкого металла от расхода литья приведена на рис.15. Как видно, с увеличением расхода литья происходит увеличение избыточной площади поверхности жидкого металла. Но поскольку при повышении расхода литья пропорционально уменьшается и время разливки (а значит и время контакта жидкого металла с воздухом), то можно сказать, что существует некая оптимальная величина расхода литья, при которой относительные потери металла на окисление будут минимальны. Химия процесса окисления металла в работе детально не рассматривалась, было сделано предположение о том, что количество образующихся окислов алюминия линейно зависит от времени контакта металла с воздухом и площади контакта. Тогда проинтегрированную по времени величину избыточной площади металла можно рассматривать как относительную количественную характеристику качества литья. Анализ результатов показал, что данная величина оказывается максимальной для расхода литья 7т/час и минимальной для расхода 10т/ч. Расчеты показали, что дальнейшее увеличение расхода литья (12т/ч) приводит к выплескиванию ме-

При анализе результатов моделирования было обнаружено такое интересное явление как захват пузырей воздуха падающей струей металла. Увлекаемые струей, пузыри попадают под свободную поверхность металла и под действием силы Архимеда через некоторое время покидают металл. Однако наличие пузырей воздуха в жидком металле увеличивает площадь контакта алюминия с кислородом, а следовательно, и увеличивает потери металла на окисление, ухудшая тем самым свойства слитков. Таким образом, захват пузырей воздуха струей жидкого металла, наряду с интенсивным волнообразованием, можно рассматривать в качестве основного негативного эффекта, возникающего при высоких расходах литья.

В качестве относительной количественной характеристики качества разливки в работе был рассмотрен такой критерий как избыточная площадь поверхности

талла за пределы изложницы, что является недопустимым. Таким образом, для всех рассмотренных способов литья оптимальным является расход 10т/час.

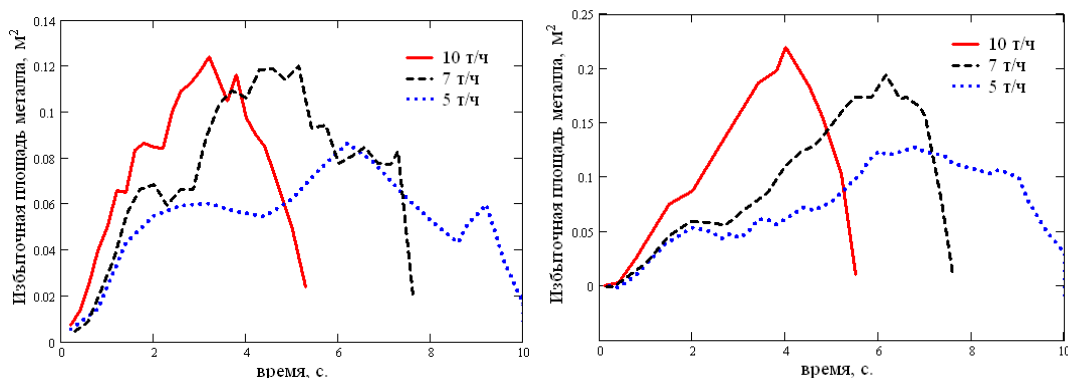


Рис.15. Избыточная площадь поверхности жидкого металла для разливки с лотка (а) и разливки с аппарата (б)

По итогам проведенного исследования, были сделаны следующие выводы.

1. Обнаружено, что наряду с волнообразованием и разбрызгиванием важную роль в процессе окисления алюминия играет эффект захвата пузырей воздуха струей металла.
2. Показано, что при разливке металла с помощью разливочной машины окисление жидкого алюминия кислородом воздуха должно быть на 30 – 40% больше, чем при разливке с лотка. Поэтому вариант разливки алюминия при помощи лотка является более предпочтительным вариантом для всех рассмотренных скоростей литья.
3. Установлено, что увеличение расхода заливки металла с 5 т/час до 10 т/час хотя в целом и приводит к увеличению избыточной поверхности алюминия, но дает уменьшение интегральной по времени площади контакта кислорода воздуха с жидким металлом. Данная величина может служить качественным показателем величины потерь алюминия на окисление. В связи с этим можно рекомендовать увеличение расхода литья с 5 до 10т/час.

В подразделе 4.2 представлены результаты численного моделирования работы вискозиметра с цилиндрическим сенсором в набегающем потоке.

**В заключении** сформулированы основные результаты данной работы.

1. На основе метода жидкости в ячейках разработана численная методика, которая позволяет эффективно рассчитывать пространственные течения вязкой несжимаемой жидкости с подвижными границами.

2. Предложен новый эффективный алгоритм расчета течений несжимаемой жидкости с подвижными твердыми телами. Данный алгоритм позволяет описывать широкий класс течений несжимаемой вязкой жидкости с движущимися твердыми телами на фиксированной ортогональной сетке, не накладывая при этом никаких ограничений на форму тела и траекторию его движения.

3. Предложена методика решения нестационарного пространственного уравнения конвективного переноса на основе TVD схемы Superbee с явным локально-одномерным расщеплением пространственного оператора. Эта ме-

тодика сочетает в себе высокую разрешающую способность контактных разрывов, которой обладает TVD схема Superbee, и хорошее качество пространственного решения, которое достигается благодаря локально-одномерному расщеплению конвективного оператора.

4. Реализованный в виде пакета программ численный алгоритм апробирован на ряде тестовых задач со свободной поверхностью и подвижными телами. В результате тестирования получено хорошее качественное и количественное согласование с данными эксперимента, аналитическими решениями и расчетами других авторов.

5. Созданное в результате работы программное обеспечение было успешно применено к решению ряда важных практических задач: оптимизация разлива металла, изучение газопропускной способности микроканала, определение критической величины ускорения для кюветы с жидкостью, моделирование работы вискозиметра с осциллирующим телом.

### **Публикации автора по теме диссертации**

#### **Журналы, рекомендованные ВАК:**

1. Рудяк, В.Я. Применение нового численного алгоритма решения уравнений Навье–Стокса для моделирования работы вискозиметра типа физического маятника / В.Я. Рудяк, А.В. Минаков, А.А. Гаврилов, А.А. Дектерев// Теплофизика и аэромеханика. – 2008.– № 2. – том 15. С.- 353-365.

2. Минаков, А.В. Численный алгоритм решения пространственных задач гидродинамики с подвижными твердыми телами и свободной поверхностью /А.В. Минаков, А.А. Гаврилов, А.А. Дектерев// Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – № 4(36). С.-95-105.

3. Минаков, А.В. Численное моделирование нестационарных течений несжимаемой жидкости со свободной поверхностью при помощи VOF метода/ А.В. Минаков, А.А. Гаврилов, А.А. Дектерев// Вестник сибирского государственного аэрокосмического университета. 2008. № 2. том 19. С.-9-13.

#### **Остальные публикации:**

4. Минаков, А.В. Исследование схем аппроксимации конвективных членов уравнений переноса. / А.В. Минаков // Тезисы VI Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – Кемерово. 2005. – С.- 42-43.

5. Минаков, А.В. Применение VOF метода для моделирования процесса заливки металла в изложницу. / А.В. Минаков // Материалы восьмого всероссийского семинара “Моделирование неравновесных систем”: Сб. науч. тр. ИВМ СО РАН. – Красноярск, 2005. – С.-233-234.

6. Минаков, А.В. Исследование динамики изменения формы свободной поверхности при заливке жидкого металла в изложницу/ Минаков А.В., Гаврилов А.А., Дектерев А.А.// Всероссийская научная конференция "Наука. Технологии. Инновации".- Новосибирск. 2005.

7. Гаврилов, А.А. Оптимизация режимов теплообмена при заливке металла в изложницы и охлаждении слитков/ А.А. Гаврилов, А.А. Дектерев, А.В. Минаков, К.А. Финников, С.В.Солдатов//Сборник докладов XII между-

народной конференции “Алюминий Сибири 2006”.-Красноярск. 2006. С.-449-454.

8. Минаков, А.В. Моделирование многофазных течений несжимаемой жидкости со свободной поверхностью./ А.В. Минаков, А.А. Гаврилов, А.А. Дектерев // Сборник трудов III международной научной летней Школы «Гидродинамика больших скоростей и численное моделирование», июнь 2006, Кемерово, Россия С.- 277-282.

9. Минаков, А.В., Моделирование пространственных задач со свободной поверхностью с использованием VOF метода./ А.В. Минаков, А.А. Гаврилов, А.А. Дектерев //Сборник трудов четвертой российской национальной конференции по теплообмену.- Москва. 2006. Том 1. С.- 123-127.

10. Минаков, А.В. Использование схем высокого порядка аппроксимации для решения трехмерного уравнения переноса в volume of fluid (VOF) методе./ А.В.Минаков, А.А. Гаврилов, Е.Б. Харламов.//Сборник тезисов IX Всероссийской школы-конференции молодых ученых “Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики.” - Новосибирск. 2006. С.- 79-80.

11. Минаков, А.В. Численное моделирование трехмерных нестационарных течений несжимаемой жидкости с подвижными твердыми телами./ Минаков А.В.// Тезисы докладов VII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. - Красноярск. 2006. С.- 23-24.

12. Минаков, А.В. Численная методика решения задачи взаимодействия движущегося твердого тела с жидкостью со свободной поверхностью. //Сборник тезисов Всероссийской школы-семинара молодых ученых “Физика неравновесных процессов в энергетике и наноиндустрии.” - Новосибирск. 2007. С.-24-25.

13. Минаков, А.В. Алгоритм решения задачи взаимодействия подвижного твердого тела произвольной формы и несжимаемой жидкости. //Сборник тезисов VIII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Новосибирск. 2007. С.-21-22.

14. Минаков, А.В. Тестирование и применение высокоэффективного метода расчета нестационарных течений несжимаемой жидкости с подвижными твердыми телами. /Минаков А.В., Гаврилов А.А., Дектерев А.А. // XVI Школа-семинар молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках» Санкт-Петербург. 2007. С.- 166-169.

15. Минаков, А.В. Численное моделирование пространственных течений со свободной поверхностью в различных технологических устройствах. /Минаков А.В.//Сборник тезисов III Всероссийской конференции “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения”. Бийск. 2008. С.- 73-74.

Минаков Андрей Викторович

Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости  
с подвижными границами.

Автореф. дисс. на соискание учёной степени кандидата физ.-мат. наук.

Подписано в печать 05.11.2008. Заказ № \_\_\_\_\_

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография Сибирского федерального университета