На правах рукописи

Е. Мих

Михалкин Евгений Николаевич

АНАЛИТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Красноярск – 2016

Работа выполнена в ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет»

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор **Цих Август Карлович**

Официальные оппоненты:
Александров Александр Григорьевич, доктор физико-математических наук, ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, лаборатория анализа и моделирования информационных процессов, главный научный сотрудник;

Лобода Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный архитектурно-строительный университет», кафедра высшей математики, профессор;

Тихомиров Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет математики, профессор.

Ведущая организация:
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», механико-математический факультет.

Защита состоится 29 января 2016 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 999.040.02 при ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет» и ФГБУН Институт вычислительного моделирования СО РАН по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Р. 8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет» и на сайте http:/www.sfu-kras.ru.
Автореферат разослан ___ декабря 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Шлапунов Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Функция, связанная алгебраическим уравнением с одной или несколькими независимыми переменными, называется *алгебраической*. После появления результатов Абеля (1824) и Галуа (1830) о невозможности решения в радикалах общего алгебраического уравнения степени ≥ 5 все внимание в исследовании такого уравнения было обращено к аналитическим методам решений. Идея такого перехода была подана еще Виетом в 16 веке, но лишь в 1858 г. Эрмит[1] и Кронекер[2], независимо друг от друга, осуществили идею Виета. А именно, им удалось выразить решение уравнения

$$y^5 + 5y = a$$

(к которому сводится любое уравнение пятой степени с помощью преобразований Чирнгауза[3]) через модулярную эллиптическую функцию переменного a. Следующий успех в проблеме поиска решений уравнений высших степеней был достигнут в 20 веке. Так, в 1921 г. Меллином[4] было найдено решение для приведенного алгебраического уравнения

$$y^n + x_{n-1}y^{n-1} + \ldots + x_1 y - 1 = 0 \qquad (1)$$

в терминах гипергеометрических рядов переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$, а также посредством кратных интегралов Меллина-Барнса. Отметим, что *общее алгебраическое уравнение* n-ой степени записывается в виде

$$a_n y^n + \ldots + a_1 y + a_0 = 0. \qquad (2)$$

Полную аналитическую функцию решений этого уравнения называют *общей* (*универсальной*) алгебраической функцией. Она обладает свойством двойной однородности[5], и потому фактически зависит лишь от $n-1$ переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Иными словами, достаточно рассмотреть уравнение (1) или

[1] Hermite Ch. Sur la resolution de l'équation du cinquième degré// C. R. Acad. Sci. **46** (1858), P. 508 – 515.

[2] Kronecker L. Sur la resolution de l'équation du cinquième degré// C. R. Acad. Sci. **46** (1858), P. 1150 – 1152.

[3] Tschirnhaus. Nova methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione// Acta eruditorum. Bd. 2. Leipzig. 1683, P. 204 – 207.

[4] Mellin H.J. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma// C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **172** (1921), P. 658 – 661.

[5] Passare M., Tsikh A. Algebraic equations and hypergeometric series. In the book "The legacy of Niels Henrik Abel". Springer: Berlin-Heidelberg-New York, 2004. P. 653 – 672.

уравнение вида

$$x_n y^n + \ldots + y^q + \ldots + y^p + \ldots + x_1 y + x_0 = 0, \qquad (3)$$

где коэффициенты при любой паре мономов фиксированы. В случае $p = 0$, $q = n$ получаем уравнение (1), где знак «минус» перед единицей взят для удобства. Биркелан[6] распространил результат Меллина на уравнения (3) с произвольными парами p, q, предъявив с помощью метода Лагранжа степенные ряды гипергеометрического типа для решений этого уравнения.

Следующим этапом развития теории алгебраических функций явился результат Умемуры[7] о том, что уравнение любой степени можно решить с помощью тэта-функций, тем самым, был обобщен результат Эрмита-Кронекера.

Новый всплеск внимания к аналитическим аспектам теории алгебраических функций возник в 2000 году, когда Семушева и Цих[8], и независимо от них, Штурмфельс[9] показали возможность реализации аналитического продолжения общей алгебраической функции, используя понятия гипергеометрических функций по Горну[10] и Гельфанду-Капранову-Зелевинскому[11], соответственно. Теория гипергеометрических функций и связанные с ней теории дискриминантов и многогранников были глубоко изучены в конце прошлого века (см. книги[12] [13] [14], а также списки цитированной литературы в них). Оказалось, что сингулярностями гипергеометрических функций являются дискриминантные множества общих алгебраических гиперповерхностей

[6]Birkeland R. Les équations algébriques et les fonctions hypergéométriques// Ark. Norske Vid.-Akad. Oslo. **8** (1927), P. 1 – 23.

[7]Умемура Х. Решения алгебраических уравнений с помощью тэта-констант/ Приложение в книге Мамфорд Д. "Лекции о тэта-функциях". М.: Мир, 1988. С. 362 – 370 (Оригинальное издание: Mumford D. Tata lectures on Theta 1, 2. Progress in Math., V. 28, 43. Birkhäuser, 1983, 1984).

[8]Семушева А.Ю., Цих А.К. Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений. В кн.: Комплексный анализ и дифференциальные операторы (к 150-летию С.В. Ковалевской), КрасГУ, 2000, С. 134 – 146.

[9]Sturmfels B. Solving algebraic equations in terms of A-hypergeometric series// Discrete Math. **210** (2000), P. 171 – 181.

[10]Horn J. Über die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen// Math. Ann. **34** (1889), P. 544 – 600.

[11]Гельфанд И.М., Зелевинский А.В., Капранов М.М. Гипергеометрические функции и торические многообразия// Функц. анализ и его прилож. 1989. Т. 23, №2, С. 12 – 26.

[12]Васильев В.А. Топология дополнения к дискриминантам. М.: Фазис, 1997.

[13]Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A. Discriminants, resultants and multidimensional determinants. Birkhäuser: Boston, 1994.

[14]Садыков Т.М., Цих А.К. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014.

и только они.

По очевидным причинам дискриминант $\Delta(a)$ алгебраического уравнения (2) играет важную роль при описании структуры и свойств общей алгебраической функции $y(a)$, например, потому, что нули дискриминанта составляют множество сингулярностей для $y(a)$. Структура *дискриминантного множества* $\nabla = \{a : \Delta(a) = 0\}$ настолько богатая, что она уже многие годы привлекает пристальное внимание алгебраических геометров[15], а также специалистов по теории сингулярностей[16] [17] и теории представлений[18]. Видимо, Д. Гильберт был первый, кто определил сингулярную стратификацию дискриминантного множества[19]. Несомненно, столь глубокое проникновение им вглубь структуры дискриминантного множества было связано с вопросом о структуре общей алгебраической функции, в частности, с 13-ой проблемой Гильберта (1900) о суперпозиции общей алгебраической функции посредством функций двух переменных.

Несмотря на впечатляющие многовековые достижения в теории алгебраических функций, в ней остается много неисследованных вопросов. Например, формулы Меллина и Биркелана имеют весьма узкие области сходимости, и этот факт ограничивает диапазон их применений; результаты Эрмита, Кронекера и Умемуры устанавливают лишь мост между алгебраическими функциями и тэта-функциями, но до сих пор аппарат тэта-функций не приспособлен для непосредственного оперирования с алгебраическими функциями. Усилить данный тезис о неисследованности многих вопросов теории алгебраических функций можно словами из статьи А.Г. Витушкина[20]:
«*Теорема Колмогорова о суперпозициях непрерывных функций опровергает гипотезу 13-ой проблемы Гильберта. Однако, алгебраическое ядро проблемы осталось незатронутым. Можно рассчитывать на положительное решение проблемы в классе аналитических функций* (т.е. на возможность суперпозирования общей алгебраической функции посредством аналитических функций двух переменных). *Таким образом, проблема* (о структуре общей

[15]Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A. Op.cit.

[16]Александров А.Г. Индекс дифференциальных форм на полных пересечениях// Функц. анализ и его прил. 2015. Т. 49, № 1, С. 1 – 17.

[17]Васильев В.А. Ветвящиеся интегралы. М.: МЦНМО, 2000.

[18]Weyman J. Gordan Ideals in the theory of Binary Forms// J. of Algebra. **161** (1993), P. 358 – 369.

[19]Hilbert D. Über die Singularitäten der Diskriminantenfläche// Mathem. Annalen. **30** (1887), P. 437 – 441.

[20]Витушкин А.Г. 13-я проблема Гильберта и смежные вопросы// УМН. 2004. Т. 59, № 1, С. 11 – 21.

алгебраической функции) *остается открытой и диапазон вопросов по большому счету столь же широк, как и в начале XX века*».

Цель диссертации

Целью диссертационной работы является получение новых аналитических формул в виде степенных рядов и интегралов с параметрами для решения общего алгебраического уравнения, разработка конструктивных методов вычисления монодромии общей алгебраической функции, исследование сингулярной стратификации и дифференциальной геометрии ее дискриминантного множества, применение полученных результатов к эффективному нахождению сингулярных точек общих алгебраических гиперповерхностей в виде явных аналитических формул.

Методика исследования

В работе используются результаты и методы теории гипергеометрических функций многих переменных, с помощью которых доказывается интегральная формула для решения общего алгебраического уравнения. На основе этой формулы описывается монодромия общей алгебраической функции, при этом в значительной мере используются понятия амебы и коамебы применительно к дискриминантным множествам.

Напомним, что *амеба* и *коамеба* алгебраического множества $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^m$ определяются как образы множества V относительно отображений

$$\mathrm{Log} : (\mathbb{C} \setminus 0)^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathrm{Arg} : (\mathbb{C} \setminus 0)^m \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

которые переводят точку $z \in (\mathbb{C} \setminus 0)^m$ в

$$\mathrm{Log}\,(z) = (\log|z_1|, \ldots, \log|z_m|), \quad \mathrm{Arg}\,(z) = (\arg z_1, \ldots, \arg z_m),$$

соответственно. Поскольку полный (комплексный) логарифм представляет собой сумму

$$\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}\,(z) = \mathrm{Log}\,(z) + i\mathrm{Arg}\,(z),$$

амеба и коамеба V – это вещественная и мнимая проекции V в логарифмической шкале.

Основу логарифмического метода аналитического продолжения общей алгебраической функции составляет гомологический принцип разделяющих циклов из теории многомерных вычетов.

Для предъявления мономиальных формул, связывающих сингулярные страты каспидального типа и A-дискриминантные множества, используется параметризация Горна-Капранова для приведенного A-дискриминантного множества алгебраического уравнения от k неизвестных, а также теорема Капранова[21] о характеризации такого множества в терминах логарифмического отображения Гаусса. Для классического дискриминантного множества, т.е. для дискриминантного множества приведенного алгебраического уравнения (3), мы используем $(q-p)$-значную параметризацию типа Горна-Капранова, полученную в статье Пассаре-Циха[22]. С помощью этой параметризации доказывется представление для кратных корней уравнения (3) в виде элементарной функции. По теореме Капранова параметризация дискриминантного множества этого уравнения является обращением логарифмического отображения Гаусса, и это обстоятельство используется при нахождении формулы для особых точек общих алгебраических поверхностей через коэффициенты исходного уравнения.

Для доказательства факторизации срезок дискриминанта многочлена в произведение дискриминантов многочленов меньших степеней, используется формула Гельфанда-Капранова-Зелевинского[23] для коэффициентов при мономах, соответствующих вершинным точкам многогранника Ньютона дискриминанта многочлена. Поскольку многогранник Ньютона дискриминанта многочлена степени n комбинаторно эквивалентен $(n-1)$-мерному кубу, его вершины удобно индексировать целочисленными триангуляциями отрезка $[0, n]$.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми. В частности, получена новая формула в виде ветвящегося интеграла, с помощью которой

[21] Kapranov M.M. A characterization of A-discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map// Math. Ann. **290** (1991), P. 277 – 285.

[22] Passare M., Tsikh A. Op. cit.

[23] Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A. Op. cit.

вычислена монодромия общей алгебраической функции в окрестности области сходимости представляющего ее гипергеометрического ряда Меллина. Построен новый, так называемый *логарифмический* метод аналитического продолжения алгебраических функций.

Исследованы сингулярные страты каспидального типа для классического дискриминантного множества. Доказано, что такие страты мономиальными преобразованиями переводятся в A-дискриминантные множества, тем самым предсказано существование иерархии между стратами всех A-дискриминантных множеств.

Впервые получены явные аналитические формулы для особых точек общих алгебраических гиперповерхностей.

Практическая и теоретическая ценность

Результаты, полученные в диссертационной работе, представляют теоретический интерес и могут быть использованы в многомерном комплексном анализе, алгебраической геометрии, а также в теории сингулярностей.

Апробация работы

Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на следующих конференциях:

1. Международной школе-конференции «Комплексный анализ и его приложения» (Краснодар, 2005);

2. Международной конференции «Analysis and geometry on complex varieties» (Красноярск, 2007);

3. Международной конференции «Idempotent and Tropical Mathematics and Problems of Mathematical Physics» (Москва, 2007);

4. Втором российско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Москва, 2008);

5. Пятом российско-китайском симпозиуме «Комплексный анализ и его приложения» (Москва-Белгород, 2009);

6. Международной конференции «Современный анализ и его приложения» (Новосибирск, 2009);
7. Летней школе-конференции по проблемам алгебраической геометрии и комплексного анализа (Ярославль, 2011);
8. Четвертом российско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Красноярск, 2012);
9. Летней школе-конференции по проблемам алгебраической геометрии и комплексного анализа (Ярославль, 2013);
10. Сателлитной конференции Международного конгресса математиков в Корее: International conference on Complex Analysis and Geometry (KSCV - 10) (Gyeong-Ju, 2014);
11. Пятом российско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Ереван, 2014);
12. Международной конференции «Multidimentional complex analysis and differential equations» (Красноярск, 2014);
13. Пятой школе-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России (г. Коряжма, Архангельской области, 2015).
14. Международной конференции «Complex analysis and differential equations» (Санкт-Петербург, 2015).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1 – 11] входящих в перечень рецензируемых изданий, рекомендованных ВАК.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав основного содержания и заключения. Список литературы содержит 121 наименований. Работа изложена на 175 страницах.

Содержание работы

В первой главе приводятся представления для решений уравнений (1), (3) в виде одномерных ветвящихся интегралов (так называются интегралы, у которых подынтегральные выражения являются многозначными функциями). Эти представления получаются из интегральной формулы Меллина для решения $y(x)$ уравнения (1). Рассмотрим несколько другую запись этого уравнения, нумеруя коэффициенты в обратном порядке и позволяя быть нулевыми некоторым из них:

$$y^n + x_1 y^{n_1} + \ldots + x_l y^{n_l} - 1 = 0, \;\; n > n_1 > \ldots > n_l > 0. \tag{4}$$

Введем два целочисленных вектора

$$\alpha = (n_1, \ldots, n_l), \;\; \beta = (n - n_1, \ldots, n - n_l).$$

Интегральная формула Меллина[24] выражает ветвь $y = y_0(x)$ решения уравнения (4), выделенную вблизи $x = 0$ условием $y_0(0) = 1$, в виде интеграла Меллина-Барнса

$$y_0(x) = \frac{\frac{1}{n}}{(2\pi i)^l} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^l} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{\langle \alpha, \zeta \rangle}{n}\right) \Gamma(\zeta_1) \ldots \Gamma(\zeta_l)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{\langle \beta, \zeta \rangle}{n} + 1\right)} x^{-\zeta} d\zeta, \tag{5}$$

где используется мультииндексная запись

$$x^{-\zeta} = x_1^{-\zeta_1} \ldots x_l^{-\zeta_l}, \; d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_l.$$

Следуя Меллину, указанную ветвь $y_0(x)$ называют *главным решением* уравнения (4). Отметим, что все остальные ветви получаются из $y_0(x)$ по формуле

$$y_j(x) = \varepsilon_j y_0(\varepsilon_j^{n_1} x_1, \ldots, \varepsilon_j^{n_l} x_l), \; j = 1, \ldots, n-1, \tag{6}$$

где $\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi j}{n} i}$ – первообразные корни из единицы.

Заметим, что в интеграле (5) подынтегральное выражение является хотя и трансцендентной функцией, но однозначной, а множество интегрирования неограничено. В § 1.2 приводится представление для главного решения в виде ветвящегося интеграла по отрезку. Введем для краткости письма обозначение

$$F_{\pm}(x;t) = 1 - \sum_{k=1}^{l} e^{\pm \frac{n_k}{n} \pi i} x_k t^{\frac{n_k}{n}} (1-t)^{\frac{n-n_k}{n}}$$

[24] Mellin H.J. Op. cit.

для пары афинных относительно x функций.

Теорема 1. *Главное решение $y_0(x)$ уравнения (4) допускает представление в виде интеграла*

$$y_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i n} \int\limits_0^1 \frac{t^{\frac{1-n}{n}}}{(1-t)^{\frac{1+n}{n}}} \left[e^{\frac{\pi i}{n}} \ln F_+(x;t) - e^{-\frac{\pi i}{n}} \ln F_-(x;t) \right] dt, \qquad (7)$$

где ветви логарифма определены в области пространства $\mathbb{C}^l$ переменного $x = (x_1, \ldots, x_l)$, полученной удалением из $\mathbb{C}^l$ двух семейств Σ_+ и Σ_- комплексных гиперплоскостей

$$\Sigma_\pm = \bigcup_{t \in (0;1)} \{x : F_\pm(x;t) = 0\},$$

и выбираются условием $\ln 1 = 0$.

Отметим, что интеграл (7) сходится для $x \in \mathbb{C}^l \setminus (\Sigma_+ \cup \Sigma_-)$ благодаря тому факту, что подынтегральное выражение в квадратных скобках обращается в нуль в точке $t = 1$ с порядком, достаточным для компенсации неинтегрируемого множителя $(1-t)^{-\frac{1+n}{n}}$ перед скобкой.

В Теореме 2 формула (7) модифицируется применительно к другим приведенным уравнениям из списка (3). В модифицированной формуле фигурирует похожий ветвящийся интеграл, однако, множество интегрирования в нем – цикл (т.е. замкнутый контур).

В оставшейся части первой главы приводятся некоторые формулы решений триномиальных и тетраномиальных уравнений, которые не удалось найти в литературе, но представляются нам интересными. Например, формула решения кубического уравнения в параграфе 1.7 показывает, как решение конструируется из своего сужения на дискриминантную кривую.

Будучи однопараметрическими семействами комплексных гиперплоскостей, множества $\Sigma_\pm$ в Теореме 1 представляют собой вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^l$. Фактически они являются разрезами в пространстве $\mathbb{C}^l$, примыкающими к дискриминантному множеству уравнения (4) (см. Рис. 2 в случае $l = 1$). Указанные разрезы вместе с соотношениями (6) для ветвей уравнения (4) позволяют получить важную информацию о монодромии решения $y(x)$.

Исследованию указанной монодромии посвящена **вторая глава** диссертации. В ней рассматриваются две задачи. Первая из них касается вычисления группы монодромии уравнения (1) в малой окрестности области сходимости D степенного ряда для главного решения $y_0(x)$. Этот ряд определен формулой (18) ниже; заметим, что ввиду соотношений (6) степенные ряды для всех других ветвей $y_j(x)$ имеют ту же самую область сходимости.

Основным инструментом для решения поставленной задачи является пересечение $\mathcal{S} = \partial D \cap \nabla$, которое обладает тем свойством, что аналитические продолжения решения $y(x)$ уравнения (1) вокруг $\mathcal{S}$ исчерпывает всю монодромию для $y(x)$ вблизи D. Оказывается, $\mathcal{S}$ состоит из n вещественно $(n-2)$-мерных кусков $\mathcal{S}^{(0)}, \mathcal{S}^{(1)}, \ldots, \mathcal{S}^{(n-1)}$, критичных для Log-проекции $\mathrm{Log}\big|_{\nabla}$ и назаемых струнами.

Струны $\mathcal{S}^{(j)}$ допускают естественную параметризацию. А именно, дискриминантное множество ∇ допускает следующую n-значную параметризацию $x = \Psi(s)$:

$$x_k = \Psi_k(s) = \frac{ns_k}{\langle \alpha, s\rangle}\left(-\frac{\langle \alpha, s\rangle}{\langle \beta, s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 1, \ldots, n-1; \quad s \in \mathbb{CP}_{n-2}, \tag{8}$$

где

$$\alpha = (n-1, n-2, \ldots, 1), \quad \beta = (1, 2, \ldots, n-1).$$

Сужение $\Psi^{(j)}\big|_{\mathbb{R}^{n-2}_+}$ каждой ветви $\Psi^{(j)}$ отображения Ψ параметризует струну $\mathcal{S}^{(j)}$ (здесь $\mathbb{R}^{n-2}_+ \subset \mathbb{R}^{n-2} \subset \mathbb{CP}_{n-2}$ – ортант вещественной аффинной части).

Будучи поликруговой, область D определяется условиями лишь на модули переменных x_j, при этом ее граница ∂D параметризуется в виде

$$|x_k| = |\Psi_k(s)|, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad s \in \mathbb{R}^{n-2}_+.$$

Согласно Предложению 2.3, комплексная прямая, выпущенная из начала координат $x = 0$ через произвольную точку на любой струне $\mathcal{S}^{(j_0)}$, пересекает каждую из струн $\mathcal{S}^{(j)}$ в единственной точке. На каждой такой комплексной прямой мы можем выбрать n петель σ_j с началом в $x = 0$, окружающих струны $\mathcal{S}^{(j)}$.

Одним из основных результатов второй главы является следующая теорема о монодромии $y(x)$. Напомним, что все ветви $y_j(x)$ многозначной функции $y(x)$ определяются по главной ветви $y_0(x)$ формулой (6).

Теорема 7. *При продолжении через границу ∂D области D всякая ветвь $y_j(x)$ решения уравнения (1) имеет ветвление лишь в паре струн $\mathcal{S}^{(j)}$, $\mathcal{S}^{(j-1)}$, причем второго порядка.*

Приведем геометрическую интерпретацию вышесказанного для кубического уравнения

$$y^3 + x_2 y^2 + x_1 y - 1 = 0, \tag{9}$$

дискриминант которого есть полином

$$\Delta(x_1, x_2) = 27 + 4x_1^3 - 4x_2^3 + 18x_1x_2 - x_1^2x_2^2.$$

Амеба дискриминантного множества $\nabla = \{x : \Delta(x) = 0\}$, т.е. образ $\mathrm{Log}\nabla$, есть темноокрашенная часть на Рис. 1, а Log-образ области сходимости D соответствующих гипергеометрических рядов для ветвей $y_j(x)$ изображается светлоокрашенной частью.

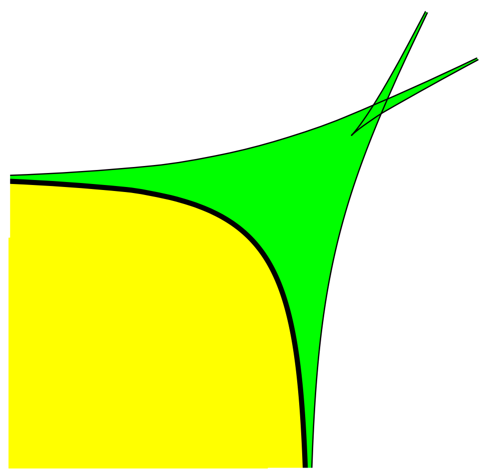

Рис. 1. Примыкание области D к ∇ в логарифмической шкале

Граница ∂D области D примыкает к дискриминантному множеству ∇ по кускам струн $\mathcal{S}^{(0)}, \mathcal{S}^{(1)}, \mathcal{S}^{(2)}$, Log-образы которых есть жирная кривая на рисунке. Теорема 7 утверждает, что при продолжении через границу ∂D каждое решение $y_j(x)$ уравнения (9) имеет ветвление лишь в точках двух струн. В случае общего уравнения (1) таких струн будет n. Однако, при продолжении через ∂D любое из решений $y_j(x)$, $j = 0, \ldots, n-1$, по-прежнему имеет ветвление лишь в двух струнах из n.

Для триномиального уравнения

$$y^n + xy^m - 1 = 0, \;\; 0 < m < n \tag{10}$$

Теорема 7 позволяет описать полную монодромию $y(x)$. Не ограничивая общности можно считать, что m и n взаимно просты. В этом случае дискриминантное множество ∇ уравнения (10) составляет следующая последовательность комплексных чисел

$$x_j = \frac{e^{\pi i \frac{m+2j}{n}}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}}\ ,\ j = 0, \ldots, n-1,$$

лежащих на одной окружности. Множества $\Sigma_{\pm}$ представляют собой пару радиальных лучей (разрезов) (см. Рис. 2), исходящих из дискриминантных точек x_0 и x_{n-m}.

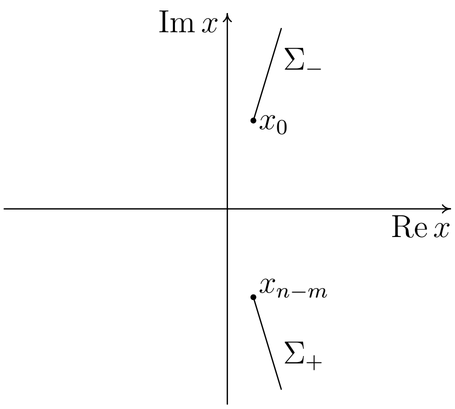

Рис. 2. Разрезы Σ_+ и Σ_- для триномиального уравнения (10)

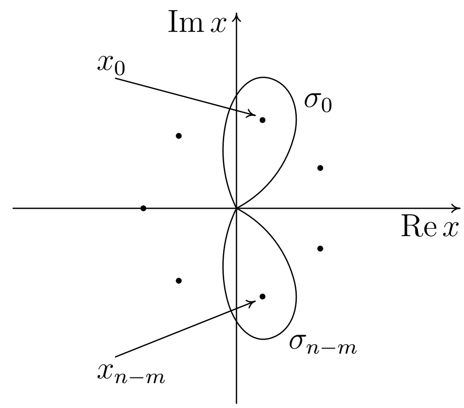

Рис. 3. Образующие петли дополнения к дискриминантному множеству

Совокупность петель σ_k, каждая из которых проходит через $x = 0$ и окружает лишь точку x_k, порождает фундаментальную группу дополнения $\mathbb{C} \setminus \nabla$ дискриминантного множества.

Теорема 8. *Если m и n взаимно просты, то всякая ветвь $y_j(x)$ триномиального уравнения (10) имеет ветвление (причем второго порядка) лишь в паре точек*

$$\frac{e^{\frac{m}{n}(1-2j)\pi i}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}} = x_{-mj (mod\, n)}, \quad \frac{e^{\frac{m}{n}(-1-2j)\pi i}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}} = x_{-m(j+1)(mod\, n)}.$$

При этом, ветвь y_j при обходе петли $\sigma_{-mj (mod\, n)}$ переходит в ветвь $y_{(j-1)(mod\, n)}$, а при обходе петли $\sigma_{-m(j+1)(mod\, n)}$ — в ветвь $y_{(j+1)(mod\, n)}$.

Отметим, что в рассматриваемом случае (когда m и n взаимно просты) группа монодромии решения $y(x)$ порождается смежными транспозициями

$$(0,1), (1,2), \ldots, (n-2, n-1).$$

Хорошо известно, что указанные транспозиции порождают всю симметрическую группу подстановок S_n. Поскольку уравнение (10) получается сужением уравнения (1) на координатную прямую, группа монодромии уравнения (1) вблизи области D также совпадает с группой S_n.

Вторая задача о монодромии общей алгебраической функции $y(x)$ связана с построением всех степенных разложений (в виде рядов Пюизо с центром в нуле) всевозможных ветвей $y(x)$. Для решения этой задачи в параграфе 2.2 конструируется новый, так называемый *логарифмический* метод аналитического продолжения ветвей общей алгебраической функции. Идея этого метода основана на том, что степенные ряды (с центром в нуле) для ветвей $y(x)$ имеют поликруговые области сходимости, а интегралы Меллина-Барнса для них имеют секториальные области сходимости (т.е. определяемые только условиями на аргументы). Очевидно, любая поликруговая область имеет непустое пересечение с любой секториальной областью. Поэтому каждый степенной ряд для ветви общей алгебраической функции автоматически продолжается в любой сектор, где ветвь представляется интегралом Меллина-Барнса, и обратно. Такой метод аналитического продолжения мы называем логарифмическим, поскольку в нем каждый шаг непосредственного аналитического продолжения реализуется в пересечении областей

$$\mathrm{Log}^{-1}(D') \cap \mathrm{Arg}^{-1}(D''),$$

где D' – это Log-образ области сходимости ряда, а D'' – это Arg-образ области сходимости интеграла Меллина-Барнса. Тот факт, что отображения Log и Arg являются вещественной и мнимой частями комплексного логарифма $\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}$, и объясняет терминологию «логарифмического метода» аналитического продолжения.

Поясним основную идею этого метода на примере кубического уравнения

$$y^3 + xy - 1 = 0.$$

Согласно (5) главное решение этого уравнения допускает представление в виде интеграла Меллина-Барнса

$$y_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}z)\Gamma(z)}{\Gamma(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z + 1)} x^{-z} dz, \tag{11}$$

который сходится в секторе $|\arg x| < \frac{\pi}{3}$. Здесь $\gamma + i\mathbb{R}$ – вертикальная прямая, разделяющая полюсы гамма-функций, стоящих в числителе. Вычисляя интеграл (11) как сумму вычетов в полюсах $z = -k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$, происходящих от функции $\Gamma(z)$, получаем ряд

$$y_0(x) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}k)}{\Gamma(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}k)k!} x^k, \tag{12}$$

сходящийся в круге $|x| < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. Вычисляя же (11) как сумму вычетов в полюсах $z = 1 + 3k, \ k = 0, 1, 2, \ldots$, происходящих от $\Gamma(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}z)$, приходим к ряду

$$y(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + 3k)}{\Gamma(2 + 2k)k!} \frac{1}{(-x)^{3k}}, \tag{13}$$

который сходится при $|x| > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, т.е. вне указанного круга.

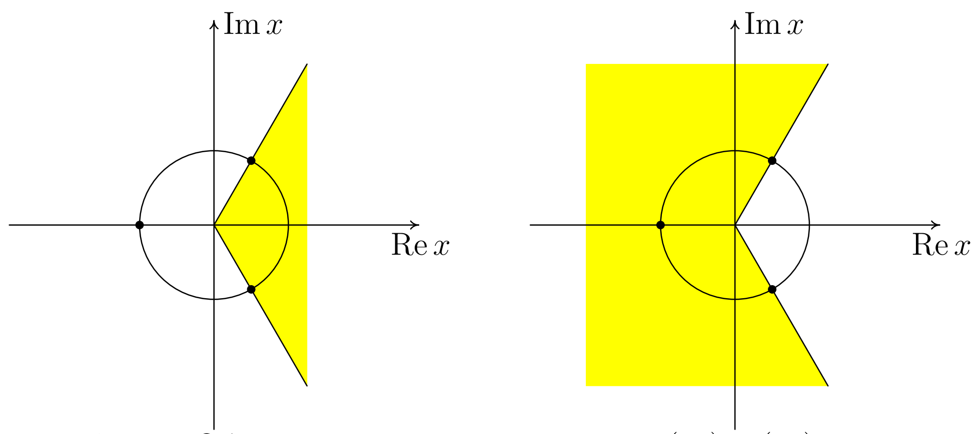

Рис. 4. Области сходимости интегралов (11) и (14)

С другой стороны, согласно Белардинелли[25], (отрицательная) степень $\frac{1}{y_0^{\mu}(x)}$, $\mu > 0$ решения рассматриваемого уравнения допускает представление в виде интеграла Меллина-Барнса

$$\frac{1}{y_0^{\mu}(x)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}} \frac{\frac{\mu}{3}\Gamma(z)\Gamma(\frac{\mu}{3} - \frac{2z}{3})}{\Gamma(\frac{\mu}{3} + 1 + \frac{z}{3})} (-x)^{-z} dz, \tag{14}$$

сходящегося в секторе $\frac{\pi}{3} < \arg x < \frac{5\pi}{3}$.

Заметим, что если $y(x)$ является решением рассматриваемого кубического уравнения, то $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y(x) = -\frac{x}{y(x)} + \frac{1}{y^2(x)}. \tag{15}$$

[25] Belardinelli G. Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébrigues générales. Memorial des Sciences Mathématiques CXLV. Gauthier-Villars. Paris. 1960.

Вычисляя интеграл (14) как сумму вычетов в полюсах $z = \frac{\mu}{2} + \frac{3}{2}k$, и подставляя в эту сумму получаемые ряды при $\mu = 1$ и $\mu = 2$, получим ряд

$$y(x) = \frac{1}{2}(-x)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k)}{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}k)k!} \left(-\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}k}, \quad |x| > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}. \tag{16}$$

Если будем вычислять (14) как сумму вычетов в полюсах функции $\Gamma(z)$, расположенных левее контура интегрирования, то вновь получим ряд (12).

Таким образом, для рассматриваемого кубического уравнения мы получили три степенных ряда, сходящихся в круге $|x| < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ (это главное решение (12) рассматриваемого уравнения, и два других, соответствующих значениям $j = 1, 2$), а также три ряда, сходящихся вне указанного круга (это ряд (13) и две ветви ряда (16)). В силу того, что области сходимости рассматриваемых рядов имеют непустое пересечение с секторами, в которых аналитичны интегралы для $y(x)$ и $\frac{1}{y^{\mu}(x)}$, то ряды (13) и (16) являются аналитическим продолжением ряда (12) из круга $|x| < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ в его внешность. При этом (13) продолжается через сектор $|\arg x| < \frac{\pi}{3}$ (см. Рис. 4 слева), а ряд (16) – через сектор $\frac{\pi}{3} < \arg x < \frac{5\pi}{3}$ (см. Рис. 4 справа).

Общая схема логарифмического метода продолжения для решения уравнения

$$y^n + x_l y^{n_l} + \ldots + x_1 y^{n_1} - 1 = 0. \tag{17}$$

следующая. Мы исходим из гипергеометрического ряда для μ-ой степени ($\mu > 0$) главного решения:

$$y_0^{\mu}(x) = \frac{\mu}{n} \sum_{|k| \geq 0} \frac{(-1)^{|k|}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{n} + \frac{n_1}{n}k_1 + \ldots + \frac{n_l}{n}k_l\right)}{k_1! \ldots k_l!\,\Gamma\left(\frac{\mu}{n} - \frac{n_1'}{n}k_1 - \ldots - \frac{n_l'}{n}k_l + 1\right)} x_1^{k_1} \ldots x_l^{k_l}, \tag{18}$$

где $n_\nu' = n - n_\nu$. Этот ряд сходится в упомянутой выше области D, содержащей начало координат $x = 0$.

Для реализации конструктивного аналитического продолжения ряда (18) мы используем понятия многогранника Ньютона $\mathcal{N}_\Delta$ дискриминанта Δ и амебы A_∇ дискриминантного множества ∇. Нам потребуется два фундаментальных факта для этих понятий:

1. Многогранник Ньютона дискриминанта Δ уравнения (17) комбинаторно эквивалентен l-мерному кубу; при этом существует конструктивное со-

ответствие $\{\tau\} \longleftrightarrow \{v_\tau\}$ между множеством всех триангуляций отрезка $[0,n]$ с вершинами $0, n_1, \ldots, n_l, n$ (см.[26]).

2. Дополнение $\mathbb{R}^l \setminus \mathcal{A}_\nabla$ амебы дискриминантного множества имеет 2^l связных компонент, причем каждой вершине v_τ многогранника Ньютона $\mathcal{N}_\Delta$ соответствует связная компонента E_τ указанного дополнения, у которой конус рецессии совпадает с двойственным конусом многогранника $\mathcal{N}_\Delta$ в вершине v_τ (см.[27]).

Таким образом, мы имеем следующую цепочку соответствий:

$$\{\tau\} \longleftrightarrow \{v_\tau\} \longleftrightarrow \{E_\tau\}.$$

Сквозное соответствие $\{\tau\} \longleftrightarrow \{E_\tau\}$ этой цепочки для уравнения пятой степени изображено на Рис. 5.

Для любой пары $p, q \in \{0, 1, \ldots, l, l+1\}$ упорядоченных $(p < q)$ номеров введем два вектора

$$b_p = \frac{1}{n_q - n_p}(-n_p, n_1 - n_p, \ldots [p] \ldots [q] \ldots, n_{l+1} - n_p),$$

$$b_q = \frac{1}{n_q - n_p}(-n_q, n_1 - n_q, \ldots [p] \ldots [q] \ldots, n_{l+1} - n_q),$$

где $n_{l+1} = n$. С помощью этих векторов определим выражение

$$A_k^{p,q} := \frac{\frac{\mu}{n_q - n_p}\Gamma\left(\frac{\mu}{n_q - n_p} + \langle b_p, k\rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{n_q - n_p} + \langle b_q, k\rangle + 1\right) k_0! \ldots [p] \ldots [q] \ldots k_{l+1}!},$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ – знак скалярного произведения, причем под k понимается вектор $k = (k_0, k_1, \ldots [p] \ldots [q] \ldots, k_{l+1})$. В приведенных обозначениях справедлива

Теорема 11. *Для любой упорядоченной пары $p, q \in \{0, 1, \ldots, l+1\}$ ряд (18) допускает аналитическое продолжение в виде $(n_q - n_p)$-значного ряда Пюизо*

$$y^\mu_{p,q}(x) = \left(-\frac{x_p}{x_q}\right)^{\frac{\mu}{n_q - n_p}} \sum_{|k|\geq 0} A_k^{p,q} \frac{(-1)^{k_0 + \langle b_p, k\rangle} x_p^{\langle b_q, k\rangle}}{x_q^{\langle b_p, k\rangle}} x_1^{k_1} \ldots [p] \ldots [q] \ldots x_l^{k_l}. \qquad (19)$$

---

[26]Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A. Op. cit.

[27]Passare M., Sadykov T., Tsikh A. Singularities of hypergeometric functions in several variables// Compositio Math. **141** (2005), P. 787 – 810.

Область сходимости $D_{p,q}$ этого ряда содержит каждую из областей $\mathrm{Log}^{-1}(E_\tau)$, для которой разбиение τ содержит отрезок $[n_p, n_q]$. В каждой области $\mathrm{Log}^{-1}(E_\tau)$ сходится ровно n рядов $y_{p,q}$, если учитывать, что каждый ряд является $(n_q - n_p)$-значным. Тем самым (19) составляет полный набор всех центрированных в нуле степенных разложений решения уравнения (17).

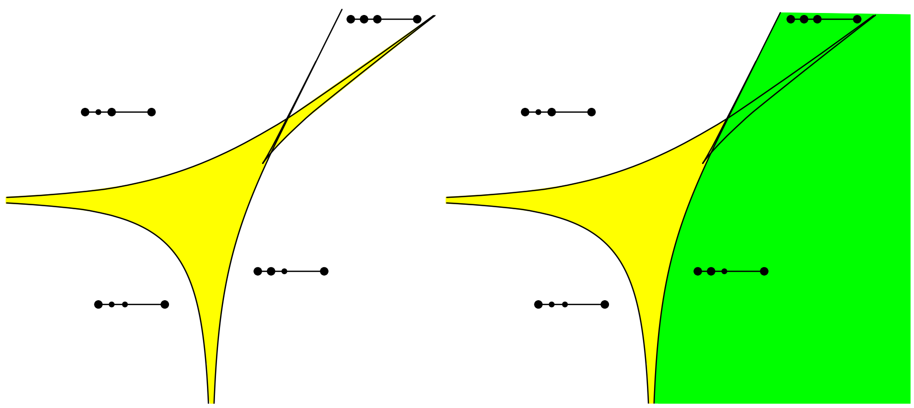

Рис. 5. Амеба дискриминанта уравнения $y^5 + x_2y^2 + x_1y - 1 = 0$
и соответствие $\{\tau\} \longleftrightarrow \{E_\tau\}$ (слева); примыкание $\mathrm{Log}(D_{0,1})$ к амебе (справа)

На Рис. 5 темноокрашенная зона $\mathrm{Log}(D_{0,1})$ содержит две компоненты связности дополнения амебы дискриминанта: одна из них соответствует разбиению $[0,1], [1,5]$, а другая – разбиению $[0,1], [1,2], [2,5]$.

Для некоторых рядов из списка (19) можно предъявить конструктивное непосредственное аналитическое продолжение одного ряда в другой. Введем в $(\mathbb{C}\setminus 0)^l$ следующие секториальные области (определяемые только условиями на аргументы $\arg x_j = \theta_j$):

$$S = Arg^{-1}\left\{|\theta_\nu| < \frac{\pi n_\nu}{n},\, \nu \in I,\, |n_j\theta_k - n_k\theta_j| < \pi n_j\right\},$$

$$S' = Arg^{-1}\left\{|\theta_\nu + \pi| < \frac{\pi n'_\nu}{n},\, \nu \in I,\, |n'_k(\theta_j + \pi) - n'_j(\theta_k + \pi| < \pi n'_k,\right\},$$

где I — набор индексов $\{1, \ldots, l\}$; $j, k \in I,\ j < k$.

Теорема 12. *Ряд $y_{0,q}$ есть результат аналитического продолжения главного решения y_0 из области $D_{0,l+1}$ в $D_{0,q}$ через сектор S, а $y_{p,l+1}$ – результат аналитического продолжения y_0 из $D_{0,l+1}$ в $D_{p,l+1}$ через сектор S'.*

В **третьей главе** исследуются структуры классического дискриминанта Δ и его нулевого множества ∇, которое мы называем дискриминантным множеством. Описание структуры дискриминанта Δ ведется на языке его многогранника Ньютона. Как говорилось выше, многогранник Ньютона для Δ комбинаторно эквивалентен кубу. Применительно к приведенному уравнению

$$1 + x_1 y + \ldots + x_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0, \tag{20}$$

многогранник Ньютона дискриминанта $\Delta = \Delta_n$ содержит кроме $k-1$ координатных плоскостей следующие некоординатные гиперплоскости (см. [28]):

$$g_k := \left\{ t \in \mathcal{N}(\Delta) : \sum_{j=1}^{n-1} min(j,k)[n - max(j,k)]t_j = nk(n-k) \right\},$$

$k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Многогранник G размерности d назовем *d-призмой*, если у него две гиперграни (которые будем называть *основаниями*) являются конгруэнтными многогранниками с параллельными соответствующими ребрами, причем все остальные ребра параллельны друг другу и соединяют соответствующие вершины оснований.

Теорема 15. *Гиперграни g_2 и g_{n-2} многогранника Ньютона $\mathcal{N}(\Delta_n)$ дискриминанта приведенного многочлена (20) степени n являются $(n-2)$-призмами.*

Срезкой (сужением) дискриминанта Δ_n на гипергрань g_k его многогранника Ньютона мы называем многочлен $\Delta_n\big|_{g_k}$, состоящий из всех мономов Δ_n, показатели которых принадлежат g_k.

Теорема 16. *Для степеней $n = 4, 5, 6$ срезки $\Delta_n\big|_{g_k}$ дискриминанта многочлена степени n факторизуются с точностью до монома в виде произведения $\Delta_k \Delta_{n-k}$ дискриминантов многочленов степеней k и $n-k$. Совместные нули множителей Δ_k и Δ_{n-k} определяют асимптотическое поведение на бесконечности стратов самопересечения дискриминантного множества $\Delta_n = 0$.*

При изложении содержания второй главы мы уже видели, насколько важную роль играет дискриминантное множество для описания монодромии общей алгебраической функции. Причиной тому является тот факт, что ∇ яв-

[28] Passare M., Tsikh A. Op. cit.

ляется множеством особых точек для этой функции. Однако, для большего понимания структуры общей алгебраической функции требуется более детальное изучение дискриминантного множества ∇. Как уже указывалось, начало изучения структуры дискриминантного множества положил Гильберт[29]. Он предложил разбить все пространство многочленов степени n на подмножества $\mathcal{M}^{k_1,\ldots,k_r}$ (названных им «Gebilde»; сейчас их называют стратами), состоящих из многочленов вида

$$f(y) = a_n(y-t_1)^{k_1}\ldots(y-t_r)^{k_r}, \quad k_1+\ldots+k_r = n.$$

Особым образом он выделил подмножество $\mathcal{M}^j$ пространства уравнений (2) степени n состоящее из таких $a \in \mathbb{C}^{n+1}$, для которых уравнение имеет корни кратности $\geq j$. Эти подмножества образуют вложенную цепочку

$$\nabla = \mathcal{M}^2 \supset \mathcal{M}^3 \supset \ldots \supset \mathcal{M}^n.$$

Каждое $\mathcal{M}^{j+1}$ принадлежит множеству сингулярных точек $sng\,\mathcal{M}^j$, при этом страт $S^j = \mathcal{M}^j \setminus \mathcal{M}^{j+1}$ состоит из точек, где $\mathcal{M}^j$ либо неособо, либо самопересекается своими гладкими кусками. Поэтому мы называем $\mathcal{M}^j$ *сингулярными стратами каспидального типа.*

Отметим, что страты $\mathcal{M}^j$ изучались в статье Каца[30], где было доказано свойство наследственности для этих стратов: $\mathcal{M}^j$ получается из $\mathcal{M}^{j+1}$ с помощью всех касательных конусов к $\mathcal{M}^{j+1}$.

Одним из основных результатов этой главы является

Теорема 17. *Страты $\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^3, \ldots, \mathcal{M}^n$ мономиальными преобразованиями сводятся к некоторым A-дискриминантным множествам $\nabla_{A_2},\ \nabla_{A_3}, \ldots, \nabla_{A_n}$.*

Напомним определение A-дискриминантного множества (см.[31], гл. 9). Речь идет о распространении уравнения (1) от одной неизвестной величины y на уравнение от k неизвестных $y = (y_1, \ldots, y_k)$:

$$f(y_1,\ldots,y_k) := \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in A} a_\alpha {y_1}^{\alpha_1}\ldots {y_k}^{\alpha_k} = 0, \tag{21}$$

[29]Hilbert D. Op.cit.

[30]Katz G. How Tangents Solve Algebraic Equations, or a Remarkable Geometry of Discriminant Varieties// Expo. Math. **21** (2003), P. 219 – 261.

[31]Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A. Op. cit.

где $A \subset \mathbb{Z}^k$ – фиксированное конечное множество показателей, порождающее решетку $\mathbb{Z}^k$ как аддитивную группу, а коэффициенты a_α – переменные. Множество коэффициентов (оно же и множество уравнений (21), и множество полиномов Лорана f с показателями $\alpha \in A$) пробегает пространство $\mathbb{C}^A$, размерность которого равна мощности A.

Определение. *Пусть ∇° – множество всех $(a_\alpha) \in \mathbb{C}^A$, для которых уравнение (21) имеет критические корни $y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k$, т. е. корни, в которых градиент f равен нулю. Замыкание $\overline{\nabla^\circ}$ называется A-дискриминантным множеством и обозначается ∇_A.*

В случае, когда $k = 1,\ A = \{0, 1, 2 \ldots, n\} \subset \mathbb{Z}$, множество ∇_A превращается в классическое дискриминантное множество ∇ уравнения (2).

В формулировке Теоремы 17 каждое ∇_{A_j} – это A_j-дискриминантное множество уравнения с $j-1$ неизвестными, при этом мощность каждого множества A_j равна $n+1$ и $\nabla_{A_2} = \nabla$. Например, страт $\mathcal{M}^3$ для уравнения 4-ой степени мономиальным преобразованием сводится к дискриминантному множеству уравнения

$$a_{00} + a_{10}y_1 + a_{01}y_2 + a_{31}y_1^3y_2 + a_{63}y_1^6y_2^3 = 0. \tag{22}$$

Доказательство Теоремы 17 основано на нижеследующих Теоремах 18 и 19, которые представляют самостоятельный интерес.

В параграфе 3.4.2 описываются критические страты $\mathcal{C}^j$ параметризации Горна-Капранова

$$\Psi : \mathbb{CP}^{n-2} \longrightarrow \nabla \subset \mathbb{C}^{n-1}$$

для дискриминантного множества ∇ приведенного уравнения (20).

Первый страт $\mathcal{C}^1$ определяется как множество критических значений параметризации Ψ. Ранее в статье[32] было показано, что критические точки отображения Ψ составляют некоторую гиперплоскость $L_1 \subset \mathbb{CP}^{n-2}$, следовательно, первый критический страт $\mathcal{C}^1$ параметризуется сужением Ψ на L_1. Таким образом, можно определить страт $\mathcal{C}^2$ критических значений этого сужения и далее действовать по индукции. Для формулировки итогового результата

[32] Passare M., Tsikh A. Op. cit.

введем следующие гиперплоскости в $\mathbb{CP}^{n-2}$:

$$L_j = \Big\{ s : \sum_{i=j}^{n-1} i(i-1)\dots(i-(j-1))(n-i)s_i = 0 \Big\},$$

где $s = (s_1 : \dots : s_{n-1})$ – однородные координаты.

Теорема 18. *Страты $\mathcal{C}^j$ параметризуются сужениями $\Psi\big|_{L^j}$ на плоскости $L^j = L_1 \cap \dots \cap L_j$.*

Связь критических стратов параметризации Ψ с сингулярными стратами $\mathcal{M}^j$ дает доказываемая в § 3.4.3

Теорема 19. *Сингулярные страты $\mathcal{M}^{j+2} \subset \nabla$ приведенного уравнения (20) совпадают с критическими стратами $\mathcal{C}^j$ параметризации Ψ.*

Таким образом, с учетом Теоремы 18, страты $\mathcal{M}^{j+2}$ параметризуются сужениями $\Psi\big|_{L^j}$.

Приведем одно следствие Теоремы 17, касающееся задачи об алгебраических статистиках в рамках исследований по компьютерной биологии[33] [34]. Пусть $X \subset (\mathbb{C}^*)^m$ – замкнутое неприводимое алгебраическое подмножество (определяющее статистическую модель, в которой роль семейства распределений вероятностей играет вещественный срез $X \cap \mathbb{R}^m$). Ненулевой элемент $s = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}^m$ определяет мономиальную функцию (функцию правдоподобия)

$$z^s = z_1^{s_1} \dots z_m^{s_m} : X \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

Обозначим через X_{sm} множество гладких точек X. *Степенью максимального правдоподобия* множества X называют число критических значений мономиальной функции $z^s\big|_{X_{sm}}$ для достаточно общих $s \in \mathbb{CP}^{m-1}$ (заметим, что переходя к функции $\log x^s$ мы сохраняем множество критических точек и можем их рассматривать не только для целых s). В статье[35] Б. Штурмфельс поставил задачу геометрического описания алгебраических подмножеств $X \subset (\mathbb{C}^*)^m$, у которых степень максимального правдоподобия равна единице.

[33] Pachter L., Sturmfels B. Algebraic statistics for computational biology. Cambridge university press, 2005.

[34] Sturmfels B. Open problems in algebraic statistics// Emerging applications of algebraic Geometry. IMA volumes in mathematics and its applications. Springer, New-York **149** (2009), P. 351 – 364.

[35] Sturmfels B. Op. cit.

Недавно в статье[36] было доказано, что степень максимального правдоподобия X равна единице тогда и только тогда, когда мономиальным преобразованием с конечными слоями X переводится в приведенное A-дискриминантное множество. Поэтому, по Теореме 17 получаем такое

Следствие. *Степень максимального правдоподобия всех приведенных стратов* $\mathcal{M}^j \cap (\mathbb{C}^*)^{n-1}$, $j = 2, \ldots, n$ *дискриминантного множества уравнения*

$$x_0 + x_1 y + \ldots + y^p + y^{p+1} + \ldots + x_n y^n = 0$$

равна единице.

В заключительной **четвертой главе** приводятся формулы для особых точек общих алгебраических гиперповерхностей $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^k$, заданных уравнениями вида (21) от k неизвестных. Термин «общая алгебраическая гиперповерхность» означает, что в (21) коэффициенты переменные. Точка y называется *особой* для гиперповерхности V, если в ней многочлен f равен нулю вместе со своим градиентом. Таким образом, особые точки определяются системой уравнений

$$f(y) = \frac{\partial f}{\partial y_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0.$$

Другими словами, особые точки гиперповерхности V – это решения уравнения (21) на A-дискриминантном множестве ∇_A; такие решения также называем кратными. В частности, при $k = 1$ имеем общее алгебраическое уравнение (2). Как мы знаем, с помощью элементарной замены это уравнение можно привести к уравнению (20). Для его дискриминантного множества ∇ имеется параметризация $x = \Psi(s)$ вида (8), с помощью которой вычисляется сужение решения $y(x)$ уравнения (20) на ∇:

$$y(x)\Big|_{\nabla} = y(s) = \left(\frac{\langle \beta, s\rangle}{\langle \alpha, s\rangle}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Заметим, что параметризация дискриминантного множества представляет его нормализацию с помощью параметра s. Если пытаться записать формулу для сужения $y(x)\Big|_{\nabla}$ в объемлющих координатах x, то единой формулы

[36]Huh J. Discriminants, Horn uniformization, and varieties with maximum likelihood degree one. arxiv: 13.01.2732v2 [math AG], 16 Jan. 2013.

для всех $x \in \nabla$ не получится. Однако, в гладких точках ∇, где градиент дискриминанта не равен нулю, такая формула следующая:

$$y(x)\Big|_{\nabla} = \left(\frac{\langle \beta, x \odot \mathrm{grad}\Delta \rangle}{\langle \alpha, x \odot \mathrm{grad}\Delta \rangle}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{23}$$

где $\odot$ – знак покоординатного умножения векторов. Справедливость этой формулы вытекает из того, что параметризация $x = \Psi(s)$ для ∇ является обращением логарифмического отображения Гаусса для ∇, которое в однородных координатах s пространства $\mathbb{CP}_{n-2}$ имеет вид $s = x \odot \mathrm{grad}\Delta$.

По аналогичной схеме с использованием параметризации Горна-Капранова для A-дискриминантного множества ∇_A, вычисляются решения уравнения (21) на ∇_A. В уравнении (21) можно зафиксировать $k+1$ коэффициентов, а именно, достаточно рассматривать приведенное уравнение

$$F(y_1, \ldots, y_k) = 1 + \sum_{i=1}^{k} y_1^{\alpha_{i1}} \ldots y_k^{\alpha_{ik}} + \sum_{i=1}^{m} x_i y_1^{\alpha_{k+i,1}} \ldots y_k^{\alpha_{k+i,k}} = 0, \tag{24}$$

где матрица $\delta = (\alpha_{ij}),\ i, j = 1, \ldots, k$ невырожденная. Дискриминантное множество ∇_A этого уравнения допускает параметризацию Горна-Капранова по формуле $x = (Bs)^B$. Здесь B – соответствующий приведению (24) правый аннулятор ранга $m = \#A - k - 1$ для матрицы из вектор столбцов $\alpha \in A$, дополненной строкой из единиц. Пусть $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ – первые $k+1$ строк матрицы B.

В следующей теореме предъявляется параметризация особых точек для (24).

Теорема 20. *Вектор-функция $y(s) = (y_1(s), \ldots y_k(s))$ с координатами*

$$y_j(s) = \prod_{\nu=1}^{k} \left(\frac{\langle \mathbf{b}_\nu, s \rangle}{\langle \mathbf{b}_0, s \rangle}\right)^{\chi_{j\nu}}, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{25}$$

где $\chi_{j\nu}$ – (j, ν)-ый элемент матрицы δ^{-1}, удовлетворяет системе

$$F(y) = \frac{\partial F}{\partial y_1} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0,$$

т.е. параметризует набор особых точек гиперповерхности $F(y) = 0$.

Для иллюстрации Теоремы рассмотрим приведенное уравнение

$$F(y_1, y_2) = 1 + y_1 + y_2 + x_1 y_1^3 y_2 + x_2 y_1^6 y_2^3 = 0. \tag{26}$$

Заметим, что оно является приведением уравнения (22). Для него матрица A следующая:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В качестве правого аннулятора ранга 2 для A выберем матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t,$$

записанную в транспонированном виде. Участвующая в формулировке Теоремы 20 матрица δ – единичная. Поэтому сингулярные точки гиперповерхности $F(y) = 0$ параметризуются вектор-функцией $y(s) = (y_1(s), y_2(s))$:

$$y_1(s) = \frac{-3-6s}{3+8s}, \quad y_2(s) = \frac{-1-3s}{3+8s},$$

где $s = s_2/s_1$ – аффинная координата в $\mathbb{CP}_1$. Особая точка $y\left(-\frac{1}{4}\right)$ – не морсовская (в ней гессиан $\det \partial^2 F/\partial y_i \partial y_j$ равен нулю), остальные особые точки $y(s)$ – морсовские.

Здесь важно отметить, что с помощью переменной s параметризуется в виде отображения $x = \Psi(s)$ приведенное A-дискриминантное множество уравнения (26). В данном примере это множество является рациональной кривой с единственной особой каспидальной точкой $x = \Psi(-\frac{1}{4})$. Этот пример показывает, что типы особых точек $y(s)$ общих алгебраических гиперповерхностей можно ранжировать с помощью стратов A-дискриминантного множества.

Разумеется, как и в случае $k = 1$, в гладких точках A-дискриминантного множества ∇_A полученная формула (25) для особых точек переписывается в терминах коэффициентов x_i уравнения (24). А именно, заменяя в (25) s на $x \odot \mathrm{grad}\Delta_A$, где Δ_A – A-дискриминант, мы получим многомерное обобщение формулы (23).

В § 4.2 рассматриваются особые точки общих 0-мерных алгебраических поверхностей, задаваемых системой n полиномов от n переменных. Для таких систем известна параметризация их дискриминантных множеств[37], которая позволяет параметризовать кратные решения указанных систем (Теорема 23).

[37] Антипова И.А., Цих А.К. Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n переменных// Изв. РАН. Сер. Матем. 2012. Т. 76, № 5, С. 29 – 56.

Основные результаты

1. Найдена новая формула решения общего алгебраического уравнения в виде ветвящегося интеграла с широкой областью сходимости.

2. Описана монодромия общей алгебраической функции в окрестности области сходимости представляющего ее гипергеометрического ряда Меллина. Построен новый, так называемый *логарифмический* метод аналитического продолжения алгебраических функций.

3. Исследованы сингулярные страты каспидального типа для классического дискриминантного множества.

4. Доказано, что мономиальными преобразованиями сингулярные страты каспидального типа переводятся в A-дискриминантные множества. Тем самым, обнаружена иерархия между сингулярными стратами семейства всех A-дискриминантных множеств.

5. Исследована структура граней многогранника Ньютона для классического дискриминанта. Для дискриминанта уравнений степени $4, 5, 6$ найдены факторизации его срезок на гиперграни.

6. Получены явные формулы для особых точек общих алгебраических гиперповерхностей.

Исследования по теме диссертации были поддержаны как индивидуальными грантами автора (гранты Президента РФ МК-2539.2008.1, РФФИ 14-01-31265 мол_а, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности), так и коллективными (гранты Президента РФ НШ-1212.2003.1, НШ-2427.2008.1, грант Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор №14.Y26.31.0006) и т.д.).

Соавторство. Из статьи, написанной совместно с И.А. Антиповой, в диссертацию вошли две теоремы (Теорема 11 и Теорема 12), при этом Теорема 11 доказана соискателем лично, а Теорема 12 получена в неразрывном соавторстве. Что касается совместной статьи с А.К. Цихом, в диссертацию включены Теоремы 17-19. При этом составляющая основной результат третьей главы – Теорема 17 получена лично соискателем, а Теоремы 18 и 19 доказаны в неразрывном соавторстве. Из статьи, написанной совместно с А.К. Цихом и А.В. Щуплевым, в диссертацию включены лишь результаты, принадлежащие автору.

Автор глубоко признателен своему научному консультанту А.К. Циху за постановку ряда задач и гипотез.

Основные работы автора по теме диссертации

1. Михалкин, Е.Н. Некоторые аспекты преобразования Чирнгауза/ Е.Н. Михалкин// Вестник КрасГУ. Физ.-мат. науки. — 2004. — Вып. 1. — С. 86–92.

2. Михалкин, Е.Н. Решение триномиальных алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций/ Е.Н. Михалкин// Вестник КрасГУ. Физ.-мат. науки. — 2005. — Вып. 1 — С. 136–139.

3. Михалкин, Е.Н. О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций/ Е.Н. Михалкин// Сиб. матем. журн. 2006. — Т. 47, № 2. — С. 365–371.

4. Михалкин, Е.Н. О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов по контуру/ Е.Н. Михалкин// Вестник КрасГУ. Физ.-мат. науки. — 2006. — Вып. 1, — С. 98–101.

5. Михалкин, Е.Н. О решении уравнения пятой степени/ Е.Н. Михалкин// Изв. вузов. Математика. 2009. — № 6. — С. 20–30.

6. Михалкин, Е.Н. О разрезах, примыкающих к дискриминантному множеству алгебраического уравнения/ Е.Н. Михалкин// Научные ведомости БелГУ. Серия: Матем. Физика. — 2010. — № 5(76), вып. 18. — С. 119–126.

7. Михалкин, Е.Н. Некоторые формулы для решений триномиальных и тетраномиальных алгебраических уравнений/ Е.Н. Михалкин// Журн. СФУ. Матем. и физика. — 2012. — Т. 5, № 2. — С. 230–238.

8. Аналитические продолжения общей алгебраической функции с помощью рядов Пюизо/ И.А. Антипова, Е.Н. Михалкин// Тр. МИАН. — 2012. — Т. 279. — С. 9–19.

9. Михалкин, Е.Н. Сингулярные страты каспидального типа для классического дискриминанта/ Е.Н. Михалкин, А.К. Цих// Мат. сб. — 2015.— Т. 206, № 2. – С. 119–148.

10. Михалкин, Е.Н. О монодромии общей алгебраической функции/ Е.Н. Михалкин// Сиб. матем. журн. — 2015. — Т. 56, № 2. —С. 409–419.

11. Mikhalkin E.N. On the structure of the classical discriminant/ E.N. Mikhalkin, A.K. Tsikh// Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. — 2015. — Т. 8. — Вып. 4. — С. 435–446.

12. Mikhalkin, E.N. Amoebas of cuspidal strata for classical discriminant/ E.N. Mikhalkin, A.V. Shchuplev, A.K. Tsikh// В кн. «Complex Analysis and Geometry». — Springer: Japan. — 2015. — V. 144. — P. 257–272.